



---

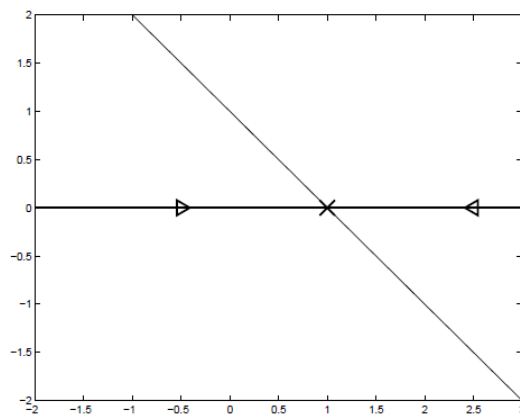
teoria qualitativa de edo's

---

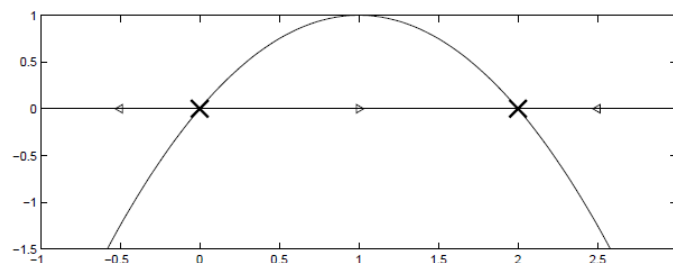
Consulte o ficheiro 'Folha10.nb'.

Exercício 1. As figuras mostram o retrato de fase e o gráfico da função  $f$  no lado direito da equação. Os pontos de equilíbrio e a respetiva estabilidade são:

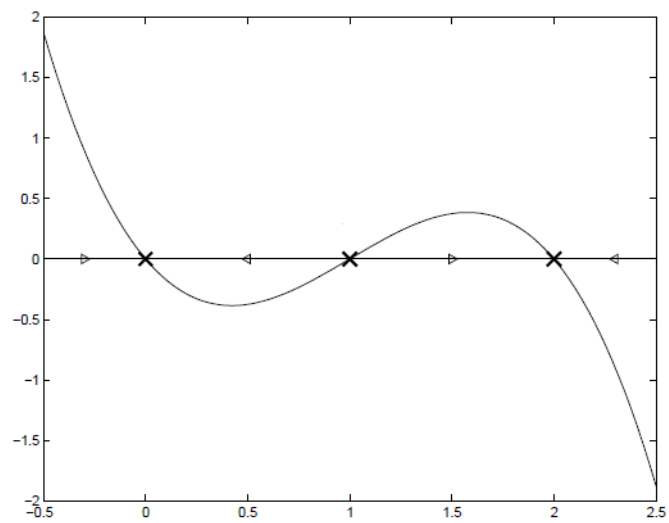
- (a) •  $x = 1$ ; ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



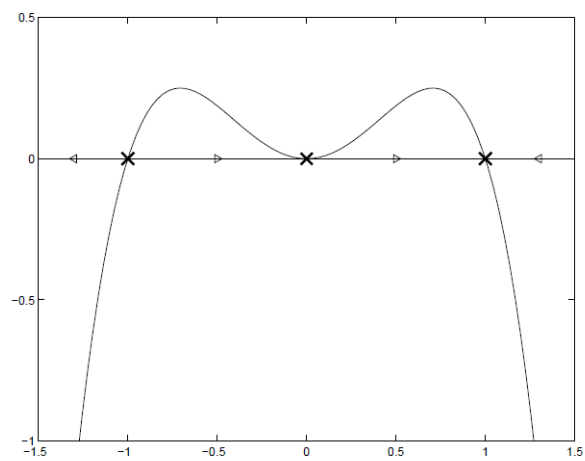
- (b) •  $x = 0$ ; ponto de equilíbrio instável.  
•  $x = 2$ ; ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



- (c)
- $x = 0$ ; ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
  - $x = 1$ ; ponto de equilíbrio instável.
  - $x = 2$ ; ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



- (d)
- $x = -1$ ; ponto de equilíbrio instável.
  - $x = 0$ ; ponto de equilíbrio instável.
  - $x = 1$ ; ponto de equilíbrio assintoticamente estável.



