Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas
Trabalho Prático (2023/24)

Lic. em Ciências da Computação

Grupo G19

a102499 Carlos Daniel Silva Fernandes
a102497 José Bernardo Moniz Fernandes
a102504 Pedro Augusto Camargo

junho 2024

Preâmbulo

Cálculo de Programas tem como objectivo principal ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell, sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais. Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao sofware a instalar, etc.

> Valoriza-se a escrita de *pouco* código, que corresponda a soluções simples e elegantes mediante a utilização dos combinadores de ordem superior estudados na disciplina.
> Recomenda-se ainda que o código venha acompanhado de uma descrição de como funciona e foi concebido, apoiado em diagramas explicativos. Para instruções sobre como produzir esses diagramas e exprimir raciocínios de cálculo, ver o anexo D.

Problema 1

No passado dia 10 de Março o país foi a eleições para a Assembleia da República. A lei eleitoral portuguesa segue, como as de muitos outros países, o chamado Método de Hondt para selecionar os candidatos dos vários partidos, conforme os votos que receberam. E, tal como em anos anteriores, há sempre notícias a referir a quantidade de votos desperdiçados por este método. Como e porque é que isso acontece?

Pretende-se nesta questão construir em Hakell um programa que implemente o método de Hondt. A Comissão Nacional de Eleições descreve esse método nesta página, que deverá ser estudada para resolver esta questão. O quadro que aí aparece,

Divisor	Partido			
	A	B	C	D
1	12000	7500	4500	3000
2	6000	3750	2250	1500
3	4000	2500	1500	1000
4	3000	1875	1125	750

mostra o exemplo de um círculo eleitoral que tem direito a eleger 7 deputados e onde concorrem às eleições quatro partidos A, B, C e D, cf:

$$\mathbf{data}\ \mathit{Party} = A \mid B \mid C \mid D\ \mathbf{deriving}\ (\mathit{Eq}, \mathit{Ord}, \mathit{Show})$$

A votação nesse círculo foi

$$[(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)]$$

sendo o resultado eleitoral

$$result = [(A,3),(B,2),(C,1),(D,1)]$$

apurado correndo

$$result = final\ history$$

que corresponde à última etapa da iteração:

$$history = [\text{for } step\ db\ i \mid i \leftarrow [0\,..\,7]]$$

Verifica-se que, de um total de 27000 votos, foram desperdiçados:

$$wasted = 9250$$

Completem no anexo G as funções que se encontram aí indefinidas[1], podendo adicionar funções auxiliares que sejam convenientes. No anexo F é dado algum código preliminar.

Problema 2

A biblioteca *LTree* inclui o algoritmo "mergesort" (*mSort*), que é um hilomorfismo baseado função

$$merge :: Ord\ a \Rightarrow ([a],[a]) \rightarrow [a]$$

que junta duas listas previamente ordenadas numa única lista ordenada.

Nesta questão pretendemos generalizar *merge* a k-listas (ordenadas), para qualquer k finito:

$$mergek :: Ord\ a \Rightarrow [[a]] \rightarrow [a]$$

Esta função deverá ser codificada como um hilomorfismo, a saber:

$$mergek = [\![f, g]\!]$$

1. Programe os genes f e g do hilomorfismo *mergek*.
2. Estenda *mSort* a

   $$mSortk :: Ord\ a \Rightarrow Int \rightarrow [a] \rightarrow [a]$$

   por forma a este hilomorfismo utilizar *mergek* em lugar de *merge* na estapa de "conquista". O que se espera de $mSortk\ k$ é que faça a partição da lista de entrada em k sublistas, sempre que isso for possível. (Que vantagens vê nesta nova versão?)

Problema 3

Considere-se a fórmula que dá o n-ésimo número de Catalan:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \tag{1}$$

No anexo F dá-se a função *catdef* que implementa a definição (10) em Haskell. É fácil de verificar que, à medida que n cresce, o tempo que $catdef\ n$ demora a executar degrada-se.

