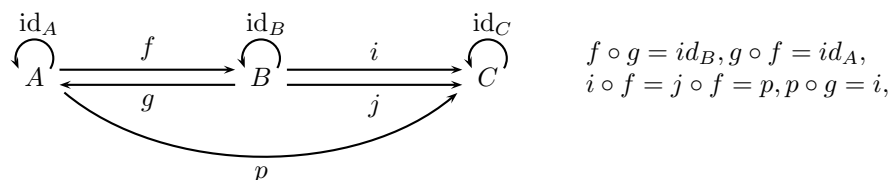


Álgebra Universal e Categorias

2º teste (30 de maio de 2018) duração: 2 horas

1. (a) Seja \mathbf{C} a categoria definida pelo diagrama seguinte



Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: A categoria \mathbf{C}/\mathbf{C} tem dois objetos iniciais.

Os objetos da categoria \mathbf{C}/\mathbf{C} são todos os morfismos com codomínio \mathbf{C} . Assim, os objetos de \mathbf{C}/\mathbf{C} são p, i, j, id_C . Dados r, s objetos de \mathbf{C}/\mathbf{C} , um morfismo de r em s é um triplo (r, t, s) de \mathbf{C} -morfismos tais que $s \circ^{\mathbf{C}} t = r$. Então:

- $\text{hom}(id_C, p) = \emptyset$;
- $\text{hom}(i, j) = \emptyset$;
- $\text{hom}(j, i) = \emptyset$;
- $\text{hom}(p, i) = \{(p, f, i)\}$;
- $\text{hom}(p, j) = \{(p, f, j)\}$;
- $\text{hom}(p, id_C) = \{(p, p, id_C)\}$;
- $\text{hom}(p, p) = \{(p, id_A, p)\}$.

Logo a categoria \mathbf{C}/\mathbf{C} tem um único objeto inicial, que é o objeto p .

Assim, a afirmação é falsa.

- (b) **Seja \mathbf{C} a categoria definida na alínea anterior. Dê um exemplo, ou justifique que não existe um exemplo, de uma subcategoria \mathbf{D} de \mathbf{C} tal que \mathbf{D} seja uma subcategoria plena de \mathbf{C} , $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$ e A e B não sejam isomorfos em \mathbf{D} .**

Uma categoria $\mathbf{D} = (\text{Obj}(\mathbf{D}), \text{hom}_{\mathbf{D}}, id^{\mathbf{D}}, \circ^{\mathbf{D}})$ diz-se uma subcategoria da categoria $\mathbf{C} = (\text{Obj}(\mathbf{C}), \text{hom}_{\mathbf{C}}, id^{\mathbf{C}}, \circ^{\mathbf{C}})$ se:

- $\text{Obj}(\mathbf{D}) \subseteq \text{Obj}(\mathbf{C})$;
- todo o morfismo de \mathbf{D} é um morfismo de \mathbf{C} ;
- para qualquer $X \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, o morfismo $id_X^{\mathbf{D}}$ de \mathbf{D} é o mesmo que o morfismo $id_X^{\mathbf{C}}$ de \mathbf{C} ;
- para quaisquer \mathbf{D} -morfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow D$, o morfismo $g \circ^{\mathbf{D}} f$ de \mathbf{D} é mesmo que o morfismo $g \circ^{\mathbf{C}} f$ de \mathbf{C} .

Uma subcategoria \mathbf{D} de \mathbf{C} diz-se uma subcategoria plena se, para quaisquer $X, Y \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, $\text{hom}_{\mathbf{D}}(X, Y) = \text{hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.

Assim, se \mathbf{D} é uma subcategoria plena de \mathbf{C} tal que $A, B \in \text{Obj}(\mathbf{D})$, segue que f, g, id_A, id_B são morfismos de \mathbf{D} . Então, como $f \circ g = id_B$ e $g \circ f = id_A$, conclui-se que f é um isomorfismo de \mathbf{D} e, portanto, A e B são isomorfos em \mathbf{D} .

Logo a afirmação é falsa.

- (c) **Diga, justificando, se é verdadeira a seguinte afirmação: Na categoria \mathbf{Set} , todo o morfismo que tem por domínio um objeto terminal é um monomorfismo.**

Na categoria \mathbf{Set} , os objetos terminais são os conjuntos singulares e os monomorfismos são as funções injetivas. Claramente, toda a função que tem por domínio um conjunto singular é uma função injetiva.

Assim, a afirmação é verdadeira.

2. Sejam \mathbf{C} uma categoria, A, B, C objetos de \mathbf{C} e $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ monomorfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $i : A \rightarrow B$ e $j : B \rightarrow A$ são morfismos de \mathbf{C} tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, então i e j são invertíveis e $i^{-1} = j$.

Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ monomorfismos de \mathbf{C} e $i : A \rightarrow B$ e $j : B \rightarrow A$ morfismos de \mathbf{C} tais que $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$.

Pretende-se mostrar que $i^{-1} = j$, ou seja, que $i \circ j = id_B$ e $j \circ i = id_A$.

Ora, de $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$, segue que $(g \circ i) \circ j = g$, pelo que $g \circ (i \circ j) = g \circ id_B$ e, uma vez que g é monomorfismo, tem-se $i \circ j = id_B$.

De forma análoga, prova-se que $j \circ i = id_A$. De facto, de $f \circ j = g$ e $g \circ i = f$ também se tem $f \circ (j \circ i) = f$, donde $f \circ (j \circ i) = f \circ id_A$ e, como f é monomorfismo, vem que $j \circ i = id_A$.

3. Sejam \mathbf{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathbf{C} tais que, para qualquer objeto X de \mathbf{C} , $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \rightarrow C$ e $i_B : B \rightarrow C$ são morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , então i_A é invertível à esquerda.

Sejam \mathbf{C} uma categoria e A, B e C objetos de \mathbf{C} tais que, para qualquer objeto X de \mathbf{C} , $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$ e $i_A : A \rightarrow C$ e $i_B : B \rightarrow C$ são morfismos de \mathbf{C} .

Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B . Então, para qualquer objeto X de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $f' : A \rightarrow X$ e $g' : B \rightarrow X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow X$ tal que $u \circ i_A = f'$ e $u \circ i_B = g'$.

Queremos mostrar que existe $i' : C \rightarrow A$ tal que $i' \circ i_A = id_A$.

Uma vez que, para todo $X \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, $\text{hom}(B, X) \neq \emptyset$ e $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, existe $g' \in \text{hom}(B, A)$. Como $A \in \text{Obj}(\mathbf{C})$, então, por definição de categoria, $id_A : A \rightarrow A$ é um morfismo de \mathbf{C} . Logo, atendendo a que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow A$ tal que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & \nearrow id_A & \uparrow u & \nwarrow g' & \\ A & \xrightarrow{i_A} & C & \xleftarrow{i_B} & B \end{array}$$

i.e., tal que $u \circ i_A = id_A$ e $u \circ i_B = g'$. Como $u \circ i_A = id_A$, então i_A é invertível à esquerda.

4. Na categoria **Set**, considere os conjuntos $\{0\}$, \mathbb{N}_0 , \mathbb{Z} e as funções i , f e g definidas por

$$\begin{array}{lll} i : \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0 & f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} & g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z} \\ 0 \mapsto 0 & x \mapsto 0 & x \mapsto 3x \end{array}$$

Mostre que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de f e g .

Pretende-se mostrar que $(\{0\}, i)$ é um igualizador de f e g , isto é, que:

- (i) $f \circ i = g \circ i$;
- (ii) para qualquer $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e para qualquer \mathbf{C} -morfismo $k : K \rightarrow A$ tal que $f \circ k = g \circ k$, existe um, e um só, morfismo $u : K \rightarrow \{0\}$ tal que $i \circ u = k$.

$$\begin{array}{ccccc} \{0\} & \xrightarrow{i} & A & \xrightarrow[f]{g} & B \\ \uparrow u & & \nearrow k & & \\ & & K & & \end{array}$$

(i) A prova desta condição é imediata, pois as funções $f \circ i$ e $g \circ i$ têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in A$,

$$(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(0) = 0 = 3 \times 0 = 3 \times i(x) = g(i(x)).$$

(ii) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $k : K \rightarrow A$ um \mathbf{C} -morfismo tais que $f \circ k = g \circ k$. Então, para qualquer $x \in K$,

$$(f \circ k)(x) = (g \circ k)(x),$$

donde resulta

$$0 = 3k(x)$$

e, portanto, $k(x) = 0$, para todo $x \in K$. Assim, k é a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

Pretende-se mostrar que existe uma, e uma só, função $u : K \rightarrow \{0\}$ tal que $i \circ u = k$. Claramente, existe uma única função de K em $\{0\}$ - a função definida por

$$\begin{array}{ccc} k : K & \rightarrow & \{0\} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

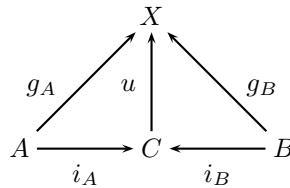
As funções $i \circ u$ e k têm o mesmo domínio e codomínio e, para qualquer $x \in K$, $(i \circ u)(x) = 0 = k(x)$. Logo $i \circ u = k$.

5. Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e $f_A : I \rightarrow A$ e $f_B : I \rightarrow B$ morfismos de \mathbf{C} . Mostre que se $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B , então $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) .

Sejam \mathbf{C} uma categoria com objeto inicial I e morfismos $f_A : I \rightarrow A$ e $f_B : I \rightarrow B$.

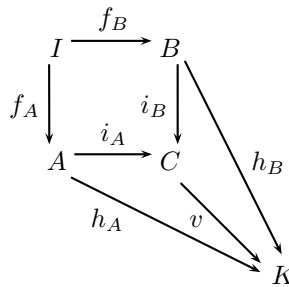
Admitamos que $(C, (i_A, i_B))$ é um coproduto de A e B . Então,

- (1) $i_A \in \text{hom}(A, C)$ e $i_B \in \text{hom}(B, C)$,
- (2) para qualquer objeto X de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $g_A : A \rightarrow X$ e $g_B : B \rightarrow X$, existe um, e um só, morfismo $u : C \rightarrow X$ tal que $u \circ i_A = g_A$ e $u \circ i_B = g_B$.



Pretende-se mostrar que $(C, (i_A, i_B))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) , ou seja, que

- (3) $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$;
- (4) para qualquer objeto K de \mathbf{C} e para quaisquer \mathbf{C} -morfismos $h_A : A \rightarrow K$ e $h_B : B \rightarrow K$ tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$, existe um, e um só, morfismo $v : C \rightarrow K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.



(3) Uma vez que $i_A \circ f_A, i_B \circ f_B \in \text{hom}(I, C)$ e $|\text{hom}(I, C)| = 1$, pois I é um objeto inicial, então $i_A \circ f_A = i_B \circ f_B$.

(4) Sejam $K \in \text{Obj}(\mathbf{C})$ e $h_A : A \rightarrow K$ e $h_B : B \rightarrow K$ morfismos de \mathbf{C} tais que $h_A \circ f_A = h_B \circ f_B$. Como $h_A \in \text{hom}(A, K)$ e $h_B \in \text{hom}(B, K)$, então, por (2), existe um, e um só, morfismo, $v : C \rightarrow K$ tal que $v \circ i_A = h_A$ e $v \circ i_B = h_B$.

Logo $(C, (i_A : A \rightarrow C, i_B : B \rightarrow C))$ é uma soma amalgamada de (f_A, f_B) .

6. Seja $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ o funtor que a cada conjunto A associa o produto cartesiano $A \times A$ e que a cada função $f : A \rightarrow B$ associa a função

$$\begin{aligned} F(f) : F(A) &\rightarrow F(B) \\ (x, y) &\mapsto (f(x), f(y)) \end{aligned}$$

Diga, justificando, se:

- (a) O funtor F é fiel.

O funtor F é fiel se, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \rightarrow B$,

$$F(f) = F(g) \Rightarrow f = g.$$

Uma vez que, para quaisquer **Set**-morfismos $f, g : A \rightarrow B$,

$$\begin{aligned} F(f) = F(g) &\Rightarrow \forall x, y \in A, F(f)(x, y) = F(g)(x, y) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in A, (f(x), f(y)) = (g(x), g(y)) \\ &\Rightarrow \forall x, y \in A, f(x) = g(x) \text{ e } f(y) = g(y) \\ &\Rightarrow \forall x \in A, f(x) = g(x) \\ &\Rightarrow f = g \quad (\text{as funções } f \text{ e } g \text{ têm o mesmo domínio e codomínio}), \end{aligned}$$

então o funtor F é fiel.

- (b) O funtor F preserva e reflete monomorfismos.

Todo o funtor fiel reflete monomorfismos. Uma vez que F é fiel, então F reflete monomorfismos.

Na categoria **Set** os monomorfismos são as funções injetivas. Se $f : A \rightarrow B$ é um **Set**-monomorfismo, então f é uma função injetiva. Se f é uma função injetiva, então $F(f)$ também é uma função injetiva; de facto, para quaisquer $(x, y), (x', y') \in A \times A$,

$$\begin{aligned} F(f)(x, y) = F(f)(x', y') &\Rightarrow (f(x), f(y)) = (f(x'), f(y')) \\ &\Rightarrow f(x) = f(x') \text{ e } f(y) = f(y') \\ &\Rightarrow x = x' \text{ e } y = y' \\ &\Rightarrow (x, y) = (x', y'). \end{aligned}$$

Uma vez que $F(f)$ é injetiva, então $F(f)$ é um monomorfismo. Logo o funtor F preserva monomorfismos.