# Exemplo

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| max $\mathbf{cx}$ <br> suj. a $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ <br> $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ | min $\mathbf{yb}$ <br> suj. a $\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$ <br> $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ |
| max $30x_1 + 20x_2 + 10x_3$ <br> suj. a $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40$ <br> $2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150$ <br> $2x_1 + 1x_2 \leq 20$ <br> $x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$ | min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$ <br> suj. a $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30$ <br> $1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20$ <br> $2y_1 + 1y_2 \geq 10$ <br> $y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$ |

**Para construir o problema dual, o problema original deve estar numa das *Formas*:**

- Problema de *max* com todas as restrições de $\leq$.
- Problema de *min* com todas as restrições de $\geq$.

- O problema dual do problema dual é o problema primal.

- No que se segue, designa-se o problema de maximização por primal.

# Preço-sombra dos recursos 1 e 2

Quadro Óptimo

| | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | 0 | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | 0 | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| $z$ | 1 | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

- O preço-sombra do recurso 1 é $\delta z/\delta(-s_1) = +5$ (o valor da função objectivo aumenta 5 unidades por cada unidade adicional do recurso 1).

- O preço-sombra do recurso 2 é $\delta z/\delta(-s_2) = +0$ (variável dual com valor nulo).
- Não há interesse em ter unidades adicionais de recurso 2: o aumento do recurso 2 não aumenta o valor da função objectivo, só aumenta a folga $s_2$.

# Teorema fraco da dualidade

**Teorema**

*Se $\widehat{x}$ for uma solução válida do problema primal (max.) e $\widehat{y}$ for uma solução válida do problema dual (min.), então*

$$c\widehat{x} \leq \widehat{y}b$$

**Prova:**

- Se $\widehat{y}$ é uma solução válida do dual, então $\widehat{y} \geq 0$, e podemos pré-multiplicar por $\widehat{y}$ as restrições $A\widehat{x} \leq b$, obtendo $\widehat{y}A\widehat{x} \leq \widehat{y}b$.
- Se $\widehat{x}$ é uma solução válida do primal, então $\widehat{x} \geq 0$, e podemos pós-multiplicar por $\widehat{x}$ as restrições $\widehat{y}A \geq c$, obtendo $\widehat{y}A\widehat{x} \geq c\widehat{x}$.
- Conjugando as duas relações, obtém-se $c\widehat{x} \leq \widehat{y}b$. $\square$

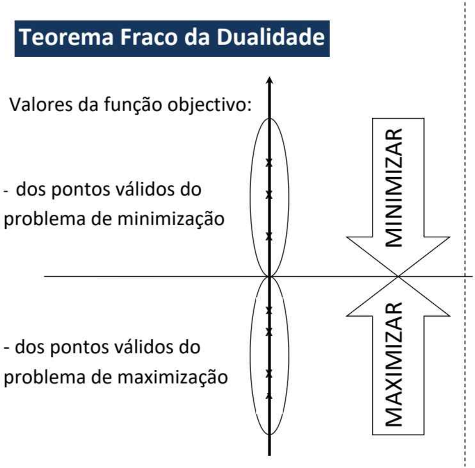
*i.e.*, qualquer solução válida do problema de maximização tem um valor de função objectivo menor do que ou igual a qualquer solução válida do problema de minimização.

# Teorema fraco da dualidade: exemplo

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\begin{array}{ll} max & cx \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} min & yb \\ & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{array}$ |
| $\begin{array}{ll} \text{max} & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad \leq 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} \text{min} & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\ \text{suj.} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 30 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geq 20 \\ & 2y_1 + 1y_2 \qquad \geq 10 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0 \end{array}$ |

- $(\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \widehat{x}_3)^t = (10, 0, 0)^t$ é um ponto válido do problema primal.
- $(\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \widehat{y}_3) = (30, 0, 0)$ é um ponto válido do problema dual.
- $cx = 30(10) + 20(0) + 10(0) = \mathbf{300}$
- $yb = 40(30) + 150(0) + 20(0) = \mathbf{1200}$
- este par de pontos verifica o teorema fraco da dualidade: $cx \leq yb$, *i.e.*, $\mathbf{300} \leq \mathbf{1200}$.

# Teorema fraco da dualidade: ilustração gráfica



# Teorema fraco da dualidade: caso valor óptimo ilimitado

**Corolário (do teorema fraco da dualidade)**

*Se o problema primal de maximização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema dual é impossível.*

**Prova:**

- Não pode haver nenhuma solução admissível do problema dual com um valor de função objectivo maior do que o valor da solução óptima ilimitada do problema primal,
- porque os coeficientes da função objectivo do problema dual são finitos.
- Portanto, o domínio do dual é vazio, e o problema dual é impossível.