[1] Cf. $\perp$ no código.

Pretende-se uma implementação mais eficiente de C_n que, derivada por recursividade mútua, não calcule factoriais nenhuns:

$$cat = \cdots \cdot \textsf{for}\ loop\ init\ \mathbf{where}\ \cdots$$

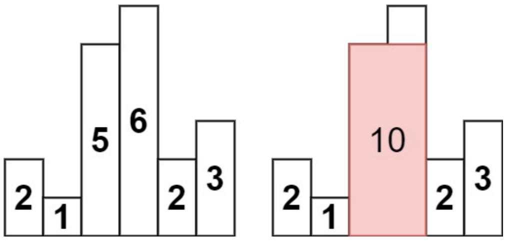
No anexo F é dado um oráculo que pode ajudar a testar *cat*. Deverá ainda ser comparada a eficiência da solução calculada *cat* com a de *catdef*.

> **Sugestão**: Começar por estudar a regra prática que se dá no anexo E para problemas deste género.

Problema 4

Esta questão aborda um problema que é conhecido pela designação *Largest Rectangle in Histogram*. Precebe-se facilmente do que se trata olhando para a parte esquerda da figura abaixo, que mostra o histograma correspondente à sequência numérica:

$$h = [2, 1, 5, 6, 2, 3]$$



À direita da mesma figura identifica-se o rectângulo de maior área que é possível inscrever no referido histograma, com área $10 = 2 * 5$.

Pretende-se a definição de uma função em Haskell

$$lrh :: [Int] \to Int$$

tal que *lrh x* seja a maior área de rectângulos que seja possível inscrever em *x*.

Pretende-se uma solução para o problema que seja simples e estruturada num hilomorfismo baseado num tipo indutivo estudado na disciplina ou definido *on purpose*.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

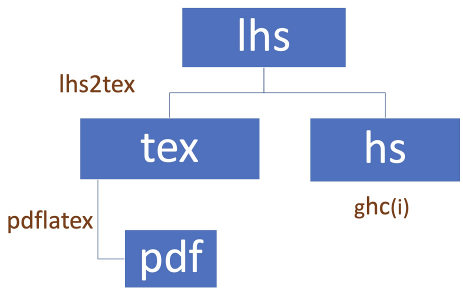
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2324t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2324t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2324t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2324t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2324t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2324t -it cp2324t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2324t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2324t` no container sejam partilhadas.

O grupo deverá visualizar/editar os ficheiros numa máquina local e compilá-los no container, executando:

```
$ lhs2TeX cp2324t.lhs > cp2324t.tex
$ pdflatex cp2324t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2324t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2324t.lhs
```

O grupo deve abrir o ficheiro `cp2324t.lhs` num editor da sua preferência e verificar que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo G com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTEX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2324t.aux
$ makeindex cp2324t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo F disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D.

> **Importante:** o grupo deve evitar trabalhar fora deste ficheiro lhs que lhe é fornecido. Se, para efeitos de divisão de trabalho, o decidir fazer, deve **regularmente integrar** e validar as soluções que forem sendo obtidas neste lhs, garantindo atempadamente a compatibilidade com este. Se não o fizer corre o risco de vir a submeter um ficheiro que não corre no GHCi e/ou apresenta erros na geração do PDF.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{array}{ll}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv & \qquad \{ \text{ universal property } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \cdot id = f \\ \pi_2 \cdot id = g \end{array} \right. \\
\equiv & \qquad \{ \text{ identity } \} \\
& \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 = f \\ \pi_2 = g \end{array} \right. \\
\Box &
\end{array}
$$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* LaTeX xymatrix, por exemplo:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

E Regra prática para a recursividade mútua em $\mathbb{N}_0$

Nesta disciplina estudou-se como fazer programação dinâmica por cálculo, recorrendo à lei de recursividade mútua.[3]