Exercício 2.

$$(a) P = \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{5}/2 & 1/2 - \sqrt{5}/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} 1/2 + \sqrt{5}/2 & 0 \\ 0 & 1/2 - \sqrt{5}/2 \end{pmatrix}$$

(b) A matrix  $A$  é uma forma normal de Jordan.

$$(c) P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(d) P = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(e) A matrix  $A$  é uma forma normal de Jordan.

$$(d) P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercício 3.

$$(a) X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}\right) x_0 + \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}\right) y_0 \\ y(t) = \left(-\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}\right) x_0 + \left(\frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^t}{2}\right) y_0 \end{cases}$$

$$(b) X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{t/2} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t/2) & \sin(\sqrt{3}t/2) \\ -\sin(\sqrt{3}t/2) & \cos(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{3}e^{t/2} (3x_0 \cos(\sqrt{3}t/2) + \sqrt{3}(x_0 + 2y_0)\sin(\sqrt{3}t/2)) \\ y(t) = \frac{1}{3}e^{t/2} (3y_0 \cos(\sqrt{3}t/2) - \sqrt{3}(2x_0 + y_0)\sin(\sqrt{3}t/2)) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x(t) = e^{-t}x_0 \\ y(t) = e^{-t}y_0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x(t) = e^{2t}x_0 \\ y(t) = y_0 \end{cases}$$

$$(e) \quad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{2t} - te^{2t})x_0 + te^{2t}y_0 \\ y(t) = -te^{2t}x_0 + (te^{2t} + e^{2t})y_0 \end{cases}$$

Exercício 4.

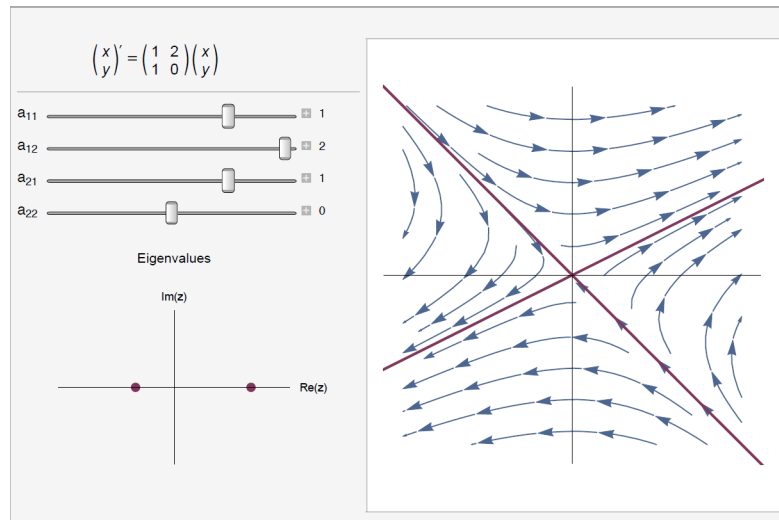
$$(a) \quad 1. \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = \left( \frac{e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \right) x_0 + \left( \frac{-2e^{-t}}{3} + \frac{2e^{2t}}{3} \right) y_0 \\ y(t) = \left( -\frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) x_0 + \left( \frac{2e^{-t}}{3} + \frac{e^{2t}}{3} \right) y_0 \end{cases}$$

2. A origem é uma sela.

3.



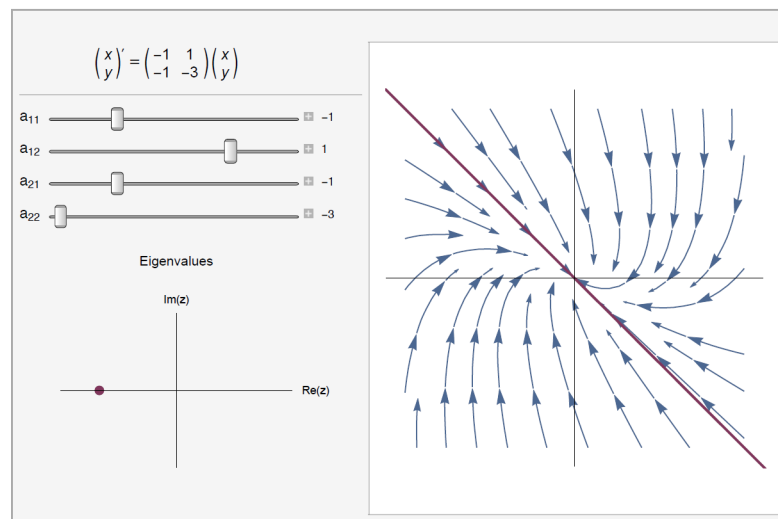
$$(b) \quad 1. \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^{-2t} + te^{-2t})x_0 + te^{-2t}y_0 \\ y(t) = -te^{-2t}x_0 + (e^{-2t} - te^{-2t})y_0 \end{cases}$$

2. A origem é um nó assintoticamente estável.

3.



