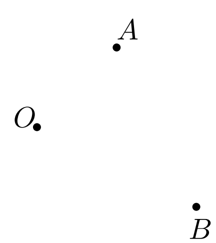
Geometria – 2010/2011

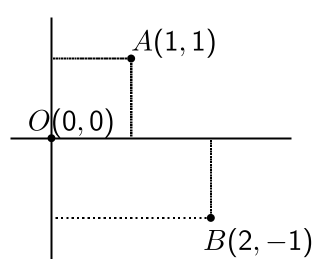
PARTE I - Conceitos básicos.

1 Introdução.

A ideia de introduzir coordenadas para aplicar de modo sistemático a álgebra aos problemas geométricos foi desenvolvida no século XVIII nos trabalhos de Descartes e Fermat. Actualmente, se imaginarmos uma folha de papel com vários pontos assinalados:



parece-nos natural escolher uma **origem** e uns **eixos** e identificar cada um desses pontos com um par de números reais (a, b) a que chamamos **coordenadas** dos pontos.



Assim, a escolha de uma origem O e de uns eixos perpendiculares determina uma aplicação bijectiva:

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}^2$$

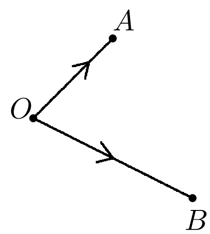
entre a folha de papel $\mathcal{A}$ (bom, uma folha infinita...) e $\mathbf{R}^2$. Os objectos geométricos (rectas, circunferências...) podem então descrever-se através de equações algébricas envolvendo as coordenadas.

Poder-se-ia definir um **espaço afim** (real, de dimensão n) simplesmente como um conjunto $\mathcal{A}$ onde os pontos podem descrever-se mediante n coordenadas, isto é, um conjunto $\mathcal{A}$ munido de uma bijecção

$$\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{R}^n.$$

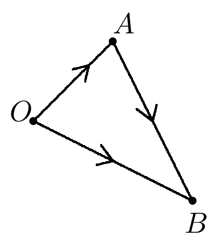
No entanto, vamos apresentar uma outra definição (aparentemente mais complicada mas matematicamente equivalente) que reforça a ideia de poder escolher diferentes origens de coordenadas (qualquer ponto de $\mathcal{A}$ poderá servir como origem de coordenadas), diferentes eixos ...

Para compreender essa outra definição, vamos esquecer as coordenadas e pensar nos movimentos. A partir de um ponto O, podemos atingir qualquer outro ponto de $\mathcal{A}$ efectuando uma translação[1]:



(1)

Obviamente, deslocar-nos de O para A e depois de A para B é o mesmo que deslocar-nos directamente de O para B:



(2)

Em resumo, considere-se a aplicação que a cada par de pontos A e B de $\mathcal{A}$ associa a translação $t_{\overrightarrow{AB}}$ que leva o ponto A ao ponto B. Tem-se

1. se fixarmos um ponto O, todo o ponto A corresponde univocamente a uma translação $t_{\overrightarrow{OA}}$;
2. dados O, A e B pontos quaisquer de $\mathcal{A}$, tem-se $t_{\overrightarrow{OA}} + t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{OB}}$.

(Note-se que o conjunto de translações de $\mathcal{A}$ é um espaço vectorial[2])

Estas duas propriedades são as escolhidas para definir matematicamente o conceito de espaço afim.

---

[1] Nos livros do ensino secundário aparece frequentemente a noção de **vector livre** $\overrightarrow{AB}$ entre A e B. Independentemente da definição "formal" ou "informal" que se proporcionar de vector livre, podem ser visualizados como translações.

[2] A composta de translações é uma translação, a composição é comutativa, associativa ...

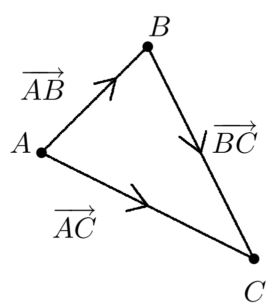
2 Espaços afins.

Definição 2.1 *Sejam $\mathcal{A}$ um conjunto não vazio e E um espaço vectorial real. Uma* **estrutura afim (real) em $\mathcal{A}$ sobre E** *é uma aplicação $\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow E$ que a cada par (A, B) de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ faz corresponder um vector de E, designado por $\overrightarrow{AB}$, verificando duas condições:*

1. *para cada $A \in \mathcal{A}$ a aplicação $\Phi_A : \mathcal{A} \longrightarrow E$ definida por $\Phi_A(M) := \overrightarrow{AM}$ é uma aplicação bijectiva;*

2. *(relação de Chasles) para todos os $A, B, C \in \mathcal{A}$ tem-se*

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



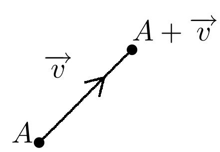
Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ munido de um estrutura afim sobre um espaço vectorial E diz-se **espaço afim associado ao espaço vectorial E** *ou* **espaço afim sobre E**.

Se o espaço vectorial E for de dimensão finita n, dizemos que o espaço afim tem **dimensão** *n. Os espaços afins de dimensão 1 dizem-se* **rectas afins**, *os espaços afins de dimensão 2 dizem-se* **planos afins**.

Os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados **pontos do espaço afim** *e são denotados, em geral, por maiúsculas. Os elementos de E são chamados* **vectores do espaço afim** *e são denotados, em geral, por minúsculas.*

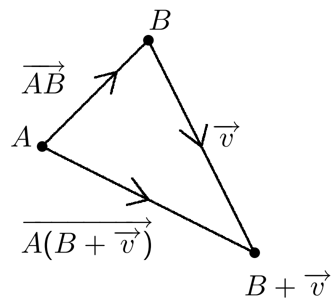
Dados um ponto A e um vector $\overrightarrow{v}$, o único ponto B que verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v}$ é designado por $A + \overrightarrow{v}$, ou seja,

$$A + \overrightarrow{v} := \Phi_A^{-1}(\overrightarrow{v}).$$

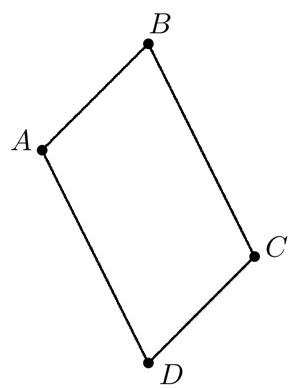


Proposição 2.2 *Propriedades elementares*
Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E. Para todos os pontos A, B, C e D de $\mathcal{A}$ e todo o vector $\overrightarrow{v}$ de E tem-se:

1. $A = B$ *se e só se* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$;
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
3. $\overrightarrow{A(B+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{v}$;



4. $\overrightarrow{(A+\overrightarrow{u})(B+\overrightarrow{v})} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})$;
5. *(regra do paralelogramo)*
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ se e só se } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

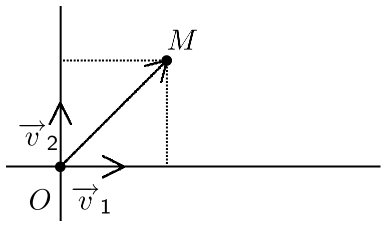


Exercício 2.3 *Prove as propriedades elementares.*

3 Referenciais e coordenadas.

Definição 3.1 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre um espaço vectorial E. Um* **referencial** *$\mathcal{R}$ em $\mathcal{A}$ é um par $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ com O um ponto de $\mathcal{A}$, chamado* **origem do referencial**, *e $\mathcal{B}$ uma base de E.*

Se $\mathcal{R}$ é um referencial em $\mathcal{A}$ e M um ponto de $\mathcal{A}$, chamamos **coordenadas** *do ponto M no referencial $\mathcal{R}$ às coordenadas do vector $\overrightarrow{OM}$ na base $\mathcal{B}$.*



$\mathcal{R} = \{O, \{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}\}$

$\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2$

$M \equiv (2, 2)_{\mathcal{R}}$

Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ são as coordenadas de um ponto M num referencial $\mathcal{R}$ escrevemos

$$M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$$

ou simplesmente, se não houver ambiguidade, $M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Usar-se-á também essas notações para as coordenadas de vectores numa dada base, assim:

$$M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$$

Notas 3.2

Seja $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ um referencial num espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão n. Tem-se que:

1. o ponto O tem coordenadas $(0, 0, \ldots, 0)$;
2. se um ponto A tem coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e um ponto B tem coordenadas $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ então, na base $\mathcal{B}$, $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$;
3. se um ponto A tem coordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e um vector $\overrightarrow{v}$ tem, na base $\mathcal{B}$, coordenadas $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ então o ponto $B = A + \overrightarrow{v}$ tem coordenadas
$$(a_1 + v_1, \ldots, a_n + v_n).$$

Repetimos, se fixarmos um referencial num espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão n,

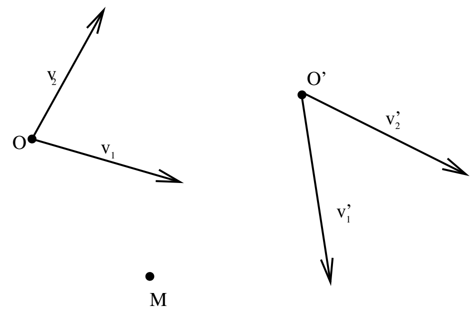
- cada ponto do espaço $\mathcal{A}$ identifica-se com n coordenadas reais;
- o vector $\overrightarrow{AB}$ que une dois pontos A e B do espaço $\mathcal{A}$ é determinado pela diferença das coordenadas de B e A.

E agora ...

o que acontece se mudarmos o referencial?

Exemplo 3.3 *Mudança de coordenadas num plano afim real.*

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$ associado a um plano vectorial E.

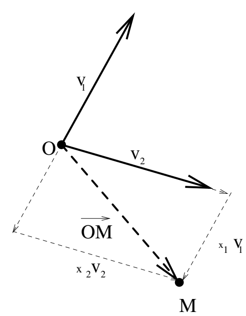


Seja M um ponto de $\mathcal{A}$ tal que

$$M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}} \qquad \text{e} \qquad M \equiv (x'_1, x'_2)_{\mathcal{R}'}$$

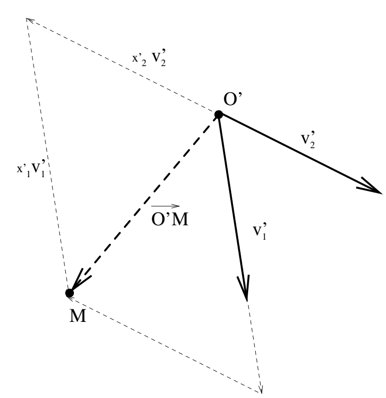
Isto é

$$\overrightarrow{OM} = x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2$$



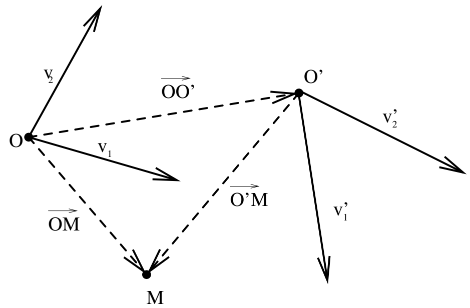
e

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1 \overrightarrow{v}'_1 + x'_2 \overrightarrow{v}'_2$$



Precisamos de obter a relação entre (x_1, x_2) e (x_1', x_2'). A observação chave é que

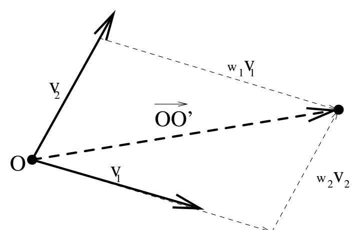
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \qquad (*)$$



Vamos supor que conseguimos expressar os elementos do referencial $\mathcal{R}'$ em função dos elementos do referencial $\mathcal{R}$, ou seja ...

- conhecemos as coordenadas de O' no referencial $\mathcal{R}$:

$$O' \equiv (\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{R}}, \qquad \text{isto é} \qquad \overrightarrow{OO'} = \omega_1 \overrightarrow{v}_1 + \omega_2 \overrightarrow{v}_2;$$



- podemos expressar os vectores da base $(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)$ em função dos vectores da base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$:

$$\left.\begin{array}{rcccl} \overrightarrow{v}'_1 & = & \alpha_{11}\overrightarrow{v}_1 & + & \alpha_{21}\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 & = & \alpha_{12}\overrightarrow{v}_1 & + & \alpha_{22}\overrightarrow{v}_2 \end{array}\right\}$$

Para simplificar, vamos usar a notação matricial:

$$(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2) = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

A partir de $(*)$ obtemos

$$(x_1' \overrightarrow{v}'_1 + x_2' \overrightarrow{v}'_2) = -(\omega_1 \overrightarrow{v}_1 + \omega_2 \overrightarrow{v}_2) + (x_1 \overrightarrow{v}_1 + x_2 \overrightarrow{v}_2) = (-\omega_1 + x_1)\overrightarrow{v}_1 + (-\omega_2 + x_2)\overrightarrow{v}_2$$

Matricialmente:

$$(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2) \begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

E usando $(**)$

$$(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

Como $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ são linearmente independentes tem-se

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_1 + x_1 \\ -\omega_2 + x_2 \end{pmatrix}$$

logo

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

Nota 3.4 *Expressão matricial usando coordenadas homogéneas*

A igualdade anterior pode também ser expressa através da equação matricial:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \omega_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \omega_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(As coordenadas $(x_1, x_2, 1)$ costumam chamar-se *coordenadas homogéneas*[3] do ponto M)

Exemplo 3.5 *Mudança de coordenadas num espaço afim tridimensional.*

Seguindo **exactamente** o mesmo raciocínio, obtemos a seguinte expressão para a mudança de coordenadas num espaço afim tridimensional[4]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Onde (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) são as coordenadas de um ponto M nos referenciais $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', \mathcal{B}'\}$, respectivamente; $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ são as coordenadas de O' no referencial $\mathcal{R}$ e as colunas da matriz (α_{ij}) são as coordenadas na base $\mathcal{B}$ dos vectores da base $\mathcal{B}'$.

[3] A importância e utilidade desta notação aparecerão mais tarde.

[4] Existe uma expressão análoga à da nota 3.4 para coordenadas "homogéneas" de pontos num espaço tridimensional.

Definição 3.6 *Orientação num espaço vectorial, orientação num espaço afim*
Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial E.

- Se $\mathcal{B} = (\overrightarrow{v}_1, \cdots, \overrightarrow{v}_n)$ e $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{v}'_1, \cdots, \overrightarrow{v}'_n)$ são duas bases de E, dizemos que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ têm a **mesma orientação** se o determinante da matriz de mudança de coordenadas é positivo. Se o determinante for negativo dizemos que têm **orientação oposta**.
- Se considerarmos uma base $\mathcal{B}$ de E, as bases com a mesma orientação de $\mathcal{B}$ dizem-se com **orientação positiva** e as restantes, com **orientação negativa**.
- Um espaço vectorial E munido de uma base fixada $\mathcal{B}$ diz-se um **espaço vectorial orientado**.
- Se $\mathcal{A}$ é um espaço afim, dizemos que dois referenciais têm a **mesma orientação** se a bases associadas aos referenciais têm a mesma orientação.
- Um espaço afim $\mathcal{A}$ munido de um referencial fixado $\mathcal{R}$ diz-se um **espaço afim orientado**.

Exemplos 3.7

1. Em $\mathbf{R}^n$, se nada for dito em contrário, considera-se como base fixada a base canónica. Assim, as bases orientadas positivamente são aquelas em que o determinante da matriz das coordenadas é positivo e as bases orientadas negativamente aquelas em que o determinante é negativo.
2. Em $\mathbf{R}^2$, uma base $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2\}$ tem *orientação positiva* se
$$\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} > 0$$
onde $\overrightarrow{v}_1 = (v_{11}, v_{21})$ e $\overrightarrow{v}_2 = (v_{12}, v_{22})$.
As bases orientadas positivamente correspondem a bases seguindo uma *rotação contrária aos ponteiros do relógio*
3. Em $\mathbf{R}^3$, uma base $\{\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$ tem *orientação positiva* se
$$\det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} > 0$$
onde $\overrightarrow{v}_1 = (v_{11}, v_{21}, v_{31})$, $\overrightarrow{v}_2 = (v_{12}, v_{22}, v_{32})$ e $\overrightarrow{v}_3 = (v_{13}, v_{23}, v_{33})$.
As bases orientadas positivamente em $\mathbf{R}^3$ obedecem *à regra do saca-rolhas*.

4 Espaços euclidianos.

Definição 4.1 *Um* **espaço euclidiano** *é um espaço afim $\mathcal{A}$ cujo espaço vectorial associado E está munido de um produto escalar.*

O produto escalar em E permitirá definir em $\mathcal{A}$ conceitos métricos, isto é, distância entre pontos, perpendicularidade ...

Recorde-se que um produto escalar num espaço vectorial real E é uma aplicação $E \times E \longrightarrow \mathbf{R}$ que a cada par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ associa um real $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ verificando certas propriedades que recordamos de seguida:

Nota 4.2 *Propriedades de um produto escalar definido em E*

Dados $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$, e $\overrightarrow{w}$ vectores de E e $\lambda \in \mathbf{R}$ tem-se:

1. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$;
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$;
3. $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{w}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) = (\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{w}$;
4. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}$;
5. $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} \geq 0$;
6. se $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, $\forall \overrightarrow{v} \in E$, então $\overrightarrow{u} = 0$.

O exemplo básico é o *produto escalar usual* ou *produto interno usual* de $\mathbf{R}^n$:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \ldots, w_n) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

Usando o produto escalar define-se a noção de **comprimento** ou **norma** de um vector $\overrightarrow{v}$ de E através de:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}}$$

As normas assim definidas costumam chamar-se **normas euclidianas** e verificam certas propriedades[5] que recordamos de seguida:

Nota 4.3 *Propriedades das normas euclidianas*

Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

1. $\|\overrightarrow{v}\| \geq 0$ e $\|\overrightarrow{v}\| = 0$ se e só se $\overrightarrow{v} = 0$;
2. $\|\lambda \overrightarrow{v}| = |\lambda| \|\overrightarrow{v}\|$;

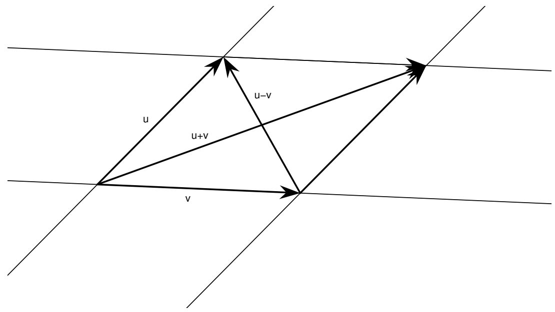
[5] Em geral, uma norma é uma aplicação $\| \ \| : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ verificando simplesmente as três primeiras propriedades que indicamos na nota 4.3. As normas euclidianas, pelo facto de serem definidas através de um produto escalar, verificam várias propriedades extra.

3. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| \leq \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|$ (*desigualdade triangular*).

4. $|\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}| \leq \|\overrightarrow{v}\| \; \|\overrightarrow{w}\|$ (*desigualdade de Cauchy-Schwarz*) e verifica-se a igualdade se e só se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são proporcionais;

5. $\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\| = \|\overrightarrow{v}\| + \|\overrightarrow{w}\|$ se e só se $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w}$ ou $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v}$, com $\lambda \geq 0$;

6. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2$(*lei do paralelogramo*).



A norma euclidiana em $\mathbf{R}^n$ induzida pelo produto escalar usual é dada por:

$$\|(v_1, v_2, \ldots, v_n)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

e diz-se a *norma euclidiana* ou *norma usual*.

Mais algumas definições a lembrar ...

- Dois vectores $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$ dizem-se **ortogonais** e escreve-se $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{w}$ se o seu produto escalar é nulo.
- Um vector $\overrightarrow{v} \in E$ diz-se **vector unitário** ou **versor** se $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.
- Uma base de E diz-se **base ortogonal** se os vectores da base são ortogonais dois a dois.
- Uma base ortogonal de E diz-se **base ortonormada** se os vectores da base são unitários.

Dada uma base ortonormada $\mathcal{B}$ de E, se $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2, \ldots, v_n)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{w} \equiv (w_1, w_2, \ldots, w_n)_{\mathcal{B}}$, tem-se:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$$

e

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Ou seja, para uma base ortonormada, o produto escalar e a norma correspondem ao produto escalar e à norma usual nas coordenadas. Por isso é interessante o seguinte teorema:

Teorema 4.4 *Para todo o espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto escalar existe uma base ortonormada.*

Definição 4.5 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano. Dados $A, B \in \mathcal{A}$ definimos a* **distância euclidiana** *entre A e B, que designamos por $d(A,B)$ ou por AB como*

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$$

Definimos ainda o **segmento** *de extremos A e B como o conjunto:*

$$\overline{AB} = \{A + t\overrightarrow{AB} \ : \ t \in [0,1]\}$$

e **medida** *do segmento $\overline{AB}$, que designamos por AB, como a distância $d(A,B)$ ou, equivalentemente, a norma $\|\overrightarrow{AB}\|$.*

Note-se que, se $\mathcal{A}$ está munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$, com $\mathcal{B}$ uma base ortonormada de E, tem-se

$$d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

onde $A \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (b_1, b_2, \ldots, b_n)_{\mathcal{R}}$.

Os referenciais $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ com $\mathcal{B}$ uma base ortonormada de E serão chamados **referenciais ortonormados** do espaço euclidiano $\mathcal{A}$.

IMPORTANTE : É possível provar (usando a propriedade 5 da nota 4.3) que um ponto C pertence ao segmento $\overline{AB}$ se e só se

$$d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$$

Nota 4.6 *Mudanças de coordenadas entre referenciais ortonormados.*
Em espaços vectoriais munidos de um produto escalar, as mudanças entre bases ortonormadas representam-se matricialmente através de **matrices ortogonais** (matrizes cuja inversa é igual à matriz transposta). Isto é, A é uma matriz de mudança de base entre duas bases ortonormais se e só se

$$AA^t = Id$$

Assim, as mudanças de coordenadas entre referenciais ortonormados possuem uma propriedade muito especial que facilita bastante as contas. Por exemplo, se $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são referenciais ortonormados de um espaço euclidiano, de modo que a expressão seguinte define a mudança de coordenadas:

$$AX' + W = X$$

então, para obter a expressão correspondente à mudança de coordenadas inversa, basta fazer

$$A^tX + (-A^tW) = X'$$

Observe-se ainda que, como $AA^t = Id$ e $\det A = \det A^{-1}$, se tem $\det A = \pm 1$.

Passamos de seguida a um problema nada trivial:

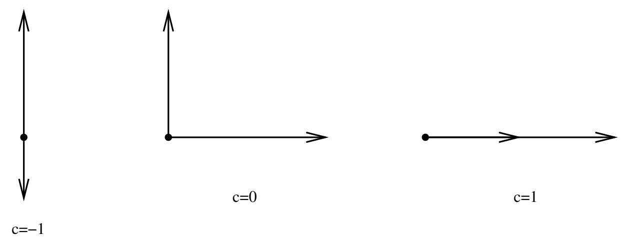
como definir matematicamente a noção de ângulo?

Definir-se-á o ângulo entre dois vectores através do produto escalar. De modo mais preciso, dados dois vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ de um plano vectorial, definir-se-á o ângulo (orientado e não orientado) por eles formado usando a quantidade:

$$c = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|}$$

Observe-se que essa quantidade verifica $-1 \leq \dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|} \leq 1$ e, de facto:

- $c = -1$ se os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são proporcionais mas *apontam* em sentidos contrários;
- $c = 1$ se os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são proporcionais e *apontam* no mesmo sentido;
- $c = 0$ se os vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são ortogonais.



Por outras palavras, esse quociente parece ser uma boa medida da *abertura* entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. De facto, a escolha de um produto escalar (para além de proporcionar uma noção de comprimento ...), permite medir a *abertura* entre vectores .

Definição 4.7 *Ângulos não orientados, cosseno de um ângulo não orientado.*
Seja E um espaço vectorial munido de um produto escalar.

- *Dizemos que dois pares (não ordenados) de vectores não nulos $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ e $\{\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}'\}$ formam o mesmo* **ângulo não orientado** *se*

$$\frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\overrightarrow{v}' \cdot \overrightarrow{u}'}{\|\overrightarrow{v}'\|\|\overrightarrow{u}'\|}$$

- *A relação anterior é uma relação de equivalência entre os pares de vectores. Cada classe de equivalência diz-se um* **ângulo não orientado***. A classe de equivalência do par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ designa-se por $\angle\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$.*

- *Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \in E$, vectores não nulos. Define-se o* **cosseno** *do ângulo (não orientado) formado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ como o real:*

$$\cos \angle\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|}$$

(Note-se que o produto escalar é simétrico, assim o quociente $\dfrac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|}$ associado ao conjunto $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ está bem definido.)

