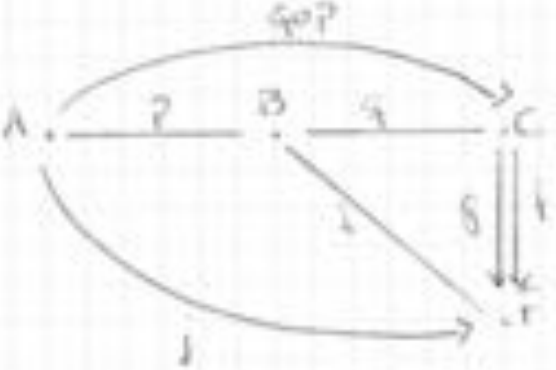
Álgebra Universal e Categorias (1)

Exercícios - Folha 10

E1. Considere a categoria $\mathbf{C}$ definida pelo diagrama seguinte



Indique, caso exista:

(a) Um monomorfismo de $\mathbf{C}$

Para cada $X \in Obj(\mathbf{C})$, id_X é um monomorfismo de $\mathbf{C}$.
O morfismo p é também um exemplo de um monomorfismo de $\mathbf{C}$. De facto, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $r, s : X \to A$, tem-se

$$p \circ r = p \circ s \Rightarrow r = id_A = s$$

(b) Um morfismo de $\mathbf{C}$ que não seja um epimorfismo.

O morfismo q não é um epimorfismo, pois
$g \circ q = f \circ q$ e $g \neq f$.

(c) Um bimorfismo de $\mathbf{C}$.

O morfismo j é exemplo de um bimorfismo de $\mathbf{C}$, pois é simultaneamente um monomorfismo e um epimorfismo. Para quaisquer morfismos
$r, s : X \to A$

$$j \circ r = j \circ s \Rightarrow r = id_A = s$$

logo j é um monomorfismo.
Para quaisquer $r, s : F \to Y$, tem-se $r = s = id_Y$.
Logo, para quaisquer $\mathbf{C}$-morfismos $r, s : F \to Y$,

Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 10

67.(c) tem-se

$$r \circ j = s \circ j \Rightarrow r = id_F = s.$$

logo j é um epimorfismo

Para qualquer $X \in Obj(C)$, id_X é um monomorfismo e um epimorfismo, logo id_X é um bimorfismo

67.(d) Tem isomorfismo de C.

Para cada $X \in Obj(C)$, id_X é um isomorfismo de C.

[A categoria C não tem outros isomorfismos (um morfismo $f: X \to Y$ diz-se um isomorfismo se existe um C-morfismo $f': Y \to X$ tal que $f \circ f' = id_Y$ e $f' \circ f = id_X$. Note-se que, para quaisquer $X, Y \in Obj(C)$, se existe um morfismo de X em Y, não existe um morfismo de Y em X]

68. Considere o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[rrr, "i"] \arrow[dr, "e"] \arrow[ddd, "k"'] & & & \cdot \arrow[dl, "m"'] \arrow[ddd, "j"] \\
& \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r"'] & \cdot \arrow[d, "q"] & \\
& \cdot \arrow[r, "s"] \arrow[dl, "w"'] & \cdot \arrow[dr, "n"] & \\
\cdot \arrow[rrr, "l"'] & & & \cdot
\end{tikzcd}$$

Sabendo que os quatro trapézios deste diagrama são comutativos, mostre que:

(a) Se o quadrado mais pequeno é comutativo, então o quadrado maior, também é comutativo.

Admitindo que os quatro trapézios são comutativos, tem-se

① $m \circ i = p \circ e$, ② $n \circ s = l \circ w$, ③ $w \circ r \circ e = k$, ④ $n \circ q \circ m = j$.

Considerando que o quadrado mais pequeno é comutativo,

tem-se $q \circ p = s \circ r$

Álgebra Universal e Categorias

Exercícios. Folha 10

67 (a) Assim,

$$l\circ k \overset{(2)}{=} (m\circ s\circ u)\circ k = m\circ s\circ(u\circ k)$$
$$\overset{(3)}{=} m\circ s\circ(r\circ e) = m\circ(s\circ r)\circ e$$
$$\overset{(5)}{=} m\circ(q\circ p)\circ e = m\circ q\circ(p\circ e)$$
$$\overset{(1)}{=} m\circ q\circ(n\circ i) = (m\circ q\circ n)\circ i$$
$$\overset{(4)}{=} j\circ i$$

logo o quadrado maior também é comutativo.

67 (b) Se e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e o quadrado maior é comutativo, então o quadrado pequeno também é comutativo.

Admitamos que e é um epimorfismo, m é um monomorfismo e que o quadrado maior é comutativo.

Se o quadrado maior é comutativo, então $j\circ i = l\circ k$.

logo $(m\circ q\circ n)\circ i = (m\circ s\circ u)\circ k$.