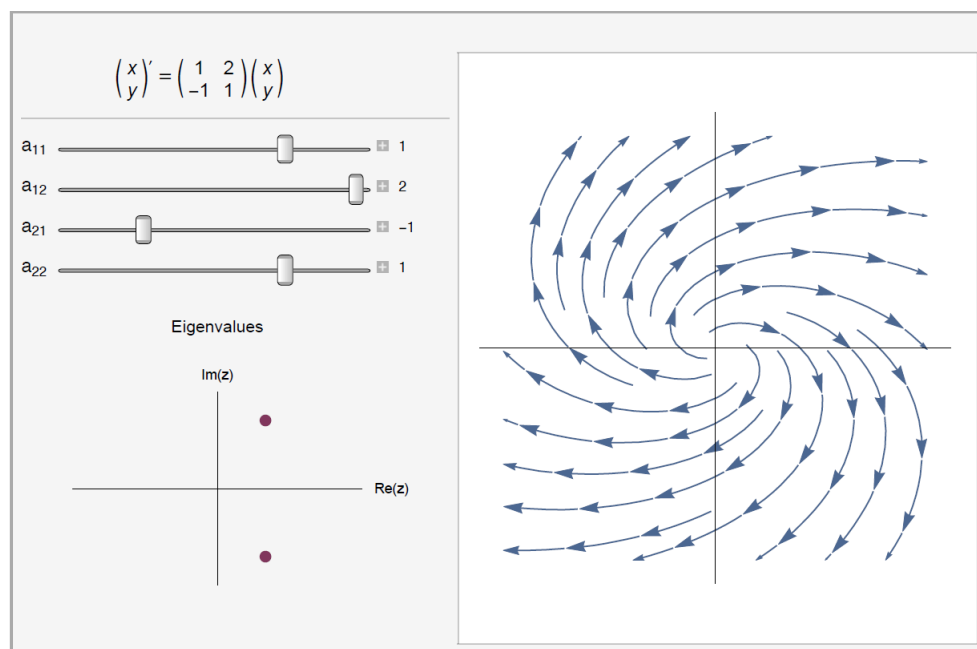
(c) 1.  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) & \sin(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t) & \cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

isto é,

$$\begin{cases} x(t) = (e^t \cos(\sqrt{2}t)x_0 + \sqrt{2}e^t \sin(\sqrt{2}t)y_0) \\ y(t) = (e^t \cos(\sqrt{2}t)y_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^t \sin(\sqrt{2}t)x_0) \end{cases}$$

2. A origem é um foco instável.

3.



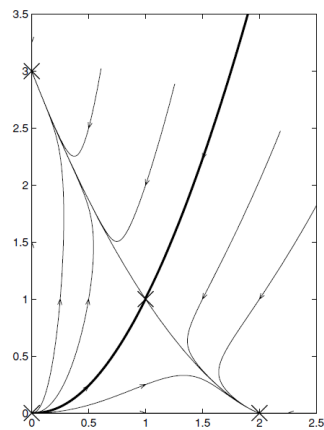
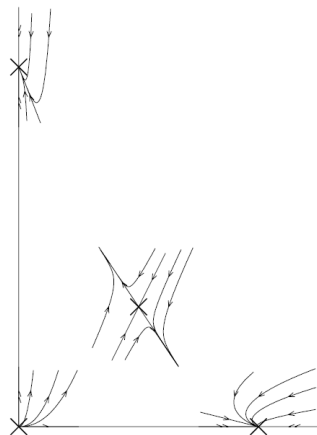
Exercício 5.

(a) Ver slides.

(b) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:

- $(0, 0)$ ; fonte (instável)
- $(0, 3)$ ; poço (assimptoticamente estável)
- $(2, 0)$ ; poço (assimptoticamente estável)
- $(1, 1)$ ; ponto de sela

2.



(c) 1. Os pontos de equilíbrio (e respectiva estabilidade) são:

- $(0, 0)$ ; fonte (instável)
- $(0, 3)$ ; ponto de sela
- $(2, 0)$ ; ponto de sela
- $(1, 2)$ ; poço (assimptoticamente estável)

2.