Observe-se que o cosseno definido em 4.7 é simplesmente uma aplicação que associa a um par de vectores um número real. Esta aplicação cosseno está obviamente relacionada com a função cosseno usual (função real, de variável real, periódica de período 2π ...). De facto, a partir das desigualdades

$$-1 \leq \cos \angle\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} \leq 1$$

(consequência directa da desigualdade de Cauchy-Schwarz) podemos associar a cada par de vectores $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ o único real $\theta \in [0, \pi]$ que verifica:

$$\cos \angle\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\} = \cos \theta$$

(o segundo cos é a função cosseno usual). O real θ costuma chamar-se *medida do ângulo* **não orientado** formado por $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$.

Proposição 4.8 *Propriedades*
Seja E um espaço vectorial real munido de um produto escalar.

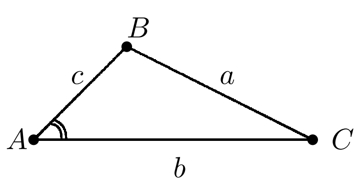
1. $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$, $\angle\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\} = \angle\{\lambda\overrightarrow{v}, \mu\overrightarrow{w}\}$.

2. *Teorema de Carnot*
   $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E, \quad \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 + 2\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$
   ou, equivalentemente,
   $\forall \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E, \quad \|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\| \cos \angle\{\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$.

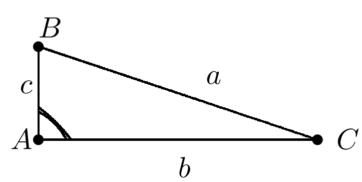
3. *Teorema de Pitágoras*
   Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in E$. Se $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ são ortogonais, tem-se
   $$\|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{w}\|^2$$

Corolário 4.9 *Teorema do cosseno*
Sejam A, B e C três pontos distintos de um espaço afim euclidiano. Verifica-se

$$d(B, C)^2 = d(A, C)^2 + d(A, B)^2 - 2d(A, B)d(A, C) \cos \angle\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$$



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$



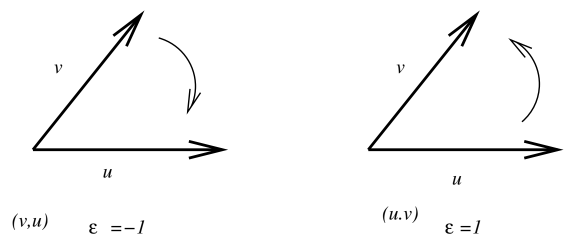
$a^2 = b^2 + c^2$

Corolário 4.10 *O Teorema de Pitágoras*
Sejam A, B e C três pontos distintos de um espaço afim euclidiano. Tem-se que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são ortogonais se e só se

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

Definição 4.11 *Ângulos orientados, cosseno e seno de um ângulo orientado.*
Seja E um plano vectorial orientado munido de um produto escalar.

- *Dizemos que dois pares de vectores linearmente independentes $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ e $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ formam o mesmo* **ângulo orientado** *se*
$$\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{\overrightarrow{u}' \cdot \overrightarrow{v}'}{\|\overrightarrow{u}'\|\|\overrightarrow{v}'\|}$$
e se $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ e $(\overrightarrow{u}', \overrightarrow{v}')$ definem bases de E com a mesma orientação.



- *A relação anterior é uma relação de equivalência entre os pares de vectores. Cada classe de equivalência diz-se um* **ângulo orientado**. *A classe de equivalência do par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ designa-se por $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.*

- *Define-se o* **cosseno** *do ângulo orientado formado por $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como o real:*
$$\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|}$$

- *Define-se o* **seno** *do ângulo orientado $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, e designamos por $\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, como*
$$\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \varepsilon\sqrt{1-c^2}$$
com $c = \cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\varepsilon = 1$ se $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ é uma base com orientação positiva e $\varepsilon = -1$ se $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ é uma base com orientação negativa.

- *O único real $\theta \in [0, 2\pi[$ verificando*
$$\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos\theta \quad e \quad \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sin\theta$$
chama-se **medida do ângulo orientado** *formado pelos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, nesta ordem.*

- *Os ângulos orientados $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ e $\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ dizem-se* **ângulos orientados opostos**.

A definição introduzida de ângulo orientado pode estender-se a pares de vectores proporcionais. Note-se que, se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são proporcionais, então:
$$\frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|} = \pm 1$$
Se o valor deste quociente é 1, o par $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ diz-se o **ângulo nulo**, se for -1, diz-se o **ângulo raso**. Em qualquer um dos dois casos, podemos definir o seno como anteriormente e obtemos:
$$\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$$

Saliente-se que, se dois pares de vectores formam o mesmo ângulo orientado, então formam o mesmo ângulo não orientado.

Proposição 4.12 *Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u}$ vectores de um plano vectorial orientado.*

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $\lambda, \mu > 0$, *tem-se* $\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v})$*; em particular*

$$\cos\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \cos\angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v}) \qquad e \qquad \sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \sin\angle(\lambda\overrightarrow{u}, \mu\overrightarrow{v});$$

2. $\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\sin\angle(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$;

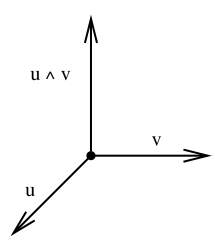
3. $\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\sin\angle(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v})$.

Nota 4.13 *Produto vectorial num espaço tridimensional*

Sejam $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ dois vectores linearmente independentes num espaço vectorial tridimensional orientado E munido de um produto escalar. Existe um único vector, que se designará por $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, tal que:

- $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ é ortogonal a $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$;
- a base $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\}$ tem orientação positiva;
- $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin\angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$.

Se $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são linearmente dependentes definimos $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.



Este vector $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ diz-se **produto vectorial** dos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Se, numa base ortonormada com orientação positiva, $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, então pode provar-se que

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Simbolicamente, escrevemos:

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

onde $\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ são os vectores de uma base ortonormada de E com orientação positiva. Saliente-se que o produto vectorial também é chamado *produto externo* e designado por $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$.

Proposição 4.14 *Propriedades do produto vectorial*
Sejam $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ três vectores de um espaço vectorial tridimensional orientado e munido de um produto escalar.

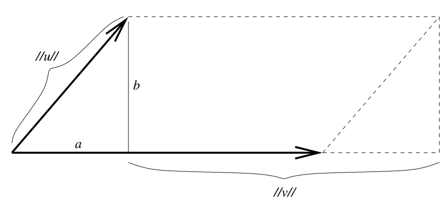
1. $\overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$;
3. $(\lambda \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$;
4. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}') \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}' \wedge \overrightarrow{v}$;
5. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *se e só se* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *são linearmente dependentes;*
6. $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}$;
7. *(Identidade de Jacobi)*
   $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} + (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) \wedge \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$;
8. $(\overrightarrow{u}_1 \wedge \overrightarrow{u}_2) \cdot (\overrightarrow{v}_1 \wedge \overrightarrow{v}_2) = (\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1)(\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{v}_2) - (\overrightarrow{u}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2)(\overrightarrow{u}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1)$;
9. $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2\|\overrightarrow{v}\|^2 - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$.

Nota 4.15 Seja E um espaço vectorial tridimensional orientado, munido de um produto escalar.

- Sejam $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$, não nulos. Recorde-se que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ verifica:

  $$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\||\sin \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|.$$

  A norma do produto vectorial $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ representa a área do paralelogramo definido pelos vectores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.



  Pelo teorema de Pitágoras $b^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - a^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2(\cos \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))^2$ donde $b = \|\overrightarrow{u}\||(\sin \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ e

  $$\|\overrightarrow{v}\|b = \|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|| \sin \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$$

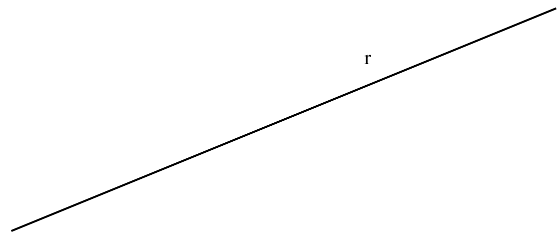
- Sejam $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u}$ três vectores linearmente independentes de E. Se calcularmos o produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ obtemos:

  $$V = |\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\| \; |\cos \angle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})|$$

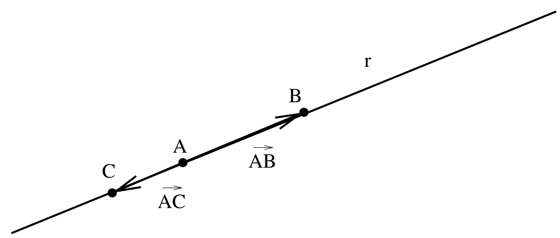
  O real positivo V representa o volume do paralelepípedo definido pelos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.
  (O produto escalar $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})$ costuma chamar-se *produto misto* dos vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.)

5 Rectas, planos e outros subespaços afins.

Considere-se uma linha recta num plano ...



Se fixarmos um qualquer dos seus pontos, as translações a qualquer outro ponto da recta são feitas seguindo vectores proporcionais:



Por outras palavras,

$$\{\overrightarrow{AB} \ : \ B \text{ percorre a recta}\}$$

é uma recta vectorial. De modo análogo, se escolhermos um ponto num plano qualquer do espaço, as translações desse ponto a um outro ponto qualquer do plano formam um plano vectorial.

Definição 5.1 *Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre um espaço vectorial E munido de uma estrutura afim Φ e $\mathcal{U}$ um subconjunto não vazio de $\mathcal{A}$. O conjunto $\mathcal{U}$ diz-se* **subespaço afim** *de $\mathcal{A}$ se existir um ponto A de $\mathcal{U}$ tal que $\Phi_A(\mathcal{U})$ é um subespaço vectorial de E.*

(Recorde-se que $\Phi_A(\mathcal{U}) = \{\overrightarrow{AB} \ : \ B \in \mathcal{U}\}$.)

Exemplos 5.2 Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim associado a um espaço vectorial real E.

1. Seja $A \in \mathcal{A}$. O conjunto $\{A\}$ é um subespaço afim já que, ao considerar a aplicação Φ_A, tem-se $\Phi_A(\{A\}) = \{\overrightarrow{0}\}$.

2. O espaço afim total $\mathcal{A}$ é um subespaço afim. Para todo o ponto A de $\mathcal{A}$ obtém-se $\Phi_A(\mathcal{A}) = E$.

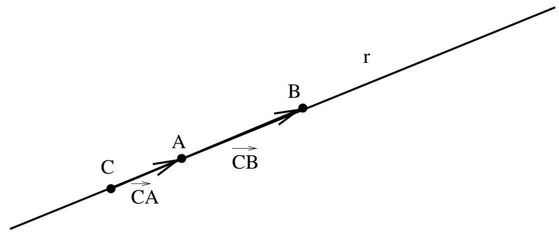
3. Dados A e B pontos distintos de $\mathcal{A}$, o subconjunto

$$\mathcal{U} = \{A, B\}$$

não é um subespaço afim.

Nota 5.3 *Subespaço vectorial associado a um subespaço afim.*

Note-se que, no exemplo inicial da recta, se escolhermos um outro ponto qualquer, obtemos o mesmo tipo de translações:



Por outras palavras, o facto de ser ou não subespaço afim não depende do ponto A escolhido primeiramente. De facto, se $\mathcal{U}$ é um subespaço afim, então, para todos os pontos $A, A' \in \mathcal{U}$ tem-se

$$\Phi_A(\mathcal{U}) = \Phi_{A'}(\mathcal{U})$$

Assim, o subespaço vectorial $\Phi_A(\mathcal{U})$ não depende do ponto A considerado e costuma chamar-se **subespaço vectorial associado** ao subespaço afim $\mathcal{U}$. A dimensão de $\Phi_A(\mathcal{U})$ diz-se **dimensão** do subespaço afim $\mathcal{U}$.

- Os subespaços de dimensão 0 são os pontos do espaço afim.
- Os subespaços de dimensão 1 são chamados **rectas** afins.
- Os subespaços de dimensão 2 são chamados **planos** afins.
- Se dim $\mathcal{A} = n$, os subespaços de dimensão $n-1$ são chamados **hiperplanos** afins.

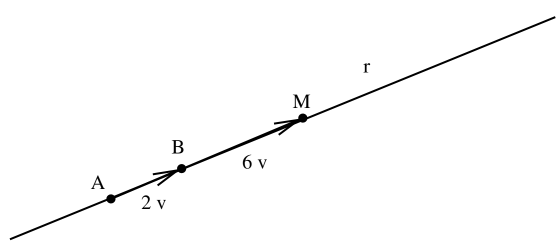
Exemplo 5.4 *Rectas num espaço afim.*

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre E. Um subconjunto $r \subset \mathcal{A}$ é uma recta se existir um ponto $A \in r$ tal que

$$\{\overrightarrow{AM} \ : \ M \in r\}$$

é uma recta vectorial de E. Se $\overrightarrow{v}$ é um vector gerador desta recta vectorial, tem-se

$$r = \{A + \overrightarrow{AM} \ : \ M \in r\} = \{A + \lambda \overrightarrow{v} \ : \ \lambda \in \mathbf{R}\}$$



O vector $\overrightarrow{v}$ diz-se um **vector director** da recta r e a expressão:

$$r = A + < \overrightarrow{v} >$$

diz-se uma **equação vectorial** da recta r.

Rectas e coordenadas.

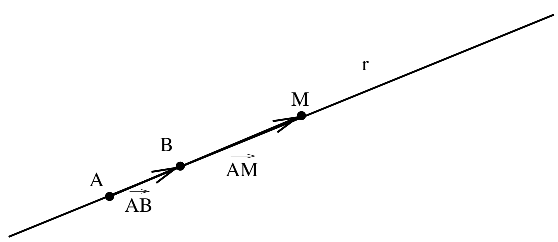
- Suponha-se que $\mathcal{A}$ é um plano afim munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}}$ e $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2)_{\mathcal{B}}$ então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{cases} x_1 & = & a_1 & +\lambda v_1 \\ x_2 & = & a_2 & +\lambda v_2 \end{cases}$$

- Suponha-se que $\mathcal{A}$ é um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$ e $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que:

$$\begin{cases} x_1 & = & a_1 & +\lambda v_1 \\ x_2 & = & a_2 & +\lambda v_2 \\ x_3 & = & a_3 & +\lambda v_3 \end{cases}$$

As expressões anteriores costumam chamar-se **equações paramétricas** da recta r no referencial $\mathcal{R}$ porque os pontos da recta ficam definidos em função do parâmetro λ. No caso de espaços afins de dimensão n as equações paramétricas são análogas.



Note-se que, se B é um ponto da recta r distinto de A, o vector não nulo $\overrightarrow{AB}$ é um vector director de r e então:

$$r = A + < \overrightarrow{AB} >$$

é uma equação vectorial de r. A partir desta equação vectorial, usando as coordenadas de A e B num determinado referencial, podemos obter umas equações paramétricas de r.

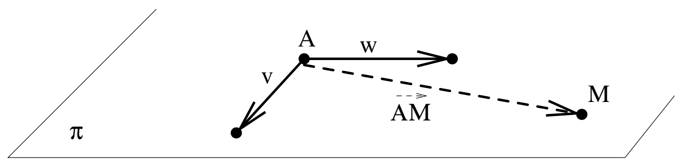
Exemplo 5.5 *Planos num espaço afim.*

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre E. Um subconjunto $\pi \subset \mathcal{A}$ é um plano se existir um ponto $A \in r$ tal que

$$\{\overrightarrow{AM} \; : \; M \in \pi\}$$

é um plano vectorial de E. Se $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ é uma base deste plano vectorial, tem-se

$$\pi = \{A + \overrightarrow{AM} \; : \; M \in r\} = \{A + (\lambda \overrightarrow{v} + \mu \overrightarrow{w}) \; : \; \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}$$



Os vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ dizem-se **vectores directores** do plano π e a expressão:

$$\pi = A + < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >$$

diz-se uma **equação vectorial** do plano π.

Planos e coordenadas.

Suponha-se que $\mathcal{A}$ é um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$. Se $A \equiv (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{v} \equiv (v_1, v_2, v_3)_{\mathcal{B}}$ e $\overrightarrow{w} \equiv (w_1, w_2, w_3)_{\mathcal{B}}$, então, um ponto $M \equiv (x_1, x_2, x_3)_{\mathcal{R}}$ pertence à recta r se e só se existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & a_1 & +\lambda v_1 & +\mu w_1 \\ x_2 & = & a_2 & +\lambda v_2 & +\mu w_2 \\ x_3 & = & a_3 & +\lambda v_3 & +\mu w_3 \end{array} \right.$$

A expressões anteriores costumam chamar-se **equações paramétricas** do plano π no referencial $\mathcal{R}$ (os pontos do plano ficam definidos em função dos parâmetros λ e μ).

Note-se que, se A, B e C são três pontos do plano tais que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes[6], tem-se que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são dois vectores directores do plano e assim :

$$\pi = A + < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$$

é uma equação vectorial do plano π. A partir desta equação vectorial, usando as coordenadas de A, B e C num determinado referencial, obtemos umas equações paramétricas de π.

[6]Diz-se, neste caso, que os pontos A, B e C formam um triângulo ou são vértices de um triângulo.

Nota 5.6 *Equação vectorial e equações paramétricas de um subespaço afim*
Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim sobre um espaço vectorial E e $\mathcal{U}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$ associado a um subespaço vectorial U de E. Como acontece com rectas e planos, se A é um ponto qualquer de $\mathcal{U}$, tem-se que

$$U = \Phi_A(\mathcal{U})$$

ou seja

$$\mathcal{U} = \{A + \overrightarrow{u} \ : \ \overrightarrow{u} \in U\}$$

Por isso costuma-se escrever

$$\mathcal{U} = A + U$$

(salienta-se que esta notação é coerente com o uso de coordenadas num referencial.)

Se $\{\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k\}$ é uma base do subespaço vectorial U a expressão:

$$A+ < \overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_k >$$

ou, equivalentemente,

$$A + (\lambda_1 \overrightarrow{u}_1 + \cdots + \lambda_k \overrightarrow{u}_k), \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$$

diz-se uma **equação vectorial** do subespaço afim $\mathcal{U}$. Se considerarmos um referencial $\mathcal{R} = \{O, \mathcal{B}\}$ em $\mathcal{A}$, as equações paramétricas de $\mathcal{U}$ são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} x_1 & = & a_1 & + & \lambda_1 u_{11} & + \cdots + & \lambda_k u_{1k} \\ x_2 & = & a_2 & + & \lambda_1 u_{21} & + \cdots + & \lambda_k u_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ x_n & = & a_n & + & \lambda_1 u_{n1} & + \cdots + & \lambda_k u_{nk} \end{array} \right.$$

onde $A \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$, e $\overrightarrow{u_j} \equiv (u_{1j}, \ldots u_{nj})_{\mathcal{B}}$, para $j = 1, \ldots, k$.

Estas equações são chamadas **equações paramétricas** do subespaço afim $\mathcal{U}$ no referencial $\mathcal{R}$. Salienta-se que **um subespaço afim de dimensão k é dado por n equações dependendo de k parámetros.**

Exemplo 5.7 *Conjuntos definidos por equações cartesianas.*

Em todos os casos indicados de seguida considerar-se-á um espaço afim $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$. Para simplificar a escrita, identificar-se-á cada ponto A de $\mathcal{A}$ com a suas coordenadas no referencial $\mathcal{R}$.

- Seja $\mathcal{A}$ um plano afim munido de um referencial $\mathcal{R}$. Considere-se o seguinte subconjunto de $\mathcal{A}$:

  $$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{A} \ : \ ax_1 + bx_2 + c = 0\}$$

  com a e b não simultaneamente nulos. Suponha-se $a \neq 0$ (o caso $b \neq 0$ é análogo) e note-se que $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$ se e só

  $$x_1 = -c - \frac{b}{a} x_2$$

Introduzindo um parâmetro auxiliar λ, obtemos que $(x_1, x_2) \in \mathcal{U}$ se e só se existe λ tal que:

$$\begin{cases} x_1 = -c - \lambda \dfrac{b}{a} \\ x_2 = \lambda \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{U}$ é a recta r que passa pelo ponto $(-c, 0)$ e é dirigida pelo vector $(-\dfrac{b}{a}, 1)$.
A equação inicial

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** da recta.

- Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\mathcal{R}$. Considere-se o seguinte subconjunto de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A} \ : \ ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$$

com a, b e c não simultaneamente nulos. Suponha-se $a \neq 0$ (os outros casos são análogos) e note-se que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}$ se e só se

$$x_1 = -d - \frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3$$

Podemos introduzir os parâmetros auxiliares λ e μ e obtemos que $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{U}$ se e só se existem λ e μ tais que

$$\begin{cases} x_1 = -d - \lambda \dfrac{b}{a} - \mu \dfrac{c}{a} \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{U}$ é o plano que passa pelo ponto $(-d, 0, 0)$ e é dirigido pelos vectores $(-\dfrac{b}{a}, 1, 0)$ e $(-\dfrac{c}{a}, 0, 1)$.
A equação inicial

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** do plano.

- Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão n associado a um espaço vectorial E munido de um referencial $\mathcal{R}$. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, não todos nulos, e $b \in \mathbf{R}$. O conjunto

$$\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} \ : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}$$

é um hiperplano afim de $\mathcal{A}$ associado ao hiperplano vectorial:

$$H = \{(v_1, \dots v_n) \in E \ : a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0\}$$

A verificação é análoga aos casos anteriores. A equação inicial

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

diz-se **equação cartesiana** ou **equação linear** do hiperplano.

Proposição 5.8 *A intersecção não vazia de subespaços afins é um subespaço afim associado à interseção dos respectivos subespaços vectoriais.*

Corolário 5.9 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim, de dimensão n, munido de um referencial $\mathcal{R}$. O conjunto de pontos de $\mathcal{A}$ que verificam um sistema de equações lineares:*

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2+ & \cdots + a_{13}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2+ & \cdots + a_{23}x_n = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2+ & \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. \qquad (*)$$

se for não vazio, é um subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão $n-r$, sendo r à característica do sistema.

Nota 5.10 *Equações cartesianas de subespaços afins.*

Reciprocamente, todo o subespaço afim de $\mathcal{A}$ de dimensão k pode obter-se como um conjunto de soluções de um sistema de $n-k$ equações lineares (não necessariamente homogéneas). O sistema diz-se um sistema de **equações cartesianas** do subespaço.

• *Passagem de equações cartesianas a equações paramétricas:*

Trata-se simplesmente de resolver o sistema, expressando o conjunto de soluções dependendo de $n-r$ paramétros, com r a característica do sistema.

• *Passagem de equações paramétricas a equações cartesianas:*

Se um subespaço afim, de um espaço afim de dimensão n, tem dimensão k, então está definido por n equações paramétricas dependendo de k parâmetros, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Usando k das equações paramétricas podemos por os parâmetros em função das coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ e substitui-os nas outras $n-k$ equações. No caso de hiperplanos afins posemos usar o determinante para obter directamente a equação cartesiana (exemplos5.11, alínea2).

Exemplos 5.11

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim munido de um referencial $\mathcal{R}$. Para simplificar, identificar-se-ão os pontos de $\mathcal{A}$ com as suas coordenadas no referencial $\mathcal{R}$.

1. *Recta afim.*

   Seja $\mathcal{U}$ uma recta afim de $\mathcal{A}$, $\mathcal{U} = A + < \overrightarrow{v} >$. Se $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \neq \overrightarrow{0}$ e $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tem-se

   $$\mathcal{U} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) + < (v_1, v_2, \ldots, v_n) >$$

   As equações paramétricas de $\mathcal{U}$ são:

   $$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & = & a_1 & +\lambda v_1 \\ x_2 & = & a_2 & +\lambda v_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & = & a_n & +\lambda v_n \end{array}\right.$$

Como $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, alguma das coordenadas de $\overrightarrow{v}$ é não nula. Suponha-se $v_1 \neq 0$ (os outros casos são análogos). Tem-se $\lambda = \dfrac{x_1 - a_1}{v_1}$ e substituindo nas equações paramétricas obtemos $n-1$ equações cartesianas:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - \left(\dfrac{x_1 - a_1}{v_1}\right) v_2 \quad -a_2 & = & 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots & & \\ x_n - \left(\dfrac{x_1 - a_1}{v_1}\right) v_n \quad -a_n & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 - \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right) x_1 & = & a_2 \quad -\dfrac{a_1 v_2}{v_1} \\ \vdots \qquad\qquad & & \vdots \\ x_n - \left(\dfrac{v_n}{v_1}\right) x_1 & = & a_n \quad -\dfrac{a_1 v_n}{v_1} \end{array} \right.$$

2. *Hiperplano afim.*

Seja $\mathcal{H}$ um hiperplano afim de $\mathcal{A}$ definido pela equação vectorial:

$$\mathcal{H} = A + < \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-1} >$$

com $H =< \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-1} >$ um hiperplano vectorial de $\mathbf{R}^n$.

