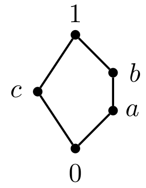
Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2019/2020

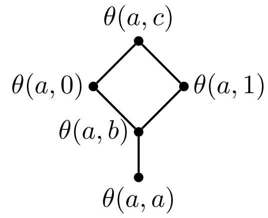
Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 8

51. Considere o reticulado $\mathcal{N}_5 = (N_5; \wedge, \vee)$ representado pelo diagrama de Hasse seguinte



(a) Mostre que o reticulado das congruências de $\mathcal{N}_5$ pode ser representado pelo diagrama de Hasse



(b) A álgebra $\mathcal{N}_5$ é congruente-modular? Justifique.

(c) Justifique que $\mathcal{N}_5$ é uma álgebra diretamente indecomponível e subdiretamente irredutível.

52. Mostre que toda a cadeia é um reticulado diretamente indecomponível.

53. Represente a cadeia de 3 elementos como um produto subdireto de álgebras subdiretamente irredutíveis.

54. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta \in \mathrm{Con}(\mathcal{A})$. Mostre que a álgebra $\mathcal{A}/\theta$ é simples se e só se θ é maximal em $\mathrm{Con}(\mathcal{A})$.

55. Mostre que, para cada operador $O \in \{H, S\}$, $IO = OI$.

$[SI = IS]$

Pretende-se provar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $SI(\mathbf{K}) = IS(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Comecemos por mostrar que $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ) tal que $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(K)$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Pretendemos mostrar que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Admitamos, sem perda de generalidade, que $A \cap C = \emptyset$ (se $A \cap C \neq \emptyset$, considera-se uma álgebra $\mathcal{C}' = (C'; G)$ isomorfa a $\mathcal{C}$ e tal que $C' \cap A = \emptyset$). Consideremos $D = A \cup (C \setminus B)$ e a aplicação $\delta : C \to D$ defnida por

$$\delta(c) = \begin{cases} \alpha(c) & \text{se } c \in B \\ c & \text{se } c \in C \setminus B \end{cases}$$

A aplicação δ é uma bijeção. Seja $\mathcal{D} = (D; (f^{\mathcal{D}})_{f \in O})$ a álgebra de tipo (O, τ) onde, para cada cada símbolo $f \in O_n$, $f^{\mathcal{D}} : D^n \to D$ é a função definida por

$$f^{\mathcal{D}}(d_1, \ldots, d_n) = \delta(f^{\mathcal{C}}(\delta^{-1}(d_1), \ldots, \delta^{-1}(d_n)).$$

A aplicação δ é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Além disso, a álgebra $\alpha(\mathcal{B})$ é uma subálgebra de $\mathcal{D}$. Assim, uma vez que $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, $\alpha(\mathcal{B}) \leq \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cong \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$, concluímos que $\mathcal{A} \in SI(\mathbf{K})$. Logo, $IS(\mathbf{K}) \subseteq SI(\mathbf{K})$.

Mostremos agora que $SI(\mathbf{K}) \subseteq IS(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in \mathbf{I}(K)$. Uma vez que $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \alpha(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Atendendo a que $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo, $\alpha^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ é também um isomorfismo. Como $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $\mathcal{B}$, $\alpha^{-1}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{C}$. Então, como $\alpha(\alpha^{-1}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$, tem-se $\mathcal{A} \in IS(\mathbf{K})$.

Desta forma, provámos que $SI = IS$.

$[HI = IH]$

Seja $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in H(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in H(K)$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum epimorfismo $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, então $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Uma vez que $id_C(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, segue que $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(id_C(\mathcal{C}))$. Assim, considerando que $id_C : C \to C$ é um isomorfismo de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$, tem-se $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K}))$. Logo $IH(\mathbf{K}) \subseteq HI(\mathbf{K})$.

Mostremos agora que $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in HI(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in I(\mathbf{K})$ e algum epimorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in I(K)$, então $\mathcal{B} = \delta(\mathcal{C})$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e algum isomorfismo $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. Assim, $\mathcal{A} = \alpha(\delta(\mathcal{C})) = (\alpha \circ \delta)(\mathcal{C})$. Como $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$ e $\alpha \circ \delta$ é um homomorfismo, tem-se $\mathcal{A} \in H(\mathbf{K})$. Como $id_A(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A} = id_A((\alpha \circ \delta)(\mathcal{C}))$. Então, considerando que $id_A : A \to A$ é um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$, conclui-se que $\mathcal{A} \in IH(\mathbf{K}))$. Logo $HI(\mathbf{K}) \subseteq IH(\mathbf{K})$.

56. Mostre que os operadores S, I, H e IP são idempotentes.

$[S^2 = S]$

Pretendemos provar que $S^2 = S$, ou seja, pretende-se mostrar que, para toda a classe de álgebras $\mathbf{K}$, $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.
Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $S(\mathbf{K}) \subseteq S(S(\mathbf{K})) = SS(\mathbf{K})$.
Resta provar que $SS(\mathbf{K}) \subseteq S(\mathbf{K})$. Seja $\mathcal{A} \in SS(\mathbf{K})$. Então $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, para alguma álgebra $\mathcal{B} \in S(\mathbf{K})$. Como $B \in S(\mathbf{K})$, tem-se $B \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Por conseguinte, $\mathcal{A} \leq \mathcal{C}$, para alguma álgebra $\mathcal{C} \in \mathbf{K}$. Assim, $\mathcal{A} \in S(\mathbf{K})$.
Desta forma, provámos que $SS(\mathbf{K}) = S(\mathbf{K})$.