Para o caso de funções sobre os números naturais ($\mathbb{N}_0$, com functor $\mathsf{F}\ X = 1 + X$) pode derivar-se da lei que foi estudada uma *regra de algibeira* que se pode ensinar a programadores que não tenham estudado Cálculo de Programas. Apresenta-se de seguida essa regra, tomando como exemplo o cálculo do ciclo-for que implementa a função de Fibonacci, recordar o sistema:

$$
\begin{array}{l}
\mathit{fib}\ 0 = 1 \\
\mathit{fib}\ (n+1) = f\ n \\
\\
f\ 0 = 1 \\
f\ (n+1) = \mathit{fib}\ n + f\ n
\end{array}
$$

---

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [2].

[3] Lei (3.95) em [2], página 110.

Obter-se-á de imediato

$$\begin{array}{l} \mathit{fib}' = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathit{init}\ \mathbf{where} \\ \quad \mathit{loop}\ (\mathit{fib}, f) = (f, \mathit{fib} + f) \\ \quad \mathit{init} = (1, 1) \end{array}$$

usando as regras seguintes:

- O corpo do ciclo *loop* terá tantos argumentos quanto o número de funções mutuamente recursivas.
- Para as variáveis escolhem-se os próprios nomes das funções, pela ordem que se achar conveniente.[1]
- Para os resultados vão-se buscar as expressões respectivas, retirando a variável n.
- Em *init* coleccionam-se os resultados dos casos de base das funções, pela mesma ordem.

Mais um exemplo, envolvendo polinómios do segundo grau $ax^2 + bx + c$ em $\mathbb{N}_0$. Seguindo o método estudado nas aulas[2], de $f\ x = ax^2 + bx + c$ derivam-se duas funções mutuamente recursivas:

$$\begin{array}{l} f\ 0 = c \\ f\ (n+1) = f\ n + k\ n \\ k\ 0 = a + b \\ k\ (n+1) = k\ n + 2\ a \end{array}$$

Seguindo a regra acima, calcula-se de imediato a seguinte implementação, em Haskell:

$$\begin{array}{l} f'\ a\ b\ c = \pi_1 \cdot \mathsf{for}\ \mathit{loop}\ \mathit{init}\ \mathbf{where} \\ \quad \mathit{loop}\ (f, k) = (f + k, k + 2 * a) \\ \quad \mathit{init} = (c, a + b) \end{array}$$

F Código fornecido

Problema 1

Tipos básicos:

$$\begin{array}{l} \mathbf{type}\ \mathit{Votes} = \mathbb{Z} \\ \mathbf{type}\ \mathit{Deputies} = \mathbb{Z} \end{array}$$

Dados:

$$\begin{array}{l} \mathit{db} :: [(\mathit{Party}, (\mathit{Votes}, \mathit{Deputies}))] \\ \mathit{db} = \mathsf{map}\ \ f\ \mathit{vote}\ \mathbf{where}\ f\ (a, b) = (a, (b, 0)) \\ \mathit{vote} = [(A, 12000), (B, 7500), (C, 4500), (D, 3000)] \end{array}$$

Apuramento:

$$\begin{array}{l} \mathit{final} = \mathsf{map}\ \ (\mathit{id} \times \pi_2) \cdot \mathit{last} \\ \mathit{total} = \mathit{sum}\ (\mathsf{map}\ \ \pi_2\ \mathit{vote}) \\ \mathit{wasted} = \mathit{waste}\ \mathit{history} \end{array}$$

[1] Podem obviamente usar-se outros símbolos, mas numa primeira leitura dá jeito usarem-se tais nomes.

[2] Secção 3.17 de [2] e tópico Recursividade mútua nos vídeos de apoio às aulas teóricas.

