1. (4 pontos) Numa investigação criminal (numa grande cidade), avaliou-se em 65% a probabilidade de um certo suspeito ser culpado do crime em causa. Surge entretanto uma nova prova que revela que o culpado é louro. Sabe-se ainda que na população daquela cidade, 18% dos indivíduos são louros. Face a esta nova informação, e dado que o dito suspeito é louro, qual a probabilidade *a posteriori* de que ele seja o culpado? (*explique a resolução com clareza*)

   Ou "o suspeito é o criminoso" (acontecimento C) ou não é, e temos $P(C) = 0.65$ e $P(\overline{C}) = 0.35$. Se é o criminoso, então é louro, i.e., $P(L \,|\, C) = 1$. Se não é o criminoso, então é um dos indivíduos da cidade (todos menos o criminoso), donde $P(L \,|\, \overline{C}) \simeq 0.18$ (visto que a cidade é grande).

   Aplicando o teorema de Bayes, com a partição $\{C, \overline{C}\}$, obtém-se

$$P(C \,|\, L) = \frac{P(L \,|\, C)\; P(C)}{P(L \,|\, C)\; P(C) + P(L \,|\, \overline{C})\; P(\overline{C})} = \frac{1 \times 0.65}{1 \times 0.65 + 0.18 \times 0.35} = 0.911641$$

   A probabilidade *a priori* do suspeito ser o criminoso era 0.65, e *a posteriori* passou a ser 0.917

2. (8 pontos) Considere um totoloto de 7 extracções sucessivas – ao acaso e sem reposição – de uma urna com bolas numeradas de 1 a 49. O espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ correspondente é tal que

$$\Omega = \{\, (a_1, a_2, \ldots, a_7) : \quad a_1, a_2, \ldots, a_7 \in B, \quad a_i \neq a_j \quad \forall_{i,j \in \{1,2,\ldots,7\}} \} \text{ , sendo } B = \{1, 2, \ldots, 49\}$$

$$\#\Omega = 49 \times 48 \times \ldots \times 43 = 432\,938\,943\,360$$

$$\begin{aligned} P :\ & \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & A \mapsto \frac{\#A}{\#\Omega} \end{aligned}$$

(extrações ao acaso $\Longrightarrow$ elementos de Ω são equiprováveis $\Longrightarrow$ regra de Laplace)

   No dia 6 de Janeiro de 1996, no habitual sorteio deste totoloto, a 7ª bola extraída foi, inacreditavelmente, a bola com o número 0 (`zero`). Supondo que a urna, no início do sorteio, tinha 50 bolas (numeradas de 0 a 49), qual a probabilidade da bola 0 não sair no sorteio? E de sair na 7ª extracção? (*apresente a resolução usando explicitamente a regra da multiplicação*)

   Seja A_i o acontecimento "a bola 0 não sai na $i-$ésima extracção". Note-se que

$$P(A_{k+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \tfrac{50-k-1}{50-k} \ ,$$

   visto que se já saíram (nas primeiras k extracções, $k \geq 1$) k bolas com nº $\neq 0$, então restam $50-k$ bolas na urna, das quais $50-k-1$ têm nº $\neq 0$. Analogamente, $P(\overline{A}_{k+1} \mid A_1 \cap \ldots \cap A_k) = \frac{1}{50-k}$.

   Então, pela regra da multiplicação, a probabilidade da bola nº 0 não sair no sorteio é dada por

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_7) = P(A_1)\; P(A_2 \mid A_1)\; P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots\; P(A_7 \mid A_1 \cap A_2 \cap\ \ldots\ \cap A_6) =$$
$$= \frac{49}{50}\,\frac{48}{49}\,\frac{47}{48}\,\frac{46}{47}\,\frac{45}{46}\,\frac{44}{45}\,\frac{43}{44} = \frac{43}{50} = 0.86$$

   Analogamente, $\quad P(A_1 \cap \ldots \cap A_6 \cap \overline{A}_7) = \frac{49}{50}\,\frac{48}{49}\,\frac{47}{48}\,\frac{46}{47}\,\frac{45}{46}\,\frac{44}{45}\,\frac{1}{44} = \frac{1}{50} = 0.02$

3. (8 pontos) Em cada passo, um jogador, que parte de uma fortuna inicial nula, $S_0 = 0$, lança uma moeda (equilibrada) e ganha ou perde 1€ consoante sai cara ou coroa. Considere um jogo com n passos e represente as sucessivas fortunas (acumuladas) ao longo do jogo por $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

(a) Escreva o código R da simulação de um único jogo (fortuna do jogador ao longo de $n = 50$ passos) e do gráfico da correspondente trajectória.

SIMULAÇÃO:
```
t <- cumsum( sample(c(-1,1), 50, replace=T) )
```
GRÁFICO:
```
plot( 0:50, c(0,t) , type="l", xlab="passo", ylab="fortuna")
```

(b) Estime, a partir de 10^5 simulações (apresentando o código R da simulação e o resultado final),

(i) a probabilidade de ao fim de $n = 50$ passos, o jogador ter uma fortuna superior a 9 ou inferior a -9, i.e., $P(|S_{50}| > 9)$.

CÓDIGO:
```
a <- 0; r <- 10^6
for (i in 1:r) a[i] <- sum( sample(c(-1,1), 50, replace=T) )
sum( abs(a)> 9 )/r
```

RESULTADO: `0.202395` (*ou outro valor próximo deste*)

(ii) a probabilidade p_j de ser j o nº de vezes que o jogador tem fortuna nula ao longo de $n = 15$ passos.

CÓDIGO:
```
zeros <- 0
for (i in 1:r)
   { traj <- cumsum(sample(c(-1,1),15,T)) ; zeros[i] <- sum(traj==0) }
table(zeros)/r
```

RESULTADOS (*arredonde a 3 casas decimais*):

j	0	1	2	3	4	5	6	7
$\widehat{p_j}$	0.208	0.211	0.194	0.162	0.117	0.070	0.031	0.007