LÓGICA EI
Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Universidade do Minho

Dep. Matemática e Aplicações

2017/2018

Observação 121: Ao contrário do Cálculo Proposicional, no Cálculo de Predicados existem duas classes sintáticas: a classe dos termos e a classe das fórmulas. Os termos serão usados para denotar objetos do domínio de discurso em questão (por exemplo, números naturais, conjuntos, etc.) e as fórmulas corresponderão a afirmações relativas aos objetos (por exemplo, "dois é um número par" ou "o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto").

O Cálculo de Predicados será parametrizado por um tipo de linguagem, que fixará quais os símbolos que poderão ser usados para construir termos (que designaremos por símbolos de função) ou para denotar relações elementares entre os objetos (que designaremos por símbolos de relação). Este conjunto de símbolos dependerá, naturalmente, do problema em estudo.

Por exemplo, se estivermos a considerar a Aritmética (a teoria dos números naturais), entre outros, será útil ter símbolos que denotem o número 0, a operação de adição e a relação de igualdade. Já no caso de estarmos a considerar teoria de conjuntos, será útil, por exemplo, ter símbolos para denotar o conjunto vazio, as operações de reunião de conjuntos e de conjunto potência, e as relações de pertença, inclusão e igualdade de conjuntos.

Definição 122: Um tipo de linguagem é um terno $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$ t.q.:

a) $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ são conjuntos disjuntos;

b) $\mathcal{N}$ é uma função de $\mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ em $\mathbb{N}_0$.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados símbolos de função e os elementos de $\mathcal{R}$ são chamados símbolos de relação ou símbolos de predicado.

A função $\mathcal{N}$ é chamada função aridade, chamando-se ao número natural $n = \mathcal{N}(s)$ (para cada $s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$) a *aridade* de s e dizendo-se que s é um símbolo n-ário.

Intuitivamente, a aridade de um símbolo corresponde ao seu número de argumentos.

Os símbolos de função de aridade 0 são chamados **constantes**.

Neste estudo, assumiremos que os símbolos de relação nunca têm aridade 0.

Os símbolos de aridade 1 dir-se-ão também **símbolos unários**, os de aridade 2 **binários**, etc.

Notação 123: Habitualmente, usaremos a letra L (possivelmente indexada) para denotar tipos de linguagens. Podemos, ainda, atribuir nomes específicos a tipos de linguagem concretos.
Caso nada seja dito em contrário, durante este capítulo L denotará um tipo de linguagem $(\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{N})$, cujo conjunto de constantes será denotado por $\mathcal{C}$.

Exemplo 124: O terno $Arit = (\{0, s, +, \times\}, \{=, <\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(0) = 0$, $\mathcal{N}(s) = 1$, $\mathcal{N}(+) = 2$, $\mathcal{N}(\times) = 2$, $\mathcal{N}(=) = 2$ e $\mathcal{N}(<) = 2$, é um tipo de linguagem. Chamaremos a *Arit* o *tipo de linguagem para a Aritmética*.

Definição 125: O *alfabeto $\mathcal{A}_L$ induzido pelo tipo de linguagem L* é o conjunto formado pelos seguintes símbolos:

a) $\bot$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ (os *conetivos proposicionais*);

b) $\exists$ e $\forall$, chamados *quantificador existencial* e *quantificador universal*, respetivamente;

c) $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, chamados *variáveis (de primeira ordem)*, formando um conjunto numerável, denotado por $\mathcal{V}$;

d) "(", ")" e ",", chamados *símbolos auxiliares*;

e) os símbolos de função e os símbolos de relação de *L* (que se assume serem distintos de todos os símbolos anteriores).

Exemplo 126: A sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 0)$ é uma palavra sobre o alfabeto $\mathcal{A}_{Arit}$, mas a sequência de 8 símbolos $\exists x_0 \neg (x_0 = 1)$ não é uma palavra sobre $\mathcal{A}_{Arit}$ (1 não é uma das letras do alfabeto $\mathcal{A}_{Arit}$).

