morfismos

Definição. Sejam A e A' dois anéis. Uma aplicação $\varphi : A \to A'$ diz-se um *morfismo* (ou *homomorfismo*) *de anéis* se satisfaz as seguintes condições:

1. $(\forall a, b \in A) \qquad \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)\,;$
2. $(\forall a, b \in A) \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)\,.$

Um morfismo diz-se um *monomorfismo* (respetivamente, *epimorfismo*, *isomorfismo*) se for injetivo (respetivamente, sobrejetivo, bijetivo)

Um morfismo diz-se um *endomorfismo* se $A = A'$. Um endomorfismo bijetivo diz-se um *automorfismo.*

Exemplo 36. Sejam A e A' anéis. Então, a aplicação $\varphi_0 : A \to A'$ definida por $\varphi_0\,(x) = 0_{A'}$, para todo $x \in A$, é um morfismo, ao qual chamamos *morfismo nulo.*

Exemplo 37. Seja A um anel. Então, a aplicação identidade em A é um automorfismo, ao qual chamamos *morfismo identidade.*

Exemplo 38. A aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definida por $\varphi(n) = [6n]_{10}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, é um homomorfismo de anéis. De facto, para $n, m \in \mathbb{Z}$ temos:

1. $\varphi(n+m) = [6(n+m)]_{10} = [6n+6m]_{10} = [6n]_{10} + [6m]_{10} = \varphi(n) + \varphi(m)$;
2. $\varphi(nm) = [6(nm)]_{10} = [36(nm)]_{10} = [(6n)(6m)]_{10} = [6n]_{10}[6m]_{10} = \varphi(n)\varphi(m)$, uma vez que $36 \equiv 6 \pmod{10}$.

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $\varphi(0_A) = 0_{A'}$.

Demonstração. De

$$0_{A'} + \varphi(0_A) = \varphi(0_A) = \varphi(0_A + 0_A) = \varphi(0_A) + \varphi(0_A)$$

concluímos, pela lei do corte, que

$$\varphi(0_A) = 0_{A'}. \qquad \square$$

Exemplo. 39. A aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $\varphi((n, m)) = 3n + m + 3$ não é um morfismo de anéis pois
$\varphi(0_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}) = \varphi((0, 0)) = 3 \times 0 + 0 + 3 = 3 \neq 0 = 0_{\mathbb{Z}}$.

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $(\forall a \in A) \quad \varphi(-a) = -\varphi(a)$.

Demonstração. Seja $a \in A$. Como

$$\varphi(-a) + \varphi(a) = \varphi(-a + a) = \varphi(0_A) = 0_{A'},$$

temos que

$$-\varphi(a) = \varphi(-a). \qquad \square$$

Proposição. Sejam A e A' dois anéis e $\varphi : A \to A'$ um morfismo. Então, $(\forall a \in A)\,(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad \varphi\,(ka) = k\varphi\,(a)\,.$

Demonstração. Temos de considerar 3 casos:

- $k = 0$. Seja $a \in A$. Então,
$$\varphi\,(0a) = \varphi\,(0_A) = 0_{A'} = 0\varphi\,(a)\,;$$
- $k \in \mathbb{Z}^+$. Seja $a \in A$. Então, como $\varphi\,(1a) = \varphi\,(a) = 1\varphi\,(a)$ e, sempre que $\varphi\,(na) = n\varphi\,(a)\,,$ temos que
$$\varphi\,((n+1)\,a) = \varphi\,(na + a) = \varphi\,(na) + \varphi\,(a) = n\varphi\,(a) + \varphi\,(a) = (n+1)\,\varphi\,(a)\,,$$
concluímos, por indução, que $\varphi\,(ka) = k\varphi\,(a)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.
- $k \in \mathbb{Z}^-$. Seja $a \in A$. Então,
$$\varphi\,(ka) = \varphi\,(-(-k)a) = -\varphi\,((-k)a) = -(-k)\varphi\,(a) = k\varphi\,(a)\,. \qquad \square$$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B um subanel de A. Então, $\varphi(B)$ é um subanel de A'. $\square$

Demonstração. Seja B um subanel de A. Então,

(i) $\varphi(B) \neq \emptyset$, pois $0_{A'} = \varphi(0_A)$ e $0_A \in B$;

(ii) dados $x, y \in \varphi(B)$, existem $a, b \in B$ tais que $x = \varphi(a)$ e $y = \varphi(b)$, pelo que

$$x - y = \varphi(a) - \varphi(b) = \varphi(a - b) \quad \text{com } a - b \in B$$

e

$$xy = \varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \quad \text{com } ab \in B.$$

Assim, $x - y, xy \in \varphi(B)$, pelo que $\varphi(B)$ é um subanel de A'.

