anéis especiais

Definição. Um anel comutativo com identidade A diz-se um *domínio* (ou *anel*) *de integridade* se admitir como único divisor de zero o elemento zero do anel.

Exemplo 18. Os anéis $(\mathbb{Z}, +, \times)$ e $(\mathbb{R}, +, \times)$ são domínios de integridade.

Exemplo 19. O anel das matrizes quadradas de ordem 2 não é um domínio de integridade.

Observação. Se A é um domínio de integridade, então, $A \neq \{0_A\}$.

Proposição. Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é domínio de integridade;
2. $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ e todo o elemento de $A \setminus \{0_A\}$ é simplificável.

Demonstração. Suponhamos que A é um domínio de integridade. Então, $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$. Sejam $y \in A \setminus \{0_A\}$ e $a, b \in A$ tais que $ya = yb$. Então, $ya - yb = 0_A$, pelo que

$$y\,(a-b) = 0_A.$$

Como A é domínio de integridade e $y \neq 0_A$, temos que

$$a - b = 0_A,$$

i.e.,

$$a = b.$$

Supondo que $ay = by$, faz-se o raciocínio análogo.
Reciprocamente, suponhamos que todo o elemento $y \in A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ é simplificável. Como $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$, temos que 0_A é um divisor de zero. Vejamos que é o único elemento nestas condições. Seja x_0 um divisor de zero de A, i.e., seja $x_0 \in A$ para o qual existe $b \in A \setminus \{0_A\}$ tal que

$$bx_0 = 0_A \qquad \text{ou} \qquad x_0 b = 0_A.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que é a primeira condição que se verifica. Então,

$$bx_0 = 0_A = b0_A.$$

e, como b é simplificável (já que $b \neq 0_A$), temos que

$$x_0 = 0_A.$$

Logo, 0_A é o único dividor de zero, pelo que A é um domínio de integridade. $\square$

Proposição. Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é domínio de integridade;
2. $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ e $A \setminus \{0_A\}$ é subsemigrupo de A relativamente ao produto.

Demonstração. Suponhamos que A é domínio de integridade. Então, $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$. Provemos então que $(A \setminus \{0_A\}, \cdot)$ é subsemigrupo de $(A, \cdot)$. De facto:

(a) $A \setminus \{0_A\} \subseteq A$;

(b) se $a, b \in A \setminus \{0_A\}$, $ab \in A \setminus \{0_A\}$. Se $ab = 0_A$, com $a, b \in A \setminus \{0_A\}$, a e b seriam divisores de zero e, portanto, A não seria um domínio de integridade.

Reciprocamente, suponhamos que $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ e que $(A \setminus \{0_A\}, \cdot)$ é subsemigrupo de $(A, \cdot)$, ou seja, que

$$a \neq 0_A, b \neq 0_A \Longrightarrow ab \neq 0_A. \tag{*}$$

De $A \setminus \{0_A\} \neq \emptyset$ concluímos que 0_A é divisor de zero. Provemos que é único. Seja x_0 um divisor de zero. Então, existe $y \in A \setminus \{0_A\}$ tal que

$$x_0 y = 0_A \qquad \text{ou} \qquad y x_0 = 0_A.$$

Comparando com (*), concluímos que $x_0 = 0_A$. □

Proposição. Seja A um anel comutativo com identidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é domínio de integridade;
2. $A\setminus\{0_A\} \neq \emptyset$ e, se as equações $ax = b$ e $xa = b$ $(a \neq 0_A)$ tiverem solução, então, a solução é única.

Demonstração. Seja A um domínio de integridade. Então, $A\setminus\{0_A\} \neq \emptyset$. Suponhamos que, para $a, b \in A$ com $a \neq 0_A$,

$$(\exists x_0, y_0 \in A) \qquad ax_0 = b \quad \text{e} \quad y_0 a = b.$$

Sejam x_1 e y_1 outras soluções das equações $ax = b$ e $xa = b$, respetivamente. Então,

$$ax_0 = b = ax_1 \qquad \text{e} \qquad y_0 a = b = y_1 a$$

e, pelo facto de todos os elementos não nulos serem simplificáveis, temos que

$$x_0 = x_1 \qquad \text{e} \qquad y_0 = y_1 .$$

Logo, as soluções, quando existem, são únicas.