Definição 127: O conjunto $\mathcal{T}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_L$;

b) para toda a constante c de L, $c \in \mathcal{T}_L$;

c) para todo o símbolo de função f de L, de aridade $n \geq 1$,

$$t_1 \in \mathcal{T}_L \text{ e ... e } t_n \in \mathcal{T}_L \implies f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}_L, \text{ para todo } t_1, ..., t_n \in (\mathcal{A}_L)^*.$$

Aos elementos de $\mathcal{T}_L$ chamaremos *termos de tipo L* ou, abreviadamente, *termos* .

Exemplo 128: O conjunto $\mathcal{T}_{Arit}$ é o subconjunto de $(\mathcal{A}_{Arit})^*$ definido indutivamente pelas seguintes regras:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $x \in \mathcal{T}_{Arit}$;

b) $0 \in \mathcal{T}_{Arit}$;

c) $t_1 \in \mathcal{T}_{Arit} \implies s(t_1) \in \mathcal{T}_{Arit}$, para todo $t_1 \in (\mathcal{A}_{Arit})^*$.

d) $t_1 \in \mathcal{T}_{Arit}$ e $t_2 \in \mathcal{T}_{Arit} \implies +(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_{Arit}$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_{Arit})^*$;

e) $t_1 \in \mathcal{T}_{Arit}$ e $t_2 \in \mathcal{T}_{Arit} \implies \times(t_1, t_2) \in \mathcal{T}_{Arit}$, para todo $t_1, t_2 \in (\mathcal{A}_{Arit})^*$.

Notação 129: Quando f é um símbolo de função binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1\ f\ t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o termo $f(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $(x_1 \times x_2) + s(0)$ representará o termo de tipo *Arit*. $+(\times(x_1, x_2), s(0))$.

Exemplo 130:

1. As seguintes seis palavras sobre $\mathcal{A}_{Arit}$ são termos:

$$x_1,\, x_2,\, 0,\, s(0),\, \times(x_1, x_2),\, +(\times(x_1, x_2), s(0)).$$

   Usando a notação referida anteriormente, os dois últimos termos podem também ser representados por:

$$x_1 \times x_2,\, (x_1 \times x_2) + s(0).$$

2. As palavras sobre $\mathcal{A}_{Arit}$ $= (0, x_1)$ e $< (0, x_1)$ (ambas de comprimento 6) não são termos. Apesar de $=$ e $<$ serem símbolos de aridade 2 e de 0 e x_1 serem dois termos, $=$ e $<$ são símbolos de relação e não símbolos de função, como exigido na condição *c*) da definição 127. Estas duas palavras são exemplos do que adiante designaremos por *fórmulas atómicas*.

Exemplo 131: Seja L_0 o tipo de linguagem $(\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$. As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são termos :

$$c\,,\ x_1\,,\ f_2(c, x_1)\,,\ f_1(f_2(c, x_1))\,.$$

Teorema 132 (Indução Estrutural em $\mathcal{T}_L$): Seja $P(t)$ uma propriedade que depende de um termo t. Se:

a) para todo $x \in \mathcal{V}$, $P(x)$;

b) para todo $c \in \mathcal{C}$, $P(c)$;

c) para todo $f \in \mathcal{F}$, de aridade $n \geq 1$, e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$,

$$P(t_1) \text{ e ... e } P(t_n) \implies P(f(t_1, ..., t_n));$$

então para todo $t \in \mathcal{T}_L$, $P(t)$.

Dem.: Exercício.

Observação 133: A definição indutiva do conjunto dos termos é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é o conjunto dos termos.

Definição 134: A função $VAR : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ é a função que a cada termo t faz corresponder o conjunto das *variáveis* que ocorrem em t.

Exemplo 135: $VAR((x_0 + s(0)) \times x_1) = \{x_0, x_1\}$

$$VAR((x_0 + 0) \times x_0) = \{x_0\}$$

Observação 136: $VAR : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ é definida, por recursão estrutural em $\mathcal{T}_L$, do seguinte modo:

a) $VAR(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $VAR(c) = \emptyset$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $VAR(f(t_1, ..., t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} VAR(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 137: O conjunto das variáveis que ocorrem no termo de tipo *Arit* $x_2 + s(x_1)$ é:

$$VAR(x_2 + s(x_1)) = VAR(x_2) \cup VAR(s(x_1)) = \{x_2\} \cup VAR(x_1) = \{x_2, x_1\}.$$

