Universidade do Minho 2022/2023 TESTE 2 – RESOLUÇÃO

Probabilidades e Aplicações (LCC, 3º ano) 07.12.2022 às 14:00

1. (3 pontos) Considere uma v.a. $X \frown Exp(\lambda)$, i.e., com f.d. $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0$.

   (a) Explique o sentido da frase "*X não tem memória*" e interprete-a no caso de X representar uma *duração de vida*. Que outra distribuição tem esta mesma propriedade?

   Significa que satisfaz à propriedade $P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$, pª quaisquer $s > 0,\ t > 0$, ou seja, se X representar uma duração de vida (de um organismo, equipamento, etc.), então a probabilidade de sobreviver a mais de t unidades de tempo, dado que sobreviveu a s unidades de tempo, é sempre a mesma, qualquer que seja s; é a mesma que a probabilidade de sobreviver a t unidades de tempo após ter nascido [começado a funcionar]. Por outras palavras, o organismo ou equipamento não envelhece [é irrelevante quanto tempo já funcionou].
   A distribuição geométrica, $geom(p)$, tem a mesma propriedade; é a versão discreta da $Exp(\lambda)$.

   (b) Explique como pode simular uma amostra "aleatória" de 10 valores de X (por exemplo, para $\lambda = 2.72$) através de uma amostra de $Y \frown U[0,1]$, i.e., de `y = runif(10)`. Exemplifique (mostre o código `R`).

   Como esta f.d. F é uma função contínua, aplica-se a "transformação uniformizante" que estabelece que sendo $Y \frown U[0,1]$ então $F^{-1}(Y)$ tem f.d. F. Sendo assim, basta determinar a função inversa, F^{-1} e calcular os valores $F^{-1}(y)$, para cada y simulado da distribuição $U[0,1]$. No `R`, executa-se

   ```
   y = runif(10) ; x = -log(1-y)/2.72
   ```

   uma vez que a inversa de F é a solução de $y = F(x)$, ou seja, de $y = 1 - e^{-\lambda x}$, ou ainda, de $1 - y = e^{-\lambda x}$, cuja solução é dada por $-\lambda x = \log(1-y)$, i.e., $x = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$.

2. (8 pontos) Considere v.a. X e Y, independentes, com densidade (f.d.p.) dada por $f(x) = \frac{1}{2}\ I_{[-1,1]}(x)$.

   (a) Deduza a função de distribuição (f.d.) de X e esboce o seu gráfico (e confirme que obteve uma f.d.)

   Temos $X \overset{d}{=} Y \frown U[-1,1]$

   Ver dedução e gráfico nos slides 161-162, para o caso geral $U[a,b]$ (particularizando ao caso $a=-1,\ b=1$). Pode resolver-se tb por meio de áreas: para $x \in [-1,1]$, temos $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\, dx$ que é a área do rectângulo de base $[-1,x]$ e altura $\frac{1}{2}$, ou seja, $\frac{1}{2}(x-(-1)) = \frac{1}{2}(x+1)$. Para $x < 0$ temos $F(x) = \int_{-1}^{x} 0\ dx = 0$ (integral de função nula) e para $x > 1$ temos $F(x) = F(1) = 1$.

   (b) Apresente a f.d.p. conjunta do par (X,Y) e justifique

   $f(x,y) = \frac{1}{4}\ I_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y)$, i.e., a f.d.p. conjunta é uniforme no quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$.

   JUSTIFICAÇÃO:

   Como X e Y são independentes (ambas com densidade f), tem-se que a densidade conjunta é o produto das densidades marginais (ambas uniformes no intervalo $[-1,1]$), i.e.,

   $$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2}\ I_{[-1,1]}(x)\ \frac{1}{2}\ I_{[-1,1]}(y) = \frac{1}{4}\ I_{[-1,1]\times[-1,1]}(x,y)$$

   pelo que se conclui que (X,Y) tem lei conjunta uniforme no quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$.

