Universidade do Minho
Departamento de Matemática

Lic. em Ciências da Computação
Lic. em Matemática
2019/2020

Álgebra Universal e Categorias

Exercícios - Folha 7

46. Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra e $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$. Mostre que (θ, θ^*) é um par de congruências fator em $\mathcal{A}$ se e só se $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$ e $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

   $\Rightarrow$) Seja (θ, θ^*) um par de congruências fator em $\mathcal{A}$. Então:

   (1) $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$;
   (2) $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$;
   (3) $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$.

   Pretende-se provar que:

   (i) $\theta \cap \theta^* = \triangle_A$;
   (ii) $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$.

   De (1) é imediato (i).
   De (3) segue que $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ (Teorema 2.3.14). Então, por (2), tem-se (ii).

   $\Leftarrow$) Admitamos (i) e (ii).

   De (i) é imediato (1).
   Uma vez que $\theta \circ \theta^* = \nabla_A$, tem-se $\theta^* \circ \theta \subseteq \theta \circ \theta^*$, pelo que $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$ e $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ (Teorema 2.3.14). Assim, tem-se (3). De $\theta \circ \theta^* = \theta \vee \theta^*$ e de (ii) segue (2).

47. Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo (1) onde $f^{\mathcal{A}} : \{a, b, c, d\} \to \{a, b, c, d\}$ é a operação definida por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

   (a) Determine $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$. Justifique que $(\Theta(a, b), \Theta(a, d))$ é um par de congruências fator.

   Comecemos por determinar $\Theta(a, b)$ e $\Theta(a, d)$.

   A relação $\Theta(a, b)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$.

   Se θ é uma conguência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$, então
   (i) $(a, b) \in \theta$;
   (ii) θ é reflexiva;
   (iii) θ é simétrica;
   (iv) θ é transitiva;
   (v) θ satisfaz a propriedade de substituição, i.e., para quaisquer $x, y \in A$,

$$(x, y) \in \theta \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \theta.$$

   Assim, se θ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a, b)\}$, tem-se
   (1) $(a, b) \in \theta$;
   (2) $(b, a) \in \theta$, por (1) e (ii);
   (3) $\triangle_A \subseteq \theta$;
   (4) $(f^{\mathcal{A}}(a), f^{\mathcal{A}}(b)) = (c, d) \in \theta$, $(f^{\mathcal{A}}(b), f^{\mathcal{A}}(a)) = (d, c) \in \theta$, por (1), (2) e (v);
   (5) $(f^{\mathcal{A}}(c), f^{\mathcal{A}}(d)) = (a, b) \in \theta$, $(f^{\mathcal{A}}(d), f^{\mathcal{A}}(c)) = (b, a) \in \theta$, por (4) e (v).

Então, $\triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\} \subseteq \theta$. A relação $\theta' = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$ e é a menor congruência nestas condições. Assim, $\Theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$.

De modo análogo, obtem-se $\Theta(a,d) = \triangle_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,b),(b,c)\}$.

Uma par (θ_1, θ_2) de congruências em $\mathcal{A}$ diz-se um par de congruências factor se
- $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$;
- $\theta_1 \vee \theta_2 = \nabla_A$;
- $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$.

Então, atendendo a que;
- $\Theta(a,b) \cap \Theta(a,d) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\} = \triangle_A$;
- $\Theta(a,b) \vee \Theta(a,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\} = \nabla_A$;
- $\Theta(a,b) \circ \Theta(a,d) = \Theta(a,b) \cup \Theta(a,d) \cup \{(a,c),(d,b),(c,a),(b,d)\} = \Theta(a,d) \circ \Theta(a,b)$,

conclui-se que $(\Theta(a,b), \Theta(a,d))$ é um par de congruências fator.

(b) Justifique que existem álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Dê exemplo de álgebras $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ nas condições indicadas e determine a álgebra $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Sejam $\theta_1 = \Theta(a,b)$, $\theta_2 = \Theta(a,d)$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2$. Uma vez que $\mathcal{A}$ é não trivial e $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con} \setminus \{\nabla_A\}$, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são álgebras não trivias. Como (θ_1, θ_2) é um par de congruências fator, tem-se $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ (Teorema 2.5.6).

