Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Exame :: 20 de junho de 2018

Nome ______________________ Número __________

Nos grupos de verdadeiro/falso cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.
Nos grupos de escolha múltipla cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

PARTE 1 DO EXAME

I

Assinale neste enunciado, se a afirmação é verdadeira ou falsa; não deve apresentar qualquer justificação.

	V	F
Questão 1. Se $X \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto finito então $\overset{\circ}{X} = \emptyset$.	◯	◯
Questão 2. As superfícies de nível da função definida por $g(x,y,z) = x + 2y + z$ são planos paralelos.	◯	◯
Questão 3. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq f(x,y) \leq x+1$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$.	◯	◯
Questão 4. A função definida por $f(u,v) = u \cos v$ satisfaz a equação $\cos v \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\operatorname{sen} v}{u} \frac{\partial f}{\partial v} = 1$.	◯	◯
Questão 5. Se o gráfico da função f é uma superfície semiesférica centrada na origem, então $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.	◯	◯

II

Assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Questão 1. Se $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } x \neq 0\}$ então

- ◯ X é um conjunto fechado.
- ◯ $(0,1) \in X$.
- ◯ $\partial X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 2. Se f é uma função descontínua em $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então

- ◯ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
- ◯ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ não existe.
- ◯ f não é derivável em (a,b).
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 3. Se f é uma função derivável em (a,b), então

- ◯ $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ existem ambas.
- ◯ pelo menos uma das derivadas parciais de primeira ordem existe.
- ◯ nenhuma das derivadas parciais de primeira ordem existe.
- ◯ $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ podem ou não existir.

Questão 4. Se f é uma função real de duas variáveis reais de classe $\mathscr{C}^3$, no máximo quantas das suas derivadas parciais de terceira ordem podem ser distintas?

- ◯ 3.
- ◯ 4.
- ◯ 8.
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja f uma função derivável em (a,b) e $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ um vetor não nulo. Então, a derivada direcional de f em (a,b) ao longo de $\boldsymbol{u}$ é dada por

- ◯ $\nabla f(u_1,u_2)$.
- ◯ $\nabla f(a,b) \cdot (u_1,u_2)$.
- ◯ $\nabla f(a,b) \cdot \frac{(u_1,u_2)}{\|(u_1,u_2)\|}$.
- ◯ nenhuma das anteriores.

III

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e dadas na folha de teste.

Questão 1. [4 valores] Considera a função $f(x,y) = \dfrac{1-e^{x+y-1}}{x^2+(y-1)^2}$. Calcule, caso exista,

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Questão 2. [6 valores] Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}+x & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

a) Mostre que f é uma função contínua.

b) Calcule $\nabla f(1,1)$.

c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

d) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

PARTE 2 DO EXAME

I

Assinale neste enunciado, se a afirmação é verdadeira ou falsa; não deve apresentar qualquer justificação.

	V	F
Questão 1. O vetor $\nabla f(a,b)$ é normal à curva de nível de f em (a,b).	○	○
Questão 2. Se $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, então (a,b) é um extremante local de f.	○	○
Questão 3. Sejam $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ e $f:\mathcal{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo.	○	○
Questão 4. Se $\int_0^1\int_3^4 f(x,y)\,dxdy = 0$, então $\int_0^1\int_3^4 f^2(x,y)\,dxdy = 0$.	○	○
Questão 5. Seja P um ponto de $\mathbb{R}^3$ situado no semieixo negativo das ordenadas. As coordenadas esféricas de P satisfazem as condições $\rho>0$, $\theta=\frac{3\pi}{2}$ e $\phi=\frac{\pi}{2}$.	○	○

II

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e dadas na folha de teste.

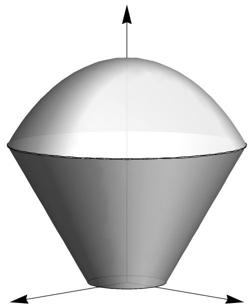
Questão 1. [3 valores] Considere a superfície definida por $z = x^3\ln y$ e o ponto $P=(2,e^3,24)$. Defina, caso exista, o plano tangente à superfície no ponto P.

Questão 2. [3 valores] Encontre um sistema de equações relativo ao método dos multiplicadores de Lagrange para o ponto de abcissa máxima sobre a superfície definida por

$$x^4+y^4+z^4+xy+yz+xz=6.$$

Obs.: Não resolva o sistema.

Questão 3. [4 valores] Considere o sólido representado na figura, limitado pela superfície esférica de equação $x^2+y^2+(z+1)^2=18$, pela superfície cónica de equação $x^2+y^2-(z+1)^2=0$ e pelo plano de equação $z=0$.



a) Escreva uma expressão integral que permita determinar o volume do sólido, usando um sistema de coordenadas apropriado.

b) Calcule o volume do sólido, usando a expressão apresentada na alínea anterior.

III

Assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Questão 1. Sejam $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}$, tais que $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2y, e^x)$ e $J\boldsymbol{g}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Nestas condições $\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x}(0,1)$ é

○ $(0,0,0)$. ○ $(0,1,1)$. ○ $(1,0,0)$. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e P um ponto crítico de f. Se a matriz hessiana de f no ponto P é $\begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, então

○ $\forall a \in \mathbb{R}$, P é ponto de sela de f. ○ P é ponto de sela se e só se $a = 0$.