Recorde-se que um ponto M pertence a $\mathcal{H}$ se e só se o vector $\overrightarrow{AM}$ pertence ao hiperplano vectorial H. O vector $\overrightarrow{AM}$ pertence a H se e só se o sistema de n vectores

$$\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-1}\}$$

é **linearmente dependente.** *Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tem-se que*

$$\overrightarrow{AM} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)$$

Suponha-se que $\overrightarrow{w}_j = (w_{1j}, w_{2j}, \ldots, w_{nj})$ para $j = 1, \ldots, n-1$

O sistema

$$\{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{w}_1, \overrightarrow{w}_2, \ldots, \overrightarrow{w}_{n-1}\}$$

é linearmente dependente se e só se

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & x_2 - a_2 & \ldots & x_n - a_n \\ w_{11} & w_{21} & \ldots & w_{n1} \\ w_{12} & w_{22} & \ldots & w_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1n-1} & w_{2n-1} & \ldots & w_{nn-1} \end{pmatrix} = 0$$

Se desenvolvermos o determinante anterior, obtemos uma equação

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n + b = 0$$

ou seja, uma equação cartesiana ou equação reduzida do hiperplano afim $\mathcal{H}$.

ATENÇÃO: Em geral, a reunião de dois subespaços afins não é um subespaço afim.

Proposição 5.12 *Sejam $\mathcal{U} = A + U$ e $\mathcal{V} = B + V$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$ associado a um espaço vectorial E. O menor subespaço afim que contém $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$, designado por $\mathcal{U} + \mathcal{V}$, verifica:*

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = A + \left(U + V + < \overrightarrow{AB} >\right)$$

Exemplos 5.13 Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim.

1. Sejam A um ponto e $r = B + < \overrightarrow{v} >$ uma recta de $\mathcal{A}$, tal que $B \notin r$. O menor subespaço afim $\mathcal{U}$ que contém A e r é o plano afim:

$$\mathcal{U} = A + < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} >$$

2. *Rectas complanares e rectas enviesadas*

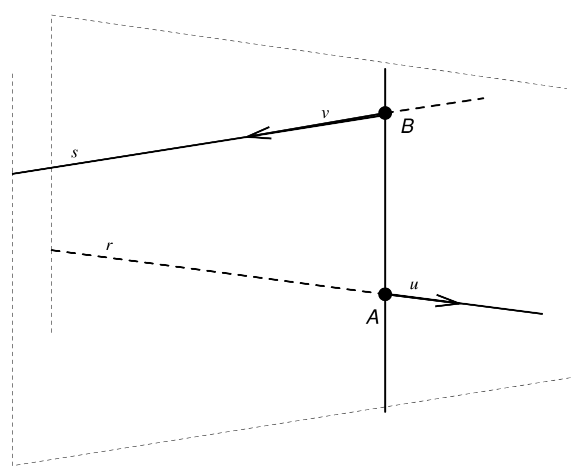
   Sejam $r = A + < \overrightarrow{u} >$ e $r' = B + < \overrightarrow{v} >$ duas rectas afins de $\mathcal{A}$. O menor subespaço afim $r + r'$ que contém r e r' verifica:

$$r + r' = A + < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$$

   (a) Se $\dim(r + r') = 1$, isto é, $\dim < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = 1$, as rectas são coincidentes (iguais) $r = r'$.

   (b) Se $\dim(r + r') = 2$, isto é, $\dim < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = 2$, as rectas são distintas e complanares (contidas no plano afim $r + r'$).

   (c) Se $\dim(r + r') = 3$, isto é, $\dim < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} > = 3$, as rectas **NÃO** estão contidas num plano, são rectas chamadas *enviesadas*.



6 Paralelismo e perpendicularidade

Definição 6.1 *Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ dois subespaços afins de um espaço afim $\mathcal{A}$ associados respectivamente aos subespaços vectoriais U e V. Dizemos que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são* **incidentes** *se $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ ou $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$. Dizemos que $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são* **paralelos** [7] *e escrevemos $\mathcal{U} /\!\!/ \mathcal{V}$, se $U \subseteq V$ ou $V \subseteq U$.*

Exemplos 6.2 Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim.

1. Duas rectas de $\mathcal{A}$
$$r = A + < \overrightarrow{v} > \qquad \text{e} \qquad r' = A' + < \overrightarrow{v}' >$$
são paralelas se e só se os vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}'$ são proporcionais.

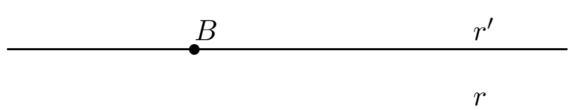
2. Considere-se o espaço afim $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$. Para simplificar as notações, identificam-se cada ponto com a suas coordenadas no referencial.

   Dois hiperplanos afins
$$\mathcal{H} = \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathcal{A} \ : a_1 x_1 + \ldots a_n x_n = b\}$$
$$\mathcal{H}' = \{(x_1, \ldots x_n) \in \mathcal{A} \ : a'_1 x_1 + \ldots a'_n x_n = b'\}$$
são paralelos se e só se $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(a'_1, \ldots, a'_n)$ são proporcionais.

Proposição 6.3 *Se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são paralelos, então são disjuntos ou um deles está contido no outro, isto é:*
$$\mathcal{U} /\!\!/ \mathcal{V} \implies (\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}) \vee (\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}) \vee (\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset)$$
Em particular, se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ são paralelos com $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V}$ então $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ ou $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Corolário 6.4 *O V Postulado de Euclides*
Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim. Se $\mathcal{U}$ é um subespaço afim associado ao subespaço vectorial U, e P é um ponto qualquer de $\mathcal{A}$, o subespaço afim
$$\mathcal{U}' = P + U$$
é o único subespaço paralelo a $\mathcal{U}$, com $\dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}'$ e incidente em P.

Em particular, dados uma recta r e um ponto B existe uma única recta r' paralela a r incidente no ponto B.



[7] Alguns autores chamam subespaços paralelos só àqueles que estão associados ao mesmo subespaço ($U = V$). Outros, falam de *paralelismo fraco* (a nossa definição, $U \subseteq V$) e *paralelismo estrito* (quando $U = V$).

Nota 6.5 Recorda-se que dois subespaços vectoriais U e V dizem-se **ortogonais** se e só se

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \qquad \forall \overrightarrow{u} \in U, \overrightarrow{v} \in V$$

De facto, para verificar que dois subespaços são ortogonais, como o produto escalar é linear, basta verificar que os vectores de uma base de V são ortogonais aos vectores de uma base de U.

Definição 6.6 *Seja W um subespaço vectorial de um espaço vectorial E munido de um produto escalar. Chamamos* **complemento ortogonal de** W *e designamos por $W^\perp$ a*

$$W^\perp = \{\overrightarrow{v} \in \mathbf{R}^n \ : \ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = 0 \qquad \forall \overrightarrow{w} \in W\}$$

Exemplos 6.7 Considerar-se-á um espaço vectorial E munido de um produto escalar e de uma **base ortonormada**.

1. Se W é uma recta vectorial gerada por um vector $\overrightarrow{w}$ tal que $\overrightarrow{w} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então o complemento ortogonal de W é o hiperplano vectorial:

   $$W^\perp = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0\}$$

2. Reciprocamente, se W é um hiperplano vectorial definido pela equação cartesiana:

   $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0$$

   então o complemento ortogonal $W^\perp$ é a recta vectorial gerada pelo vector $\overrightarrow{w} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

3. Em geral, se W é um subespaço vectorial com base $\{\overrightarrow{w}_1, \ldots, \overrightarrow{w}_k\}$ então o complemento ortogonal $W^\perp$ é o subespaço vectorial de dimensão $n - k$:

   $$W^\perp = \{\overrightarrow{v} \ : \ \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}_1 = \cdots = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}_k = 0\}$$

   Observe-se que cada um dos produtos escalares $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}_i$, define uma equação cartesiana. Assim, obtemos o espaço $W^\perp$ definido através de k equações cartesianas. Reciprocamente, se W está definido por r equações cartesianas **independentes**, $W^\perp$ é o subespaço gerado pelos vectores cujas coordenadas são os coeficientes das equações cartesianas.

Proposição 6.8 *Propriedades do complemento ortogonal*
Seja W um subespaço vectorial de um espaço vectorial E de dimensão finita munido de um produto escalar.

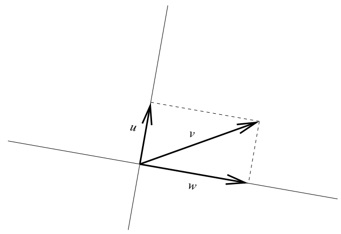
1. *$W^\perp$ é um subespaço vectorial de E;*
2. *$W \subseteq \left(W^\perp\right)^\perp$;*
3. *$W^\perp \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$;*
4. *$W^\perp + W = E$.*

Em particular, $\dim W^\perp + \dim W = n$ e $W = \left(W^\perp\right)^\perp$. *Se H é um hiperplano, a recta vectorial $H^\perp$ diz-se recta normal ao hiperplano H.*

Definição 6.9 *Projecção ortogonal de um vector num subespaço*
Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar e W um subespaço vectorial de E não nulo. Chama-se **projecção ortogonal** *de $\overrightarrow{v}$ em W ao vector $\overrightarrow{w}$ tal que*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$$

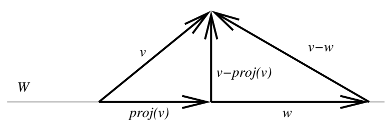
com $\overrightarrow{w} \in W$ e $\overrightarrow{u} \in W^{\perp}$. A projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ em W designa-se por $proj_W(\overrightarrow{v})$.



Note-se que as alinhas 3 e 4 da proposição anterior justificam que projecção ortogonal está bem definida e que $\overrightarrow{v} = proj_W(\overrightarrow{v}) + proj_{W^{\perp}}(\overrightarrow{v})$. A projecção ortogonal de um vector num subespaço vectorial obtém-se com um método *à la Gram-Schmidt*.

Proposição 6.10 *Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar, W um subespaço vectorial de E, $\overrightarrow{v} \in E$ e $proj_W(\overrightarrow{v})$ a projecção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ em W. Tem-se*

$$\|\overrightarrow{v} - proj_W(\overrightarrow{v})\| \leq \|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}\| \qquad \forall \overrightarrow{w} \in W$$



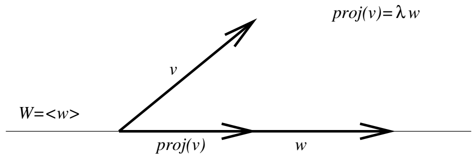
Exemplo 6.11 *Projecção ortogonal numa recta*
Sejam E um espaço vectorial munido de um produto escalar e $< \overrightarrow{w} >$ uma recta vectorial ($\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$) de E. Dado um vector $\overrightarrow{v} \in E$, escrevemos

$$\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w} + \overrightarrow{u}$$

com $\overrightarrow{u} \in < \overrightarrow{w} >^{\perp}$. Como $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ tem-se $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{w} + 0$ donde $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$ e portanto a projeção ortogonal de $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$, que designamos $proj(\overrightarrow{v})$, é

$$proj(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{w} = \left(\frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \right) \overrightarrow{w}$$

No caso particular em que $\overrightarrow{w}$ é um vector unitário, a projecção de $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$ é o vector $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{w}$, isto é, $\lambda = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.

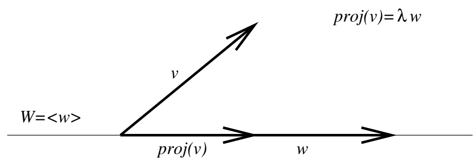


Note-se que não é necessária informação sobre o complemento ortogonal $< \overrightarrow{w} >^{\perp}$ para obter esta projecção. Observe-se também que o comprimento da projecção ortogonal é

$$a = \|proj(\overrightarrow{v})\| = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \right) \overrightarrow{w} \right\| = \frac{|\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{w}\|}.$$

Se designarmos $h = \|\overrightarrow{v}\|$ obtemos

$$|\cos \angle(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})| = \frac{|\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{w}\|} = \frac{a}{h}$$



Proposição 6.12 *Seja $\mathcal{U}$ um subespaço afim de um espaço afim euclidiano $\mathcal{A}$. Fixado um ponto $P \in \mathcal{A}$ existe um único subespaço afim $\mathcal{V}$ passando pelo ponto P e tal que o subespaço vectorial associado a $\mathcal{V}$ é o complemento ortogonal do subespaço associado a $\mathcal{U}$. Verifica-se ainda $\mathcal{V} \cap \mathcal{U} = \{P\}$ e $\mathcal{V} + \mathcal{U} = \mathcal{A}$.*
(Este subespaço afim é chamado **complemento ortogonal** *de $\mathcal{U}$ incidente em P)*

(Demonstração)
Seja U o subespaço vectorial associado a $\mathcal{U}$. O subespaço afim $\mathcal{V} = P + U^{\perp}$ é o único subespaço afim que verifica as condições indicadas. □

Definição 6.13 Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano munido de um referencial ortonormado.

1. Duas rectas de $\mathcal{A}$

   $$r = A+ < \overrightarrow{v} > \qquad \text{e} \qquad r' = A'+ < \overrightarrow{v}' >$$

   dizem-se **perpendiculares** se os vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v}'$ são ortogonais.

2. Se $\mathcal{H}$ é um hiperplano afim definido pela equação cartesiana:

   $$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

   o complemento ortogonal de $\mathcal{H}$ passando pelo ponto $P(p_1, \ldots, p_n)$ é a recta afim

   $$r_P = (p_1, \ldots, p_n)+ < (a_1, a_2, \ldots, a_n) >$$

   O vector $\overrightarrow{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ chama-se um **vector normal** do hiperplano e a recta vectorial $< \overrightarrow{n} >$ diz-se direcção **normal** ou **perpendicular** ao hiperplano. Toda a recta associada a $< \overrightarrow{n} >$ diz-se recta **perpendicular** ao hiperplano.

3. Dois hiperplanos afins $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dizem-se **perpendiculares** se as rectas normais são perpendiculares.

Exemplo 6.14 Num plano afim euclidiano, dada uma recta r e um ponto P existe uma única recta r' perpendicular a r e que incide em P. Suponha-se o plano munido de um referencial ortonormado. Se a recta r é definida por uma equação cartesiana:

$$ax + by + c = 0$$

então, a recta r' perpendicular a r e que incide no ponto $P(p_1, p_2)$ pode definir-se pela equação vectorial

$$r' = (p_1, p_2) + < (a, b) >$$

Exemplo 6.15 *Recta perpendicular a um plano*

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Toda a recta definida por uma equação vectorial do tipo

$$r = P + < (a, b, c) >$$

é perpendicular a todo o plano definido por uma equação cartesiana

$$ax + by + cz + k = 0$$

O vector (a, b, c) é o **vector normal** ao plano.

Exemplo 6.16 *Perpendicular comum a duas rectas enviesadas*

Sejam r e s duas rectas enviesadas de um espaço afim euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$, com

$$r = A + < \overrightarrow{w} > \qquad \text{e} \qquad s = B + < \overrightarrow{v} >$$

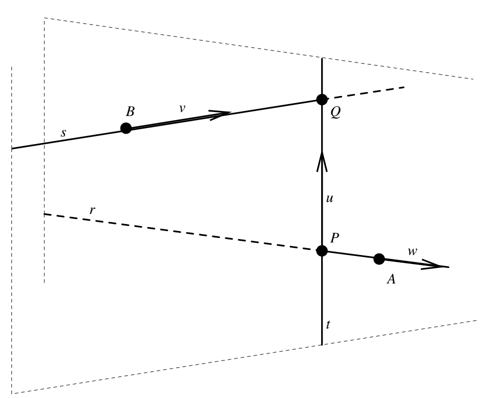
Considere-se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ e recorde-se que $< \overrightarrow{u} >$ é uma recta vectorial ortogonal às rectas $< \overrightarrow{w} >$ e $< \overrightarrow{v} >$. Os planos afins

$$\pi_r = A + < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} > \qquad \text{e} \qquad \pi_s = B + < \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} >$$

não são paralelos e incidem portanto numa recta afim t chamada *perpendicular comum* às rectas r e s.

$$t = \pi_r \cap \pi_s$$

Note-se que t está associada à recta vectorial $< \overrightarrow{u} >$. As rectas t e s são complanares e não paralelas, podemos então definir Q como o ponto de incidência de t e s. De modo análogo, podemos definir P, o ponto de incidência das rectas t e r. Os pontos P e Q são chamados *pés da perpendicular comum às rectas r e s.*



Proposição 6.17 *Projecção ortogonal de um ponto num subespaço afim*
Seja $\mathcal{U}$ um subespaço afim de um espaço afim euclidiano $\mathcal{A}$. Dado um ponto P, seja $\mathcal{V}_P$ o complemento ortogonal de $\mathcal{U}$ incidindo em P. O ponto Q tal que

$$\{Q\} := \mathcal{U} \cap \mathcal{V}_P$$

diz-se projecção ortogonal do ponto P no subespaço $\mathcal{U}$.

Exemplos 6.18 *Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano.*

1. *Projecção ortogonal de um ponto numa recta.*

   Sejam r uma recta de $\mathcal{A}$ definida pela equação vectorial

$$r = M + < \overrightarrow{w} >,$$

   P um ponto de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{H}_P$ o hiperplano perpendicular a r e que incide em P (recorde-se que $\mathcal{H}_P$ está associado ao hiperplano vectorial $< \overrightarrow{w} >^{\perp}$). Seja Q a projecção ortogonal de P em r, isto é, $Q = r \cap \mathcal{H}_P$. Tem-se

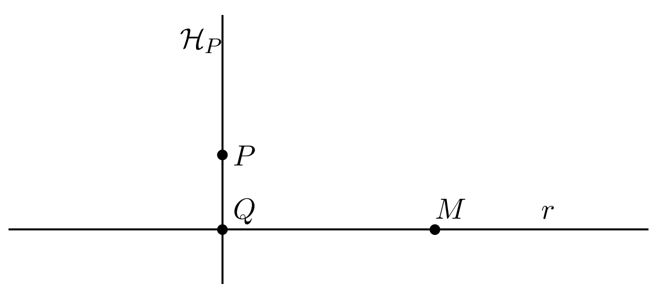
$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda \overrightarrow{w} + \overrightarrow{QP}$$

   com $\overrightarrow{QP} \in < \overrightarrow{w} >^{\perp}$. Por outras palavras, $\overrightarrow{MQ}$ é a projecção ortogonal em $< \overrightarrow{w} >$ do vector $\overrightarrow{MP}$ e portanto $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2}$ donde

$$\overrightarrow{MQ} = \lambda \overrightarrow{w} = \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \right) \overrightarrow{w}$$

   e então

$$Q = M + \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}$$



2. *Projecção ortogonal de um ponto num hiperplano*

Sejam $\mathcal{H}$ *um hiperplano afim de um espaço afim* $\mathcal{A}$, $\overrightarrow{n}$ *um vector normal a* $\mathcal{H}$, *e* P *um ponto de* $\mathcal{A}$. *Seja* Q *a projecção ortogonal de* P *em* $\mathcal{H}$, *se* M *é um ponto qualquer de* $\mathcal{H}$ *tem-se*

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{MQ} + \mu\overrightarrow{n}$$

O vector $\overrightarrow{n}$ *é ortogonal a* $\overrightarrow{MQ}$ *portanto*

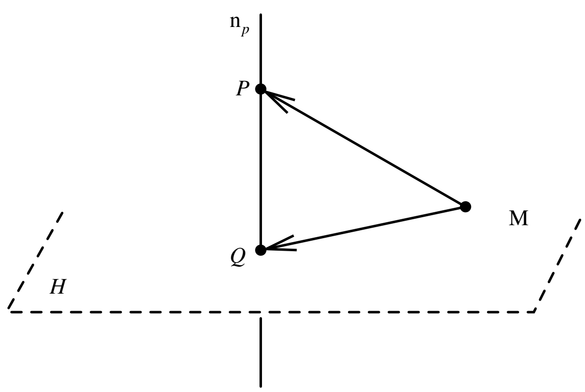
$$\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{n} = \mu(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n})$$

donde $\mu = \dfrac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}$ *e então*

$$\overrightarrow{QP} = \mu\overrightarrow{n} = \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\right)\overrightarrow{n}$$

Como $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ *obtemos*

$$Q = P - \left(\frac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}\right)\overrightarrow{n}$$



7 Problemas métricos

Sejam X e Y subconjuntos de um espaço euclidiano $\mathcal{A}$, munido de uma distância euclidiana d. Define-se $d(X,Y)$ como

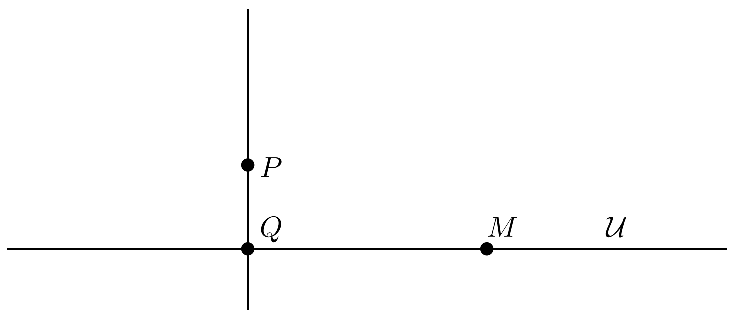
$$d(X,Y) = \mathsf{Inf}\{d(x,y) \ : \ x \in X \wedge y \in Y\}$$

Teorema 7.1 *Distância entre um ponto e um subespaço afim*
Sejam $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano, $\mathcal{U}$ um subespaço afim de $\mathcal{A}$, P um ponto de $\mathcal{A}$ e Q a projecção ortogonal de P em $\mathcal{U}$. Então, para todo o $M \in \mathcal{U}$, verifica-se $d(P,Q) \leq d(P,M)$. Em particular

$$d(P,\mathcal{U}) = d(P,Q)$$

(Demonstração)

Se $P \in \mathcal{U}$ então $P = Q$ e $d(P,\mathcal{U}) = d(P,P) = 0$.



Se $P \notin \mathcal{U}$, então $P \neq Q$. Para todo o $M \in \mathcal{U}$, $M \neq Q$, tem-se que os pontos M, P e Q não são colineares e $\cos(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}) = 0$. Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos

$$d(M,P)^2 = d(M,Q)^2 + d(Q,P)^2$$

Como $M \neq Q$, tem-se $d(M,P) > d(Q,P)$ e portanto

$$d(Q,P) \leq \mathit{Inf}\{d(M,P) \ : \ M \in \mathcal{U}\}$$

Como $Q \in \mathcal{U}$ deduz-se

$$d(Q,P) = \mathit{min}\{d(M,P) \ : \ M \in \mathcal{U}\}$$

$\square$

Exemplos 7.2
Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano.