Tem-se $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}/\theta_1 = (A/\theta_1, f^{\mathcal{A}/\theta_1})$, onde $A/\theta_1 = \{[a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_1}\}$ (pois $\theta_1 = \Theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$ e $[c]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_1} : A/\theta_1 \to A/\theta_1$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_1} = [c]_{\theta_1},$$
$$f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_1} = [a]_{\theta_1}.$$

No caso da álgebra $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}/\theta_2 = (A/\theta_2, f^{\mathcal{A}/\theta_2})$, tem-se $A/\theta_2 = \{[a]_{\theta_2}, [c]_{\theta_2}\}$ (pois $\theta_2 = \Theta(a,d) = \triangle_A \cup \{(a,d),(d,a),(c,b),(b,c)\}$ e, portanto, $[a]_{\theta_1} = [d]_{\theta_1}$ e $[c]_{\theta_1} = [b]_{\theta_1}$), e $f^{\mathcal{A}/\theta_2} : A/\theta_2 \to A/\theta_2$ é a operação definida por

$$f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2}) = [f^{\mathcal{A}}(a)]_{\theta_2} = [c]_{\theta_2},$$
$$f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_1}) = [f^{\mathcal{A}}(c)]_{\theta_2} = [a]_{\theta_2}.$$

Assim, $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = (A/\theta_1 \times A/\theta_2, f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2})$, onde

$$A/\theta_1 \times A/\theta_2 = \{([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}), ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2})\}$$

e $f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} : (A/\theta_1 \times A/\theta_2) \to (A/\theta_1 \times A/\theta_2)$ é a operação definida por

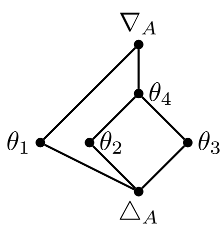
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([a]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([a]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}),$$
$$f^{\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2}([c]_{\theta_1}, [c]_{\theta_2}) = (f^{\mathcal{A}/\theta_1}([c]_{\theta_1}), f^{\mathcal{A}/\theta_2}([c]_{\theta_2})) = ([a]_{\theta_1}, [a]_{\theta_2}).$$

48. Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}}, g^{\mathcal{A}})$ a álgebra de tipo $(1,1)$ tal que $A = \{a,b,c,d\}$ e cujas operações $f^{\mathcal{A}}$ e $g^{\mathcal{A}}$ são definidas por

x	a	b	c	d
$f^{\mathcal{A}}(x)$	b	a	b	a

x	a	b	c	d
$g^{\mathcal{A}}(x)$	c	d	a	b

Sabendo que o reticulado de congruências de $\mathcal{A}$ pode ser representado por



onde $\theta_1 = \theta(a,b)$, $\theta_2 = \theta(a,c)$, $\theta_3 = \theta(b,d)$ e $\theta_4 = \triangle_A \cup \{(a,c),(c,a),(b,d),(d,b)\}$:

(a) Determine θ_1 e justifique que (θ_1, θ_4) é um par de congruências fator.

(b) Justifique que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta_1 \times \mathcal{A}/\theta_4$. Defina as operações da álgebra $\mathcal{A}/\theta_4 = (A/\theta_4; f^{\mathcal{A}/\theta_4}, g^{\mathcal{A}/\theta_4})$.

(c) Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é:

i. congruente-distributiva. ii. subdiretamente irredutível.

49. (a) Mostre que toda a álgebra finita com um número primo de elementos é diretamente indecomponível.

Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra de tipo (O, τ), onde $|A| = n$, com $n \in \mathbb{N}$ e n primo. Sejam $\mathcal{A}_1 = (A_1; G)$ e $\mathcal{A}_2 = (A_2; H)$ álgebras de tipo (O, τ) tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$. Como $\mathcal{A}$ é finita, então $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ são finitas e tem-se $|A| = |A_1 \times A_2| = |A_1| \times |A_2|$. Como $|A| = n$ e n é primo, segue que $|A_1| = 1$ ou $|A_2| = 1$; logo $\mathcal{A}_1$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}_2$ é a álgebra trivial. Portanto, a álgebra $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível.

(b) Seja $\mathcal{A} = (A; f^{\mathcal{A}})$ a álgebra tal que $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 5\}$ e $f^{\mathcal{A}}$ é a operação unária em A definida por

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in \{2,4\} \\ 2 & \text{se} \quad x \in \{1,3,5\} \end{cases}$$

i. Sejam θ_1 e θ_2 as congruências de $\mathcal{A}$ definidas por $\theta_1 = \Theta(1,2)$ e $\theta_2 = \Theta(3,5)$. Determine θ_1 e θ_2. Verifique que $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ e $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$.

A relação $\theta_1 = \Theta(1,2)$ é a menor congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,2)\}$.