Usando o mesmo argumento, se o problema dual de minimização tiver uma solução óptima ilimitada, então o problema primal é impossível.

# Teorema forte da dualidade

**Teorema (Teorema Forte da Dualidade)**

*Se o problema primal tiver uma solução óptima com valor finito, então o problema dual tem, pelo menos, uma solução óptima com valor finito, e os valores das soluções óptimas são iguais, i.e.,*

$$cx^* = y^* b$$

sendo

- $x^*$ : solução óptima do problema primal
- $y^*$ : solução óptima do problema dual

**Prova:** O quadro simplex óptimo apresenta soluções válidas para o problema primal e para o problema dual com o mesmo valor finito de função objectivo:

$$y^* b = (c_B B^{-1}) b = c_B (B^{-1} b) = cx^*.$$

# Teorema forte da dualidade: quadro óptimo

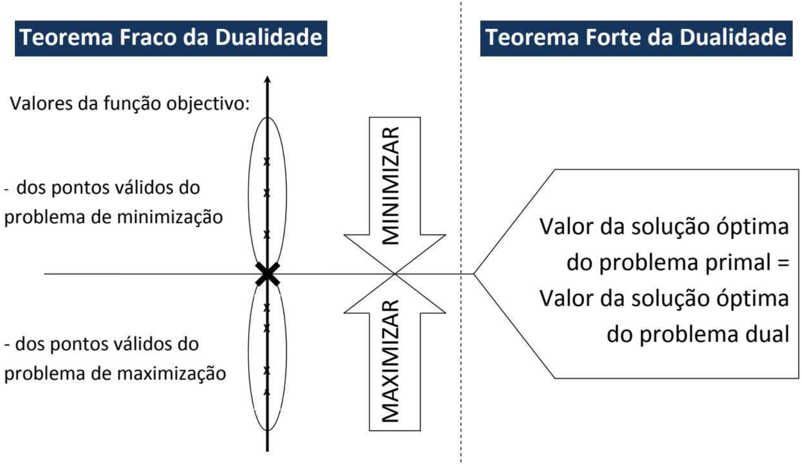
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

- Solução é válida para o problema primal se:
  - variáveis de decisão e de folga do primal: $B^{-1}b \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos do lado direito do quadro simplex não-negativos.
- Solução é válida para o problema dual se:
  - variáveis de decisão do dual: $y = c_B B^{-1} \geq 0$
  - variáveis de folga do dual: $u = c_B B^{-1} A - c \geq 0$,
  - ou seja, todos os elementos da linha da função objectivo do quadro simplex não-negativos.

- No quadro óptimo, há pontos válidos dos problemas primal e do dual que têm o mesmo valor de função objectivo.

$\therefore$ São as soluções óptimas dos problemas respectivos.

# Teorema forte da dualidade: ilustração gráfica



# Teorema forte da dualidade: exemplo

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\max \; cx$<br>$Ax \le b$<br>$x \ge 0$ | $\min \; yb$<br>$yA \ge c$<br>$y \ge 0$ |
| max $30x_1 + 20x_2 + 10x_3$<br>suj. $1x_1 + 1x_2 + 2x_3 \le 40$<br>$2x_1 + 2x_2 + 1x_3 \le 150$<br>$2x_1 + 1x_2 \le 20$<br>$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$ | min $40y_1 + 150y_2 + 20y_3$<br>suj. $1y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 30$<br>$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \ge 20$<br>$2y_1 + 1y_2 \ge 10$<br>$y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0$ |

- $x^* = (x_1, x_2, x_3)^t = (0, 20, 10)^t$ é o ponto óptimo do problema primal.
- $y^* = (y_1, y_2, y_3) = (5, 0, 15)$ é o ponto óptimo do problema dual.
- $cx^* = 30(0) + 20(20) + 10(10) = \mathbf{500}$
- $y^*b = 40(5) + 150(0) + 20(15) = \mathbf{500}$
- o óptimo é finito, e verifica o teorema forte da dualidade:
  $cx^* = y^*b = \mathbf{500}$.