Problema 3

Definição da série de Catalan usando factoriais (10):

$$catdef\ n = (2 * n)! \div ((n+1)! * n!)$$

Oráculo para inspecção dos primeiros 26 números de Catalan[1]:

$$oracle = [$$
$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845,$$
$$35357670, 129644790, 477638700, 1767263190, 6564120420, 24466267020,$$
$$91482563640, 343059613650, 1289904147324, 4861946401452$$
$$]$$

G Soluções dos alunos

Os grupos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto, diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

> **Importante**: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Ao analisar este problema, percebemos que a chave para o resolver seria a forma como construíamos o history. Para isso começámos por definir o **step** e posteriormente o **waste**.

O **step**, vamos buscar o partido com mais votos através do **maxPair**.

$$
\begin{array}{l}
step\ [\,] = [\,] \\
step\ l = aux\ maxPair\ l \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad maxPair = maximumBy\ (comparing\ (\pi_1 \cdot \pi_2))\ l \\
\qquad aux\ \_\ [\,] = [\,] \\
\qquad aux\ (maxP, (maxV, maxD))\ ((p, (v, d)) : rest) \\
\qquad\quad \mid maxP \equiv p \wedge maxD \equiv 0 = (p, (v\ `div`\ 2, \mathsf{succ}\ \ d)) : aux\ maxPair\ rest \\
\qquad\quad \mid maxP \equiv p = (p, ((v * \mathsf{succ}\ \ d)\ `div`\ (d+2), \mathsf{succ}\ \ d)) : aux\ maxPair\ rest \\
\qquad\quad \mid otherwise = (p, (v, d)) : aux\ maxPair\ rest
\end{array}
$$

Para cada partido, verificamos se é o partido com mais votos ao comparar com **maxPair**. Se tiver 0 deputados, para obter os "novos" votos, dividimos os votos totais desse partido por 2 e de seguida adicionamos um deputado. Se tiver mais que 0 deputados, os votos irão ser a divisão dos votos totais desse partido pelo seu número de deputados mais 2 e de seguida aumentamos os seus deputados por um. Se não for o partido com mais votos, mantemos os votos e os deputados inalterados. Por fim, após as verificações aplicamos recursivamente a função **aux** ao resto da lista.

O **history** é a aplicação da função **for** ao **step** por **i** vezes, é uma lista de listas de partidos com os seus votos e deputados.

[1] Fonte: Wikipedia.

$$
\begin{array}{ll}
0 & [(A,(12000,0)),(B,(7500,0)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
1 & [(A,(6000,1)),(B,(7500,0)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
2 & [(A,(6000,1)),(B,(3750,1)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
3 & [(A,(4000,2)),(B,(3750,1)),(C,(4500,0)),(D,(3000,0))] \\
4 & [(A,(4000,2)),(B,(3750,1)),(C,(2250,1)),(D,(3000,0))] \\
5 & [(A,(3000,3)),(B,(3750,1)),(C,(2250,1)),(D,(3000,0))] \\
6 & [(A,(3000,3)),(B,(2500,2)),(C,(2250,1)),(D,(3000,0))] \\
7 & [(A,(3000,3)),(B,(2500,2)),(C,(2250,1)),(D,(1500,1))]
\end{array}
$$

Já o nosso **waste** soma todos os votos da última lista do **history**, que contém os votos desperdiçados.

$$waste = sum \cdot \mathsf{map}\ (\pi_1 \cdot \pi_2) \cdot last$$

Problema 2

Para a descoberta dos genes **f** e **g** referentes ao hilomorfismo **mergek**, elaboramos o seguinte diagrama:

– Grafico

Genes de *mergek*:

$$
\begin{array}{l}
f = inList \\
g\ [\,] = i_1\ () \\
g\ l = \textbf{if}\ filter\ (\not\equiv [\,])\ l \equiv [\,] \\
\quad \textbf{then}\ i_1\ () \\
\quad \textbf{else}\ i_2\ (m, l')\ \textbf{where} \\
\qquad m = minimum\ (\mathsf{map}\ \ head\ x) \\
\qquad l' = aux\ m\ x \\
\qquad aux\ \_\ [\,] = [\,] \\
\qquad aux\ m\ (h : t) = \textbf{if}\ m \equiv head\ h \\
\qquad\quad \textbf{then}\ tail\ h : t \\
\qquad\quad \textbf{else}\ h : aux\ m\ t \\
\qquad x = filter\ (\not\equiv [\,])\ l
\end{array}
$$

Na nossa resolução o "núcleo" do algoritmo é realizado em grande parte pelo anamorfismo, ficando como um catamorfismo que é o **inList**.