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um epimorfismo de anéis e I um ideal de A. Então, $\varphi(I)$ é um ideal de A'. $\square$

Demonstração. Pela proposição anterior, temos que $(\varphi(I), +) < (A', +)$. Por outro lado, sejam $a' \in A'$ e $x' \in \varphi(I)$. Então, existem $a \in A$ e $i \in I$ tais que $\varphi(a) = a'$ e $\varphi(i) = x'$, pelo que

$$a'x' = \varphi(a)\varphi(i) = \varphi(ai) \in \varphi(I)$$

e

$$x'a' = \varphi(i)\varphi(a) = \varphi(ia) \in \varphi(I).$$

Logo, $a'x', x'a' \in \varphi(I)$, pelo que $\varphi(I)$ é um ideal de A'. $\square$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e B' um subanel de A'. Então,

$$\varphi^{-1}\left(B'\right) = \left\{x \in A \mid \varphi(x) \in B'\right\}$$

é um subanel de A.

Demonstração. Seja B' um subanel de A'. Então,

(i) $\varphi^{-1}\left(B'\right) \neq \emptyset$ pois $\varphi(0_A) = 0_{A'} \in B'$, pelo que $0_A \in \varphi^{-1}(B')$;

(ii) dados $x, y \in \varphi^{-1}\left(B'\right)$, temos que $\varphi(x), \varphi(y) \in B'$ e, portanto, $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y) \in B'$, pelo que $x - y \in \varphi^{-1}\left(B'\right)$;

(iii) dados $x, y \in \varphi^{-1}\left(B'\right)$, temos que $\varphi(x), \varphi(y) \in B'$ e, portanto, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \in B'$, pelo que $xy \in \varphi^{-1}\left(B'\right)$.

Assim, $\varphi^{-1}\left(B'\right)$ é um subanel de A. $\square$

Proposição. Sejam $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis e I' um ideal de A'. Então,

$$\varphi^{-1}\left(I'\right) = \left\{x \in A \mid \varphi(x) \in I'\right\}$$

é um ideal de A.

Demonstração. Seja I' um ideal de A'. Então, pela proposição anterior, $\varphi^{-1}\left(I'\right)$ é um subanel de A. Por outro lado, seja $a \in A$ e $x \in \varphi^{-1}\left(I'\right)$. Então, $\varphi(x) \in I'$ e, portanto, $\varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) \in I'$, pelo que $ax \in \varphi^{-1}\left(I'\right)$ e, portanto, $\varphi^{-1}\left(I'\right)$ é um ideal de A. $\square$

núcleo e imagem de um morfismo

Definição. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis.

1. Chama-se *Núcleo de* φ (ou *kernel de* φ), e representa-se por $\mathrm{Nuc}\varphi$ (ou $\mathrm{Ker}\varphi$), ao subconjunto de A definido por

$$\mathrm{Nuc}\varphi = \{x \in A : \varphi(x) = 0_{A'}\};$$

2. Chama-se *imagem de* φ, e representa-se por $\mathrm{Im}\varphi$ ou $\varphi(A)$, ao subconjunto de A' definido por

$$\mathrm{Im}\varphi = \{\varphi(x) : x \in A\}.$$

Proposição. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então,

1. $\mathrm{Nuc}\varphi$ é um ideal de A;
2. $\mathrm{Im}\varphi$ é um subanel de A'.

