



Nome

Número

**As respostas aos grupos I a V são dadas na folha do enunciado.
Nas perguntas de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 0,75 valores
e cada resposta errada desconta 0,25 valores.**

I

[2 valores] Considere o conjunto $X = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1 \vee x = 2\}$.

- a) Apresente, caso existam, o supremo, o máximo, o ínfimo e o mínimo de X .
- b) Determine o interior, a aderência, o derivado e a fronteira de X .

II

[3 valores] Considere a sucessão de termo geral $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

V F

- a) $\frac{40}{21}$ é termo da sucessão $(a_n)_n$. ☐ ☐
- b) $(a_n)_n$ é uma sucessão monótona crescente. ☐ ☐
- c) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$. ☐ ☐
- d) $(a_n)_n$ é uma sucessão divergente. ☐ ☐

III

[3 valores] Em cada uma das questões seguintes, indique se a afirmação é verdadeira ou falsa.

V F

- a) Se uma sucessão é convergente, qualquer sua subsucessão é convergente. ☐ ☐
- b) Seja $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ uma série convergente. A série gerada por qualquer subsucessão de $(a_n)_n$ é uma série convergente. ☐ ☐
- c) Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = 1$ então $\sum_{n \in \mathbb{N}} (1 + a_n) = 2$. ☐ ☐
- d) Se f é uma função bijetiva e contínua então f^{-1} é também contínua. ☐ ☐

IV

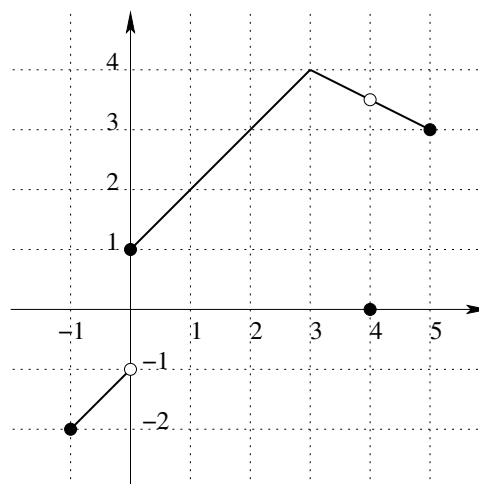
[4 valores] Em cada uma das alíneas seguintes apresente um exemplo ou justifique porque não existe um tal exemplo.

- a) Um subconjunto não vazio de \mathbb{R} , finito e aberto. b) Um conjunto X tal que $X' = \{1\}$.
- c) Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Q}$. d) Uma função $f : [0, 1] \rightarrow]0, 1]$ bijetiva.

V

[4 valores] Considere a função $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa.

- a) Indique o contradomínio de f .
- b) Indique os pontos de mínimo local de f , mencionando os respectivos mínimos locais.
- c) Indique os pontos onde f é descontínua.



- d) Escolha o maior valor positivo para δ de modo a que seja verdadeira a implicação seguinte:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < 2.$$

VI

[4 valores] Todas as respostas deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{x \cos x}$.

Questão 2. Estude a natureza da série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$.