Reciprocamente, suponhamos que $A\setminus\{0_A\} \neq \emptyset$ e que, para $a \in A\setminus\{0_A\}$ e $b \in A$, se as equações $ax = b$ e $xa = b$ tiverem solução, então, a solução é única.

Como $x = 0_A$ é solução de $ax = 0_A$ e $xa = 0_A$, concluímos então que $x = 0_A$ é a única solução possível. Logo, 0_A é o único divisor de zero de A, pelo que A é um domínio de integridade. $\square$

Definição. Um anel A diz-se um *anel de divisão* se $(A\backslash\{0_A\}, \cdot)$ é um grupo. Um anel de divisão comutativo diz-se um *corpo*.

Resulta da definição que qualquer corpo é um domínio de integridade, mas o recíproco não é verdadeiro.

Exemplo 20. O domínio de integridade $(\mathbb{Z}, +, \times)$ não é um anel de divisão, pois $(\mathbb{Z}\backslash\{0\}, \times)$ não é grupo.

Exemplo 21. O domínio de integridade $(\mathbb{R}, +, \times)$ é um corpo e, portanto, um anel de divisão.

Exemplo 22. Seja $\mathcal{Q} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, onde $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k, ki = -ik = j, jk = -kj = i$. Considere em $\mathcal{Q}$ as operações $+$ e $\times$ definidas por

$$
\begin{aligned}
(a + bi + cj + dk) &+ (a' + b'i + c'j + d'k) \\
&= a + a' + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k
\end{aligned}
$$

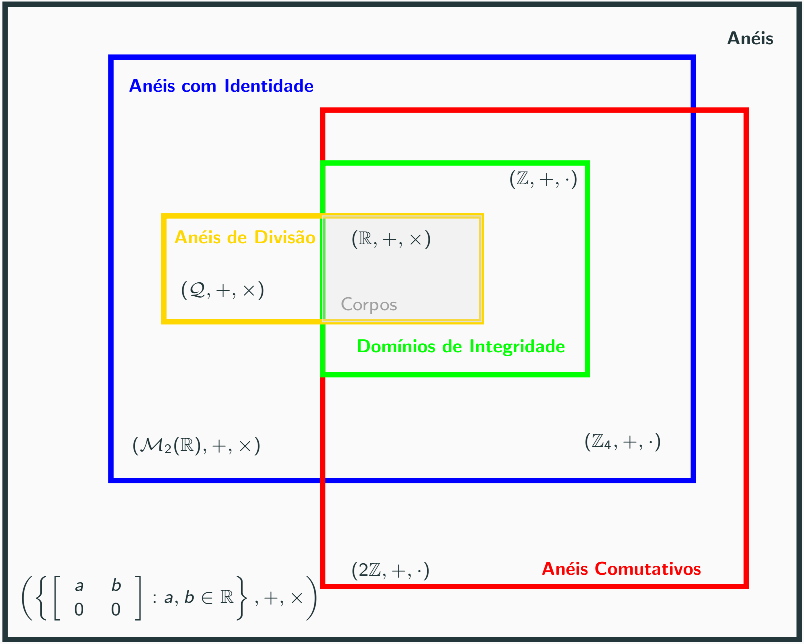
e

$$(a + bi + cj + dk) \times (a' + b'i + c'j + d'k) =$$

$$aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + a'b + cd' - c'd)i+$$

$$(ac' - bd' + a'c + b'd)j + (ad' + bc' - b'c + a'd)k.$$

Então, $(\mathcal{Q}, +, \times)$ é um anel de divisão não comutativo. Este anel designa-se por *Anel dos Quarteniões.*


Anéis
Anéis com Identidade
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
Anéis de Divisão
$(\mathbb{R}, +, \times)$
$(\mathcal{Q}, +, \times)$
Corpos
Domínios de Integridade
$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$
$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$
$(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$
Anéis Comutativos
$\left(\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}, +, \times\right)$