1. *Distância de um ponto a uma recta*

   Sejam P um ponto de $\mathcal{A}$ e r uma recta definida pela equação vectorial

$$r = M + < \overrightarrow{w} >$$

Pela alínea 1 dos exemplos 6.18, a projecção ortogonal Q de P em r verifica:

$$Q = M + \frac{\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|^2} \overrightarrow{w}$$

Assim

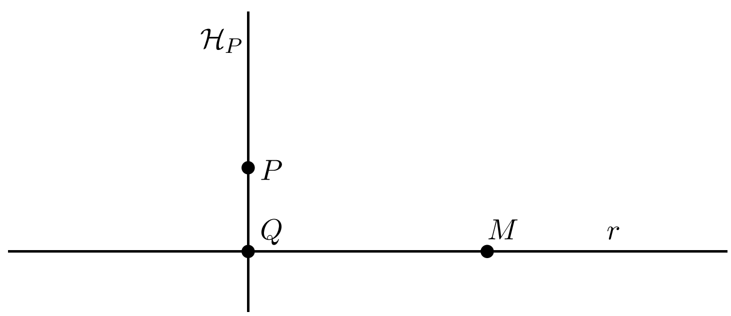
$$\|\overrightarrow{MQ}\| = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{w}|}{\|\overrightarrow{w}\|} = \|\overrightarrow{MP}\| |\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w})|$$

Usando Pitágoras,

$$d(P,Q)^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 - \|\overrightarrow{MQ}\|^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 \left(1 - |\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w})|^2\right)$$

donde

$$d(P,r) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w})|$$



2. *Distância de um ponto a um hiperplano*

   Sejam $\mathcal{H}$ um hiperplano afim de $\mathcal{A}$, $\overrightarrow{n}$ um vector normal a $\mathcal{H}$, e P um ponto de $\mathcal{A}$. Seja Q a projecção ortogonal de P em $\mathcal{H}$. Pela alȷnea 2 dos exemplos 6.18, tem-se

$$d(P,\mathcal{H}) = d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{\left|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

   Note-se que, se $\mathcal{A}$ está munido de um referencial ortonormado, $\mathcal{H}$ está definido, nesse referencial, pela equação cartesiana

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b = 0$$

   e se $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, nesse referencial, então

$$d(P,\mathcal{H}) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

Teorema 7.3 *Distâncias entre subespaços paralelos.*

Sejam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{U}'$ dois subespaços paralelos de $\mathcal{A}$, com dim$\mathcal{U} \leq$ dim$\mathcal{U}'$, associados respectivamente, aos subespaços vectoriais U e U' (note-se que $U \subseteq U'$). Considerem-se P_1 e P_2 pontos de $\mathcal{U}$ e Q_1 e Q_2 as projecções ortogonais desses pontos em $\mathcal{U}'$. Tem-se

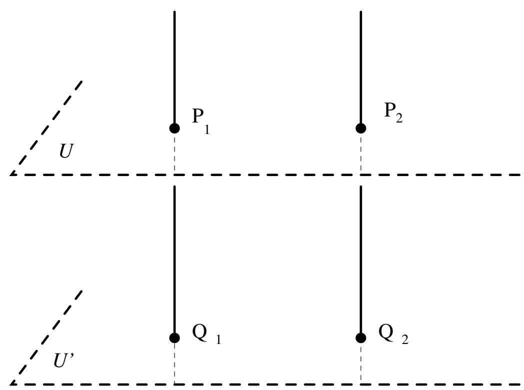
$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2Q_2} + \overrightarrow{Q_2Q_1}$$

como $\overrightarrow{P_1,P_2}, \overrightarrow{Q_2,Q_1} \in U'$ e $\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2} \in (U')^{\perp}$ vem que

$$\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

Seja $d = d(P_1, Q_1)$. Note-se que, para todo o $P \in \mathcal{U}$, se Q_P é a projeção ortogonal de P em $\mathcal{U}'$, verifica-se $d(P, Q_P) = d$. Se $P \in \mathcal{U}$ e $M \in \mathcal{U}'$, pela proposição 7.1, $d(P, M) \geq d(P, Q_P) = d$ e assim

$$d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = d$$



Teorema 7.4 *Distâncias entre duas rectas enviesadas num espaço tridimensional*

Suponha-se $\mathcal{A}$ espaço afim euclidiano tridimensional. Sejam r e s duas rectas enviesadas de $\mathcal{A}$, definidas, respectivamente, pelas equações cartesianas:

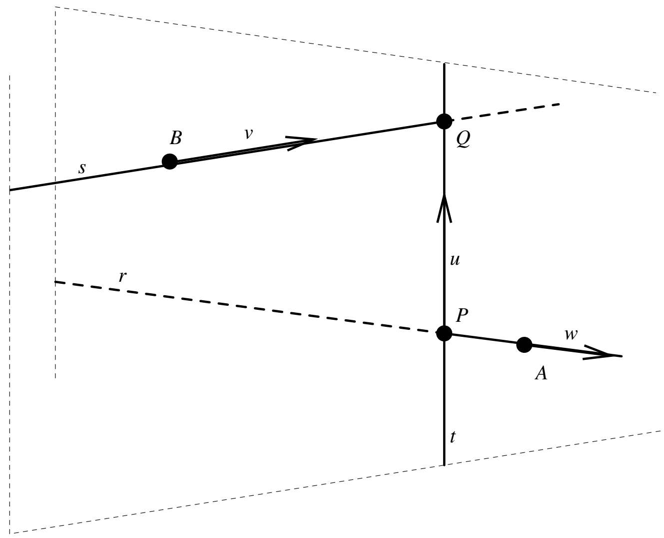
$$r = A+ < \overrightarrow{w} > \qquad \text{e} \qquad s = B+ < \overrightarrow{v} >$$

Os planos

$$\mathcal{U} = A+ < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} > \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}' = B+ < \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} >$$

são paralelos e verificam $r \subset \mathcal{U}$ e $s \subset \mathcal{U}'$. Em particular, $d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \leq d(r, s)$. Mas, se P e Q são os pés da perpendicular comum (exemplo 6.16), tem-se que $d(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = d(P, Q)$, logo

$$d(r, s) = d(P, Q)$$



Se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}$ é um vector director da perpendicular comum, tem-se

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BQ} + \lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{PA}$$

e, como $\overrightarrow{u}$ é ortogonal a $\overrightarrow{BQ}$ e a $\overrightarrow{PA}$, segue que

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}$$

Em particular,

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\lambda\overrightarrow{u}\| = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{u}|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}\|}$$

Apresenta-se de seguida o resumo dos principais resultados envolvendo distâncias no plano e no espaço tridimensional.

Distâncias no plano

Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado.

1. *Distância de um ponto a uma recta.*

   Seja r uma recta de $\mathcal{A}$ definida pela equação cartesiana:

   $$Ax + By + K = 0$$

   Se $P = (p_1, p_2)$ verifica-se

   $$d(P,r) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + K|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

2. *Distância entre duas rectas paralelas.*

   Considere-se um ponto numa delas e aplique-se a fórmula anterior.

Distâncias no espaço tridimensional

Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

1. *Distância de um ponto a um plano*

   Seja π um plano de $\mathcal{A}$ definido pela equação cartesiana $Ax + By + Cz + K = 0$. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ verifica-se
   $$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + K|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2. *Distância entre uma recta e um plano paralelos*

   Considere-se um ponto na recta e aplique-se a fórmula anterior.

3. *Distância entre dois planos paralelos.*

   Considere-se um ponto num deles e aplique-se a fórmula anterior.

4. *Distância entre um ponto e uma recta no espaço.*

   Seja r uma recta definida pela equação vectorial $r = M + < \overrightarrow{w} >$. Tem-se
   $$d(P, r) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w})|$$

5. *Distância entre duas rectas paralelas.*

   Considere-se um ponto numa das duas rectas e aplique-se a fórmula anterior.

6. *Distância entre duas rectas enviesadas*

   Se $r = A + < \overrightarrow{w} >$ e $s = B + < \overrightarrow{v} >$ são duas rectas enviesadas
   $$d(r, s) = \frac{|\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})|}{\|\overrightarrow{w} \wedge \overrightarrow{v}\|}$$

Definição 7.5 *Ângulo entre rectas, entre rectas e hiperplanos, entre hiperplanos.*
Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano.

- Sejam r e s duas rectas afins de $\mathcal{A}$ dirigidas, respectivamente, pelos vectores **unitários** $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Define-se a *medida do ângulo* (não orientado) formado pelas rectas r e s como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que
  $$\cos\theta = |\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}|.$$

- Sejam r uma recta afim de $\mathcal{A}$ dirigida por um vector $\overrightarrow{v}$, $\mathcal{H}$ um hiperplano afim de $\mathcal{A}$ e $\overrightarrow{n}$ um vector normal a $\mathcal{H}$. Define-se a *medida do ângulo* formado pela recta r e o hiperplano $\mathcal{H}$ como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que
  $$\cos\theta = \sqrt{1 - \cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n})^2}$$

- Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ dois hiperplanos afins de $\mathcal{A}$, $\overrightarrow{n}$ e $\overrightarrow{n'}$ vectores normais **unitários** a $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$, respectivamente. Define-se a *medida do ângulo* formado pelos hiperplanos $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ como o único $\theta \in [0, \pi/2]$ tal que
  $$\cos\theta = |\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n'}|.$$

8 Exercícios resolvidos

Para simplificar os enunciados, quando não houver ambiguidade, num espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão n munido de um referencial $\mathcal{R}$, se $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$, escrever-se-á $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.

1. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$ e as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

   (a) $O' \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}$;

   (b) $\left\{ \begin{array}{rcrcr} \overrightarrow{v}'_1 & = & -\overrightarrow{v}_1 & + & 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 & = & & & 2\overrightarrow{v}_2 \end{array} \right.$

   Quais as coordenadas de O no referencial $\mathcal{R}'$? Definem $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ a mesma orientação?

   (Resolução)

   Se (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) designam as coordenadas de um ponto nos referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, respectivamente, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Como $M \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$, então

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   donde $M \equiv (1, -3)_{\mathcal{R}}$. Para calcular $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$, vamos determinar a expressão matricial[8] da mudança de coordenadas oposta. Tem-se

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   e, multiplicando pela matriz inversa da matriz a esquerda, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \left[-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right]$$

   donde

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   Substituindo nesta expressão, como $N \equiv (1, 0)_{\mathcal{R}}$, obtemos

$$N \equiv (0, -1/2)_{\mathcal{R}'}$$

   As coordenadas de O no referencial $\mathcal{R}'$ são $(1, -2)$.

   Note-se que

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -1/2$$

   portanto $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ definem orientações opostas.

---

[8] Equivalentemente, basta resolver um sistema de equações de modo a obter (x_1, x_2) em função de $(x_1,', x'_2)$. Apresenta-se este tipo de resolução para desenvolver o uso da linguagem matricial.

2. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (-1, 0)_{\mathcal{R}'}$ e as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $N \equiv (-1, 0)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

   (a) $O \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}'}$;

   (b) $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = -\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

   Definem $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ a mesma orientação?

   (Resolução)

   Para obter directamente a expressão matricial de uma das mudanças de coordenadas precisamos de todos os dados de um referencial em função do outro, o que não é o caso no enunciado. Podemos determinar a base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ em função da base $(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)$ ou calcular as coordenadas de O' no referencial $\mathcal{R}$.

   Se $O' \equiv (\omega_1, \omega_2)_{\mathcal{R}}$, tem-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

   onde (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) designam as coordenadas de um ponto nos referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, respectivamente. Como $O \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}'}$ verifica-se

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   donde $(\omega_1, \omega_2) = (2, 2)$ e o resto do exercício resolve-se de modo análogo ao exercício anterior, obtendo-se:

$$M \equiv (1, 1)_{\mathcal{R}}, \qquad N \equiv (-3, -1)_{\mathcal{R}'}$$

   Note-se que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

   portanto $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ definem orientações opostas.

3. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$. Determine a expressão matricial para a mudança de coordenadas entre estes dois referenciais sabendo que:

   (a) $O \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}'}$;

   (b) $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_3 \\ \overrightarrow{v}'_2 = \overrightarrow{v}_1 + 2\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_3 = 2\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_3 \end{cases}$

   Definem $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ a mesma orientação?

   (Resolução)

   O exercício é análogo ao anterior, desta vez, determinar-se-á a base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$ em função da base $(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3)$. Usando a notação matricial:

$$(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3) = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   multiplicando pela matriz inversa da matriz à direita

$$(\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3) \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)$$

   A expressão matricial da mudança de referencial é então (recorde-se que temos os elementos do referencial $\mathcal{R}$ em função dos elementos do referencial $\mathcal{R}'$):

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

   O determinante da mudança de base é positivo portanto os referenciais definem a mesma orientação.

4. Sejam A, B e C três pontos de um plano afim $\mathcal{A}$ tais que os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ referenciais de $\mathcal{A}$. Determine a relação entre as coordenadas, nos referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$, de um ponto genérico de $\mathcal{A}$ sabendo que

$$\begin{array}{lcl} A & \equiv & (a_1, a_2)_{\mathcal{R}} \\ B & \equiv & (b_1, b_2)_{\mathcal{R}} \\ C & \equiv & (c_1, c_2)_{\mathcal{R}} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} A \equiv & (a'_1, a'_2)_{\mathcal{R}'} \\ B \equiv & (b'_1, b'_2)_{\mathcal{R}'} \\ C \equiv & (c'_1, c'_2)_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

(Resolução) É preciso encontrar uma expressão matricial do tipo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Assim, se avaliarmos os pontos A, B e C, obtemos um sistema de seis equações com seis incógnitas. Vamos a usar a linguagem matricial para apresentar a solução de modo conveniente. Introduzimos um novo referencial $\mathcal{R}'' = \{A, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$. Tem-se:

(a) $A \equiv (a_1, a_2)_{\mathcal{R}}$;

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{AB} & = & (b_1 - a_1)\overrightarrow{v}_1 \;+\; (b_2 - a_2)\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{AC} & = & (c_1 - a_1)\overrightarrow{v}_1 \;+\; (c_2 - a_2)\overrightarrow{v}_2 \end{array} \right.$$

(b) $A \equiv (a'_1, a'_2)_{\mathcal{R}'}$;

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \overrightarrow{AB} & = & (b'_1 - a'_1)\overrightarrow{v}_1 \;+\; (b'_2 - a'_2)\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{AC} & = & (c'_1 - a'_1)\overrightarrow{v}_1 \;+\; (c'_2 - a'_2)\overrightarrow{v}_2 \end{array} \right.$$

Obtemos então a relação entre as coordenadas (x''_1, x''_2) no referencial $\mathcal{R}''$ e as coordenadas nos referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$:

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 - a'_1 & c'_1 - a'_1 \\ b'_2 - a'_2 & c'_2 - a'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}$$

Consideremos as matrices:

$$M = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} b'_1 - a'_1 & c'_1 - a'_1 \\ b'_2 - a'_2 & c'_2 - a'_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \textit{e} \quad \Lambda' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}$$

Para simplificar, escrevemos as igualdades matriciais anteriores como:

$$MX'' + \Lambda = X \qquad \textit{e} \qquad M'X'' + \Lambda' = X'$$

Assim, usando a primeira igualdade:

$$X'' = -M^{-1}\Lambda + M^{-1}X$$

e substituindo na segunda igualdade

$$M'(-M^{-1}\Lambda + M^{-1}X) + \Lambda' = X'$$

donde

$$M'M^{-1}X + (\Lambda' - M'M^{-1}\Lambda) = X'$$

que é a expressão matricial da mudança de coordenadas.

5. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de $\mathcal{A}$. Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ definido por:

   (a) $O \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}'}$;

   (b) $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2 \end{cases}$

   A base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ é uma base ortogonal? O referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado? Os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ definem a mesma orientação?

   (Resolução)

   Tem-se

   $$\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) \cdot (\overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{e}_1 - \overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 - \overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 = 0$$

   portanto $\overrightarrow{v}_1 \perp \overrightarrow{v}_2$ e a base é uma base ortogonal.

   O vector $\overrightarrow{v}_1$ verifica:

   $$\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1 = (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) \cdot (\overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2) = \overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_1 \cdot \overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_2 \cdot \overrightarrow{e}_2 = 2$$

   portanto $\|\overrightarrow{v}_1\| = \sqrt{2}$ e $\overrightarrow{v}_1$ não é um vector unitário. A base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ não é uma base ortonormada e portanto o referencial $\mathcal{R}'$ não é um referencial ortonormado.

   Note-se que o determinante da matriz de mudança de base é negativo, portanto $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ definem orientações opostas.

   Nota 1: *Como $\mathcal{R}$ é um referencial ortonormado, em particular a base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ é uma base ortonormada e então, poder-se-ia trabalhar em coordenadas, usando o produto escalar usual:*

   $$\overrightarrow{v}_1 = (1, 1) \qquad \overrightarrow{v}_2 = (1, -1)$$

   $$\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = (1, 1) \cdot (1, -1) = 0 \qquad \|\overrightarrow{v}_1\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

   Nota 2: *Alternativamente, podemos resolver o exercício considerando a matriz da mudança de base:*

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   e observando que $AA^t \neq Id$, portanto A não é uma matriz que defina uma mudança entre duas bases ortonormadas.

6. Prove que uma matriz real A quadrada de ordem 2 é ortogonal (i.e. verifica $AA^t = Id$) se e só se

   $$A = \begin{pmatrix} a & -\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}$$

   com $\epsilon = \pm 1$ e $a^2 + b^2 = 1$.

   (Resolução)

   Seja

   $$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

   Como A é ortogonal, $detA = \pm 1$,logo $\epsilon = ad - bc = \pm 1$. Assim,

   $$A^{-1} = \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   Se $A^tA = Id$, então $A^t = A^{-1}$ e portanto

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   donde $d = \epsilon a$ e $c = -\epsilon b$. Também, como $\det A = \pm 1$, tem-se $\pm 1 = ad - bc = \epsilon(a^2 + b^2)$, logo $a^2 + b^2 = 1$.

7. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ tais que os vectores da base associada são unitários mas $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 1/2$.

   Determine a distância entre os pontos $A \equiv (1,1)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (3,0)_{\mathcal{R}}$. Qual seria o valor de $d(A,B)$ se o referencial $\mathcal{R}$ fosse ortonormado?

   (Resolução)

   Por definição $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$. *Tem-se*

$$\overrightarrow{AB} = (3-1)\overrightarrow{v}_1 + (0-1)\overrightarrow{v}_2 = 2\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$$

   logo

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (2\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2) \cdot (2\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2) = 4\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1 - 2\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 - 2\overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 4 - 1 - 1 + 1 = 3$$

   e então $d(A,B) = 3$.

   Se o referencial fosse ortonormado ter-se-ia:

$$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{5}$$

8. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (2,1)$ e $B = (0,-1)$. Calcule a distância $d(A,B)$. Determine se o ponto $M = (-2,-3)$ pertence ao segmento $\overline{AB}$.

   (Resolução)

$$d(A,B) = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

   O segmento $\overline{AB}$ *é o conjunto*

$$\overline{AB} = \{A + t\overrightarrow{AB} \ : \ t \in [0,1]\}$$

   Assim, $M \in \overline{AB}$ *se e só se* $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$ *com* $t \in [0,1]$. *Tem-se* $\overrightarrow{AB} = (-2,-2)$ *e*

$$\overrightarrow{AM} = (-4,-4) = 2(-2,-2) = 2\overrightarrow{AB}$$

   Portanto, M *não pertence ao segmento* $\overline{AB}$.

9. Sejam A, B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A,C) = 2$, $d(A,B) = 1$ e $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1/2$. Calcule $d(B,C)$.

   (Resolução)

   Aplicando o teorema dos cossenos:

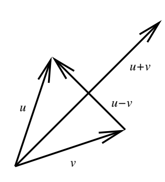
$$d(B,C)^2 = d(A,B)^2 + d(A,C)^2 - 2d(A,B)d(A,C)\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 + 4 - 2 = 3$$

   donde $d(B,C) = \sqrt{3}$.

10. Prove que, se $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ então

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 0$$

   (As diagonais de um losango são perpendiculares.)



   (Resolução)

   Usando as propriedades do produto escalar obtemos

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2 = 0$$

11. Determine o produto escalar dos vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$. Calcule o cosseno do ângulo que formam e indique se os vectores são ortogonais.

    (a) $\overrightarrow{v} = (2, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, -2)$;
    (b) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, 0, -2)$;
    (c) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, -5, 0)$;
    (d) $\overrightarrow{v} = (4, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (7, 1, 1, -2)$.

    (Resolução)

    (a) $\overrightarrow{v} = (2, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, -2)$.
    $$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (2, 1) \cdot (2, -2) = 4 - 2 = 2.$$
    Tem-se que $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5}$ *e* $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ *donde*
    $$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{2}{\sqrt{5}(2\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$
    Os vectores $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *não são ortogonais.*

    (b) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, 0, -2)$.
    $$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (1, -1, 1) \cdot (2, 0, -2) = 2 - 2 = 0.$$
    Assim $\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$ *e os vectores* $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *são ortogonais.*

    (c) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, -5, 0)$.
    $$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (1, -2, 3) \cdot (3, -5, 0) = 3 + 10 = 13.$$
    Tem-se que $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{14}$ *e* $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{34}$ *donde*
    $$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{13}{\sqrt{14}\sqrt{34}} = \frac{13\sqrt{119}}{238}$$
    Os vectores $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *não são ortogonais.*

    (d) $\overrightarrow{v} = (4, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (7, 1, 1, -2)$.
    $$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = (4, -1, 0, 1) \cdot (7, 1, 1, -2) = 28 - 1 - 2 = 25$$
    Tem-se que $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *e* $\|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{55}$ *donde*
    $$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{25}{3\sqrt{2}\sqrt{55}} = \frac{25\sqrt{110}}{3}$$
    Os vectores $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$ *não são ortogonais.*

12. Determine o produto vectorial dos vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ de $\mathbf{R}^3$
    $$\overrightarrow{v} = (1, 0, -3) \qquad \overrightarrow{w} = (2, 2, 0)$$
    (Resolução)

    Simbolicamente:
    $$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det \begin{pmatrix} \overrightarrow{e}_1 & \overrightarrow{e}_2 & \overrightarrow{e}_3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 6\overrightarrow{e}_1 + (-6)\overrightarrow{e}_2 + 2\overrightarrow{e}_3 = (6, -6, 2)$$

13. Calcule a área do paralelogramo definido pelos vectores de $\mathbf{R}^3$ $\overrightarrow{v} = (1,0,-3)$ e $\overrightarrow{w} = (2,2,0)$.

(Resolução)

Recorde-se que a área A de tal paralelogramo é dada pela norma $\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|$. usando o exercjcio anterior tem-se

$$A = \|(6,-6,2)\| = \sqrt{74}$$

14. Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vectores de $\mathbf{R}^3$ $\overrightarrow{u} = (4,0,0)$, $\overrightarrow{v} = (1,0,-3)$ e $\overrightarrow{w} = (2,2,0)$.

(Resolução)

Recorde-se que o volume V de dito paralelepjpedo é dado pelo valor absoluto $|\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w})|$. Como $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w} = (6,-6,2)$ tem-se

$$V = |(4,0,0) \cdot (6,-6,2)| = 24$$

Rectas, planos, paralelismo.

15. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O;\mathcal{B}\}$. Indique os subespaços vectoriais associados aos seguintes subespaços afins de $\mathcal{A}$ e a dimensão de tais subespaços afins:

(a) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ x+y+z+3=0\}$;

(b) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y = 3-3x \ \wedge \ z = x\}$;

(c) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y = 3-3x \ \wedge \ z = x \ \wedge \ 2x-4=0\}$.

(Resolução)

(a) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ x+y+z+3=0\}$.
O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ x+y+z=0\} = < (1,-1,0),(1,0,-1) >$$

Trata-se de um plano vectorial, portanto $\mathcal{U}$ é um plano afim (dimensão 2).

(b) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y = 3-3x \ \wedge \ z = x\}$.
O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y+3x=0 \ \wedge \ z-x=0\} = < (1,-3,1) >$$

Trata-se de uma recta vectorial, portanto $\mathcal{U}$ é uma recta afim (dimensão 1).

(c) $\mathcal{U} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y = 3-3x \ \wedge \ z = x \ \wedge \ 2x-4=0\}$.
O subespaço vectorial associado é

$$U = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ y+3x=0 \ \wedge \ z-x=0 \ \wedge \ 2x=0\}.$$

Resolvendo o sistema obtemos que $U = \{\overrightarrow{0}\}$, a dimensão de $\mathcal{U}$ é 0. Trata-se de um ponto do espaço afim $\mathcal{A}$. De facto, resolvendo o sistema de equações obtemos

$$\mathcal{U} = \{(2,-3,2)\}$$

16. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim r que passa pelo ponto $A = (0,-5)$ e tem como vector director $\overrightarrow{v} = (-1,-3)$. Indique três pontos distintos que pertençam à recta r. Represente graficamente.

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é

$$r = (0,-5) + < (-1,-3) >$$

Uma equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x &= & & -\lambda \\ y &= & -5 & -3\lambda \end{cases}$$

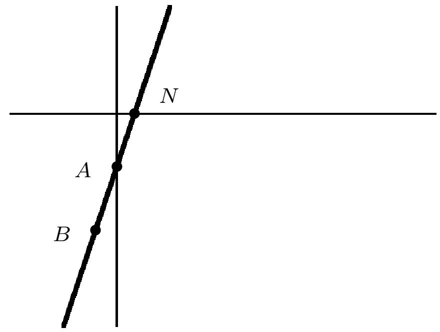
A partir da igualdade:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+5}{-3}$$

obtemos a equação cartesiana de r:

$$-3x + y + 5 = 0$$

Os pontos $A = (0, -5)$, $B = (-2, -11)$ e $N = (5/3, 0)$ pertencem a r.



17. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim r que passa pelos pontos $A = (1, -2)$ e $B = (-3, 0)$. Indique três pontos distintos que pertençam à recta r. Represente graficamente.

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é

$$r = (1, -2) + <(-4, 2)>$$

Uma equações paramétricas de r são:

$$\begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \end{cases}$$

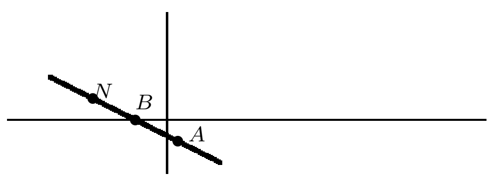
A partir da igualdade:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y+2}{2}$$

obtemos a equação cartesiana de r:

$$2x + 4y + 6 = 0$$

Os pontos $A = (1, -2)$, $B = (-3, 0)$ e $N = (-7, 2)$ pertencem a r.



18. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pela equação cartesiana

$$2x - y + 2 = 0$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

(Resolução)

Note-se que $2x - y + 2 = 0$ se e só se $y = 2x + 2$. Considere-se $x = \lambda$ para obter as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Uma equação vectorial de r é então

$$r = (0,2) + < (1,2) > .$$

Os pontos $A = (0,2)$ e $B = (2,6)$ pertencem à recta r.

19. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelo ponto $A = (-2,0,1)$ e tem como vector director $\overrightarrow{v} = (3,-1,-3)$.