# Teorema da folga complementar

**Teorema**

*No ponto óptimo, se uma variável for positiva, a variável dual correspondente é nula.*

(ver no diapositivo seguinte a correspondência entre variáveis primais e duais)

**Prova:**

- No óptimo, $cx^* = y^*Ax^* = y^*b$. Há duas equações:

$$\begin{cases} y^*Ax^* & = & y^*b \\ cx^* & = & y^*Ax^* \end{cases} \quad \begin{cases} y^*(b - Ax^*) & = & 0 \\ (y^*A - c)x^* & = & 0 \end{cases}$$

- Na primeira equação, $(b - Ax^*) = s^*$ é o vector das variáveis de folga do problema primal.
- Para o produto escalar $y^*s^* = 0$, como $y^* \geq 0$ e $s^* \geq 0$,
- se $y_i^* > 0 \Rightarrow s_i^* = 0$; se $s_i^* > 0 \Rightarrow y_i^* = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

O mesmo resultado aplica-se à segunda equação $(y^*A - c)x^* = 0$.

# Correspondência entre variáveis primais e duais

**Regra de correspondência:**

(var. folga de uma restrição) $\Leftrightarrow$ (var. decisão dual associada à restrição).

| PRIMAL | DUAL |
|---|---|
| $\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \qquad + s_3 = 20 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ s_1,\ s_2,\ s_3 \geq 0 \end{array}$ | $\begin{array}{ll} \min & 40y_1 + 150y_2 + 20y_3 \\ \text{suj.} & 1y_1 + 2y_2 + 2y_3 - u_1 = 30 \\ & 1y_1 + 2y_2 + 1y_3 - u_2 = 20 \\ & 2y_1 + 1y_2 \qquad - u_3 = 10 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3,\ u_1,\ u_2,\ u_3 \geq 0 \end{array}$ |

| Correspondência entre Variáveis | | |
|---|---|---|
| PRIMAL | | DUAL |
| var. folga | $\left\{ \begin{array}{c} s_1 \Leftrightarrow y_1 \\ s_2 \Leftrightarrow y_2 \\ s_3 \Leftrightarrow y_3 \end{array} \right\}$ | var. decisão |
| var. decisão | $\left\{ \begin{array}{c} x_1 \Leftrightarrow u_1 \\ x_2 \Leftrightarrow u_2 \\ x_3 \Leftrightarrow u_3 \end{array} \right\}$ | var. folga |

# Teorema da folga complementar: exemplo

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_3$ | -1/2 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | -1/2 | 10 |
| $s_2$ | -3/2 | 0 | 0 | -1/2 | 1 | -3/2 | 100 |
| $x_2$ | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 20 |
| | 5 | 0 | 0 | 5 | 0 | 15 | 500 |

Folga complementar no quadro simplex óptimo:

- Para uma variável básica do problema primal $\geq 0 \Rightarrow$ coeficiente da linha da função objectivo (variável dual correspondente) é nulo.
- Exemplo: $x_2 = 20, u_2 = 0$, e $x_2 u_2 = 0$.
- Para um coeficiente da linha da função objectivo (variável do problema dual) $\geq 0 \Rightarrow$ variável não-básica primal correspondente é nula.
- Exemplo: $y_3 = 15, s_3 = 0$, e $y_3 s_3 = 0$.

# Quadro de Síntese

Relação entre os valores dos óptimos do primal e do dual

| Primal | | Dual |
|---|---|---|
| óptimo finito | $\Leftrightarrow$ | óptimo finito |
| óptimo ilimitado | $\Rightarrow$ | problema impossível |
| problema impossível | $\Rightarrow$ | $\begin{cases} \text{óptimo ilimitado} \\ \text{problema impossível} \end{cases}$ |

# Método simplex dual: estratégia

**Teorema: um quadro simplex é óptimo se a solução:**

- for admissível para o problema primal,
- for admissível para o problema dual, e
- obedecer ao teorema da folga complementar.

**ou seja: um quadro simplex é óptimo se:**

- os coeficientes do lado direito forem todos $\geq 0$,
- os coeficientes da linha da função objectivo forem
  - todos $\leq 0$ num problema de minimização, ou
  - todos $\geq 0$ num problema de maximização,
- a matriz identidade existir.

**Estratégia:**

- Quando existe uma solução admissível para o problema dual, o *algoritmo simplex dual* mantém a solução admissível para o dual, e procura encontrar uma solução admissível para o primal.

# Método simplex dual: como começar?

**Para obter a matriz $I_{m\times m}$ no quadro simplex:**

- dado um problema de minimização em que $c \geq \widetilde{0}$:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & Ax - u = b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

- resolver:

$$\begin{aligned} \min z &= cx \\ & -Ax + u = -b \\ & x, u \geq 0 \end{aligned}$$

**O quadro simplex irá apresentar:**

- uma *solução (primal)* não-admissível, porque pode haver elementos do lado direito com valores $< 0$.
- uma *solução dual* admissível.