Definição 138: O conjunto $subt(t)$, dos *subtermos* de um termo t, é definido, por recursão estrutural em $\mathcal{T}_L$, do seguinte modo:

a) $subt(x) = \{x\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$;

b) $subt(c) = \{c\}$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $subt(f(t_1, ..., t_n)) = \{f(t_1, ..., t_n)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} subt(t_i)$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 139: O conjunto dos subtermos do termo de tipo *Arit* $(x_2 + s(x_1)) \times 0$ é:

$$\{x_2, x_1, s(x_1), x_2 + s(x_1), 0, (x_2 + s(x_1)) \times 0\}$$

Definição 140: Sejam t um termo e x uma variável. A função $\_[t/x] : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{T}_L$ é a função que a cada termo t' faz corresponder o termo notado por $t'[t/x]$, que resulta de t' por *substituição* das ocorrências de x por t.

Exemplo 141:
$(x_1 \times (x_2 + s(x_1)))[(x_0 + 0)/x_1] = (x_0 + 0) \times (x_2 + s(x_0 + 0))$

Observação 142: $\_[t/x] : \mathcal{T}_L \longrightarrow \mathcal{T}_L$ é definida, por recursão estrutural em $\mathcal{T}_L$, como a única função t.q.:

a) $y[t/x] = \begin{cases} t, & se \;\; y = x \\ y, & se \;\; y \neq x \end{cases}$, para todo $y \in \mathcal{V}$;

b) $c[t/x] = c$, para todo $c \in \mathcal{C}$;

c) $f(t_1, ..., t_n)[t/x] = f(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$, para todo $f \in \mathcal{F}$ de aridade $n \geq 1$ e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$.

Exemplo 143:

1. O termo de tipo *Arit* que resulta da substituição da variável x_1 pelo termo $s(0)$ no termo $x_2 + s(x_1)$ é:
$$\begin{array}{rl} & (x_2 + s(x_1))[s(0)/x_1] \\ = & x_2[s(0)/x_1] + s(x_1)[s(0)/x_1] \\ = & x_2 + s(x_1[s(0)/x_1]) \\ = & x_2 + s(s(0)) \end{array}$$
2. $(x_2 + s(x_1))[s(0)/x_0] = x_2 + s(x_1)$ (observe que $x_0 \notin VAR(x_2 + s(x_1))$).

Proposição 144: Sejam x uma variável e t_1 e t_2 termos. Se $x \notin VAR(t_1)$, então $t_1[t_2/x] = t_1$.

Dem.: Por indução estrutural em t_1. (Exercício.) □

Definição 145: Uma palavra sobre o alfabeto induzido por L da forma $R(t_1, ..., t_n)$, onde R é um símbolo de relação n-ário e $t_1, ..., t_n$ são termos, é chamada uma *fórmula atómica de tipo L* ou, abreviadamente, uma *fórmula atómica*. O conjunto das fórmulas atómicas é notado por At_L.

Notação 146: Quando R é um símbolo de relação binário e $t_1, t_2 \in \mathcal{T}_L$, utilizamos a notação $t_1 R t_2$, possivelmente entre parênteses, para representar o fórmula atómica $R(t_1, t_2)$. Por exemplo, a notação $x_0 < s(0)$ representará a fórmula atómica $< (x_0, s(0))$.

Exemplo 147:

1. As três palavras sobre $\mathcal{A}_{Arit}$ que se seguem são fórmulas atómicas de tipo *Arit*:
$$=(0, x_1), <(0, x_1), =(+(0, x_1), \times(s(0), x_1)).$$
Usando as notações anteriormente referidas, podem ser representadas do seguinte modo:
$$0 = x_1,\ 0 < x_1,\ 0 + x_1 = s(0) \times x_1.$$
2. Já a palavra sobre $\mathcal{A}_{ARIT}$ $\times(0, x_1)$ não é uma fórmula atómica de tipo *Arit* (note-se que $\times$ é um símbolo de função e não um símbolo de relação; de facto, esta palavra é um termo de tipo *Arit*).

Definição 148: O conjunto $\mathcal{F}_L$ é o menor conjunto de palavras sobre $\mathcal{A}_L$ que satisfaz as seguintes condições:

a) $\varphi \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in At_L$;

b) $\perp \in \mathcal{F}_L$;

c) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (\neg\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

d) $\varphi \in \mathcal{F}_L$ e $\psi \in \mathcal{F}_L \implies (\varphi\Box\psi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\varphi, \psi \in (\mathcal{A}_L)^*$;

e) $\varphi \in \mathcal{F}_L \implies (Qx\,\varphi) \in \mathcal{F}_L$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\varphi \in (\mathcal{A}_L)^*$.