1. Trivial, tendo em conta que $\mathrm{Nuc}\varphi = \varphi^{-1}\{0_{A'}\}$ e $\{0_{A'}\}$ é um ideal de A'.
2. Trivial, tendo em conta que $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(A)$ e que A é um subanel de A. $\square$

Exemplo 40. Considere-se o morfismo de anéis $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ definido por $\varphi(n) = [6n]_{10}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Por um lado, tendo em conta que $\mathrm{Nuc}\,\varphi = \{n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) = [0]_{10}\}$ e que

$$\begin{aligned}\varphi(n) = [0]_{10} \quad &\Leftrightarrow [6n]_{10} = [0]_{10}\\ &\Leftrightarrow 6n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 10)\\ &\Leftrightarrow n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \tfrac{10}{\mathrm{m.d.c.}(6,10)})\\ &\Leftrightarrow n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 5),\end{aligned}$$

concluímos que $\mathrm{Nuc}\,\varphi = 5\mathbb{Z}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\varphi \quad &= \{\varphi(n) : n \in \mathbb{Z}\}\\ &= \{[6n]_{10} : n \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}.\end{aligned}$$

Proposição. Sejam A um anel e I um seu ideal. Então, a aplicação $\pi : A \to A/I$ definida por $\pi(x) = x + I \ (x \in A)$, é um epimorfismo (ao qual se chama *epimorfismo canónico*).

Demonstração. Sejam A um anel e I um ideal de A. Então, em A/I, temos que

$$(x + I) + (y + I) = (x + y) + I$$

e

$$(x + I)(y + I) = xy + I.$$

Logo, a aplicação π é tal que

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y)$$

e

$$\pi(x)\,\pi(y) = \pi(xy),$$

pelo que π é um morfismo. Além disso, o facto de qualquer elemento de A/I se definir à custa de um representante de A, permite-nos concluir que π é uma aplicação sobrejetiva. $\square$

Teorema Fundamental do Homomorfismo. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então,

$$A/\mathrm{Nuc}\varphi \cong \varphi(A).$$

Demonstração. Seja $\varphi : A \to A'$ um morfismo de anéis. Então, $\mathrm{Nuc}\varphi$ é um ideal de A e, portanto, $\pi : A \to A/\mathrm{Nuc}\varphi$ é um epimorfismo. Seja θ a relação que a cada classe $x + \mathrm{Nuc}\varphi$ de $A/\mathrm{Nuc}\varphi$ faz corresponder o elemento $\varphi(x)$ de A'. Então,

(i) θ é uma aplicação injectiva, pois

$$(\forall x + \mathrm{Nuc}\varphi \in A/\mathrm{Nuc}\varphi) \qquad x \in A \text{ e } \varphi(x) \in A',$$

e

$$\begin{aligned} x + \mathrm{Nuc}\varphi = y + \mathrm{Nuc}\varphi \quad & \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathrm{Nuc}\varphi \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(x-y) = 0_{A'} \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) - \varphi(y) = 0_{A'} \\ & \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(y). \end{aligned}$$

(ii) θ é um morfismo, pois

$$\begin{aligned} \pi((x + \mathrm{Nuc}\varphi) + (y + \mathrm{Nuc}\varphi)) \quad & = \quad \pi((x+y) + (\mathrm{Nuc}\varphi)) \\ & = \quad \varphi(x+y) \\ & = \quad \varphi(x) + \varphi(y) \\ & = \quad \pi(x + \mathrm{Nuc}\varphi) + \pi(y + \mathrm{Nuc}\varphi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\pi\left(\left(x+\mathrm{Nuc}\varphi\right)\cdot\left(y+\mathrm{Nuc}\varphi\right)\right) &= \pi\left(\left(x\cdot y\right)+\left(\mathrm{Nuc}\varphi\right)\right)\\ &= \varphi\left(x\cdot y\right)\\ &= \varphi\left(x\right)\cdot\varphi\left(y\right)\\ &= \pi\left(x+\mathrm{Nuc}\varphi\right)\cdot\pi\left(y+\mathrm{Nuc}\varphi\right).\end{aligned}$$

(iii) $\theta\left(A/\mathrm{Nuc}\varphi\right)=\mathrm{Im}\varphi$, porque

$$\begin{aligned}y\in\theta\left(A/\mathrm{Nuc}\varphi\right) &\iff (\exists x\in A)\quad y=\theta\left(x+\mathrm{Nuc}\varphi\right)\\ &\iff (\exists x\in A)\quad y=\varphi\left(x\right)\\ &\iff y\in\mathrm{Im}\varphi.\end{aligned}$$

Logo, concluímos que

$$A/\mathrm{Nuc}\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi.$$

$\square$