Como

$$(m\circ q\circ n)\circ i = (m\circ s\circ u)\circ k$$

$\Rightarrow m\circ(q\circ n\circ i) = m\circ(s\circ u\circ k)$ (associatividade de $\circ$)

$\Rightarrow q\circ n\circ i = s\circ u\circ k$ (m é monomorfismo)

$\Rightarrow q\circ p\circ e = s\circ r\circ e$ (por (1) e (3))

$\Rightarrow q\circ p = s\circ r$ (e é epimorfismo)

conclui-se que o quadrado mais pequeno é comutativo.

Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 10

69. Sejam $\mathbf{C}$ uma categoria e $f: A \to B$, $g: B \to C$ morfismos em $\mathbf{C}$. Mostre que:

(a) Se f e g são invertíveis à esquerda (respetiv/, direita), então $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetiv/, direita).

Admitamos que f e g são invertíveis à esquerda. Então existem $\mathbf{C}$-morfismos $f': B \to A$ e $g': C \to B$ tais que $f' \circ f = id_A$ e $g' \circ g = id_B$.
Logo $f' \circ g': C \to A$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e

$$\begin{aligned}(f' \circ g') \circ (g \circ f) &= f' \circ (g' \circ g) \circ f && \text{(associatividade de } \circ) \\ &= f' \circ id_B \circ f && (g' \text{ inverso esquerdo de } g) \\ &= f' \circ f && (id_B \circ f = f) \\ &= id_A && (f' \text{ é inverso esquerdo de } f).\end{aligned}$$

Logo $f' \circ g'$ é inverso esquerdo de $g \circ f$.

69.(b) Se $g \circ f$ é invertível à esquerda (respetiv/, direita) então f é invertível à esquerda (respetiv/, direita).

Admitamos que $g \circ f: A \to C$ é invertível à esquerda.
Então existe um $\mathbf{C}$-morfismo $h: C \to A$ tal que $h \circ (g \circ f) = id_A$.
Então $h \circ g: B \to A$ é um $\mathbf{C}$-morfismo e
$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = id_A$.

Logo f é invertível à esquerda ($h \circ g$ é um inverso esquerdo de f).

Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 10

10. Sejam C uma categoria e $f: A \to B$ um morfismo em C. Mostre que:

(a) Se f é invertível à esquerda, então f é um monomorfismo.

Admitamos que f é invertível à esquerda. Então existe um C-morfismo $f': B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$.
Pretende-se provar que, para quaisquer C-morfismos $i, j: C \to A$,

$$f \circ i = f \circ j \Rightarrow i = j.$$

De facto, para quaisquer C-morfismos $i, j: C \to A$,

$$\begin{aligned} f \circ i = f \circ j &\Rightarrow f' \circ (f \circ i) = f' \circ (f \circ j) \\ &\Rightarrow (f' \circ f) \circ i = (f' \circ f) \circ j \\ &\Rightarrow id_A \circ i = id_A \circ j \\ &\Rightarrow i = j. \end{aligned}$$

Logo f é um monomorfismo.

11. Sejam C uma categoria e $f: A \to B$ e $g: B \to C$ morfismos em C. Mostre que se $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita, então g é um monomorfismo.

Admitamos que $g \circ f$ é um monomorfismo e f é invertível à direita.

Como $g \circ f$ é monomorfismo, então, para quaisquer C-morfismos $i, j: D \to A$,

$$(g \circ f) \circ i = (g \circ f) \circ j \Rightarrow i = j$$

Atendendo a que f é invertível à direita, existe um C-morfismo $f': B \to A$ tal que $f \circ f' = id_B$.

Pretende-se provar que g é um monomorfismo, i.e., pretende-se mostrar que, para quaisquer C-morfismos $r, s: E \to B$,

$$g \circ r = g \circ s \Rightarrow r = s.$$

De facto, para quaisquer $r, s: E \to B$, tem-se

$$\begin{aligned} g \circ r = g \circ s &\Rightarrow g \circ id_B \circ r = g \circ id_B \circ s \\ &\Rightarrow g \circ (f \circ f') \circ r = g \circ (f \circ f') \circ s \\ &\Rightarrow (g \circ f) \circ (f' \circ r) = (g \circ f) \circ (f' \circ s) \\ &\Rightarrow f' \circ r = f' \circ s \\ &\Rightarrow f \circ f' \circ r = f \circ f' \circ s \\ &\Rightarrow id_B \circ r = id_B \circ s \\ &\Rightarrow r = s \end{aligned}$$

Logo g é um monomorfismo.

73. Mostre que as seguintes condições sobre uma categoria são equivalentes:

(I_1) Todo o morfismo em C é invertível à esquerda.

(I_2) Todo o morfismo em C é invertível à direita.

(I_3) Todo o morfismo em C é invertível.

$(I_1) \Rightarrow (I_2)$

Admitamos que todo o morfismo em C é invertível à esquerda.

Seja $f: A \to B$ um morfismo em C. Pretende-se provar que f é invertível à direita.

