Exercice :

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$: $3(\cos^4 x + \sin^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$.

Corrigé :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \cos x$. On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, donc on a $\sin^2 x = 1 - X^2$.

D'où : $3(\cos^4 x + \sin^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) = 3(X^4 + (1 - X^2)^2) - 2(X^6 + (1 - X^2)^3) = 3(1 - 2X^2 + 2X^4) - 2(1 - 3X^2 + 3X^4) = 1$

Exercice :

Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 1 + 3\sin x$.

Corrigé :

On commence par remarquer la 2π-périodicité de l'équation : on peut restreindre l'étude à $[0; 2\pi]$.

Soit $x \in [0; 2\pi]$. Alors $3 - 4\cos^2 x \geq 0$ ssi $\cos^2 x \leq \frac{3}{4}$ ssi $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On s'aide d'un cercle trigonométrique : cette dernière inéquation est vérifiée pour $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$ et pour $x \in [\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}]$.

Sur $[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}]$: $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ donc $1 + 3\sin x \leq -\frac{1}{2} \leq 0$. x est donc solution.

Sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}]$: $\sin x \geq \frac{1}{2}$ donc $1 + 3\sin x \geq \frac{5}{2}$.

Or : $\cos^2 x \geq 0$ donc $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} \leq \sqrt{3} \leq \frac{5}{2}$. Il n'y a donc aucune solution.Type equation here.

Donc $S = \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]\ [2\pi]$

Exercice :

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(3x) - \left(2 + \sqrt{3}\right)\cos(2x) + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)\cos(x) - (2 + \sqrt{3})$

1) Exprimer $\cos(3x)$ et $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2) Déterminer le signe de f sur $[0, 2\pi]$

Corrigé :

1) $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$. $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.
2) Soit $x \in [0; 2\pi]$. On pose $X = \cos x$.

Alors $f(x) = (4X^3 - 3X) - \left(2 + \sqrt{3}\right)(2X^2 - 1) + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)X - \left(2 + \sqrt{3}\right)$

$$= 4X^3 - 2\left(2 + \sqrt{3}\right)X^2 + 2\sqrt{3}X$$

On commence alors par factoriser par X :

$$f(x) = X(4X^2 - 2(2+\sqrt{3})X \quad + 2\sqrt{3})$$

1 est une racine évidente : on factorise par $(X-1)$

$$f(x) = X(X-1)(4X \quad - 2\sqrt{3}) = 2X(X-1)(2X-\sqrt{3})$$

On peut alors conclure

x		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
X	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$2X-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0