TPC 1 - Clube Desportivo Ribeirão (SAT Solving)

Pedro Almeida Fernandes - pg47559

O "Clube Desportivo de Ribeirão" tem as seguintes regras:

- Todos os sócios que usam bigode são casados.
- Cada sócio do clube que não é de Ribeirão tem que usar camisola amarela.
- Os sócios casados não podem assistir aos jogos ao Domingo.
- Um sócio vai aos jogos ao Domingo se e só se é de Ribeirão.
- Cada sócio usa bigode ou não usa camisola amarela.
- Todos os sócios de Ribeirão usam bigode.

```
!pip install python-sat[pblib,aiger]
```

1. Por forma a codificar este puzzle como problema SAT, defina um conjunto adequado de variáveis proposicionais, exprima as regras acima como fórmulas proposicionais, e converta essas fórmulas para CNF.

Considerando o seguinte :

1. **S** -> Ser sócio do Ribeirão
2. **B** -> Ter bigode
3. **C** -> Ser casado
4. **R** -> Ser de Ribeirão
5. **A** -> Usar camisola amarela
6. **D** -> Assistir jogos ao domingo

- Todos os sócios que usam bigode são casados. $\mathbf{S} \wedge \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \equiv \neg\mathbf{S} \vee \neg\mathbf{B} \vee \mathbf{C}$
- Cada sócio do clube que não é de Ribeirão tem que usar camisola amarela. $\mathbf{S} \wedge \neg\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{S} \vee \mathbf{R} \vee \mathbf{A}$
- Os sócios casados não podem assistir aos jogos ao Domingo. $\mathbf{S} \wedge \mathbf{C} \rightarrow \neg\mathbf{D} \equiv \neg\mathbf{S} \vee \neg\mathbf{C} \vee \neg\mathbf{D}$
- Um sócio vai aos jogos ao Domingo se e só se é de Ribeirão. $\mathbf{S} \wedge \mathbf{D} \leftrightarrow \mathbf{R} \equiv (\neg\mathbf{R} \vee \mathbf{S}) \wedge (\neg\mathbf{R} \vee \mathbf{D}) \wedge (\neg\mathbf{S} \vee \neg\mathbf{D} \vee \mathbf{R})$
- Cada sócio usa bigode ou não usa camisola amarela. $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A} \equiv \neg\mathbf{S} \vee \mathbf{B} \vee \neg\mathbf{A}$
- Todos os sócios de Ribeirão usam bigode. $\mathbf{S} \wedge \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{B} \equiv \neg\mathbf{S} \vee \neg\mathbf{R} \vee \mathbf{B}$

2. Codifique o problema num SAT solver e comprove que o conjunto de regras é consistente.

O problema é consistente caso seja satisfazível, ou seja, caso retorne SAT.

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

if s.solve():
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
    print("UNSAT.")
s.delete()
```

```
 SAT
 [1, 2, 3, -4, 5, -6]
```

3. Use agora o SAT solver para o ajudar a responder às seguintes questões:

(a) A afirmação "Quem usa bigode não pode ir ao jogo ao Domingo." é correcta?

$B \rightarrow \neg D \equiv \neg B \vee \neg D$

No solver, caso a negação da afirmação seja UNSAT significa que esta afirmação é válida, caso contrário dará o resultado SAT.

$\neg(\neg B \vee \neg D) \equiv B \wedge D$

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

#novas clausulas
s.add_clause([x['B']])
s.add_clause([x['D']])

if s.solve():
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
    print("UNSAT.")
s.delete()
```

```
UNSAT.
```

Como o resultado obtido foi UNSAT então a afirmação “Quem usa bigode não pode ir ao jogo ao Domingo.” é correta.

(b) Pode um membro de camisola amarela ser casado?

$A \wedge C$

No solver, caso a afirmação seja SAT significa que esta afirmação é satisfazível, caso contrário dará o resultado UNSAT.

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

#novas clausulas
s.add_clause([x['A']])
s.add_clause([x['C']])

if s.solve():
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
```

```
    print("UNSAT.")
s.delete()

     SAT
```

Como o resultado obitdo foi SAT, pode acontercer que um membro tenha camisola amarela e seja casado.

(c) A afirmação "Afinal o clube não pode ter sócios Ribeironenses." é correcta?

$S \rightarrow \neg R \equiv \neg S \vee \neg R$

No solver, caso a negação da afirmação seja UNSAT significa que esta afirmação é válida, caso contrário dará o resultado SAT.

$\neg(\neg S \vee \neg R) \equiv S \wedge R$

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

#novas clausulas
s.add_clause([x['S']])
s.add_clause([x['R']])

if s.solve():
```

```
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
    print("UNSAT.")
s.delete()
```

```
 UNSAT.
```

Como o resultado obtido foi UNSAT então a afirmação “Afinal o clube não pode ter sócios Ribeironenses.” é correta.

(d) Os sócios casados têm todos bigode?

$S \wedge C \rightarrow B \equiv \neg S \vee \neg C \vee B$

No solver, caso a afirmação seja SAT significa que esta afirmação é satisfazível, caso contrário dará o resultado UNSAT.

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

#novas clausulas
```

```
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], x['B']])

if s.solve():
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
    print("UNSAT.")
s.delete()
```

```
SAT
[1, 2, 3, -4, 5, -6]
```

Como o resultado obitdo foi SAT, todos os sócios casados têm bigode.

(e) A afirmação "Ao domingo nunca há sócios a assistir aos jogos." é correcta?

$D \rightarrow \neg S \equiv \neg D \vee \neg S$

No solver, caso a negação da afirmação seja UNSAT significa que esta afirmação é válida, caso contrário dará o resultado SAT.

$\neg(\neg D \vee \neg S) \equiv D \wedge S$

```
from pysat.solvers import Minisat22

s = Minisat22()

rules = ['S','B','C','R','A', 'D']
x = {}
cont = 1

for r in rules :
  x[r] = cont
  cont += 1

s.add_clause([-x['S'], -x['B'], x['C']])
s.add_clause([-x['S'], x['R'], x['A']])
s.add_clause([-x['S'], -x['C'], -x['D']])
s.add_clause([-x['R'], x['S']])
s.add_clause([-x['R'], x['D']])
s.add_clause([-x['S'], -x['D'], x['R']])
s.add_clause([-x['S'], x['B'], -x['A']])
```

```
s.add_clause([-x['S'], -x['R'], x['B']])
s.add_clause([x['S']])

#novas clausulas
s.add_clause([x['D']])
s.add_clause([x['S']])

if s.solve():
    m = s.get_model()
    print("SAT")
    print(m)
else:
    print("UNSAT.")
s.delete()
```

```
 UNSAT.
```

Como o resultado obtido foi UNSAT então a afirmação “Ao domingo nunca há sócios a assistir aos jogos.” é correta.