Se θ é uma conguência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,2)\}$, então

(i) $(1,2) \in \theta$;

(ii) θ é reflexiva;

(iii) θ é simétrica;

(iv) θ é transitiva;

(v) θ satisfaz a propriedade de substituição, i.e., para quaisquer $x, y \in A$,

$$(x,y) \in \theta \Rightarrow (f^{\mathcal{A}}(x), f^{\mathcal{A}}(y)) \in \theta.$$

Assim, se θ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(a,b)\}$, tem-se

(1) $(1,2) \in \theta$;

(2) $(2,1) \in \theta$, por (1) e (ii);

(3) $\triangle_A \subseteq \theta$;

(4) $(f^{\mathcal{A}}(1), f^{\mathcal{A}}(2)) = (2,1) \in \theta$, $(f^{\mathcal{A}}(2), f^{\mathcal{A}}(1)) = (1,2) \in \theta$, por (1), (2) e (v).

Então $\triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\} \subseteq \theta$. A relação $\theta' = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$ é uma congruência em $\mathcal{A}$ que contém $\{(1,2)\}$ e é a menor congruência nestas condições. Assim, $\theta_1 = \Theta(a,b) = \triangle_A \cup \{(1,2),(2,1)\}$.

De modo análogo, determina-se $\theta_2 = \Theta(3,5)$ e obtem-se $\theta_2 = \Theta(3,5) = \triangle_A \cup \{(3,5),(5,3)\}$.

Claramente, tem-se $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$, pois $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A}$, $\theta_1 \neq \triangle_A$ ($(1,2) \in \theta_1$ e $(1,2) \notin \triangle_A$) e $\theta_2 \neq \triangle_A$ ($(3,5) \in \theta_2$ e $(3,5) \notin \triangle_A$). Além disso,

$$\theta_1 \cap \theta_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\} = \triangle_A.$$

ii. Justifique que se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, então $\theta = \nabla_A$ ou $\phi = \nabla_A$.

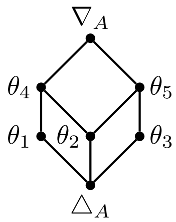
A álgebra $\mathcal{A}$ tem um número primo de elementos ($|A| = 5$). Logo, por (a), conclui-se que $\mathcal{A}$ é diretamente indecomponível. Então, se θ e ϕ são congruências de $\mathcal{A}$ tais que $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}/\theta \times \mathcal{A}/\phi$, $\mathcal{A}/\theta$ é a álgebra trivial ou $\mathcal{A}/\phi$ é a álgebra trivial. No primeiro caso, tem-se $\theta = \nabla_A$; no segundo caso tem-se $\phi = \nabla_A$.

iii. Diga, justificando, se a álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível.

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial ($|A| = 5$). Da alínea (b) i., sabe-se que existem $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tais que $\theta_1 \cap \theta_2 = \triangle_A$ e, portanto, $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ não tem elemento mínimo. Logo, $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

50. Seja $\mathcal{A} = (A; F)$ uma álgebra cujo reticulado das congruências é representado pelo diagrama de Hasse seguinte

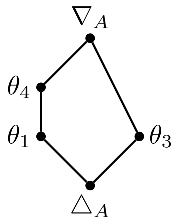


Justifique que:

(a) A álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva;

A álgebra $\mathcal{A}$ é congruente-distributiva se e só se $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ é um reticulado distributivo. Um reticulado é distributivo se e só se não tem qualquer subrrecutilado isomorfo a M_5 ou a N_5.

O reticulado

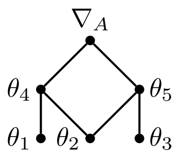


é um subrreticulado de $\mathrm{Con}\mathcal{A}$ e é isomorfo a N_5. Logo a álgebra $\mathcal{A}$ não é congruente-distributiva.

(b) A álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível;

A álgebra $\mathcal{A}$ é subdiretamente irredutível se e só se $\mathcal{A}$ é a álgebra trivial ou $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$ tem elemento mínimo.

A álgebra $\mathcal{A}$ não é trivial, pois $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\} \neq \emptyset$. Além disso, o c.p.o. $\mathrm{Con}\mathcal{A} \setminus \{\triangle_A\}$



não tem elemento mínimo. Logo, a álgebra $\mathcal{A}$ não é subdiretamente irredutível.

(c) Os reticulados $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1$ e $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3$ são isomorfos.

Pelo Teorema da Correspondência, tem-se $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1 \cong [\theta_1, \nabla_A]$ e $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3 \cong [\theta_3, \nabla_A]$. Como $[\theta_1, \nabla_A] \cong [\theta_3, \nabla_A]$ (a aplicação $\varphi : [\theta_1, \nabla_A] \to [\theta_3, \nabla_A]$, definida por $\varphi(\theta_1) = \theta_3$, $\varphi(\theta_4) = \theta_5$ e $\varphi(\nabla_A) = \nabla_A$, é um isomorfismo de c.p.o.'s), então $\mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_1 \cong \mathcal{C}on\mathcal{A}/\theta_3$.