1. (12 pontos) Considere a fortuna de um jogador ao longo de n jogos mutuamente independentes, partindo de uma fortuna inicial $S_0 = 0$. O ganho em cada passo (jogo) é uma v.a. com f.m.p.

$$X : \begin{cases} -3 & -1 & 2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{cases}$$

Represente a fortuna do jogador ao fim de n passos por S_n, ou seja, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

(a) Apresente o código R de uma trajectória deste processo, partindo de S_0 até S_{100}.

```
s <- cumsum( sample(c(-3,-1,2), 100, replace=T, prob=c(.1,.5,.4) )
plot( 0:100, c(0,s), type="b", xlab="passo", ylab="fortuna")
```

(b) Determine a transformada de Laplace (TL) da v.a. X (*explique*).

Pela definição de TL de uma v.a discreta X, com suporte $\{x_1, x_2, x_3\} = \{-3, -1, 2\}$, temos, para $t \in \mathbb{R}$,

$$L_X(t) = E(e^{-tX}) = \sum_{i=1}^{3} P(X = x_i)\, e^{-t\,x_i} = \tfrac{1}{10}\, e^{-(-3)t} + \tfrac{5}{10}\, e^{-(-1)t} + \tfrac{4}{10}\, e^{-2t} = \tfrac{1}{10}(e^{3t} + 5\, e^{t} + 4\, e^{-2t})$$

(c) Calcule o valor médio (μ) e a variância (σ^2) de X à custa da TL (*explique e mostre os cálculos*).

Aplica-se a seguinte fórmula para calcular os momentos a partir da TL: $E(X^n) = (-1)^n L^{(n)}(0)$.
Neste caso, temos $L'(t) = \frac{1}{10}(3\, e^{3t} + 5\, e^{t} - 8\, e^{-2t})$, donde $\mu = E(X) = -L'(0) = -\frac{3+5-8}{10} = 0$ e $L''(t) = \frac{1}{10}(9\, e^{3t} + 5\, e^{t} + 16\, e^{-2t})$, donde $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) = L''(0) = \frac{9+5+16}{10} = 3$

(d) Calcule ainda o coeficiente de assimetria de X à custa da TL (*mostre os cálculos*). Comente o resultado.

Temos $L'''(t) = \frac{1}{10}(27\, e^{3t} + 5\, e^{t} - 32\, e^{-2t})$, donde $E(X^3) = -L'''(t) = -\frac{27+5-32}{10} = 0$.
Então $\beta_1 = \frac{1}{\sigma^3}\, E((X-\mu)^3) = \frac{1}{\sigma^3}\, E(X^3) = 0$.
Note-se que X não é uma v.a. simétrica, mas tem coeficiente de assimetria $\beta_1 = 0$. Conclui-se que "$\beta_1 = 0$ não implica que X seja simétrica".

(e) Calcule uma aproximação para $P(S_{50} \geq 10)$,

(i) por simulação, com 10^6 réplicas (*mostre o código e resultado*)

```
r <- 1e6
x50 <- matrix( sample(c(-3,-1,2), 50*r, rep=T, prob=c(.1,.5,.4)), nr=50 )
s50 <- colSums(x50)
sum( s50 >= 10 )/r
```

Resultado: 0.219988

(ii) recorrendo ao Teorema Limite Central

Seja $S_{50} = X_1 + \ldots + X_{50}$. Temos que $X_1, \ldots, X_{50}$ são i.i.d. com X, com valor médio $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 3$; e $n = 50$ é suficientemente grande para aplicação do TLC pois X é pouco assimética. Aplica-se o TLC com correcção de continuidade 0.5 (de facto, confirma-se que a aproximação à normal é boa através do gráfico da tabela de frequências de s50 da alínea anterior, sobrepondo a densidade de $Y \frown N(0, \sqrt{150})$; e constata-se que o suporte de S_{50} inclui os valores inteiros consecutivos de -40 a 40, o que justifica a correcção de 0.5 no TLC para a probabilidade pedida): $P(S_{50} \geq 10) \simeq P(Y \geq 9.5) = 0.2189714$, conforme `pnorm(9.5,0,sqrt(150),lower=F)`

2. (8 pontos) Em cada dia, as chegadas de clientes a uma loja de conveniência, aberta das 00:00 às 08:00, ocorrem de acordo com um processo de Poisson à taxa de λ por hora ($\lambda > 0$). Represente o nº de chegadas até ao instante t (*horas*) por $N(t)$, o instante de chegada do 1º cliente por T_1, o intervalo de tempo entre os instantes de chegada do $(i-1)$-ésimo e i-ésimo clientes por T_i ($i = 2, 3, ...$).