Aos elementos de $\mathcal{F}_L$ chamaremos *fórmulas de tipo L* ou, abreviadamente, *fórmulas*.

Exemplo 149: As seguintes palavras sobre $\mathcal{A}_{Arit}$ são fórmulas (fazendo uso das simplificações anteriormente mencionadas na representação de fórmulas atómicas):

$$(x_0 < s(0)),$$
$$(\neg(x_0 < s(0))),$$
$$x_0 = x_1,$$
$$((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1),$$
$$(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)),$$
$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1))).$$

Exemplo 150: Recordemos o tipo de linguagem L_0 do Exemplo 131: $L_0 = (\{c, f_1, f_2\}, \{R_1, R_2\}, \mathcal{N})$, onde $\mathcal{N}(c) = 0$, $\mathcal{N}(f_1) = 1$, $\mathcal{N}(f_2) = 2$, $\mathcal{N}(R_1) = 1$ e $\mathcal{N}(R_2) = 2$.
As seguintes quatro palavras sobre $\mathcal{A}_{L_0}$ são fórmulas:

$$R_1(x_1),$$
$$R_2(x_1, f_2(c, x_1)),$$
$$(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1))),$$
$$(\forall x_1(R_1(x_1) \to R_2(x_1, f_2(c, x_1)))).$$

Notação 151: Os parênteses extremos e os parênteses à volta de negações ou de quantificadores são geralmente omitidos. Por exemplo, a fórmula

$$(\forall x_0(\exists x_1((\neg(x_0 < s(0))) \to x_0 = x_1)))$$

pode ser abreviada por

$$\forall x_0 \exists x_1(\neg(x_0 < s(0)) \to x_0 = x_1).$$

Teorema 152 (Indução Estrutural em L-Fórmulas): Seja $P(\varphi)$ uma propriedade que depende de uma fórmula φ. Se:

a) $P(\psi)$, para todo $\psi \in At_L$;

b) $P(\perp)$;

c) $P(\psi) \implies P(\neg\psi)$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $P(\psi_1)$ e $P(\psi_2) \implies P(\psi_1 \square \psi_2)$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ e para todo $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $P(\psi) \implies P(Qx\,\psi)$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, para todo $x \in \mathcal{V}$ e para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

então $P(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_L$.

Dem.: Exercício $\square$

Observação 153: A definição indutiva do conjunto $\mathcal{F}_L$ é determinista e tem associado um *princípio de recursão estrutural*, para definir funções cujo domínio é $\mathcal{F}_L$. Este princípio é usado na definição seguinte.

Definição 154: O conjunto das *subfórmulas* de uma fórmula φ é notado por *subf*(φ) e é definido, por recursão estrutural, do seguinte modo:

a) *subf*$(\psi) = \{\psi\}$, para todo $\psi \in At_L$;

b) *subf*$(\perp) = \{\perp\}$;

c) *subf*$(\neg\psi) =$ *subf*$(\psi) \cup \{\neg\psi\}$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) *subf*$(\psi_1 \square \psi_2) =$ *subf*$(\psi_1) \cup$ *subf*$(\psi_2) \cup \{\psi_1 \square \psi_2\}$, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) *subf*$(Qx\,\psi) =$ *subf*$(\psi) \cup \{Qx\,\psi\}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Definição 155: Seja φ uma fórmula e seja $Qx\,\psi$ uma subfórmula de φ, onde $Q \in \{\exists, \forall\}$, $x \in \mathcal{V}$ e $\psi \in \mathcal{F}_L$. O *alcance* desta ocorrência do quantificador Qx em φ é esta ocorrência da fórmula ψ.

Exemplo 156: Na fórmula

$$\forall x_0(\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists x_1(x_1 < x_0))):$$

1. o alcance da única ocorrência de $\forall x_0$ é
$$\exists x_1(x_0 = s(x_1)) \to (\neg(x_0 = 0) \land \exists x_1(x_1 < x_0));$$
2. o alcance da primeira ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_0 = s(x_1)$;
3. o alcance da segunda ocorrência do quantificador $\exists x_1$ é $x_1 < x_0$.