    (Resolução)

    A recta r pode definir-se mediante a equação vectorial:

    $$r = (-2,0,1) + < (3,-1,-3) >$$

    A recta r pode definir-se então pelas equações paramétricas:

    $$\left\{ \begin{array}{ccrr} x & = & -2 & +3\lambda \\ y & = & & -\lambda \\ z & = & 1 & -3\lambda \end{array} \right.$$

    O sistema de 2 equações cartesianas pode obter-se a partir das igualdades

    $$\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

    Por exemplo, um sistema de equações cartesianas para r é:

    $$\left\{ \begin{array}{ccc} -x-3y-2 & = & 0 \\ -3x-3z-3 & = & 0 \end{array} \right.$$

    ou, equivalentemente,

    $$\left\{ \begin{array}{ccc} x+3y+2 & = & 0 \\ x+z+1 & = & 0 \end{array} \right.$$

20. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelos pontos $A = (2,2,2)$ e $B = (3,3,3)$.

    (Resolução)

    A recta r pode definir-se mediante a equação vectorial:

    $$r = (2,2,2) + < (1,1,1) >$$

    A recta r pode definir-se então pelas equações paramétricas:

    $$\left\{ \begin{array}{cccc} x & = & 2 & +\lambda \\ y & = & 2 & +\lambda \\ z & = & 2 & +\lambda \end{array} \right.$$

    O sistema de 2 equações cartesianas pode obter-se a partir das igualdades

    $$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

    Por exemplo, um sistema de equações cartesianas para r é:

    $$\left\{ \begin{array}{ccc} x-y & = & 0 \\ x-z & = & 0 \end{array} \right.$$

21. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x - 3y - 2 &= 0 \\ 2y - z - 1 &= 0 \end{cases}$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

(Resolução)

Note-se que

$$c\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

portanto o sistema tem solução (não única) e o conjunto de soluções é um subespaço afim de dimensão 1 (uma recta afim como é bem referido no enunciado) .

Resolvemos o sistema, em função de y, por exemplo,

$$\begin{cases} x - 3y - 2 &= 0 \\ 2y - z - 1 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 3y + 2 \\ z &= 2y - 1 \end{cases}$$

Se $\lambda = y$ obtemos as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x &= & 2 & +3\lambda \\ y &= & & \lambda \\ z &= & -1 & +2\lambda \end{cases}$$

donde deduzimos a equação vectorial

$$(2, 0, -1)+ < (3, 1, 2) > .$$

Os pontos $A = (2, 0, -1)$ (corresponde a $\lambda = 0$) e $N = (-1, -1, -3)$ (corresponde a $\lambda = -1$) incidem na recta.

22. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o ponto $A = (0, 0, 0)$. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto A e está associado ao plano vectorial $< (1, 1, 0), (-1, 0, -2) >$.

(Resolução)

O plano π tem a equação vectorial

$$\pi = (0, 0, 0)+ < (1, 1, 0), (-1, 0, -2) > .$$

Umas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x &= & \lambda & -\mu \\ y &= & \lambda & \\ z &= & & -2\mu \end{cases}$$

Recorde-se que um ponto (x, y, z) incide no plano π se e só se

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Assim, a equação cartesiana de π é:

$$-2x + 2y + z = 0$$

23. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os pontos:

$$A = (1, 0, 1) \qquad B = (1, -2, 0) \qquad C = (1, 0, 0)$$

Justifique que $\{A, B, C\}$ são vértices de um triângulo. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim π definido por A, B e C.

(Resolução)

Os vectores $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 0, -1)$ são linearmente independentes, portanto A, B e C formam um triângulo.

Uma equação vectorial de plano π é

$$\pi = (1, 0, 1) + < (0, -2, -1), (0, 0, -1) >$$

A partir de

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

obtemos a equação cartesiana de π

$$2x - 2 = 0$$

ou, equivalentemente

$$x - 1 = 0.$$

24. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o subespaço afim $\mathcal{U}$ definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y & = & -1 \\ y + z & = & 0 \\ 3x - 2y + z & = & -3 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas de $\mathcal{U}$.

(Resolução)

Resolve-se o sistema indicado:

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 3x & -2y & +z & = & -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ & y & +z & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x & = & -1 + y \\ z & = & -y \end{cases}$$

Tomando $y = \lambda$ obtêm-se as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x & = & -1 & +\lambda \\ y & = & & \lambda \\ z & = & & -\lambda \end{cases}$$

donde deduzimos a equação vectorial

$$\mathcal{U} = (-1, 0, 0) + < (1, 1, -1) >,$$

logo $\mathcal{U}$ é uma recta afim. Note-se que o estudo da caracterջstica das matrizes associadas ao sistema confirmaria o resultado.

25. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o subespaço afim $\mathcal{U}$ definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & +z & = & -3 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas de $\mathcal{U}$.

(Resolução)

Resolve-se o sistema indicado:

$$\begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ 2x & -2y & +z & = & -3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & -y & & = & -1 \\ & y & +z & = & 0 \\ & & z & = & -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{cases}$$

Assim, $\mathcal{U} = \{(0, 1, -1)\}$. Trata-se de um ponto (subespaço afim de dimensão 0).

Note-se que o estudo da caracterջstica das matrizes associadas ao sistema confirmaria o resultado.

26. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a intersecção do plano afim π definido pela equação cartesiana
$$3x + 3y - 1 = 0$$
e a recta r incidente no ponto $A = (1, 1, 1)$ e dirigida pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 1, 0)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial da recta r é
$$r = (1, 1, 1)+ < (0, 1, 0) >$$
Assim, um ponto $M = (x, y, z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que
$$(x, y, z) = (1, 1 + \lambda, 1)$$
M pertence ao plano π se verificar
$$0 = 3x + 3y - 1 = 3(1) + 3(1 + \lambda) - 1 = 3 + 3 + 3\lambda - 1 = 3\lambda + 5$$
donde $\lambda = -5/3$ e então
$$r \cap \pi = \{(1, -2/3, 1)\}.$$

27. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a interseção do plano afim definido pela equação cartesiana
$$3x + 3y - 1 = 0$$
e a recta r incidente no ponto $A = (-1/3, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial da recta r é
$$r = (-1/3, 0, 1)+ < (0, 0, 1) >$$
Assim, um ponto $M = (x, y, z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que
$$(x, y, z) = (-1/3, 0, 1 + \lambda)$$
M pertence ao plano π se se verificar
$$0 = 3x + 3y - 1 = 3(-1/3) - 1 = -2$$
A igualdade anterior é impossյvel, portanto $r \cap \pi = \emptyset$

28. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a interseção do plano afim π definido equação vectorial
$$\pi = (1, 2, 1)+ < (0, 3, 0), (0, -2, -2) >$$
e da recta r definida pelas equações cartesianas:
$$\begin{cases} x & & -2z & = & 1 \\ x & +y & +z & = & 4 \end{cases}$$

(Resolução)

Um ponto $M = (x, y, z)$ pertence ao plano π se e só se existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que
$$(x, y, z) = (1, 2 + 3\lambda - 2\mu, 1 - 2\mu)$$
Este ponto verifica o sistema de equações cartesianas que definem r se e só se
$$\begin{cases} 1 & & -2(1-2\mu) & = & 1 \\ 1 & +(2+3\lambda-2\mu) & +(1-2\mu) & = & 4 \end{cases} \iff \begin{cases} & +4\mu & = & 2 \\ 3\lambda & -4\mu & = & 0 \end{cases}$$
Resolvendo este sistema obtemos $\lambda = 2/3$ e $\mu = 1/2$ donde
$$r \cap \pi = \{(1, 3, 0)\}.$$

29. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule a interseção do plano afim π definido equação vectorial

$$\pi = (1,2,1)+ < (0,3,0),(0,-2,-2) >$$

e da recta definida pela equação vectorial

$$r = (0,1,0)+ < (2,1,0) >$$

(Resolução)

Para facilitar a resolução podemos calcular uma equação cartesiana do plano π:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow x-1=0$$

Um ponto $M=(x,y,z)$ incide em r se e só se existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tal que

$$(x,y,z) = (2\lambda, 1+\lambda, 0)$$

M pertence ao plano π se se verificar

$$0 = x-1 = 2\lambda - 1$$

donde $\lambda = 1/2$ e

$$\pi \cap r = \{(1, 3/2, 0)\}$$

Resolução alternativa:

Um ponto $M=(x,y,z)$ pertence ao plano π se existem $\mu,\nu \in \mathbf{R}$ tais que

$$(x,y,z) = (1, 2+3\mu-2\nu, 1-2\nu)$$

Assim, se $M \in r\cap\pi$, existem $\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R}$ tais que

$$(2\lambda, 1+\lambda, 0) = (1, 2+3\mu-2\nu, 1-2\nu)$$

Obtem-se um sistema de equações:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 2\lambda & = & 1 \\ 1+\lambda & = & 2+3\mu-2\nu \\ 0 & = & 1-2\nu \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} 2\lambda & & & = & 1 \\ \lambda & -3\mu & +2\nu & = & 1 \\ & & 2\nu & = & 1 \end{array}\right.$$

que admite solução.

30. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O;\mathcal{B}\}$. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & (1,2,0)+ < (1,0,1) > \\ r_2 & = & (0,2,-1)+ < (1,0,-1) > \end{array}$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas complanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de $\mathcal{A}$ que contém tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

(Resolução)

Pelo exemplo **??**

$$r_1 + r_2 = (1,2,0)+ < (1,0,1),(1,0,-1),(-1,0,-1) >$$

Como os vectores $\{(1,0,1),(1,0,-1),(-1,0,-1)\}$ são linearmente dependentes, uma equação vectorial de r_1+r_2 é

$$r_1 + r_2 = (1,2,0)+ < (1,0,1),(1,0,-1) >$$

Este subespaço afim é um plano, portanto as rectas são complanares e não enviesadas. A equação cartesiana é dada por

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow y-2=0$$

31. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O;\mathcal{B}\}$. Calcule a equação cartesiana do plano afim de $\mathcal{A}$ que contém o ponto $B=(1,0,2)$ e a recta

$$r=(1,2,3)+<(0,1,1)>.$$

Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é $r=(1,2,3)+<(0,1,1)>$. Se $A=(1,2,3)$ o menor subespaço afim $\mathcal{U}$ que contém r e $B=(1,0,2)$ pode definir-se por

$$\mathcal{U}=A+<(0,1,1),\overrightarrow{AB}>=(1,2,3)+<(0,1,1),(0,-2,-1)>$$

Trata-se de um plano cuja equação cartesiana é dada por:

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow x-1=0$$

A equação cartesiana do plano vectorial associado é $x=0$.

32. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O;\mathcal{B}\}$. Calcule a equação cartesiana do plano afim de $\mathcal{A}$ que contém o ponto $B=(2,0,1)$ e a recta $r=<(1,1,1)>$. Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

(Resolução)

Uma equação vectorial de r é $r=(0,0,0)+<(1,1,1)>$. De modo análogo ao exercjcio anterior, o menor subespaço afim $\mathcal{U}$ que contém r e B pode definir-se por

$$\mathcal{U}=(0,0,0)+<(1,1,1),(2,0,1)>$$

Trata-se de um plano cuja equação cartesiana é dada por:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=0 \Longleftrightarrow -x-y+2z=0$$

A equação vectorial do plano vectorial associado também é $-x-y+2z=0$.

33. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial $\{O;\mathcal{B}\}$. Calcule as equações paramétricas da recta r de $\mathcal{A}$ que incide nos pontos $A=(1,1,0,0)$ e $B=(0,-3,0-2)$.

(Resolução)

Uma equação vectorial é

$$r=(1,1,0,0)+<(-1,-4,0,-2)>$$

E uma equações paramétricas são

$$\left\{\begin{array}{ccll} x & = & 1 & -\lambda \\ y & = & 1 & -4\lambda \\ z & = & 0 & \\ t & = & & -2\lambda \end{array}\right.$$

34. Considere, num espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão 4 munido de um referencial, o conjunto $\mathcal{U}$ definido por

$$\mathcal{U}=\{(x,y,z,t)\in\mathcal{A}\ :\ x-z=2\}$$

É um subespaço afim? Qual a dimensão? Determine uma equação vectorial e umas equações paramétricas.

(Resolução)

É um subespaço afim de dimensão 3 (um hiperplano afim). Umas equações paramétricas podem ser:

$$\left\{\begin{array}{cccccc} x & = & 2 & +\lambda & & \\ y & = & & & \mu & \\ z & = & & \lambda & & \\ t & = & & & & \nu \end{array}\right.$$

Uma equação vectorial é $(2,0,0,0)+<(1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)>$

35. Num espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial determine a equação cartesiana do hiperplano afim associado ao hiperplano vectorial
$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x + y - z = 0\}$$
que incide no ponto $A = (1, 4, 1, 0)$. Determine também uma equação vectorial de tal hiperplano.

(Resolução)

Um hiperplano afim $\mathcal{H}$ associado ao hiperplano H admite uma equação cartesiana
$$x + y - z + k = 0$$
Se o ponto $A = (1, 4, 1, 0)$ pertence a $\mathcal{H}$ é preciso que
$$1 + 4 - 1 + k = 0$$
donde $k = -4$ e o hiperplano $\mathcal{H}$ está definido pela equação cartesiana
$$x + y - z - 4 = 0$$
Tomando x, y e t, por exemplo, como parámetros, com $\lambda = x$, $\mu = y$ e $\nu = t$, obtemos:
$$\begin{cases} x &= & & \lambda & & \\ y &= & & \mu & & \\ z &= & -4 & +\lambda & +\mu & \\ t &= & & & & \nu \end{cases}$$
donde deduzimos uma equação vectorial de $\mathcal{H}$:
$$\mathcal{H} = (0, 0, -4, 0) + < (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) >$$

36. Num espaço afim de dimensão n munido de um referencial determine a equação cartesiana do hiperplano associado ao hiperplano vectorial
$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \ : \ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$
que incide no ponto $A = (1, 1, \ldots, 1)$.

(Resolução)

Um hiperplano afim $\mathcal{H}$ associado ao hiperplano H admite uma equação cartesiana
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + k = 0$$
Se o ponto $A = (1, 1, \ldots, 1)$ pertence a $\mathcal{H}$ é preciso que
$$1 + \cdots + 1 + k = 0$$
donde $k = - - n$ e o hiperplano $\mathcal{H}$ está definido pela equação cartesiana
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n = 0$$

37. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial:

   (a) Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim paralelo a $\pi = (0, 0, 0) + < (1, 0, 1), (0, 1, -1) >$ incidente no ponto $A = (0, 0, 3)$.

   (b) Calcule a equação cartesiana do plano afim paralelo ao plano de equação $x - 2y + 4 = 0$ que incide no ponto $B = (1, 1, 1)$. Quais as equações paramétricas deste plano?

   (c) Calcule uma equação vectorial da recta afim paralela à recta $< A, B >$ que incide no ponto $C = (1, 0, 0)$.

   (d) Considere as rectas afins $r_1 = (0, 0, 2) + < (1, 1, 1) >$ e $r_2 = < (1, 2, 0) >$. Calcule uma equação vectorial do plano paralelo às rectas r_1 e r_2 que incide no ponto $M = (1, 2, -1)$.

(Resolução)

(a) *O plano π' paralelo a π e incidente em $A = (0,0,3)$ tem a equação vectorial:*

$$\pi' = (0,0,3) + < (1,0,1), (0,1,-1) >$$

A equação cartesiana é então:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -x+y+z-3=0$$

(b) *O plano π'' paralelo ao plano indicado admite uma equação cartesiana do tipo*

$$x - 2y + k = 0$$

Como $B = (1,1,1) \in \pi'$, é preciso

$$1 - 2 + k = 0$$

donde $k = 1$ e a equação requerida é

$$x - 2y + 1 = 0$$

Umas equações paramétricas deste plano são:

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\lambda \\ y &= \lambda \\ z &= \mu \end{cases}$$

(c) *A recta vectorial associada à recta afim $< A, B >$ é $< \overrightarrow{AB} > = < (1,1,-2) >$. A recta s paralela à recta $< A, B >$ incidente em C define-se pela equação vectorial:*

$$s = (1,0,0) + < (1,1,-2) > .$$

(d) *Um plano paralelo às rectas r_1 e r_2 deve estar associado ao plano vectorial*

$$U = < (1,1,1), (1,2,0) >$$

Portanto, uma equação vectorial do plano requerido é

$$(1,2,-1) + < (1,1,1), (1,2,0) > .$$

38. Estude posição relativa das rectas r_1 e r_2 de um espaço afim tridimensional munido de um referencial, se

$$r_1 \equiv (1,2,1) + < (1,1,2) > \qquad r_2 \equiv (0,0,1) + < (1,1,2) >$$

(Resolução)

As rectas r_1 e r_2 são paralelas (estão associadas à mesma recta vectorial). Note-se que

$$r_1 + r_2 = (1,2,1) + < (1,1,2), (-1,-2,0) >$$

Como $\dim r_1 + r_2 = 2$ as rectas são distintas.

39. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial. Considere o subespaço afim $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ definido por

$$\mathcal{U} = \{(x,y,z,t) \in \mathcal{A} \ : \ x+y-t=0 \ \wedge \ y+z-2t+1=0\}$$

Determine o subespaço vectorial associado a $\mathcal{U}$. Determine o subespaço afim $\mathcal{U}'$ paralelo a $\mathcal{U}$, da mesma dimensão, que incide no ponto $(0,2,1,0)$.

(Resolução)

O subespaço vectorial U associado a $\mathcal{U}$ é (na base associada ao referencial):

$$U = \{(x,y,z,t) \in E \ : \ x+y-t=0 \ \wedge \ y+z-2t=0\}$$

Um subespaço $\mathcal{U}'$ paralelo a $\mathcal{U}$ pode definir-se por

$$\mathcal{U}' = \{(x,y,z,t) \in E \ : \ x+y-t+k=0 \ \wedge \ y+z-2t+m=0\}$$

Se $\mathcal{U}'$ incide em $(0,2,1,0)$ é preciso que $k=-2$ e $m=-3$ donde

$$\mathcal{U}' = \{(x,y,z,t) \in E \ : \ x+y-t-2=0 \ \wedge \ y+z-2t-3=0\}$$

40. *Posições relativas de duas rectas no plano*

Sejam r e r' duas rectas afins de um plano euclidiano (munido de um referencial) definidas, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by = c \qquad a'x + b'y = c'$$

Determine as posições relativas das rectas em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A *e* A' *as matrizes associadas a esse sistema de equações:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) *as rectas* r *e* r' *são coincidentes (iguais) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c) *e* (a', b', c') *são proporcionais;*

(b) *as rectas* r *e* r' *concorrem num único ponto* M *(solução do sistema) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b) *e* (a', b') *não sao proporcionais;*

(c) *as rectas* r *e* r' *são paralelas (o sistema não possui solução) se e só se*

$$c(A) = 1 \quad \textit{e} \quad c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b) *e* (a', b') *são proporcionais mas* (a, b, c) *e* (a', b', c') *não são.*

41. *Posições relativas de dois planos num espaço afim tridimensional*

Sejam π e π' dois planos afins de um espaço afim tridimensional (munido de um referencial) definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by + cz = d \qquad a'x + b'y + c'z = d'$$

Determine as posições relativas dos planos em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A *e* A' *as matrizes associadas a esse sistema de equações:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c' \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) *os planos* π *e* π' *são coincidentes (iguais) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c, d) *e* (a', b', c', d') *são proporcionais;*

(b) *os planos* π *e* π' *concorrem numa recta (solução do sistema) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b, c) *e* (a', b', c') *não sao proporcionais.*

(c) *os planos* π *e* π' *são paralelos (o sistema não possui solução) se e só se*

$$c(A) = 1 \quad \textit{e} \quad c(A') = 2$$

ou seja, se e só se (a, b, c) *e* (a', b', c') *são proporcionais mas* (a, b, c, d) *e* $(a', b', c'.d')$ *não são.*

42. Posições relativas de três planos no espaço

Sejam π, π' e π'' três planos afins distintos de um espaço afim tridimensional (munido de um referencial) definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas

$$ax + by + cz = d \qquad a'x + b'y + c'z = d' \qquad a''x + b''y + c''z = d''$$

Determine as posições relativas dos planos em função dos coeficientes das equações cartesianas.

(Resolução)

Considerem-se A e A' as matrizes associadas a esse sistema de equações:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix}$$

Então:

(a) *os planos π e π' são coincidentes (iguais) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 1$$

ou seja, se e só se as filas (a, b, c, d), (a', b', c', d') e (a'', b'', c'', d'') são proporcionais;

(b) *os planos π, π' e π'' concorrem numa recta (solução do sistema) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 2;$$

Nota: *Se r é uma recta do espaço definida por duas equações cartesianas*

$$ax + by + cz = d \qquad a'x + b'y + c'z = d',$$

os planos do espaço que contêm r admitem uma equação do tipo

$$\lambda(ax + by + cz - d) + \mu(a'x + b'y + c'z - d') = 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

Esta família de planos costuma chamar-se o feixe de planos definido por r.

(c) *os planos π, π' e π'' concorrem num ponto (solução única do sistema) se e só se*

$$c(A) = c(A') = 3$$

ou seja, se e só se os vectores $\{(a, b, c), (a', b', c'), (a'', b'', c'')\}$ são linearmente independentes;

(d) *Se $c(A) = 1$ e $c(A') = 2$ a intersecção dos três planos é vazia (o sistema não possui solução). Há duas configurações possíveis:*

- *Os três planos são paralelos e distintos.*
- *Dois dos planos são coincidentes e o terceiro é paralelo aos anteriores e distinto deles:*

(e) *Se $c(A) = 2$ e $c(A') = 3$), a intersecção dos três planos também é vazia. As configurações possíveis neste caso são*

- *Dois dos planos são paralelos e o terceiro incide numa recta com cada de aqueles;*
- *os planos formam um prisma triangular, isto é, são dois a dois incidentes numa recta:*

ATENÇÃO: *Recorde-se que o caso $c(A) = 1$ e $c(A') = 3$ não é possível, em geral $c(A') \leq c(A) + 1$.*

43. *Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:*

$$x + y + z = 1, \qquad 2x + 2y + 2z = 2, \qquad -3x - 3y - 3z = -3$$

(Resolução)

Os três planos são coincidentes.

44. *Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:*

$$x+y+z=1, \qquad x+y+z=2, \qquad x+y+z=5;$$

(Resolução)

Os três planos são paralelos e distintos.

45. *Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:*

$$x+y+z=1, \qquad 2x+2y+2z=2, \qquad x+y+z=5;$$

(Resolução)

Os planos π_1 e π_2 são coincidentes e o plano π_3 é paralelo (e distinto) aos anteriores.

46. *Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:*

$$x+y=1, \qquad x-2y=2, \qquad 2x-y=3$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes têm característica 2, portanto o sistema define um subespaço afim de dimensão 1 (uma recta afim). Escolhendo, por exemplo, as duas primeiras equações, obtemos essa recta afim pode definir-se pela equação vectorial:

$$r = (4/3, -1/3, 0) + < (0,0,1) >$$

(Os três planos são incidentes numa recta, formam parte do feixe de planos definido pela recta)

47. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x+y=1, \qquad x-2y=2, \qquad z=5$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

As duas matrizes têm característica 3, portanto o sistema define um subespaço afim de dimensão 0(um ponto). Resolvendo o sistema obtemos as coordenadas desse ponto: $(4/3, -1/3, 5)$.

48. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x+y+z=1, \qquad x+y+z=2, \qquad x-2y+z=5;$$

(Resolução)

A intersecção dos três planos é vazia (o sistema não tem solução). Os dois primeiros planos são paralelos e distintos e o terceiro plano incide numa recta com cada um deles.

49. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, determine as posições relativas dos planos π, π' e π'' definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$x + y + z = 1, \qquad x + y - z = 1, \qquad 2x + 2z = 5.$$

(Resolução)

As matrizes associadas ao sistema são:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

A primeira matriz tem característica 2 e a segunda característica 3, portanto o sistema não possui solução: a intersecção dos três planos é vazia. Não há nenhuma relação de paralelismo entre esses planos, isto é, os planos intersectam-se dois a dois numa recta: formam um prisma triangular.

Ortogonalidade, problemas métricos.

50. Determine o complemento ortogonal da recta vectorial gerada pelo vector $\overrightarrow{v}$.

(a) $\overrightarrow{v} = (2, 1)$;
(b) $\overrightarrow{v} = (2, -2)$;
(c) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$;
(d) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$;
(e) $\overrightarrow{v} = (7, 1, 1, -2)$;
(f) $\overrightarrow{v} = (1, 1, 1, \dots, 1)$.

(Resolução)

(a) $\overrightarrow{v} = (2, 1)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é a recta vectorial de* $\mathbf{R}^2$ *definida pela equação cartesiana:*

$$2x + y = 0$$

(b) $\overrightarrow{v} = (2, -2)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é a recta vectorial de* $\mathbf{R}^2$ *definida pela equação cartesiana:*

$$2x + -2y = 0$$

(c) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é o plano vectorial de* $\mathbf{R}^3$ *definido pela equação cartesiana:*

$$x - y + z = 0$$

(d) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é o plano vectorial de* $\mathbf{R}^3$ *definido pela equação cartesiana:*

$$x - 2y + 3z = 0$$

(e) $\overrightarrow{v} = (7, 1, 1, -2)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é o hiperplano vectorial de* $\mathbf{R}^4$ *definido pela equação cartesiana:*

$$7x + y + z - 2t = 0$$

(f) $\overrightarrow{v} = (1, 1, \ldots, 1)$.
O complemento ortogonal de $< \overrightarrow{v} >$ *é o hiperplano vectorial de* $\mathbf{R}^n$ *definido pela equação cartesiana:*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

51. Determine o complemento ortogonal do plano vectorial gerado pelos vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(a) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, 0, -2)$;
(b) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, -5, 0)$;
(c) $\overrightarrow{v} = (0, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1, -2)$.