Por hipótese, f é invertível à esquerda. Logo existe um C-morfismo $f': B \to A$ tal que $f' \circ f = id_A$. (1)

Como f' é um morfismo de C, então f' é invertível à esquerda. Logo existe um C-morfismo $f'': A \to B$ tal que $f'' \circ f' = id_B$. (2) Então de (1) e (2), vem que

$$f'' \circ (f' \circ f) = f'',$$

donde

$$(f'' \circ f') \circ f = f''$$

e, portanto,

$$id_B \circ f = f''$$

i.e.

$$f = f''.$$

Logo $f \circ f' = f'' \circ f' = id_B$.

Assim, f é invertível à direita.

$(I_2) \Rightarrow (I_1)$. Segue por dualidade de $(I_1) \Rightarrow (I_2)$.

$(I_2) \Rightarrow (I_3)$

Admitamos que todo o C-morfismo é invertível à direita.
Seja $f: A \to B$ um C-morfismo. Então f é invertível à direita. Como $(I_2) \Rightarrow (I_1)$, f também é invertível à esquerda. Logo f é invertível.

$(I_3) \Rightarrow (I_2)$

Admitamos que f é invertível. Então f é invertível à esquerda e à direita. Logo tem-se (I_2).

16. Mostre que se C_1 e C_2 são duas categorias com objetos terminais (iniciais), então $C_1 \times C_2$ também tem objetos terminais (iniciais).

Sejam T_1 um objeto terminal da categoria C_1 e T_2 um objeto terminal da categoria C_2.
É simples verificar que (T_1, T_2) é um objeto terminal da categoria $C_1 \times C_2$.
Como T_1 é um objeto de C_1 e T_2 é um objeto de C_2, então (T_1, T_2) é um objeto de $C_1 \times C_2$.
Seja (X, Y) um objeto de $C_1 \times C_2$.
Como X é um objeto de C_1 e T_1 é terminal em C_1, então existe um, e um só, C_1-morfismo $f: X \to T_1$.
Dado que Y é um objeto de C_2 e T_2 é um objeto terminal de C_2, existe um, e um só, C_2 morfismo $g: Y \to T_2$.
Logo (f, g) é um $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2).
Admitindo que (f', g') é um $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2) segue que $(f', g') = (f, g)$.
De facto, se (f', g') é um $C_1 \times C_2$-morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2), então:

- f' é um C_1-morfismo de X em T_1; logo $f = f'$, pois f, f' são morfismos de X em T_1 e, como T_1 é terminal, existe um único morfismo de X em T_1;
- g' é um C_2-morfismo de Y em T_2 e, portanto

$g = g'$ (pois T_2 é um objeto terminal de C_2)

Assim, para todo o objeto (X, Y) de $C_1 \times C_2$, existe um e um só morfismo de (X, Y) em (T_1, T_2). Logo (T_1, T_2) é um objeto terminal de $C_1 \times C_2$.

17. Mostre que se uma categoria tem objeto zero, então todo o objeto inicial (terminal) é objeto zero. Conclua que a categoria Set não tem objeto zero.

Admitamos que C é uma categoria com objeto zero; seja 0 esse objeto. Então 0 é um objeto inicial e um objeto terminal.
Seja I um objeto inicial da categoria C.
Como 0 e I são objetos iniciais, tem-se $I \cong 0$. Atendendo a que 0 é terminal e I é isomorfo a 0, segue que I é objeto terminal.
Assim, I é um objeto inicial e terminal. Portanto, I é objeto zero.

Na categoria Set, o conjunto vazio é um objeto inicial e não é objeto terminal; logo $\emptyset$ é objeto inicial e não é objeto zero. Então, considerando o que foi provado anteriormente, conclui-se que a categoria Set não tem objeto zero.

70. Seja C uma categoria com objeto inicial I e com objeto terminal T. Mostre que se $f: T \to I$ é um morfismo em C, então f é um isomorfismo.

Admitamos que $f: T \to I$ é um morfismo em C.
Como I é um objeto inicial e T é um objeto de C, existe um e um só morfismo de I em T; seja $f': I \to T$ esse morfismo.
Então $f' \circ f: T \to T$ é um morfismo de C. Como T é terminal, existe um e um só morfismo de T em T; dado que $f' \circ f$ e id_T são morfismos de T em T, tem-se, então, $f' \circ f = id_T$.
Por outro lado, como I é objeto inicial, existe um e um só morfismo de I em I. Então, como $f \circ f'$ e id_I são morfismos de I em I, segue que $f \circ f' = id_I$.
Dado que $f' \circ f = id_T$ e $f \circ f' = id_I$, conclui-se que f é invertível à direita e à esquerda e, portanto, f é um isomorfismo.

Como T é terminal e $I \cong T$, então I é terminal.
Dado que I é inicial e terminal, então I é objeto zero.
De modo análogo conclui-se que T é objeto zero.