$[(IP)^2 = IP]$

Pretendemos mostrar que, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}$, $IPIP(\mathbf{K}) = IP(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Uma vez que, para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$, vem que $IP(\mathbf{K}) \subseteq IPIP(\mathbf{K})$.

Resta mostrar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$. Considerando que $PI \leq IP$, tem-se $IPIP \leq IIPP$. Então, como I é idempotente, segue que $IPIP \leq IPP$. Assim, para provar que $IPIP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$, basta mostrar que $IPP(\mathbf{K}) \subseteq IP(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K}$ uma classe de álgebras. Se $\mathcal{A} \in IPP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} = \alpha(\mathcal{B})$ para alguma álgebra $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$ e algum isomorfismo $\alpha : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. Como $\mathcal{B} \in PP(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \mathcal{C}_i$ onde, para todo $i \in I$, $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$. Considerando que $\mathcal{C}_i \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{C}_i = \prod_{j \in J} D_{(i,j)}$ onde, para todo $i \in I$ e $j \in J$, $\mathcal{D}_{(i,j)} \in \mathbf{K}$. Assim,

$$\mathcal{B} = \prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J} \mathcal{D}_{(i,j)} \Big).$$

A correspondência

$$\delta : \prod_{k \in I \times J} D_k \to \prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J} D_{(i,j)} \Big)$$

definida por

$$(\delta(d)(i))(j) = d((i,j))$$

é um isomorfismo de $\mathcal{D}$ em $\prod_{i \in I} \Big(\prod_{j \in J} \mathcal{D}_{(i,j)} \Big)$.

Assim, $\mathcal{A} = (\alpha \circ \delta)(\prod_{k \in I \times J} \mathcal{D})$. Como α e δ são isomorfismos, $\alpha \circ \delta$ é um isomorfismo. Então, como $\prod_{k \in I \times J} \mathcal{D}_k \in P(\mathbf{K})$, tem-se $\mathcal{A} \in IP(\mathbf{K})$.

Logo, $IPP \leq IP$. Portanto, $IPIP \leq IP$.

57. Mostre que HS, HIP e SIP são operadores de fecho em classes de álgebras do mesmo tipo.

Mostremos que HIP é um operador de fecho. Pretendemos mostrar que, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$:

(1) $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;

(2) $(HIP)^2(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$;

(3) $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 \Rightarrow HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2)$.

Prova de (1): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}'$, tem-se $\mathbf{K}' \subseteq O(\mathbf{K}')$. Logo, para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se $\mathbf{K}_1 \subseteq P(\mathbf{K}_1)$, $P(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_1)$ e $IP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$. Assim, $\mathbf{K}_1 \subseteq HIP(\mathbf{K}_1)$.

Prova de (2): Para qualquer classe de álgebras $\mathbf{K}_1$, tem-se

$$HIPHIP(\mathbf{K}_1) \overset{(i)}{\subseteq} HIHPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(ii)}{=} HHIPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(iii)}{=} HIPIP(\mathbf{K}_1) \overset{(iv)}{=} HIP(\mathbf{K}_1).$$

(i) $PH \leq HP$; (ii) $HI = IH$; (iii) $H^2 = H$; (iv) $(IP)^2 = IP$.

Prova de (3): Para qualquer operador $O \in \{S, H, I, P, P_s\}$ e para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}$ e $\mathbf{K}'$,

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}' \Rightarrow O(\mathbf{K}) \subseteq O(\mathbf{K}').$$

Assim, para quaisquer classes de álgebras $\mathbf{K}_1$ e $\mathbf{K}_2$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2 & \Rightarrow & P(\mathbf{K}_1) \subseteq P(\mathbf{K}_2) \\ & \Rightarrow & IP(\mathbf{K}_1) \subseteq IP(\mathbf{K}_2) \\ & \Rightarrow & HIP(\mathbf{K}_1) \subseteq HIP(\mathbf{K}_2). \end{array}$$

De (1), (2) e (3), conclui-se que HIP é um operador de fecho.