(Resolução)

(a) $\overrightarrow{v} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{w} = (2, 0, -2)$.
O complemento ortogonal $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *está definido pelas equações cartesianas:*

$$\left.\begin{array}{cccccc} x & -y & +z & = & 0 \\ 2x & & -2z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *é a recta vectorial* $< (1, 2, 1) >$.

(b) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, -5, 0)$;
O complemento ortogonal $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *está definido pelas equações cartesianas:*

$$\left.\begin{array}{cccccc} x & -2y & +3z & = & 0 \\ 3x & -5y & & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *é a recta vectorial* $< (5, 3, 1/3) >$.

(c) $\overrightarrow{v} = (0, -1, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1, -2)$.
O complemento ortogonal $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *está definido pelas equações cartesianas:*

$$\left.\begin{array}{cccccc} -y & & +t & = & 0 \\ +y & +z & -2t & = & 0 \end{array}\right\}$$

Resolvendo o sistema obtemos que $< \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} >^{\perp}$ *é o plano vectorial* $< (1, 0, 0, 0)(0, 1, 1, 1) >$.

52. Determine duas rectas vectoriais V e W de $\mathbf{R}^2$ tais que $V \cap W = \{\overrightarrow{0}\}$ mas V e W não são ortogonais.

(Resolução)

As rectas $V =< (2, 2) >$ *e* $\overrightarrow{w} =< (0, -1) >$ *verificam* $< (2, 2) > \cap < (0, -1) >= \{\overrightarrow{0}\}$ *mas*

$$(2, 2) \cdot (0, -1) = -2 \neq 0$$

53. Sejam $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ vectores de $\mathbf{R}^n$ não nulos e λ, μ números reales estritamente possitivos. Prove que

$$\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \cos(\lambda \overrightarrow{v}, \mu \overrightarrow{w})$$

(Resolução)

$$\cos(\lambda \overrightarrow{v}, \mu \overrightarrow{w}) = \frac{(\lambda \overrightarrow{v}) \cdot (\mu \overrightarrow{w})}{\|\lambda \overrightarrow{v}\| \|\mu \overrightarrow{w}\|} = \lambda\mu \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{|\lambda| \|\overrightarrow{v}\| |\mu| \|\overrightarrow{w}\|} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{v}\| \|\overrightarrow{w}\|}$$

já que $|\lambda| = \lambda$ *e* $|\mu| = \mu$.

54. No plano $\mathbf{R}^2$, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (1,1)$ na recta vectorial $< (0,3) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(1,1) = \lambda(0,3) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \perp (0,3)$. *Assim,*

$$(0,3) \cdot (1,1) = \lambda(0,3) \cdot (0,3) + 0$$

donde $\lambda = \dfrac{3}{9} = 1/3$ *e portanto, a projecção de* $(1,1)$ *na recta* $< (0,3) >$ *é*

$$\frac{1}{3}(0,3) = (0,1).$$

55. No plano $\mathbf{R}^2$, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (x,y)$ na recta vectorial $< (0,3) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(x,y) = \lambda(0,3) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \perp (0,3)$. *Assim,*

$$(0,3) \cdot (x,y) = \lambda(0,3) \cdot (0,3) + 0$$

donde $\lambda = \dfrac{3y}{9} = y/3$ *e portanto, a projecção de* (x,y) *na recta* $< (0,3) >$ *é*

$$\frac{y}{3}(0,3) = (0,y).$$

56. Em $\mathbf{R}^3$, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (1,1,1)$ na recta vectorial $< (-1,0,2) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(1,1,1) = \lambda(-1,0,2) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \perp (-1,0,2)$. *Assim,*

$$(-1,0,2) \cdot (1,1,1) = \lambda(-1,0,2) \cdot (-1,0,2) + 0$$

donde $\lambda = \dfrac{1}{5}$ *e portanto, a projecção de* $(1,1,1)$ *na recta* $< (-1,0,2) >$ *é*

$$\frac{1}{5}(-1,0,2) = (-\frac{1}{5}, 0, \frac{2}{5}).$$

57. Em $\mathbf{R}^3$, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ na recta vectorial $< (-1,0,2) >$.

(Resolução)

Tem-se que $(x,y,z) = \lambda(-1,0,2) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \perp (-1,0,2)$. *Assim,*

$$(-1,0,2) \cdot (x,y,z) = \lambda(-1,0,2) \cdot (-1,0,2) + 0$$

donde $\lambda = \dfrac{-x+2z}{5}$ *e portanto, a projecção de* (x,y,z) *na recta* $< (-1,0,2) >$ *é*

$$\frac{-x+2z}{5}(-1,0,2) = \left(\frac{x-2z}{5}, 0, \frac{-2x+4z}{5}\right).$$

58. Em $\mathbf{R}^3$, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (1,0,2)$ no plano vectorial $<(1,1,1),(2,0,0)>$.

(Resolução)

Tem-se que $(1,0,2) = \lambda(1,1,1) + \mu(2,0,0) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \in <(1,1,1),(2,0,0)>^{\perp}$. *Em particular*

$$\overrightarrow{u} \cdot (1,1,1) = 0 \quad e \quad \overrightarrow{u} \cdot (2,0,0) = 0$$

Assim

$$(1,1,1) \cdot (1,0,2) = \lambda(1,1,1) \cdot (1,1,1) + \mu(1,1,1) \cdot (2,0,0) + 0$$

e

$$(2,0,0) \cdot (1,0,2) = \lambda(2,0,0) \cdot (1,1,1) + \mu(2,0,0) \cdot (2,0,0) + 0$$

Obtém-se então um sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} 3 & = & 3\lambda & +2\mu \\ 2 & = & 2\lambda & +4\mu \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\lambda = 1$ *e* $\mu = 0$. *A projeção ortogonal de* $(1,0,2)$ *no plano vectorial indicado é o vector*

$$\lambda(1,1,1) + \mu(2,0,0) = 1(1,1,1) + 0(2,0,0) = (1,1,1)$$

59. Em $\mathbf{R}^3$, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ no plano vectorial $<(1,1,1),(2,0,0)>$.

(Resolução)

Tem-se que $(x,y,z) = \lambda(1,1,1) + \mu(2,0,0) + \overrightarrow{u}$, *com* $\overrightarrow{u} \in <(1,1,1),(2,0,0)>^{\perp}$. *Em particular*

$$\overrightarrow{u} \cdot (1,1,1) = 0 \quad e \quad \overrightarrow{u} \cdot (2,0,0) = 0$$

Assim

$$(1,1,1) \cdot (x,y,z) = \lambda(1,1,1) \cdot (1,1,1) + \mu(1,1,1) \cdot (2,0,0) + 0$$

e

$$(2,0,0) \cdot (x,y,z) = \lambda(2,0,0) \cdot (1,1,1) + \mu(2,0,0) \cdot (2,0,0) + 0$$

Obtém-se então um sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} x+y+z & = & 3\lambda & +2\mu \\ 2x & = & 2\lambda & +4\mu \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema obtemos $\lambda = \dfrac{y+z}{2}$ *e* $\mu = \dfrac{2x-y-z}{4}$. *A projeção ortogonal de* (x,y,z) *no plano vectorial indicado é o vector*

$$\lambda(1,1,1) + \mu(2,0,0) = \frac{y+z}{2}(1,1,1) + \frac{2x-y-z}{4}(2,0,0) = \frac{1}{2}(2x, y+z, y+z)$$

60. Determine uma base ortonormada do subespaço vectorial W de $\mathbf{R}^3$ definido pela equação cartesiana

$$2x - y + z = 0$$

(Resolução)

Calculamos, em primeiro lugar, uma base de W. *Como* $2x = y - z$, *considerando* y *e* z *como parámetros obtemos as equações paramétricas:*

$$\left. \begin{array}{ccll} x & = & \lambda & -\mu \\ y & = & \lambda & \\ z & = & & \mu \end{array} \right\}$$

donde $W = <(1,1,0),(-1,0,1)>$.

Seja $\overrightarrow{v}_1 = (1,1,0)$. *Definimos* $\overrightarrow{v}_2$ *como* $\overrightarrow{v}_2 = \lambda \overrightarrow{v}_1 + (-1,0,1)$. *É preciso que* $\overrightarrow{v}_1 \perp \overrightarrow{v}_2$ *portanto*

$$0 = \overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = \lambda \overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_1 + \overrightarrow{v}_1 \cdot (-1,0,1)$$

donde

$$0 = \lambda(1,1,0)\cdot(1,1,0) + (1,1,0)\cdot(-1,0,1)$$

logo $\lambda = 1/2$ *e* $\overrightarrow{u}_2 = 1/2(1,1,0) + (-1,0,1) = (-1/2,1/2,1)$.

A base $\{(1,1,0),(-1/2,1/2,1)\}$ *é uma base ortogonal de* W. *Para obter uma base ortonormal* $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2\}$ *do plano* W *precisa-se só de normalizar os vectores* $\overrightarrow{v}_1$ *e* $\overrightarrow{v}_2$. *Obtemos então:*

$$\overrightarrow{u}_1 = \frac{\overrightarrow{v}_1}{\|\overrightarrow{v}_1\|} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$$

$$\overrightarrow{u}_2 = \frac{\overrightarrow{v}_2}{\|\overrightarrow{v}_2\|} = (-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$$

61. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado.

(a) Determine a recta s_1 perpendicular à recta r_1 definida pela equação vectorial:

$$r_1 = (0,1) + <(3,-2)>$$

e que incide no ponto $P_1 = (2,4)$.

(b) Determine a recta s_2 perpendicular à recta r_2 definida pela equação cartesiana:

$$2x + 5y - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P_2 = (-1,5)$.

(Resolução)

(a) A recta vectorial ortogonal à recta $<(3,-2)>$ *é a recta* $<(2,3)>$. *Assim*

$$s_1 = (2,4) + <(2,3)>$$

(b) A recta vectorial normal à recta afim r_2 *está dirigida pelo vector* $(2,5)$. *Assim*

$$s_2 = (-1,5) + <(2,5)>$$

62. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule a recta r perpendicular ao plano π definido pela equação cartesiana:

$$x + 2y + 4 = 0$$

e que incide no ponto $P = (1,1,1)$.

(b) Calcule a recta r' perpendicular ao plano π' definido pela equação vectorial:

$$\pi'' = (0,1,1) + <(2,0,0),(-1,-1,3)>$$

e que incide no ponto $P = (1,1,1)$.

(Resolução)

(a) A recta vectorial normal ao plano π *é* $<(1,2,0)>$. *Assim, a recta* r *pode definir-se pela equação vectorial:*

$$r = (1,1,1) + <(1,2,0)>$$

(b) O vector director $\overrightarrow{u}$ *da recta* r' *deve ser perpendicular aos vectores* $(2,0,0)$ *e* $(-1,-1,3)$, *podemos então considerar:*

$$\overrightarrow{u} = (2,0,0) \wedge (-1,-1,3) = (0,-6,-2)$$

e definir r' *pela equação vectorial*

$$r' = (1,1,1) + <(0,-6,-2)>$$

63. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

   (a) Calcule o plano π perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (0,0,-2) + < ((0,2,-1) >$$

   e que incide no ponto $P = (1,1,1)$.

   (b) Calcule o plano π' perpendicular à recta s' definida pelas equaçoes cartesianas:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z - 4 & = & 0 \\ 2x + 2y + z & = & 0 \end{array}\right\}$$

   e que incide no ponto $P = (1,1,1)$.

(Resolução)

   (a) A recta s está dirigida pelo vector $(0,2,-1)$. Os planos afins perpendiculares a s são então definidos por uma equação cartesiana do tipo

$$2y - z + k = 0$$

   Se π indice no ponto P, tem-se $k = -1$ donde π é o plano definido pela equação cartesiana:

$$2y - z - 1 = 0$$

   (b) A recta s' está definida como a intersecção dos planos afins π_1 e π_2 definidos respectivamente pelas equações cartesianas:

$$2x - 3y + z - 4 = 0 \qquad e \qquad 2x + 2y + z = 0$$

   Se $\overrightarrow{u}$ é um vector director de s' tem-se que $\overrightarrow{u}$ é ortogonal aos vectores $(2,-3,1)$ e $(2,2,1)$ ou , equivalentemente, $\overrightarrow{u}$ é proporcional ao produto vectorial de $(2,-3,1)$ e $(2,2,1)$. Podemos então considerar

$$\overrightarrow{u} = (2,-3,1) \wedge (2,2,1) = (-5,0,10)$$

   O plano π', perpendicular à recta s' dirigida por $\overrightarrow{u}$, admite então uma equação cartesiana do tipo

$$-5x + 10z + k = 0$$

   Como $P(1,1,1) \in \pi'$ tem-se $k = -5$.

64. Num espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial ortonormado, considere as rectas afins:

$$r = (1,2,3) + < (2,-3,1) >$$
$$s =< (2,2,1) >$$

Calcule a recta t perpendicular a r e a s que incide no ponto $M = (5,0,0)$.

(Resolução)

A recta perpendicular a r e a s está dirigida pelo vector $\overrightarrow{u}$, com

$$\overrightarrow{u} = (2,-3,1) \wedge (2,2,1) = (-5,0,10)$$

donde

$$t = (5,0,0) + < (-5,0,10) >$$

65. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial ortonormado.

   (a) Calcule a recta r perpendicular ao hiperplano $\mathcal{H}$ definido pela equação cartesiana:

$$x + 2y + 4t - 1 = 0$$

   e que incide no ponto $P = (10,0,0,0)$.

(b) Calcule o hiperplano $\mathcal{H}'$ perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1, 0, -1, 1) + < (0, -2, -3, 5) >$$

e que incide no ponto $P = (10, 0, 0, 0)$.

(Resolução)

(a) A recta normal ao hiperplano $\mathcal{H}$ está dirigida pelo vector

$$\overrightarrow{n} = (1, 2, 0, 4)$$

Assim, a recta r perpendicular a $\mathcal{H}$ e que incide no ponto P pode definir-se pela equação vectorial

$$r = (10, 0, 0, 0) + < (1, 2, 0, 4) >$$

(b) O hiperplano $\mathcal{H}'$ é definido por uma equação cartesiana do tipo

$$-2y - 3z + 5t + k = 0$$

Como $P \in \mathcal{H}'$, tem-se $k = 0$ donde $\mathcal{H}'$ é o hiperplano

$$-2y - 3z + 5t = 0$$

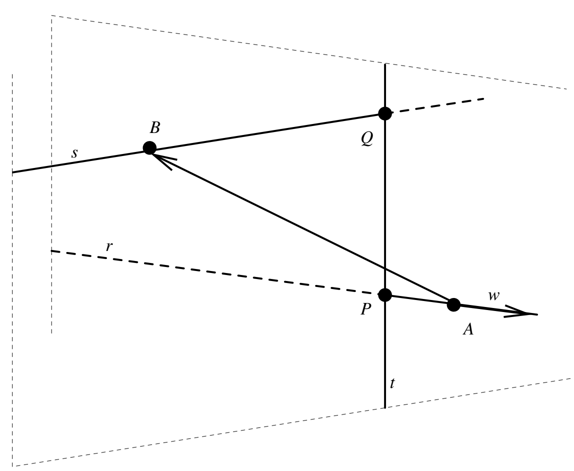
66. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule a perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (1, 2, 3) + < (0, 0, 1) > \qquad s = (2, 0, 0) + < (0, 1, -1) >$$

(Resolução 1)

O vector director da perpendicular comum é $\overrightarrow{u} = (0, 0, 1) \wedge (0, 1, -1) = (-1, 0, 0)$. Se $A = (1, 2, 3)$, $B = (2, 0, 0)$ e P e Q são os pés da perpendicular comum, com $P \in r$ e $Q \in s$, tem-se

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$



Note-se que $\overrightarrow{AP} \in < (0, 0, 1) >$, $\overrightarrow{PQ} \in < (-1, 0, 0) >$ e $\overrightarrow{QB} \in < (0, 1, -1) >$ donde

$$\overrightarrow{AB} = \lambda(0, 0, 1) + \mu(-1, 0, 0) + \nu(0, 1, -1)$$

Os vectores $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, -1)$ são ortogonais ao vector $(-1, 0, 0)$, portanto

$$\overrightarrow{AB} \cdot (0, 0, 1) = \lambda - \nu \qquad e \qquad \overrightarrow{AB} \cdot (0, 1, -1) = -\lambda + 2\nu$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -3)$ *obtemos o sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} -3 & = & \lambda - \nu \\ 1 & = & -\lambda + 2\nu \end{array}\right\}$$

donde $\lambda = -5$ *e* $\nu = -2$. *Em particular,* $\overrightarrow{AP} = -5(0, 0, 1)$ *donde*

$$P = A + \overrightarrow{AP} = (1, 2, 3) - 5(0, 0, 1) = (1, 2, -2).$$

A perpendicular comum t *pode então definir-se pela equação vectorial*

$$t = P + < \overrightarrow{u} > = (1, 2, -2) + < (1, 0, 0) >$$

(Resolução 2)

Seja $\overrightarrow{u} = (0, 0, 1) \wedge (0, 1, -1) = (-1, 0, 0)$. *A perpendicular comum é a intersecção dos planos afins:*

$$\pi_r = (1, 2, 3) + < (0, 0, 1), (-1, 0, 0) > \qquad e \qquad \pi_s = (2, 0, 0) + < (0, 1, -1), (-1, 0, 0) >$$

Os planos π_r *e* π_s *podem definir-se, respectivamente, pelas equações cartesianas:*

$$y - 2 = 0 \qquad y + z = 0$$

Assim t *é a recta definida pelo sistema de equações cartesianas,*

$$\left.\begin{array}{rcl} y - 2 & = & 0 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right\}$$

ou, equivalentemente, a recta definida pela equação vectorial:

$$t = (0, 2, -2) + < (1, 0, 0) >$$

67. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule os pés da perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (1, 2, 1) + < (1, 0, -1) > \qquad\qquad s = (1, 0, 0) + < (0, 2, 2) >$$

(Resolução)

Sejam t *a perpendicular comum,* P *e* Q *os pés da perpendicular, com* $P \in r$ *e* $Q \in s$. *Considerem-se ainda os pontos* $A = (1, 2, 1) \in r$ *e* $B = (1, 0, 0) \in s$. *Tem-se*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$$

A perpendicular comum está dirigida pelo vector

$$\overrightarrow{u} = (1, 0, -1) \wedge (0, 2, 2) = (2, -2, 2)$$

Portanto, como, $\overrightarrow{AP} \in < (1, 0, -1) >$, $\overrightarrow{PQ} \in < \overrightarrow{u} >$ *e* $\overrightarrow{QB} \in < (0, 2, 2) >$, *tem-se*

$$\overrightarrow{AB} = \lambda(1, 0, -1) + \mu(2, -2, 2) + \nu(0, 2, 2)$$

Os vectores $(1, 0, -1)$ *e* $(2, -2, 2)$ *são ortogonais logo:*

$$\overrightarrow{AB} \cdot (1, 0, -1) = \lambda(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) + \nu(0, 2, 2) \cdot (1, 0, -1)$$

Como $\overrightarrow{AB} = (0, -2, -1)$ *obtemos* $1 = 2\lambda - 2\nu$.

Os vectores $(0,2,2)$ *e* $(2,-2,2)$ *são ortogonais logo:*

$$\overrightarrow{AB}\cdot(0,2,2)=\lambda(1,0,-1)\cdot(0,2,2)+\nu(0,2,2)\cdot(0,2,2)$$

Como $\overrightarrow{AB}=(0,-2,-1)$ *tem-se* $-6=-2\lambda+8\nu$.
Resolvendo o sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 & = & 2\lambda-2\nu \\ -6 & = & -2\lambda+8\nu \end{array}\right\}$$

obtemos $\lambda=-1/3$ *e* $\nu=-5/6$. *Em particular*

$$\overrightarrow{AP}=\lambda(1,0,-1)=-1/3(1,0,-1)=(-1/3,0,1/3)$$

logo

$$P=A+\overrightarrow{AP}=(1,2,1)+(-1/3,0,1/3)=(2/3,2,4/3)$$

E também

$$\overrightarrow{QB}=\nu(0,2,2)=-5/6(0,2,2)=(0,-5/3,-5/3)$$

donde

$$Q=B+\overrightarrow{BQ}=B-\overrightarrow{QB}=(1,0,0)-(0,-5/3,-5/3)=(1,5/3,5/3)$$

68. Num plano euclidiano $\mathcal{A}$ munido de um referencial ortonormado,, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r=(0,-5)+<(1,1)>$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P=(2,2)$ na recta r.
(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P=(x,y)$ na recta r

(Resolução)

(a) Seja Q *a projecção ortogonal de* $P=(2,2)$. *Se* $A=(0,-5)$ *tem-se* $\overrightarrow{AP}=(2,7)$ *e*

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}=\lambda(1,1)+\overrightarrow{QP}$$

Como $\overrightarrow{QP}$ *e* $(1,1)$ *são ortogonais, tem-se*

$$\overrightarrow{AP}\cdot(1,1)=\lambda(1,1)\cdot(1,1)$$

donde $\lambda=9/2$. *Em particular*

$$Q=A+\overrightarrow{AQ}=A+\lambda(1,1)=(0,-5)+(9/2)(1,1)=(9/2,-1/2)$$

(b) Seja Q *a projecção ortogonal de* $P=(x,y)$. *Se* $A=(0,-5)$ *tem-se* $\overrightarrow{AP}=(x,y+5)$ *e*

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}=\lambda(1,1)+\overrightarrow{QP}$$

Como $\overrightarrow{QP}$ *e* $(1,1)$ *são ortogonais, tem-se*

$$\overrightarrow{AP}\cdot(1,1)=\lambda(1,1)\cdot(1,1)$$

donde

$$x+y+5=2\lambda$$

Em particular

$$Q=A+\overrightarrow{AQ}=A+\lambda(1,1)=(0,-5)+\frac{x+y+5}{2}(1,1)=(\frac{x+y+5}{2},\frac{x+y-5}{2})$$

69. Num espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial ortonormado, considere-se π o plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (-1,1,0)+ < (1,1,1),(1,0,1) >$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3,2-1)$ no plano afim π.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x,y,z)$ no plano afim π.

(Resolução)

(a) A equação cartesiana de π é

$$x - z + 1 = 0$$

Um vector director da recta normal a π é então $(1,0,-1)$. Sejam $A = (-1,1,0) \in \pi$, $P = (3,2,-1)$ e Q a projeção ortogonal de P em π. Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ} + \lambda(1,0,-1)$$

Como $\overrightarrow{AQ}$ e $(1,0,-1)$ são ortogonais obtemos

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1,0,-1) = \lambda(1,0,-1)(1,0,-1)$$

donde $\lambda = 5/2$. Assim

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (3,2,-1) - \lambda(1,0,-1) = (3,2,-1) - (5/2,0,-5/2) = (1/2,2,3/2)$$

Resolução alternativa

A partir da equação vectorial de π, como $\overrightarrow{AQ} \in < (1,1,1),(1,0,1) >$, existem $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = (\lambda(1,1,1) + \mu(1,0,1)) + \overrightarrow{QP}$$

O vector $\overrightarrow{QP}$ é ortogonal aos vectores $(1,1,1)$ e $(1,0,1)$ portanto:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot (1,1,1) &= \lambda(1,1,1)\cdot(1,1,1) + \mu(1,0,1)(1,1,1)\\ \overrightarrow{AP} \cdot (1,0,1) &= \lambda(1,1,1)\cdot(1,0,1) + \mu(1,0,1)(1,0,1)\end{aligned}$$

Tem-se que $\overrightarrow{AP} = (4,1,-1)$ donde

$$\left.\begin{array}{rcl} 4 &=& 3\lambda + 2\mu \\ 3 &=& 2\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Resolve-se o sistema e obtém-se $\lambda = 1$ e $\mu = 1/2$. Assim

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + (\lambda(1,1,1) + \mu(1,0,1)) = A + (3/2,1,3/2) = (1/2,2,3/2)$$

(b) De modo análogo à primeira alŋnea, como a equação cartesiana de π é

$$x - z + 1 = 0$$

um vector director da recta normal a π é então $(1,0,-1)$. Sejam $A = (-1,1,0) \in \pi$, $P = (x,y,z)$ e Q a projeção ortogonal de P em π. Tem-se

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AQ} + \lambda(1,0,-1)$$

Como $\overrightarrow{AQ}$ e $(1,0,-1)$ são ortogonais obtemos

$$\overrightarrow{AP} \cdot (1,0,-1) = \lambda(1,0,-1)(1,0,-1)$$

Verifica-se que $\overrightarrow{AP} = (x+1, y-1, z)$ e portanto

$$x + 1 - z = 2\lambda$$

Assim

$$Q = P + \overrightarrow{PQ} = (x,y,z) - \lambda(1,0,-1) = (x,y,z) - \frac{x-z+1}{2}(1,0,-1)$$

logo

$$Q = \left(\frac{x+z-1}{2}, y, \frac{x+z+1}{2}\right)$$

70. Num espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial ortonormado, considere-se r a recta afim definida pela equação vectorial
$$r = (0,0,-2)+ < (1,1,1) >$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3, 2-1)$ na recta r.
(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ na recta r.