# Exemplo

- Dado o quadro simplex sem uma matriz identidade ($I_{m \times m}$) e em que os elementos da linha da função objectivo são não-negativos:

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| | 0 | 0 | -1 | 2 | 2 | 0 | 10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- obtém-se a $I_{m \times m}$ multiplicando as equações das restrições por (-1):

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | -3 | -1 | -1 | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

**A selecção do elemento pivô no método simplex dual destina-se a:**

- manter os elementos da linha da função objectivo com valor $\leq 0$ (*i.e.*, manter a *solução dual* admissível).
- procurar tornar os valores dos elementos do lado direito $\geq 0$ (*i.e.*, procurar obter uma *solução (primal)* admissível).

# Algoritmo simplex dual (problema de minimização):

- Vértice dual admissível inicial (todos os coeficientes da função objectivo são não-negativos, *i.e.*, $c \geq \tilde{0}$) $^{(*)}$
- Repetir
  - Selecção da linha pivô:
    - Coeficiente mais negativo do lado direito
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.$<0$, solução óptima.
  - Selecção da coluna pivô:
    - Menor valor de razão (f.objectivo/linha pivô) **negativa** (coef.linha$<0$)
    - Se não existir coef.linha $<0$, problema é impossível.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- nota: o elemento pivô tem sempre valor **negativo**.

(*) ou seja, todos os coeficientes da linha da função objectivo do quadro simplex são $\leq 0$.

▸ Método Simplex Dual ou 2 Fases?

# Exemplo: primeira iteração do método simplex dual

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | -3 | -1 | $\boxed{-1}$ | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- Linha pivô: linha de $y_1$ (coeficiente mais negativo é -12).
- Coluna pivô: coluna de $y_5$ (menor valor das razões negativas é 30):
  - coluna de $y_3$ : $-120/-3 = 40$
  - coluna de $y_4$ : $-80/-1 = 80$
  - coluna de $y_5$ : $-30/-1 = 30$

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | -30 | 0 | -30 | -50 | 0 | 360 |

# Exemplo: restantes iterações do método simplex dual

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 0 | 3 | 1 | 1 | 12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | $\boxed{-2}$ | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | -30 | 0 | -30 | -50 | 0 | 360 |

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_5$ | 0 | -1 | 3/2 | 0 | $\boxed{-2}$ | 1 | -3 |
| $y_3$ | 0 | 0 | -1/2 | 1 | 1 | 0 | 5 |
| $z_D$ | 1 | -30 | -15 | 0 | -20 | 0 | 510 |

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_4$ | 0 | 1/2 | -3/4 | 0 | 1 | -1/2 | 3/2 |
| $y_3$ | 0 | -1/2 | 1/4 | 1 | 0 | 1/2 | 7/2 |
| $z_D$ | 1 | -20 | -30 | 0 | 0 | -10 | 540 |

- Solução óptima.

# Método simplex dual: problema impossível

**Um problema (primal) é impossível se existir:**

- uma linha com um coeficiente negativo do lado direito e com todos os coeficientes das variáveis não-básicas não-negativos ($\geq 0$).

- Exemplo:

| | $z_D$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 0 | 1 | 0 | 3 | 1 | 1 | -12 |
| $y_2$ | 0 | 0 | 1 | -2 | -2 | 0 | -10 |
| $z_D$ | 1 | 0 | 0 | -120 | -80 | -30 | 0 |

- Nota: na linha de $y_1$, os coeficientes das variáveis $y_3, y_4$ e $y_5$ são $\geq 0$ (não há um elemento pivô **negativo**).
- O problema é impossível, porque nenhum conjunto $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$ satisfaz a restrição: $y_1 + 3y_3 + y_4 + y_5 = -12$.

- Neste caso, o problema dual tem uma solução óptima ilimitada ($\Rightarrow$ problema primal impossível, da teoria da dualidade).

# Conclusão

- As variáveis duais traduzem o valor dos recursos, e explicam como se forma o valor de uma actividade.
- As actividades seleccionadas são aquelas que atribuem um maior valor aos recursos.
- O problema do produtor de rações é o problema dual do problema da dieta (ver Quiz sobre dualidade), e os dois problemas mostram duas perspectivas diferentes da mesma realidade.
- Há muitos outros exemplos de pares de problemas primal-dual.