2.(a) No caso particular $\lambda = 6$,

(i) determine a probabilidade de num dia chegarem pelo menos 50 clientes

A loja está aberta 8 horas por dia ($t = 8$), pelo que se pretende calcular $P(N(8) \geq 50)$. Como $N(8) \frown Poisson(8\lambda)$ e $\lambda = 6$, então $P(N(8) \geq 50) = 0.4054044$, conforme resulta da execução de `ppois(49,48,lower=F)`

(ii) calcule a probabilidade de não chegarem clientes num período de t horas após a abertura da loja

Pretende-se calcular $P(N(t) = 0)$, para $0 < t \leq 8$. Como neste caso $N(t) \frown Poisson(6t)$, então $P(N(t) = 0) = e^{-6t}$.

(iii) deduza a f.d. de T_1, usando a alínea anterior (*explique o raciocínio*)

O instante da 1ª chegada ocorre depois de t se e só se no intervalo $]0, t]$ não chegarem clientes. Logo, $P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-6t}$. Conclui-se então que a f.d. de T_1 é dada por $F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - e^{-6t}$, para $t > 0$. Constata-se assim que $T_1 \frown Exp(6)$.

2.(b) Suponha agora que λ é desconhecido.

Registou-se o número de clientes por dia, ao longo de 250 dias em que a loja esteve aberta (supõe-se que os nºs de clientes diários em diversos dias distintos são v.a. mutuamente independentes). Explique como pode estimar o valor de λ, a partir de um resultado teórico conhecido (*diga qual*) e aplique ao caso em que a soma daqueles 250 números registados foi 10258.

Seja X_i o nº de clientes que chega no i-ésimo destes 250 dias ($i = 1, 2, 3, \ldots, 250$). Estas são v.a. i.i.d. (de acordo com o enunciado) com $X \frown Poisson(8\lambda)$. Pela LGN, sabemos que $\overline{X}$ converge em probabilidade para $\mu = E(X) = 8\lambda$, pelo que a média amostral $\overline{X}$ estima bem este valor médio 8λ, desde que o nº de parcelas seja grande. No caso presente o nº de parcelas é 250 (grande), donde se estima que $8\lambda \simeq \overline{x} = \frac{10258}{250} = 41.032$, ou seja, a estimativa para λ é portanto $\hat{\lambda} = \frac{41.032}{8} = 5.129$

2.(c) Através da TL de $T \frown Exp(\lambda)$, determine a lei de probabilidade de λT. Qual a conclusão a tirar a respeito do parâmetro $\delta = \frac{1}{\lambda}$ na família de distribuições $Exp(\lambda)$, ou seja, $Exp(1/\delta)$?

Sendo L_T a TL de uma v.a. T, temos a fórmula genérica $L_{bT}(t) = L_T(bt)$. No caso particular $T \frown Exp(\lambda)$ temos $L_T(t) = \frac{\lambda}{\lambda+t}$, para $t > -\lambda$, donde $L_{\lambda T}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda t}, \lambda t > -\lambda$, ou seja, $L_{\lambda T}(t) = \frac{1}{1+t}$, para $t > -1$. Como esta é a TL de uma v.a. $Exp(1)$ e a TL identifica a distribuição da v.a., conclui-se que $\lambda T \frown Exp(1)$. O mesmo é dizer que $\frac{T}{1/\lambda} \frown Exp(1)$, ou seja, que $\frac{T}{\delta} \frown Exp(1)$, com $\delta = \frac{1}{\lambda}$. Portanto, a distribuição de $\frac{T}{\delta}$ não depende de δ, donde se conclui que δ é um parâmetro de escala relativamente à família de distribuições $Exp(1/\delta)$.