58. Mostre que $SH \neq HS$, $PS \neq SP$, $PH \neq HP$.

$[SH \neq HS]$

Como $SH \leq HS$, temos de provar que $HS \nleq SH$. Sendo assim, tem de se provar que existe uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ tal que $HS(\mathbf{K}) \nsubseteq SH(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K} = \{Q\}$ com $Q = (\mathbb{Q}; +^Q, \cdot^Q, -^Q, 0^Q, 1^Q)$, onde $+^Q$, $\cdot^Q$, $-^Q$ são as operações usuais em $\mathbb{Q}$, $0^Q = 0$ e $1^Q = 1$. Se $\mathcal{B}$ é uma álgebra homomorfa de Q, então $\mathcal{B}$ é uma álgebra isomorfa a Q ou é uma álgebra trivial. Assim,

$$H(\{Q\}) = I(\{Q\}) \cup \{\mathcal{B} = (B; F) \,|\, \mathcal{B} \text{ é uma álgebra do mesmo tipo da álgebra } Q \text{ e } |B| = 1\}.$$

Consideremos as álgebras

$\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}; +^{\mathcal{Z}}, \cdot^{\mathcal{Z}}, -^{\mathcal{Z}}, 0^{\mathcal{Z}}, 1^{\mathcal{Z}})$, onde $+^{\mathcal{Z}}$, $\cdot^{\mathcal{Z}}$, $-^{\mathcal{Z}}$ são as operações usuais em $\mathbb{Z}$, $0^{\mathcal{Z}} = 0$ e $1^{\mathcal{Z}} = 1$

e

$\mathcal{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2; +^{\mathcal{Z}_2}, \cdot^{\mathcal{Z}_2}, -^{\mathcal{Z}_2}, 0^{\mathcal{Z}_2}, 1^{\mathcal{Z}_2})$, onde $+^{\mathcal{Z}_2}$, $\cdot^{\mathcal{Z}_2}$, $-^{\mathcal{Z}_2}$ são as operações usuais em $\mathbb{Z}_2$, $0^{\mathcal{Z}_2} = \overline{0}$ e $1^{\mathcal{Z}_2} = \overline{1}$.

Uma vez que $\mathcal{Z} \in S(\{Q\})$ e $\mathcal{Z}_2 \in H(\{\mathcal{Z}\})$, tem-se $\mathcal{Z}_2 \in HS(\{Q\})$. No entanto, $\mathcal{Z}_2 \notin SH(\{Q\})$ (se $\mathcal{C} \in SH(\{Q\})$), então $\mathcal{C}$ é uma álgebra trivial ou é uma álgebra infinita).

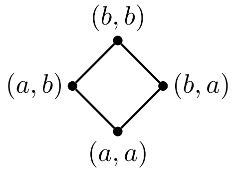
Logo $HS(\mathbf{K}) \nsubseteq SH(\mathbf{K})$.

$[PS \neq SP]$

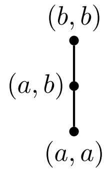
Uma vez que $PS \leq SP$, tem de se provar que $SP \nleq PS$, ou seja, é necessário mostrar que existe uma classe de álgebras $\mathbf{K}$ tal que $SP(\mathbf{K}) \nsubseteq PS(\mathbf{K})$.

Seja $\mathbf{K} = \{\mathbf{2}\}$ onde $\mathbf{2} = (\{a, b\}; \wedge, \vee)$ é o reticulado representado por 

O reticulado $R_1 = \mathbf{2} \times \mathbf{2}$ a seguir representado



é um elemento de $P(\mathbf{K})$. Assim, o reticulado R_2 representado por



é um elemento de $SP(\mathbf{K})$.

O reticulado R_2 não é um elemento de $PS(\mathbf{K})$. De facto, se $R' = (R'; \wedge^{R'}, \vee^{R'})$ é um elemento de $S(\mathbf{K})$, então $|R'| \in \{1, 2\}$. Logo, para todo $R'' = (R''; \wedge^{R''}, \vee^{R''}) \in PS(\mathbf{K})$, tem-se $|R''| = 2^{|I|}$, para algum conjunto I.

Logo $SP(\mathbf{K}) \nsubseteq PS(\mathbf{K})$.

59. Mostre que, se $\mathbf{G}$ é a classe dos grupos abelianos, então $HS(\mathbf{G}) = SH(\mathbf{G})$.

Todo o sugbrupo de um grupo abeliano é um grupo abeliano e todo o grupo é um subgrupo de si mesmo. Assim, $S(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Todo o grupo abeliano é imagem epimorfa de si mesmo e toda a imagem epimorfa de um grupo abeliano é um grupo abeliano. Logo $H(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$.

Portanto,
$$HS(\mathbf{G}) = H(S(\mathbf{G})) = H(\mathbf{G}) = \mathbf{G} = S(\mathbf{G}) = (S(H(\mathbf{G})) = SH(\mathbf{G}).$$

60. Sejam $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, ..., $\mathcal{A}_n$ álgebras do mesmo tipo. Prove que $V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n) = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

Sejam $V_1 = V(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n)$ e $V_2 = V(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

Por definição, V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$. Então, como $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n \in V_1$ e V_1 é fechada para a formação de produtos diretos, tem-se $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n \in V_1$. Mas V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n\}$, pelo que $V_2 \subseteq V_1$.

Por outro lado, V_2 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \times \mathcal{A}_n\}$. Então, como V_2 é fechada para a formação de imagens homomorfas vem que, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $p_i(\mathcal{A}_2 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_i \in V_2$. Como $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\} \subseteq V_2$ e V_1 é a menor variedade que contém $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}$, conclui-se que $V_1 \subseteq V_2$.

Logo $V_1 = V_2$.