Extensão de *mSort*:

Utilizamos a função **chunksOf** para dividir a lista em k partes, assegurando que a divisão só ocorre se o comprimento da lista for superior a k. Desta forma, evitamos que o algoritmo entre em ciclo infinito. Posteriormente, utilizamos a função **mergek** para juntar as partes ordenadas.

$$
\begin{array}{l}
mSortk\ k\ [\,] = [\,] \\
mSortk\ k\ l \\
\quad \mid length\ l \leqslant 1 = l \\
\quad \mid otherwise = \textbf{let}\ chunks = chunksOf\ (\textbf{if}\ length\ l \leqslant k\ \textbf{then}\ 1\ \textbf{else}\ k)\ l \\
\qquad \textbf{in}\ mergek\ (\mathsf{map}\ \ (mSortk\ k)\ chunks)
\end{array}
$$

Com uma abordagem que divide a lista em k partes, é possível reduzir significativamente o número de comparações e operações necessárias para ordenar a lista, tornando o algoritmo mais eficiente. Este método beneficia do paralelismo, uma vez que permite dividir a lista em k partes e ordená-las em simultâneo.

Cada parte pode ser ordenada de forma independente e, posteriormente, combinada para formar a lista ordenada final. Isto não só distribui a carga de trabalho, como também reduz o tempo total de execução. Esta abordagem é escalável, podendo ser ajustada para diferentes tamanhos de listas.

Problema 3

Para a simplificação do algoritmo de Catalan sem recurso ao cálculo dos factoriais é necessário reescrever a fórmula. A simplificação é a seguinte descrita:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n!)} \tag{2}$$

$$C_n = \frac{(2n)(2n-1)!}{(n+1)n! * n(n-1)!} \tag{3}$$

$$C_n = \frac{2(2n-1)!}{(n+1)n! * (n-1)!} \tag{4}$$

$$C_n = \frac{2(2n-1)(2n-2)!}{(n+1)n! * (n-1)(n-2)!} \tag{5}$$

$$\ldots$$

A continuação da simplificação matemática mostraria que era possível o número dé Catalan atual, usando o número de Catalan anterior.

Pelo link da Wikipédia disponibilizada pela equipa docente sabemos que:

$$C_0 = 1 \tag{6}$$

$$C_n = \frac{2(2n-1)}{n+1} * C_{n-1} \tag{7}$$

Que iremos simplificar para

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} * C_{n-1} \tag{8}$$

Para reduzir o número de operações.

Sabendo como se escreve

$$C_n \tag{9}$$

através de

$$C_{n-1} \tag{10}$$

é possível escrever a recursividade mútua do algoritmo.

O nosso **inic** será composto por um par (a,b) que será inicializado com (1,1). O loop é responsável por aplicar a função succ ao primeiro elemneto do **inic** e no segundo elemento chamar a função recursiva. A primeira componente do **inic** serve para guardar a iteração atual, já a segunda guarda o número de Catalan. Sendo assim, ficamos com o seguinte algoritmo:

$$cat = prj \cdot \mathsf{for}\ loop\ inic$$

onde:

$$
\begin{array}{l}
loop\ (a, b) = (a + 1, b * ((4 * a) - 2)\ `div`\ (a + 1)) \\
inic = (1, 1) \\
prj = \pi_2
\end{array}
$$

Problema 4

$$lrh = \bot$$

Index

References

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] J.N. Oliveira. *Program Design by Calculation*, 2018. Draft of textbook in preparation. viii+297 pages. Informatics Department, University of Minho.