Definição 157: Numa fórmula φ, uma ocorrência (em subfórmulas atómicas de φ) de uma variável x diz-se *livre* quando x não está no alcance de nenhuma ocorrência de um quantificador Qx (com $Q \in \{\exists, \forall\}$); caso contrário, essa ocorrência de x diz-se *ligada*.

Escrevemos $LIV(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências livres em φ e $LIG(\varphi)$ para denotar o conjunto das variáveis que têm ocorrências ligadas em φ.

Exemplo 158: Seja φ a fórmula

$$\exists x_1(\neg(\underbrace{x_0}_{(a)} < s(0)) \rightarrow \forall x_0(\underbrace{x_0}_{(b)} = \underbrace{x_1}_{(a)})).$$

A ocorrência (a) de x_0 é livre, enquanto que a ocorrência (b) de x_0 é ligada. A ocorrência (a) de x_1 é ligada. Assim, $LIV(\varphi) = \{x_0\}$ e $LIG(\varphi) = \{x_0, x_1\}$.

Observação 159: Note-se que $LIV(\varphi) \cap LIG(\varphi)$ não é necessariamente o conjunto vazio (veja-se o exemplo anterior).

Definição 160: Sejam t um termo e x uma variável. A função $\_[t/p] : \mathcal{F}_L \longrightarrow \mathcal{F}_L$ é a função que a cada fórmula φ faz corresponder a fórmula notada por $\varphi[t/x]$, que resulta de φ por *substituição* das ocorrências livres de x por t.

Observação 161: $\_[t/x] : \mathcal{F}_L \longrightarrow \mathcal{F}_L$ é definida, por recursão estrutural em $\mathcal{F}_L$, como a única função t.q.:

a) $R(t_1, ..., t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x])$ para todo $R \in \mathcal{R}$ de aridade n e para todo $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$;

b) $\perp [t/x] = \perp$;

c) $(\neg\psi)[t/x] = \neg\psi[t/x]$, para todo $\psi \in \mathcal{F}_L$;

d) $(\psi_1 \Box \psi_2)[t/x] = \psi_1[t/x] \Box \psi_2[t/x]$, para todo $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_L$;

e) $(Qy\,\psi)[t/x] = \begin{cases} Qy\,\psi & \text{se } y = x \\ Qy\,\psi[t/x] & \text{se } y \neq x \end{cases}$, para todo $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$, $\psi \in \mathcal{F}_L$.

Exemplo 162:

1.
$$\begin{array}{lll} & (x_0 < s(x_1))[0/x_0] & \\ = & x_0[0/x_0] < s(x_1)[0/x_0] & \text{(obs. anterior } \textbf{a)}\text{)} \\ = & 0 < s(x_1) & \text{(subst. em termos)} \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) & \text{(obs. anterior } \textbf{e)}\text{, 1º caso)} \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)))[0/x_1] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1))[0/x_1] & \text{(obs. anterior } \textbf{e)}\text{, 2º caso)} \\ = & \exists x_0(x_0 < s(0)) & \text{(obs. anterior } \textbf{a)} \text{ e subst. em termos)} \end{array}$$

4.
$$\begin{array}{lll} & (\exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge (0 < x_0))[0/x_0] & \\ = & \exists x_0(x_0 < s(x_1)) \wedge 0 < 0 & \text{(porquê?)} \end{array}$$

Exemplo 163: Seja φ a fórmula de tipo *Arit*

$$\exists x_1 (x_0 < x_1).$$

Note que tomando $\mathbb{N}_0$ como domínio de interpretação das variáveis e interpretando $<$ como a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, φ é verdadeira (estaremos a afirmar que existe um número maior que x_0).

Temos

$$\varphi[s(x_1)/x_0] = \exists x_1 (s(x_1) < x_1).$$

Observe que em φ a ocorrência livre de x_0 "não é afetada" pela quantificação $\exists x_1$. Com a substituição, no lugar de uma ocorrência livre de uma variável, temos o termo $s(x_1)$, que "é afetado" pela quantificação $\exists x_1$.