○ se $|a| < 1$, P é maximizante local de f. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 3. A mudança da ordem de integração no integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{x-1}^{e^x} f(x,y)\, dydx$ permite escrever este integral na forma

○ $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x,y)\, dydx + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dydx + \int_1^e \int_{\ln y}^1 f(x,y)\, dydx.$

○ $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{y+1} f(x,y)\, dxdy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 f(x,y)\, dxdy.$

○ $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{y+1} f(x,y)\, dxdy + \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dxdy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 f(x,y)\, dxdy.$

○ nenhuma das anteriores.

Questão 4. A área da elipse definida por $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ é

○ 2π. ○ 2. ○ $2\pi^2$. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3 \text{ e } x^2 \leq y \leq x^2 + 2\}$. Usando a mudança de variáveis definida por $u = x$ e $v = y - x^2$, a área de $\mathcal{R}$ é dada por

○ $\displaystyle\int_1^3 \int_0^2 dvdu.$ ○ $\displaystyle 2\int_1^3 \int_{-u^2}^{u^2} dvdu.$

○ $\displaystyle\int_1^3 \int_0^2 (2u-1)\, dvdu.$ ○ nenhuma das anteriores.

EXAME GLOBAL

I

Assinale neste enunciado, se a afirmação é verdadeira ou falsa; não deve apresentar qualquer justificação.

V F

Questão 1. Se $X \subset \mathbb{R}^3$ é um conjunto finito então $\overset{\circ}{X} = \emptyset$. ○ ○

Questão 2. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é tal que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq f(x,y) \leq x+1$, então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$. ○ ○

Questão 3. Se $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, então (a,b) é um extremante local de f. ○ ○

Questão 4. Sejam $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ e $f : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem máximo e mínimo. ○ ○

Questão 5. Seja P um ponto de $\mathbb{R}^3$ situado no semieixo negativo das ordenadas. As coordenadas esféricas de P satisfazem as condições $\rho > 0$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$. ○ ○

II

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e dadas na folha de teste.

Questão 1. [2 valores] Considera a função $f(x,y) = \dfrac{1-e^{x+y-1}}{x^2+(y-1)^2}$. Calcule, caso exista $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Questão 2. [3 valores] Seja $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2}+x & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

a) Mostre que f é uma função contínua.

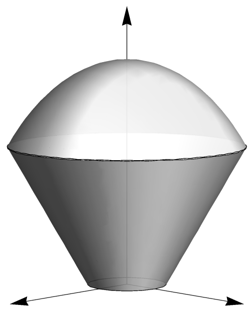
b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

Questão 3. [3 valores] Encontre um sistema de equações relativo ao método dos multiplicadores de Lagrange para o ponto de abcissa máxima sobre a superfície definida por

$$x^4+y^4+z^4+xy+yz+zx=6.$$

Obs.: Não resolver o sistema.



Questão 4. [2 valores] Considere o sólido representado na figura, limitado pela superfície esférica de equação $x^2+y^2+(z+1)^2=18$, pela superfície cónica de equação $x^2+y^2-(z+1)^2=0$ e pelo plano de equação $z=0$.
Escreva uma expressão integral que permita determinar o volume do sólido, usando um sistema de coordenadas apropriado.

III

Assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.

Questão 1. Se f é uma função real de duas variáveis reais de classe $\mathscr{C}^3$, no máximo quantas das suas derivadas parciais de terceira ordem podem ser distintas?

○ 3. ○ 4. ○ 8. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 2. Seja f uma função derivável em (a,b) e $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)$ um vetor não nulo. Então, a derivada direcional de f em (a,b) ao longo de $\boldsymbol{u}$ é dada por

○ $\nabla f(u_1,u_2)$. ○ $\nabla f(a,b)\cdot(u_1,u_2)$. ○ $\nabla f(a,b)\cdot\frac{(u_1,u_2)}{\|(u_1,u_2)\|}$. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 3. Sejam $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$, tais que $\boldsymbol{f}(x,y)=(x^2y,e^x)$ e $J\boldsymbol{g}(0,1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&1\end{pmatrix}$.

Nestas condições $\dfrac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial x}(0,1)$ é

○ $(0,0,0)$. ○ $(0,1,1)$. ○ $(1,0,0)$. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 4. A área da elipse definida por $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ é:

○ 2π. ○ 2. ○ $2\pi^2$. ○ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 3 \text{ e } x^2\le y\le x^2+2\}$. Usando a mudança de variáveis definida por $u=x$ e $v=y-x^2$, a área de $\mathcal{R}$ é dada por

○ $\displaystyle\int_1^3\int_0^2 dvdu.$

○ $\displaystyle 2\int_1^3\int_{-u^2}^{u^2} dvdu.$

○ $\displaystyle\int_1^3\int_0^2 (2u-1)\,dvdu.$

○ nenhuma das anteriores.