(c) Calcule (*justifique os passos da resolução; apresente os cálculos e eventuais gráficos auxiliares*)

(i) $E\left(X^2+Y^2\right)$

Como X e Y são ambas $U[-1,1]$, o valor médio destas v.a. é 0 e a variância é $\frac{(1-(-1))^2}{12}=\frac{1}{3}$. Logo, $E(X^2)=E(Y^2)=\frac{1}{3}$. E como o valor médio da soma de v.a. (quaisquer) é a soma dos seus valores médios, temos então $E\left(X^2+Y^2\right)=E(X^2)+E(Y^2)=\frac{2}{3}$.

(ii) $P\left(X^2+Y^2>1\right)$

$P\left(X^2+Y^2>1\right)=1-P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)$. Mas $P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)$ é a probabilidade do par (X,Y) estar no círculo de raio 1 (centrado na origem). E como a lei do par é uniforme no quadrado $[-1,1]\times[-1,1]$, segue-se $P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)=\frac{C}{Q}$, sendo C a área do círculo e Q a área do quadrado. Logo $P\left(X^2+Y^2\leq 1\right)=\frac{\pi}{4}$, concluindo-se $P\left(X^2+Y^2>1\right)=1-\frac{\pi}{4}\simeq 0.2146$.

3. (9 pontos) (i) Identifique as leis de probabilidade das seguintes v.a. ou vectores aleatórios:

Num totoloto de 7 extracções (sem reposição) de uma urna com 50 bolas (numeradas de 1 a 50),

W = "número de bolas *múltiplas de 5* extraídas" ____ $HG(7,50,1/5)$

Em 10 lançamentos de um dado equilibrado,

X = "número de vezes que sai face 1 ou 6" ____________ $bi(10,1/3)$

Y = "número de vezes que sai a face 3" ____________ $bi(10,1/6)$

(X,Y) ________________________________ $M(10;1/3,1/6)$

(ii) Calcule as seguintes probabilidades (*apresente apenas o resultado final e o código* `R`)

$P(W<4)=$ 0.97717 `phyper(3, 10, 40, 7)`

$P(1<X<4)=$ 0.45522 `pbinom(3, 10, 1/3) - pbinom(1, 10, 1/3)`

$P(X=4,\ Y<1)=$ 0.04051 `dmultinom( c(4,0,6), prob = c(2,1,3) )`

(iii) X e Y são independentes ou não? Apresente a prova.

X e Y não são independentes. De facto, em pares (X,Y) discretos, a independência entre X e Y equivale a ter $\forall_{i,j}\ P(X=i,Y=j)=P(X=i)\ P(Y=j)$. No presente caso, basta notar que $P(X=10)=1/3^{10}>0$, $P(Y=10)=1/6^{10}>0$, mas $P(X=10,Y=10)=0$, porque é impossível ter simultaeamente 10 faces "3" e 10 faces "1 ou 6" em apenas 10 lançamentos do dado. Logo, a igualdade $P(X=i,Y=j)=P(X=i)\ P(Y=j)$ é falsa para $i=j=10$, donde se conclui que X e Y não são independentes.

(iv) Que distribuição aproxima razoavelmente bem a da v.a. W, no caso de um totoloto de 7 extracções (sem reposição) de uma urna com 500 bolas (numeradas de 1 a 500)? Justifique e comente.

É a distribuição $bi(7,1/5)$, porque a f.m.p. $HG(n,N,p)$, com n e p fixos, converge, quando $N\to\infty$, para a f.m.p. da $bi(n,p)$. Ou seja, quando o nº total de bolas, N, é grande em comparação com n (nº de bolas extraídas), é praticamente o mesmo extrair com ou sem reposição. No caso $N=500$, $n=7$ e $p=1/5$, podemos comparar as duas f.m.p., sendo 0.002212 a maior das discrepâncias:

```
max(abs(dhyper(0:7,100,400,7)-dbinom(0:7,7,1/5)))  # resultado:  0.002211969
```