(Resolução)

(a) Sejam $A = (0, 0, -2)$, $P = (3, 2, -1)$ e Q a projeção ortogonal de P na recta r. Tem-se
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1,1,1) + \overrightarrow{QP}$$
Como $\overrightarrow{QP}$ é ortogonal ao vector $(1,1,1)$, tem-se
$$\overrightarrow{AP} \cdot (1,1,1) = \lambda(1,1,1)\cdot(1,1,1)$$
donde $\lambda = 2$, já que $\overrightarrow{AP} = (3,2,1)$. Assim
$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1,1,1) = (0,0,-2) + 2(1,1,1) = (2,2,0)$$

(b) Sejam $A = (0, 0, -2)$, $P = (x, y, z)$ e Q a projeção ortogonal de P na recta r. Tem-se
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \lambda(1,1,1) + \overrightarrow{QP}$$
Como $\overrightarrow{QP}$ é ortogonal ao vector $(1,1,1)$, tem-se
$$\overrightarrow{AP} \cdot (1,1,1) = \lambda(1,1,1)\cdot(1,1,1)$$
Note-se que $\overrightarrow{AP} = (x, y, z+2)$ e portanto
$$x + y + z + 2 = 3\lambda$$
Assim
$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = A + \lambda(1,1,1) = (0,0,-2) + \frac{x+y+z+2}{3}(1,1,1)$$
donde
$$Q = (\frac{x+y+z+2}{3}, \frac{x+y+z+2}{3}, \frac{x+y+z-4}{3})$$

71. Num espaço euclidiano $\mathcal{A}$ de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado,, seja $\mathcal{U}$ o subespaço afim definido pela equação vectorial:
$$\mathcal{U} = (0,0,-1,1)+ < (1,0,2,0),(1,1,0,0) > .$$

Calcule a projeção ortogonal do ponto $P = (x, y, z, t)$ em $\mathcal{U}$. Calcule a distância entre $O = (0, 0, 0, 0)$ e $\mathcal{U}$.

(Resolução)

Seja $U =< (1, 0, 2, 0), (1, 1, 0, 0) >$. Sejam $A = (0, 0, -1, 1)$, $P = (x, y, z, t)$ e Q a projecção ortogonal de P em $\mathcal{U}$. Tem-se
$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$$
com $\overrightarrow{AQ} \in U$ e $\overrightarrow{QP} \in U^{\perp}$. Note-se que $\overrightarrow{AQ} = \lambda(1, 0, 2, 0) + \mu(1, 1, 0, 0)$ para algum $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ e, como $\overrightarrow{AP} = (x, y, z + 1, t - 1)$, então
$$\begin{aligned} (x,y,z+1,t-1)\cdot(1,0,2,0) &= \lambda(1,0,2,0)\cdot(1,0,2,0) + \mu(1,1,0,0)\cdot(1,0,2,0) \\ (x,y,z+1,t-1)\cdot(1,1,0,0) &= \lambda(1,0,2,0)\cdot(1,1,0,0) + \mu(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0) \end{aligned}$$
Resolve-se o sistema:
$$\begin{aligned} x + 2z + 2 &= 5\lambda + \mu \\ x + y &= \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

e obtém-se $\lambda = \dfrac{x-y+4z+4}{9}$ *e* $\mu = \dfrac{4x+5y-2z-2}{9}$ *Assim*

$$Q = A + \overrightarrow{AQ} = (0,0,-1,1) + \frac{x-y+4z+4}{9}(1,0,2,0) + \frac{4x+5y-2z-2}{9}(1,1,0,0)$$

donde

$$Q = \left(\frac{5x-4y+2z+2}{9}, \frac{4x+5y-2z-2}{9}, \frac{2x-2y+8z-1}{9}, 1\right)$$

A projecção ortogonal do ponto $O = (0,0,0,0)$ *é*

$$Q_O = (2/9, -2/9, -1/9, 1)$$

e então

$$d(O,\mathcal{U}) = d(O,Q_O) = \|\overrightarrow{OQ_O}\| = \|(2/9,-2/9,-1/9,1)\| = \frac{\sqrt{90}}{9}$$

72. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado calcule:

    (a) A distância do ponto $P = (1,1)$ à recta afim s definida pela equação cartesiana:

    $$x + y - 4 = 0$$

    (b) A distância do ponto $P = (1,1)$ à recta fim t definida pela equação vectorial:

    $$t = (1,0) + < (0,-3) >$$

    (c) A distância entre as rectas paralelas r e r' definidas pelas equações cartesianas:

    $$2x - 3y + 1 = 0 \qquad 2x - 3y = 0$$

(Resolução)

(a) Aplica-se a fórmula:

$$d(P,s) = \frac{|1+1-4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(b) Sejam $M = (1,0)$, $\overrightarrow{w} = (0,-3)$ *e* $P = (1,1)$. *Tem-se*

$$d(P,r) = \|\overrightarrow{MP}\| |\sin(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{MP})|$$

Como $\overrightarrow{MP} = (0,1)$ *vem que* $\|\overrightarrow{MP}\| = 1$, $\|\overrightarrow{w}\| = 3$ *e*

$$\cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w}) = \frac{-3}{3} = 1$$

Assim

$$d(P,r) = \|\overrightarrow{MP}\| \sqrt{1 - \cos(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{w})^2} = 0$$

Resolução alternativa: *A equação cartesiana de* t *é*

$$x - 1 = 0$$

Assim,

$$d(P,t) = \frac{1-1}{\sqrt{1}} = 0$$

(c) Considere-se o ponto $Q = (3,2) \in r'$. *Tem-se*

$$d(r,r') = d(r,Q) = \frac{1}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}/13$$

73. Num espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ ao plano afim π definido pela equação cartesiana:

$$x + 3y - z + 1 = 0$$

(b) a distância entre os planos paralelos π_1 e π_2 definidos pelas equações cartesianas:

$$y - 2z + 1 = 0 \qquad y - 2z + 3 = 0$$

(c) a distância do ponto $P = (1, 1, -1)$ à recta afim r definida pela equação vectorial:

$$r = (0, 0, 2) + < (0, 1, 1) >$$

(d) a distância entre as rectas paralelas r_1 e r_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$r_1 = (0, 0, 2) + < (0, 1, 1) > \qquad r_2 = (3, 3, 3) + < (0, 1, 1) >$$

(e) a distância entre as rectas enviesadas s_1 e s_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$s_1 = (0, 0, 2) + < (0, 1, 1) > \qquad s_2 = (3, 3, 3) + < (0, -1, 1) >$$

(Resolução)

(a) Aplica-se a fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{1 + 3 + 1 + 1}{\sqrt{1 + 3^2 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{11}}{11}$$

(b) Seja $Q = (0, -3, 0)$. Tem-se que $Q \in \pi_2$ e como π_1 e π_2 são paralelos

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1, Q) = \frac{|-3 + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(c) Sejam $A = (0, 0, 2)$ e $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1)$. Como $A \in r$ e $\overrightarrow{w}$ é um vector director de r tem-se

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{AP}\| |\sin(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{w})|$$

Note-se que $\overrightarrow{AP} = (1, 1 - 3)$, logo $\|\overrightarrow{AP}\| = \|(1, 1, -3)\| = \sqrt{11}$ e assim

$$\cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{w}) = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{AP}\| \|\overrightarrow{w}\|} = \frac{-2}{(\sqrt{11})(\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{22}}{11}$$

Finalmente,

$$d(P, r) = (\sqrt{11})\sqrt{1 - \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{w})^2} = \sqrt{11 - 2} = 3$$

(d) Sejam $A = (0, 0, 2)$, $B = (3, 3, 3)$ e $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1)$. Como r_1 e r_2 são rectas paralelas e $B \in r_2$ tem-se

$$d(r_1, r_2) = d(r_1, B) = \|\overrightarrow{AB}\| |\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w})|$$

Note-se que $\overrightarrow{AB} = (3, 3, 1)$, logo $\|\overrightarrow{AB}\| = \|(3, 3, 1)\| = \sqrt{19}$ e assim

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{AP}\| \|\overrightarrow{w}\|} = \frac{4}{(\sqrt{19})(\sqrt{2})} = 2\frac{\sqrt{38}}{19}$$

Obtemos então

$$d(P, r) = (\sqrt{19})\sqrt{1 - \cos(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{w})^2} = (\sqrt{19})\sqrt{1 - 4\frac{38}{19^2}} = \sqrt{19 - 8} = \sqrt{11}$$

(e) Sejam $R_1 = (0, 0, 2)$, $R_2 = (3, 3, 3)$, $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1)$ e $\overrightarrow{w} = (0, -1, 1)$. Verifica-se que

$$d(s_1, s_2) = \frac{|\det(\overrightarrow{R_1, R_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\|}$$

Como

$$\det(\overrightarrow{R_1, R_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 6$$

e

$$\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}\| = \|(0, 1, 1) \wedge ((0, -1, 1)\| = \|(2, 0, 0)\| = 2$$

obtém-se

$$d(s_1, s_2) = \frac{6}{2} = 3$$

9 Exercícios propostos

Para simplificar os enunciados, quando não houver ambiguidade, num espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão n munido de um referencial $\mathcal{R}$, se $A \equiv (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{R}}$, escrever-se-á $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Espaços afins, referenciais, espaços euclidianos.

1. Sejam A, B e C três pontos de um plano afim real tais que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ são linearmente independentes.

   (a) Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R} = \{A; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$, quais as coordenadas de A, B e C em $\mathcal{R}$?

   (b) Justifique que os vectores $\{1/3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{AC}\}$ também são linearmente independentes. Quais as coordenadas de A, B e C no referencial $\mathcal{R}' = \{A; (1/3\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{AC})\}$

   (c) Seja $D = A + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB})$. Quais as coordenadas de D nos referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$?

2. Sejam A, B e C três pontos de um plano afim real tais que $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ são linearmente independentes.

   (a) Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R} = \{B; (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\}$, quais as coordenadas de A, B e C em $\mathcal{R}$?

   (b) Se considerarmos o referencial afim $\mathcal{R}' = \{A; (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})\}$, quais as coordenadas de A, B e C em $\mathcal{R}$?
   (São $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AC}$ linearmente independentes?)

3. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (2, -1)_{\mathcal{R}}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 - 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = 3\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

4. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (2, -1)_{\mathcal{R}}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_1 - 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = 3\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

5. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $M \equiv (1, 3)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (0, -2)_{\mathcal{R}}$;

- $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 &= -\overrightarrow{v}_1 &+ &2\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 &= \overrightarrow{v}1 &+ &\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

6. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 &= -\overrightarrow{v}_1 &+ &2\overrightarrow{v}_2 & \\ \overrightarrow{v}'_2 &= \overrightarrow{v}1 &+ &\overrightarrow{v}_2 & \\ \overrightarrow{v}'_3 &= \overrightarrow{v}_1 & & &-2\overrightarrow{v}_3 \end{cases}$

7. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 &= -\overrightarrow{v}_1 &+ &2\overrightarrow{v}_2 & \\ \overrightarrow{v}'_2 &= \overrightarrow{v}1 &+ &\overrightarrow{v}_2 & \\ \overrightarrow{v}'_3 &= \overrightarrow{v}_1 & & &-2\overrightarrow{v}_3 \end{cases}$

8. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

   - $O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 &= 2\overrightarrow{v}_1 &- &3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 &= & &3\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

9. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que:

   - $O' \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}}$;
   - $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 &= \overrightarrow{v}'_1 &- &3\overrightarrow{v}'_2 \\ \overrightarrow{v}_2 &= & &2\overrightarrow{v}'_2 \end{cases}$

10. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2, \overrightarrow{v}'_3)\}$ dois referenciais de um espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $M \equiv (1, 0, -1)_{\mathcal{R}}$ sabendo que:

    - $O' \equiv (0, 0, -2)_{\mathcal{R}}$;

- $$\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 &= 2\overrightarrow{v}'_1 &+ 2\overrightarrow{v}'_2 &- \overrightarrow{v}'_3 \\ \overrightarrow{v}_2 &= \overrightarrow{v}1' &+ 2\overrightarrow{v}'_2 & \\ \overrightarrow{v}_3 &= 2\overrightarrow{v}'_1 & &- \overrightarrow{v}'_3 \end{cases}$$

11. Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$. Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (x'_1, x'_2)_{\mathcal{R}'}$ sabendo que existem três pontos A, B e C verificando:

$$\begin{array}{lclcl} A & \equiv & (1,1)_{\mathcal{R}} & \qquad A \equiv & (0,-1)_{\mathcal{R}'} \\ B & \equiv & (0,-2)_{\mathcal{R}} & \qquad B \equiv & (1,-1)_{\mathcal{R}'} \\ C & \equiv & (1,0)_{\mathcal{R}} & \qquad C \equiv & (0,2)_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

12. Determine se é possível resolver o exercício anterior no caso em que

$$\begin{array}{lclcl} A & \equiv & (0,1)_{\mathcal{R}} & \qquad A \equiv & (1,-1)_{\mathcal{R}'} \\ B & \equiv & (0,-2)_{\mathcal{R}} & \qquad B \equiv & (1,-1)_{\mathcal{R}'} \\ C & \equiv & (0,3)_{\mathcal{R}} & \qquad C \equiv & (2,-1)_{\mathcal{R}'} \end{array}$$

13. *O cruel general Bum-Bum*[9]

    Era uma vez uma guerra terrível entre os Bonzinhos e os Mauzinhos. O cruel general Bum-Bum dirigia os exércitos dos Mauzinhos, escondido num local desconhecido dos Bonzinhos. Um dia histórico, os serviços de espionagem dos Bonzinhos interceptaram a seguinte mensagem, enviada pelo general Bum-Bum ..

    "como a Infantaria está colocada no ponto (2,0), a Cavalaria no ponto (0,1), vamos situar a Artilharia no ponto (1,1) ..."

    Um pouco mais tarde, o piloto mais audaz dos Bonzinhos chega ao quartel geral e diz ..

    "Venho de sobrevoar o terreno inimigo. Descobri que a Infantaria inimiga está no ponto $(2,3)$, a Cavalaria no ponto $(4,2)$ e Artilharia acaba de chegar ao ponto $(3,2)$!"

    Estes dados bastavam para um estudante de CC, do exército dos Bonzinhos, evidentemente, calcular a posição do mais mauzinho dos Mauzinhos: o general Bum-Bum.

14. Escreva a expressão matricial da mudança de coordenadas num espaço afim de dimensão n.

15. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de $\mathcal{A}$. Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ definido por:

    - $O \equiv (1,-1)_{\mathcal{R}'}$;
    - $$\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 &= 2\ \overrightarrow{e}_1 &+ \overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{v}_2 &= \quad \overrightarrow{e}_1 &+ \overrightarrow{e}_2 \end{cases}$$

[9] Tradução livre de um exercício do livro *Álgebra Lineal y Geometría Analítica*, de M. Castellet e I. Llerena, Editorial Reverté, Barcelona (1992)

A base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ é uma base ortogonal? O referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado? Os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ definem a mesma orientação?

16. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano. Seja $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)\}$ um referencial ortonormado de $\mathcal{A}$. Considere-se o referencial $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ definido por:

    - $O \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}'}$;
    - $\begin{cases} \overrightarrow{v}_1 &= \sqrt{2}/2\overrightarrow{e}_1 + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e}_2 \\ \overrightarrow{v}_2 &= -\sqrt{2}/2\overrightarrow{e}_1 + \sqrt{2}/2\overrightarrow{e}_2 \end{cases}$

    A base $(\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)$ é uma base ortogonal? O referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado? Os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ definem a mesma orientação? Determine as coordenadas, no referencial $\mathcal{R}$, do ponto $M \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}'}$ e, no referencial $\mathcal{R}'$, do ponto $N \equiv (2, -2)_{\mathcal{R}}$.

17. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ tais que os vectores da base associada são unitários mas $\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 1/4$.

    Determine a distância entre os pontos $A \equiv (0, 1)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-2, 0)_{\mathcal{R}}$. Qual seria o valor de $d(A, B)$ se o referencial $\mathcal{R}$ fosse ortonormado?

18. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (-1, 1)$ e $B = (0, 1)$. Calcule a distância $d(A, B)$. Determine se o ponto $M = (-1, -3)$ pertence ao segmento $\overline{AB}$.

19. Sejam A, B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A, C) = 3$, $d(A, B) = 1$ e $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1/3$. Calcule $d(B, C)$.

20. Seja $\mathcal{A}$ um plano euclidiano munido de um referencial ortonormado com origem O. Determine o $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ se

    (a) $A = (1, 1)$, $B = (1, -2)$;
    (b) $A = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $B = (1, -1)$.

    Indique se o triângulo ΔAOB é rectângulo.

21. Seja $\mathcal{A}$ um espaço euclidiano munido de um referencial ortonormado com origem O. Determine o $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ se

    (a) $A = (0, -1, 1)$, $B = (1, 0, -2)$;
    (b) $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 2, 1)$;
    (c) $A = (1, -1, 0, 0)$, $B = (-3, 1, 1, -2)$.

22. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial ortonormado com origem O, determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vêrtices O, $A = (2, 0, -1)$ e $B = (1, 1, 0)$.

23. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado com origem O, determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vêrtices $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 1)$ e $C = (1, 3, 2)$.

24. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$, com $\overrightarrow{v}_i$ vectores unitários para $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0, \quad \overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_3 = 1/4, \quad \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_3 = 1/2$$

Determine a área do paralelogramo e a área do triângulo com vêrtices O, $A = (2, 0, -1)$ e $B = (1, 1, 0)$.

25. No plano afim orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O, determine o seno e o cosseno do ângulo orientado formado pelos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, nesta ordem. Represente geometricamente.

    (a) $A = (0, 2)$, $B = (1, -1)$;
    (b) $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$.

26. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O, calcule o volume do paralelepípedo com vértices O,$A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (0, 2, 0)$.

27. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial $\{O; \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \overrightarrow{v}_3\}$, com $\overrightarrow{v}_i$ vectores unitários para $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2 = 0, \quad \overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_3 = 1/4, \quad \overrightarrow{v}_2 \cdot \overrightarrow{v}_3 = 1/2$$

Determine o volume do paralelepípedo com vértices O,$A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 0, -3)$ e $C = (0, 2, 0)$.

28. Num espaço afim tridimensional orientado munido de um referencial ortonormado directo com origem O, determine um vector perpendicular aos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

    (a) $A = (1, 0, 2)$, $B = (1, 2, -1)$;
    (b) $A = (3, 1, 1)$, $B = (1, 0, -1)$.

    Calcule a área do paralelogramo formado por esses vectores. Calcule ainda o volume do paralelepípedo formado por esses vectores e o vector $\overrightarrow{OC}$, com $C = (0, 0, -4)$.

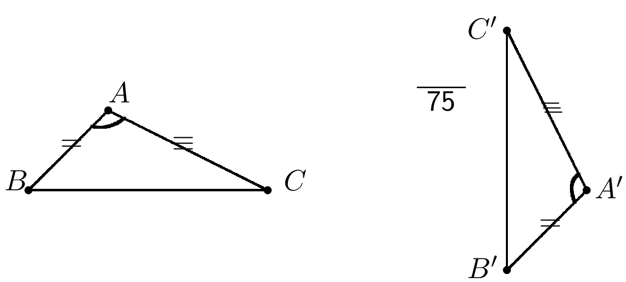
29. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado. Considerem-se os pontos $A = (3, 1)$ e $B = (0, 0)$. Calcule a distância $d(A, B)$. Determine se o ponto $M = (6, 2)$ pertence ao segmento $\overline{AB}$.

30. Sejam A, B e C pontos de um espaço afim euclidiano. Sabe-se que $d(A, C) = 3$, $d(A, B) = 4$ e $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1/4$. Calcule $d(B, C)$.

31. *Critério LAL de congruência de triângulos*

    Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos de um plano afim euclidiano. Se $d(A, B) = d(A', B')$, $d(B, C) = d(B', C')$ e $\angle ABC = \angle A'B'C'$ então

$$d(B, C) = d(B', C'), \qquad \angle BCA = \angle B'C'A', \quad \text{e} \quad \angle CAB = \angle C'A'B'.$$



32. *Critério ALA de congruência de triângulos*

    Sejam $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ dois triângulos de um plano afim euclidiano. Prove que, se $d(A,B) = d(A',B')$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ e $\angle CAB = \angle C'A'B'$ então

    $$d(B,C) = d(B',C'), \qquad d(C,A) = d(C',A'), \quad \text{e} \quad \angle BCA = \angle B'C'A'.$$

Rectas, planos, paralelismo.

33. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Considere os seguintes subespaços afins de $\mathcal{A}$:

    $\mathcal{U}_1 = (-2,-1,0)+ < (1,0,-1),(1,-1,0) >$;

    $\mathcal{U}_2 = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ / \ x+y+z+3 = 0\}$;

    $\mathcal{U}_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ / \ y = 3-3x, z = x\}$;

    $\mathcal{U}_4 = (1,0,0)+ < (2,-2,0) >$;

    $\mathcal{U}_5 = (3,-2,0)+ < (1,-1,0),(-2,2,0) >$

    Indique os subespaços vectoriais associados. Calcule as equações vectoriais e indique a dimensão do subespaço. Calcule as equações cartesianas dos planos. Determine $\mathcal{U}_4 \cap \mathcal{U}_1$.

34. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim que passa pelo ponto $A = (2,2)$ e tem como vector director $\overrightarrow{v} = (3,-1)$. Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta. Represente graficamente.

35. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta afim que passa pelos pontos $A = (10,-2)$ e $B = (0,3)$. Represente graficamente.

36. Num plano afim real $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pela equação cartesiana

    $$x - 3y - 1 = 0$$

    Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

37. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelo ponto $A = (1,2,3)$ e tem como vector director $\overrightarrow{v} = (3,-1,4)$.

38. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule as equações paramétricas dos planos pelas equações cartesianas indicadas de seguida:

    (a) $2x - 3z - 1 = 0$;

    (b) $3y - 2z = 0$;

(c) $x + y + z - 4 = 0$.

39. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial calcule as equações cartesianas dos planos pelas equações vectoriais indicadas de seguida:

    (a) $(0,1,1)+ < (1,0,-1),(0,2,0) >$;
    (b) $(0,0,0)+ < (2,1,0),(1,0,0) >$.

40. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os planos π_1 e π_2 definidos pelas equações vectoriais:

$$\pi_1 = (-1,0,1)+ < (1,0,-1),(0,2,0) >$$

$$\pi_2 = (0,0,0)+ < (-2,1,2),(3,1,-3) >$$

São π_1 e π_2 planos coincidentes? Justifique.

41. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule as equações paramétricas e o sistema de equações cartesianas que definem a recta afim que passa pelos pontos $A = (0,2,2)$ e $B = (0,0,0)$.

42. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial $\mathcal{R}$ calcule a equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} 1/3y - 2z - 1 &= 0 \\ 1/2x + z &= 0 \end{cases}$$

Determine dois pontos distintos que incidam nesta recta.

43. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere o ponto $A = (0,-1,0)$. Determine as equações paramétricas e a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto A e está associado ao plano vectorial $< (1,1,1),(-2,1,2) >$.

44. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial considere os pontos:

$$A = (2,0,2) \qquad B = (2,-2,0) \qquad C = (-2,0,0)$$

Justifique que $\{A, B, C\}$ são vértices de um triângulo. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim π definido por A, B e C.

45. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere o subespaço afim definido pelo sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2y - z + 1 &= 0 \\ 3y - 9 &= 0 \end{cases}$$

Calcule as equações paramétricas do subespaço.

46. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere o subespaço afim definido pelo sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y - z + 1 & = & 0 \\ 3y - 9 & = & 0 \\ x - 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

Calcule as equações paramétricas do subespaço.

47. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a intersecção do plano afim definido pela equação cartesiana

$$y - 5 = 0$$

e a recta incidente no ponto $A = (1, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1)$.

48. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a interseção do plano afim definido pela equação cartesiana

$$x + y + z - 1 = 0$$

e a recta incidente no ponto $A = (0, 0, 1)$ e dirigida pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 0, 1)$.

49. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, calcule a intersecção do plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (0, -2, 1) + < (3, 0, 0), (0, 3, 3) >$$

e da recta r definida pelas equações cartesianas

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y - 1 & = & 0 \\ x + 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

50. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & (1, 2, 3) + < (2, 1, 0) > \\ r_2 & = & (0, 2, -1) + < (1, -1, 0) > \end{array}$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas complanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de $\mathcal{A}$ que contem tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

51. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Sejam r_1 e r_2 as rectas definidas por:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & (1, 2, 3) + < (2, 1, 0) > \\ r_2 & = & (0, 2, 3) + < (1, -1, 0) > \end{array}$$

Calcule $r_1 + r_2$. São r_1 e r_2 rectas complanares ou enviesadas? isto é, existe ou não um plano afim de $\mathcal{A}$ que contem tais rectas? Se existir, calcule a equação cartesiana.

52. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim tridimensional munido de um referencial. Calcule a equação cartesiana do plano afim de $\mathcal{A}$ que contém o ponto $B = (1, 1, 1)$ e a recta $r =< (1, 0, 1) >$. Qual a equação cartesiana do plano vectorial associado?

53. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão 7 munido de um referencial. Calcule as equações paramétricas da recta de $\mathcal{A}$ que incide nos pontos
$$A = (1, -1, 0, 0, 0, 2, -2) \qquad \text{e} \qquad B = (0, 3, 0, 4, 3, 4, 0).$$

54. Considere, num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial, o conjunto $\mathcal{U}$ definido por
$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} \ : \ x + y - 2t = 1\}$$
É um subespaço afim? Qual a dimensão? Determine uma equação vectorial e umas equações paramétricas.

55. Num espaço afim de $\mathcal{A}$ associado a um espaço vectorial E de dimensão 4, munido de um referencial, determine a equação cartesiana do hiperplano afim associado ao hiperplano vectorial
$$H = \{(x, y, z, t) \in E \ : \ 2z - 3t = 0\}$$
que incide no ponto $A = (1, 4, 1, 0)$. Determine também uma equação vectorial de tal hiperplano.

56. Num espaço afim $\mathcal{A}$ asssociado a um espaço vectorial E de dimensão n, munido de um referencial, determine a equação cartesiana do hiperplano associado ao hiperplano vectorial
$$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E \ : \ x_1 + 2x_2 = 0\}$$
que incide no ponto $A = (1, 1, \ldots, 1)$.

57. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial:
    (a) Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano afim paralelo a $\pi = (1, 0, 1) + < (2, 0, 1), (0, 1, -1) >$ incidente no ponto $A = (-1, 0, 5)$.
    (b) Calcule a equação cartesiana do plano afim paralelo ao plano de equação $3x - y + 4z = 0$ que incide no ponto $B = (1, 0, 1)$. Quais as equações paramétricas deste plano?
    (c) Calcule uma equação vectorial e as equações paramétricas da recta afim paralela à recta $< A, B >$ que incide no ponto $C = (1, -1, -1)$.

58. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial, considere o conjunto $\mathcal{U}$ definido como
$$\mathcal{U} = \{(x, y, z) \in \mathcal{A} \ : \ x + y = 0 \ \wedge \ y - 2z + 1 = 0\}$$
Calcule uma equação vectorial de $\mathcal{U}$ e indique a dimensão. Determine o subespaço afim paralelo a $\mathcal{U}$ e incidente em $(0, 0, 0)$.

59. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere as rectas afins $r_1 = (0, 0, 2) + < (1, 2, 0) >$ e $r_2 =< (1, -2, 0) >$. Calcule uma equação vectorial e uma equação cartesiana do plano paralelo às rectas r_1 e r_2 que incide no ponto $M = (0, 0, -3)$.

60. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão 5 associado a um espaço vectorial E e munido de um referencial. Considere o subespaço afim $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ definido por
$$\mathcal{U} = \{(x, y, z, t, u) \in \mathcal{A} \ : \ x - 2u = 0 \ \wedge \ 2y + z - 2t + 3 = 0\}$$
Determine o subespaço vectorial associado a $\mathcal{U}$. Determine o subespaço afim $\mathcal{U}'$ paralelo a $\mathcal{U}$, da mesma dimensão, que incide no ponto $(-2, 0, 0, 1, 0)$.

61. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial, considere as rectas afins r_1 e r_2 definidas por:

$$r_1 \equiv (0,0,2)+ < (1,1,0) > \qquad r_2 \equiv (0,0,3)+ < (1,-1,0) >$$

(a) qual a dimensão de $r_1 + r_2$? são rectas enviesadas?

(b) indique a equação vectorial e a equação cartesiana do plano afim paralelo às rectas r_1 e r_2 e incidente no ponto (0,0,5);

(c) indique a equação da recta s paralela à recta r_1 incidente no ponto $(1,1,-1)$;

(d) são as rectas r_1 e s complanares? Se forem, indique a equação cartesiana do plano que definem.

62. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial, consideramos as rectas afins $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ definidas por:

$$\mathcal{L}_1 \equiv (1,2,4)+ < (1,1,0) >$$

$$\mathcal{L}_2 = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} : z = 0 \wedge x + y = 2\}$$

Calcule uma equação vectorial de $\mathcal{L}_2$. Justifique que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são rectas enviesadas. Calcule a equação vectorial e a equação cartesiana do plano afim incidente no ponto $P = (0,0,-1)$ e paralelo a $\mathcal{L}_1$ e a $\mathcal{L}_2$.

63. Num espaço afim tridimensional $\mathcal{A}$ munido de um referencial, considere a recta afim definida por:

$$\mathcal{L} = \{(x,y,z) \in \mathcal{A} \ : \ x + y = 1 \text{ e } x - y = 1\}$$

Calcule a equação vectorial desta recta. Seja π o plano afim que contém $\mathcal{L}$ e incide no ponto $(2,0,0)$. Indique a equação vectorial e a equação cartesiana de π. Dê um exemplo de recta $\mathcal{L}'$ tal que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ são enviesadas.

64. Num espaço afim tridimensional munido de um referencial,

(a) Indique a equação vectorial e a equação cartesiana do plano π paralelo à recta $r \equiv (0,0,1)+ < (-1,1,0) >$ e incidente com a recta s definida pelos pontos $A = (0,0,2)$ e $B = (0,0,3)$.

(b) Considere um plano de equação cartesiana $2x + y - z + 1 = 0$ e indique a equação cartesiana do plano paralelo ao anterior e incidente em $(0,0,0)$.

(c) Justifique sucintamente se os planos afins $\pi = (0,0,1)+ < (1,1,1),(1,-1,0) >$ e $\pi' = (2,2,3)+ < (0,2,1),(1,1,1) >$ são ou não iguais;

(d) Indique duas rectas afins enviesadas r' e r'' tais que r' esté contida no plano afim $z - 4 = 0$.

65. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial. Sejam A, B e C os pontos de $\mathcal{A}$:

$$A = (1,1,0,-2) \qquad B = (2,1,0,-3) \qquad C = (0,1,0,+1)$$

Indique a equação vectorial do plano afim $\mathcal{U}$ de $\mathcal{A}$ que contem A, B e C. Considere também o subespaço afim $\mathcal{V}$:

$$\mathcal{V} = \{(x, y, z, t) \in \mathcal{A} \ : \ x + y + t = 0\}$$

Indique uma equação vectorial de $\mathcal{V}$. Qual a dimensão de $\mathcal{V}$? São $\mathcal{V}$ e $\mathcal{U}$ paralelos? são iguais? Justifique sucintamente.

66. Sejam $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ e $\mathcal{H}'$ os hiperplanos de um espaço afim $\mathcal{A}$ de dimensão 4 (munido de um referencial) definidos pelas equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv & x + 2y + z - t = 0 \\ \mathcal{H}' &\equiv & 2x + 4y + 2z - 2t + 1 = 0 \\ \mathcal{H}'' &\equiv & -3x - 6y - 3z + 3t - 1 = 0 \end{aligned}$$

São hiperplanos paralelos? São disjuntos? Justifique.

Ortogonalidade, problemas métricos.

67. No espaço vectorial $\mathbf{R}^n$, munido do produto escalar usual, determine o produto escalar dos vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(a) $\overrightarrow{v} = (-1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (2, -5)$;
(b) $\overrightarrow{v} = (3, -1, 1/2)$, $\overrightarrow{w} = (4, 0, -8)$;
(c) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (6, -6, 8)$;
(d) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 2, -1)$, $\overrightarrow{w} = (-3, 0, 1, -6)$.

68. No espaço vectorial $\mathbf{R}^n$, munido do produto escalar usual, determine o complemento ortogonal da recta vectorial gerada pelo vector $\overrightarrow{v}$.

(a) $\overrightarrow{v} = (0, 4)$;
(b) $\overrightarrow{v} = (3, -2)$;
(c) $\overrightarrow{v} = (4, -1, 2/3)$;
(d) $\overrightarrow{v} = (1/8, -1/4, 2)$;
(e) $\overrightarrow{v} = (-5, -3, 1, -3)$.

69. No espaço vectorial $\mathbf{R}^n$, munido do produto escalar usual, determine o complemento ortogonal do plano vectorial gerado pelos vectores $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$.

(a) $\overrightarrow{v} = (2, -1, 0)$, $\overrightarrow{w} = (1, 0 - 2)$;
(b) $\overrightarrow{v} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{w} = (3, 3, 3)$;
(c) $\overrightarrow{v} = (1/3, -1/3, 0, 1/3)$, $\overrightarrow{w} = (0, 1, 1, -2)$.

70. No espaço vectorial $\mathbf{R}^2$, munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$, se $\overrightarrow{v} = (2, -3)$ e $\overrightarrow{w} = (5, 1)$.

71. No espaço vectorial $\mathbf{R}^2$, munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$, se $\overrightarrow{v} = (x, y)$ e $\overrightarrow{w} = (5, 1)$.

72. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$, se $\overrightarrow{v} = (1, 0, 3)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 2, 2)$.

73. No espaço vectorial $\mathbf{R}^2$, munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ na recta vectorial $< \overrightarrow{w} >$, se $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ e $\overrightarrow{w} = (2, 2, 2)$.

74. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ e W está definido pela equação vectorial
$$W =< (4, 1, 2) >$$

75. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ e W está definido pela equação vectorial
$$W =< (4, 1, 2) >$$

76. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (0, 0, 4)$ e W está definido pela equação vectorial
$$W =< (0, 1, 2), (1, 1, -1) >$$

77. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ e W está definido pela equação vectorial
$$W =< (0, 1, 2), (1, 1, -1) >$$

78. No espaço vectorial $\mathbf{R}^4$, munido do produto escalar usual, determine a projecção ortogonal do vector $\overrightarrow{v} = (x, y, z, t)$ na recta vectorial gerada pelo vector $\overrightarrow{w} =< (1, 0, -1, 0) >$.

79. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual,determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$ e W está definido pela equação cartesiana
$$x - z = 0$$

80. No espaço vectorial $\mathbf{R}^3$, munido do produto escalar usual, determine a projeção ortogonal do vector $\overrightarrow{v}$ no subespaço vectorial W, se $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ e W está definido pela equação cartesiana
$$x - z = 0$$

81. No espaço vectorial $\mathbf{R}^2$, munido do produto escalar usual, determine uma base ortonormada do subespaço vectorial W definido pela equação cartesiana
$$2x + y = 0$$

82. Seja $\mathcal{A}$ um plano afim euclidiano munido de um referencial ortonormado.

(a) Determine a recta s_1 perpendicular à recta r_1 definida pela equação vectorial:

$$r_1 = (2,0) + < (2,-2) >$$

e que incide no ponto $P_1 = (1,4)$.

(b) Determine a recta s_2 perpendicular à recta r_2 definida pela equação cartesiana:

$$-2x + 3y - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P_2 = (-1,5)$.

83. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule a recta r perpendicular ao plano π definido pela equação cartesiana:

$$2x + y - z + 4 = 0$$

e que incide no ponto $P = (-1,1,1)$.

(b) Calcule a recta r' perpendicular ao plano π' definido pela equação vectorial:

$$\pi' = (1,0,1) + < (2,0,0), (-1,-1,3) >$$

e que incide no ponto $P' = (1,-1,0)$.

84. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule o plano π perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1,1,0) + < ((1,1,-1) >$$

e que incide no ponto $P = (2,0,-1)$.

(b) Calcule o plano π' perpendicular à recta s' definida pelas equações cartesianas:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 & = & 0 \\ -x + 2y + z & = & 0 \end{cases}$$

e que incide no ponto $P = (5,0,-1)$.

85. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado considere as rectas afins:

$$r = (1,0,-2) + < (2,-2,1) >$$

$$s = < (0,2,1) >$$

Calcule a recta t perpendicular a r e a s que incide no ponto $M = (0,3,0)$.

86. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim de dimensão quatro munido de um referencial ortonormado.

(a) Calcule a recta r perpendicular ao hiperplano $\mathcal{H}$ definido pela equação cartesiana:

$$x + y + 3z - 1 = 0$$

e que incide no ponto $P = (0, 1, -2, 0)$.

(b) Calcule o hiperplano $\mathcal{H}'$ perpendicular à recta s definida pela equação vectorial:

$$s = (1, 5, -1, 1)+ < (1, -2, -2, 0) >$$

e que incide no ponto $P' = (0, 1, -2, 0)$.

87. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule a perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r = (0, -1, -2)+ < (1, 0, 1) > \qquad s = (2, 0, 0)+ < (2, 0, -1) >$$

88. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado. Calcule os pés da perpendicular comum às rectas enviesadas:

$$r =< (2, 1, -1) > \qquad s = (0, 1, 0)+ < (1, 0, 1) >$$

89. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (4, -1)+ < (2, -1) >$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (-3, 0)$ na recta r.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y)$ na recta r

90. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação cartesiana

$$y - 5 = 0$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (2, 2)$ na recta r.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y)$ na recta r.

91. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja π o plano afim definido pela equação vectorial

$$\pi = (0, 0, 5)+ < (-1, 2, 0), (1, 0, -1) >$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (0, 2 - 1)$ no plano afim π.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ no plano afim π.

92. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja π o plano afim definido pela equação cartesiana

$$x + y + z + 1 = 0$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (3, 2 - 1)$ no plano afim π.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ no plano afim π.

93. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, seja r a recta afim definida pela equação vectorial

$$r = (1, 0, -2) + < (2, 0, 0) >$$

(a) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (-1, 2 - 1)$ na recta r.

(b) Calcule a projecção ortogonal do ponto $P = (x, y, z)$ na recta r.

94. Num espaço euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado, seja $\mathcal{U}$ o subespaço afim definido pela equação vectorial:

$$\mathcal{U} = (2, 0, 0, 1) + < (0, 1, -1, 0), (-1, -1, 0, 0) > .$$

Calcule a projeção ortogonal do ponto $P = (x, y, z, t)$ em $\mathcal{U}$.

95. Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta afim s definida pela equação cartesiana:

$$3x + y + 5 = 0$$

(b) A distância do ponto $P = (1, 1)$ à recta fim t definida pela equação vectorial:

$$t = (1, -2) + < (1, -3) >$$

(c) A distância entre as rectas paralelas r e r' definidas pelas equações cartesianas:

$$x - 4y + 1 = 0 \qquad x - 4y = 0$$

96. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, calcule:

(a) a distância do ponto $P = (2, 0, -1)$ ao plano afim π definido pela equação cartesiana:

$$5x + y - 4z + 2 = 0$$

(b) a distância entre os planos paralelos π_1 e π_2 definidos pelas equações cartesianas:

$$x + 3z - 2 = 0 \qquad 2x + 6z + 1 = 0$$

(c) a distância do ponto $P = (2, 0, -1)$ à recta afim r definida pela equação vectorial:

$$r = (1, 1, 0) + < (0, -2, 1) >$$

(d) a distância entre as rectas paralelas r_1 e r_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$r_1 = (-1, 0, 3) + < (1, -1, 1) > \qquad r_2 = (0, 0, 4) + < (1, -1, 1) >$$

(e) a distância entre as rectas enviesadas s_1 e s_2 definidas pelas equações vectoriais:

$$s_1 = (-1, 0, 2)+ < (1, -1, 1) > \qquad s_2 = (0, 0, 4)+ < (2, 0, 0) >$$

97. Num espaço euclidiano tridimensional munido de um referencial ortonormado, calcule

(a) o ângulo formado pelas rectas r e s definidas pelas equações vectoriais:

$$r = (-2, 1, 0)+ < (4, 1, -4) > \qquad s = (2, 0, 1)+ < (-3, 0, -2) >$$

(b) o ângulo formado pela recta t e o plano π, se

$$t = (6, 0, -3)+ < (2, 0, -2) >$$

e π está definido pela equação cartesiana:

$$z - 5 = 0$$

(c) o ângulo formado pelos planos π_1 e π_2 definidos, respectivamente, pelas equações cartesianas:

$$2x - z - 1 = 0 \qquad 3x + +y + z - 1 = 0$$

98. Seja $\mathcal{A}$ um espaço afim euclidiano de dimensão 4 munido de um referencial ortonormado. Seja $\mathcal{U}$ o subespaço afim definido pelo sistema de equações cartesianas:

$$x + y - z + 2 = 0 \qquad x + z - 2t - 1 = 0$$

(a) Determine a dimensão de $\mathcal{U}$, o subespaço perpendicular a $\mathcal{U}$ que incide em $P = (0, 2, 0, 0)$.

(b) Determine a distância entre P e $\mathcal{U}$.

99. Considere duas rectas r_1 e r_2 de um plano euclidiano definidas, num referencial ortonormado, pelas equações

$$r_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$r_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Seja θ o ângulo formado pelas rectas. Verifique que:

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Deduza que duas rectas são perpendiculares se e só se $A_1A_2 + B_1B2 = 0$.

100. *Primeira Chamada 2006/2007*

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$ verificando:

- $O' \equiv (0, 2)_{\mathcal{R}}$;

- $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 3\overrightarrow{v}_1 \\ \overrightarrow{v}'_2 = -2\overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

(a) Determine a expressão matricial da mudança de coordenadas entre os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Calcule as coordenadas no referencial $\mathcal{R}'$ dos pontos $A \equiv (1,2)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-1,3)_{\mathcal{R}}$.

(b) Determine, no referencial $\mathcal{R}$, as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta r definida pelos pontos A e B. Seja s a recta paralela a r que passa pelo origem de coordenadas O. Qual a equação cartesiana de s no referencial $\mathcal{R}'$?

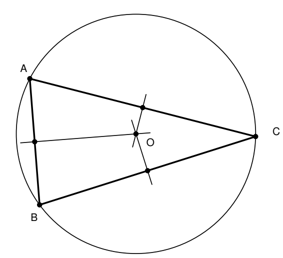
(c) Suponha o referencial $\mathcal{R}$ ortonormado. Qual a distância $d(A,B)$? O referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado?

(d) Suponha o referencial $\mathcal{R}$ ortonormado. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana (no referencial $\mathcal{R}$) da recta perpendicular a r que passa pelo ponto $E \equiv (4,1)_{\mathcal{R}}$.

101. *Primeira Chamada 2006/2007*

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo de um plano euclidiano. Considere A', B' e C' os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ e $\overline{AB}$, respectivamente e $m_{A'}$, $m_{B'}$ e $m_{C'}$ as mediatrizes do triângulo, isto é,

- a recta $m_{A'}$ perpendicular a $\overline{BC}$ e que passa por A';
- a recta $m_{B'}$ perpendicular a $\overline{CA}$ e que passa por B';
- a recta $m_{C'}$ perpendicular a $\overline{AB}$ e que passa por C'.



Suponha que as mediatrices $m_{A'}$ e $m_{B'}$ intersectam-se num ponto O.

(a) Prove, usando o Teorema de Pitágoras, que

$$d(O,A) = d(O,C) \quad \text{e} \quad d(O,B) = d(O,C)$$

Prove ainda que o ponto O também pertence à mediatriz $m_{C'}$. O ponto O diz-se *circuncentro* do triângulo de vértices A, B e C.

(b) Justifique o seguinte enunciado:

"Dado um triângulo de um plano euclidiano, existe uma única circunferência que passa pelos vértices do triângulo (chamada a circunferência circunscrita*) cujo centro é o circuncentro do triângulo".*

(c) Num plano euclidiano munido de um referencial ortonormado, determine o centro e o raio da circunferência que passa pelos pontos:

$$A = (1,0), \qquad B = (1,1) \qquad \text{e} \qquad C = (2,0)$$

102. *Segunda Chamada 2006/2007*

Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real $\mathcal{A}$ verificando:

- $O' \equiv (1,1)_{\mathcal{R}}$;
- $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 = 2\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 = -\overrightarrow{v}_1 \end{cases}$

(a) Determine a expressão matricial da mudança de coordenadas entre os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$. Calcule as coordenadas no referencial $\mathcal{R}'$ dos pontos $A \equiv (1,0)_{\mathcal{R}}$ e $B \equiv (-1,-1)_{\mathcal{R}}$.

(b) Determine, no referencial $\mathcal{R}$, as equações paramétricas e a equação cartesiana da recta r definida pelos pontos A e B. Seja s a recta paralela a r que passa pelo origem de coordenadas O. Qual a equação cartesiana de s no referencial $\mathcal{R}'$?

(c) Suponha o referencial $\mathcal{R}$ ortonormado. Qual a distância $d(A,B)$? O referencial $\mathcal{R}'$ é um referencial ortonormado?

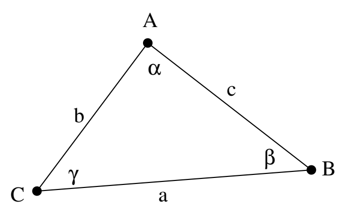
(d) Suponha o referencial $\mathcal{R}$ ortonormado. Indique uma equação vectorial e uma equação cartesiana (no referencial $\mathcal{R}$) da recta perpendicular a r que passa pelo ponto $E \equiv (0,3)_{\mathcal{R}}$.

103. *Segunda Chamada 2006/2007*

Sejam A, B e C os vértices de um triângulo do plano euclidiano. Considere:

$$a = d(B,C), \quad b = d(C,A), \quad c = d(A,B)$$

$$\alpha = \angle\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}, \quad \beta = \angle\{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\} \quad \text{e} \quad \gamma = \angle\{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\}$$



(a) Prove o teorema dos Cossenos, isto é, prove que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(b) Verifique que se o triângulo é isósceles, isto é, se $b = c$ então $\cos\beta = \cos\gamma$.

(c) Prove uma das seguintes igualdades:

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha, \quad b = a\cos\gamma + c\cos\alpha, \quad a = b\cos\gamma + c\cos\beta.$$

Deduza que se $\cos\beta = \cos\gamma$ então $b = c$ (isto é, o triângulo é isósceles).
(Sugestão: use as igualdades anteriores para obter $c - b = (b-c)\cos\alpha + a(\cos\beta - \cos\gamma)$)

(d) Sejam B e C dois pontos não diametralmente opostos de uma circunferência com centro A. Se M é o ponto médio entre B e C, prove que a recta que passa por M e A é perpendicular ao segmento $\overline{BC}$.

104. *Testes 2007/2008 (Exercícios relativos à Parte I)*

(a) Num espaço afim de dimensão 4 munido de um referencial $\mathcal{R}$ considere a recta r que passa pelo ponto $A = (1, 0, 0, 1)_{\mathcal{R}}$ e está dirigida pelo vector $\overrightarrow{v} = (0, 1, 1, 2)$ e o hiperplano afim $\mathcal{U}$ definido, no referencial $\mathcal{R}$, pela equação cartesiana:

$$x + z + 2t - 1 = 0$$

Determine as equações cartesianas de r neste referencial. Calcule a intersecção $r \cap \mathcal{U}$.

(b) Sejam $\mathcal{R} = \{O, (\overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2)\}$ e $\mathcal{R}' = \{O', (\overrightarrow{v}'_1, \overrightarrow{v}'_2)\}$ dois referenciais de um plano afim real verificando:

- $O' \equiv (1, -1)_{\mathcal{R}}$;
- $\begin{cases} \overrightarrow{v}'_1 & = & & + & 3\overrightarrow{v}_2 \\ \overrightarrow{v}'_2 & = & -\overrightarrow{v}_1 & + & \overrightarrow{v}_2 \end{cases}$

Considere a recta r definida, no referencial $\mathcal{R}$, pela equação cartesiana:

$$r : x - 2y + 3 = 0$$

Determine a equação cartesiana de r no referencial $\mathcal{R}'$. Supondo o referencial $\mathcal{R}$ ortonormado, determine, **no referencial** $\mathcal{R}'$, a equação cartesiana da recta perpendicular a r que passa pelo ponto O'.

(c) Sejam π um plano afim de um espaço euclidiano tridimensional $\mathcal{A}$, A um ponto de π e $\overrightarrow{n}$ um vector normal a π. Seja P um ponto de $\mathcal{A}$ e $q(P)$ a projecção ortogonal de P em π. Mostre que

$$q(P) = P - \left(\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n}} \right) \overrightarrow{n}$$

Deduza a fórmula da distância entre um ponto e um plano num espaço tridimensional, num referencial ortonormado.

(d) Sejam A, B e C três pontos formando um triângulo de um espaço afim $\mathcal{A}$. Verifique que os planos π_1 e π_2 definidos de seguida são iguais:

$$\pi_1 = A + < \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} >$$

$$\pi_2 = C + < \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC} >$$