Tomando $\mathbb{N}_0$ como domínio de interpretação das variáveis e interpretando s como a função *sucessor* em $\mathbb{N}_0$ e $<$ como a relação *menor do que* em $\mathbb{N}_0$, φ é verdadeira, enquanto $\varphi[s(x_1)/x_0]$ é falsa.

Esta noção de interpretação de fórmulas será tornada precisa na secção seguinte. Na definição seguinte, identificaremos as condições que evitam este fenómeno indesejado de *captura de variáveis* em substituições.

Definição 164: Uma variável x diz-se *livre para* um termo t numa fórmula φ quando não existe em φ uma ocorrência livre de x no alcance de algum quantificador sobre uma variável de t.

Observação 165: Uma variável x não está livre para um termo t numa fórmula φ se existe pelo menos uma ocorrência livre de x em φ no alcance de algum quantificador Qy onde $y \in VAR(t)$.

Observação 166: Se x é uma variável que não tem ocorrências livres numa formula φ ou t é um termo onde não ocorrem variáveis, x está livre para t em φ.

Exemplo 167: Seja $\varphi = \forall x_1(x_1 < x_2) \vee \neg(x_1 < x_2)$. Então:

a) x_0 está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_0 não tem ocorrências livres na fórmula;

b) x_1 está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois a única ocorrência livre de x_1 não está no alcance de qualquer quantificador;

c) x_2 não está livre para $x_1 + s(x_2)$ em φ, pois x_2 tem uma ocorrência livre no alcance do quantificador $\forall x_1$ e $x_1 \in VAR(x_1 + s(x_2))$;

d) x_2 está livre para $x_0 + s(x_2)$ em φ, pois, embora exista uma ocorrência livre de x_2 no alcance do quantificador $\forall x_1$, $x_1 \notin VAR(x_0 + s(x_2))$.

Proposição 168: Sejam φ uma fórmula, x uma variável e t um termo. Se $x \notin LIV(\varphi)$, então $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Por indução estrutural em $\mathcal{F}_L$. A prova está organizada por casos, consoante a *forma* de φ.

a) Caso $\varphi = \perp$. Então, $\varphi[t/x] = \perp [t/x] \overset{(1)}{=} \perp = \varphi$.

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

b) Caso $\varphi = R(t_1, ..., t_n)$, com $R \in \mathcal{R}$, n-ário, e $t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}_L$. Então, $x \notin VAR(t_i)$, para todo $1 \leq i \leq n$, de outra forma teríamos $x \in LIV(\varphi)$, e contrariaríamos a hipótese.

Assim, aplicando a Proposição 144, $t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$. Logo:

$$\varphi[t/x] = R(t_1, ..., t_n)[t/x] \overset{\textbf{(1)}}{=} R(t_1[t/x], ..., t_n[t/x]) \overset{\textbf{(2)}}{=} R(t_1, ..., t_n) = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.
(2)	$t_i[t/x] = t_i$, para todo $1 \leq i \leq n$.

c) Caso $\varphi = Qy\,\varphi_1$, com $Q \in \{\exists, \forall\}$, $y \in \mathcal{V}$ e $\varphi_1 \in \mathcal{F}_L$.

c.1) Caso $x = y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações	
(1)	Definição de substituição.

c.2) Caso $x \neq y$. Então:

$$\varphi[t/x] = (Qy\,\varphi_1)[t/x] \overset{(1)}{=} Qy\,\varphi_1[t/x] \overset{(2)}{=} Qy\,\varphi_1 = \varphi.$$

Justificações

(1) Definição de substituição.
(2) Por hipótese, $x \notin LIV(\varphi)$. Como $LIV(\varphi_1) \subseteq LIV(\varphi) \cup \{y\}$ e $x \neq y$, segue-se que $x \notin LIV(\varphi_1)$. Logo, por H.I., $\varphi_1[t/x] = \varphi_1$.

d) Os restantes casos são deixados como exercício.

$\square$

Definição 169: Uma fórmula φ diz-se uma *sentença*, ou uma *fórmula fechada*, quando $LIV(\varphi) = \emptyset$.

Proposição 170: Seja φ uma sentença. Então, para toda a variável x e para todo o termo t,

1. x está livre para t em φ;
2. $\varphi[t/x] = \varphi$.

Dem.: Exercício. $\square$