# Equações diferenciais lineares de ordem $n$

Maria Joana Torres

2018/19

**Definição**:

Uma **equação diferencial linear de ordem $n$** é uma equação que está ou pode ser escrita na forma

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)} \qquad (*)$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $f$ são funções contínuas no aberto $U$ e $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in U$.

Se $f \equiv 0$, a equação toma a forma

$$\boxed{a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0} \qquad (**)$$

e é nesse caso chamada equação linear homogénea de ordem $n$.

**Exemplos**:

- $e^x y'' + y' + y = x^2$ – edo linear de ordem 2
- $xy' + y = x$, $x \in \mathbb{R}^+$ – edo linear de ordem 1

**Teorema (Existência e unicidade de solução)**:

Considere-se a equação diferencial

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $f$ são funções contínuas em $I$ ($I$ intervalo aberto) e $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Então, dados $x_0 \in I$ e $z_0, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$ existe uma e uma só solução $y$ da equação diferencial tal que

$$\begin{cases} y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z_1 \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = z_{n-1} \end{cases}$$

Se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são soluções da equação homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (**)$$

então qualquer combinação linear

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_m\, y_m$$

também é solução de $(**)$.

Questão: Supondo que temos $n$ soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogénea será que toda a solução dessa equação é da forma

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n\,?$$

SIM, se as $n$ funções forem linearmente independentes em $I$.

<u>Relembremos</u>:

- Dadas $m$ funções $f_1, f_2, \ldots, f_m$, elas dizem-se linearmente independentes num certo intervalo $I$ se

$$c_1\, f_1(x) + \cdots + c_m\, f_m(x) = 0,\ \forall x \in I\ \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0\,.$$

- Caso contrário, as funções dizem-se linearmente dependentes em $I$.
  Assim, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ são linearmente dependente em $I$ se existem constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ não todas nulas tais que

$$c_1\, f_1(x) + \cdots + c_m\, f_m(x) = 0,\ \forall x \in I$$

**Exemplos**:

1. As funções $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^3$ são linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

2. As funções $g_1(x) = x$, $g_2(x) = 3x$, $g_3(x) = x^2$ são linearmente dependentes em $\mathbb{R}$.

**Exemplos**:

Pode provar-se que os seguintes conjuntos de funções são formados por funções linearmente independentes em $\mathbb{R}$:

- $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos(2x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(nx)\}$
- $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}\}$, $\alpha_i$ constantes distintas
- $\{1, x, \dots, x^n\}$
- $\{\cos x, \operatorname{sen} x, x \cos x, x \operatorname{sen} x, x^2 \cos x, x^2 \operatorname{sen} x, \dots, x^n \cos x, x^n \operatorname{sen} x\}$

Teorema [**Fundamental das Equações Lineares Homogéneas**]:

A equação diferencial linear homogénea de ordem $n$

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (**)$$

tem $n$ soluções linearmente independentes.

Além disso, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são $n$ soluções linearmente independentes de $(**)$, então toda a solução de $(**)$ pode ser escrita na forma

$$c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n$$

com $c_1, c_2, \ldots, c_n$ constantes.

Consequentemente, a **solução geral** da equação $(**)$ em $I$ é

$$\boxed{y_h(x) = c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_n\, y_n\,,}\ x \in I,\ \ c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$$

Nota: Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são $n$ soluções linearmente independentes de $(**)$, dizemos que formam um conjunto fundamental de soluções.

Definição:

Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $n$ funções reais deriváveis até à ordem $n-1$ no intervalo $I$. O determinante

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \text{det} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

é chamado o Wronskiano destas $n$ funções.

Teorema:

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são $n$ soluções da equação diferencial linear homogénea $(**)$, então $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são linearmente independentes se e só se

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x_0) \neq 0\,,$$

para algum $x_0 \in I$.

**Exemplo**:

As soluções

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x} \quad \text{e} \quad y_3(x) = e^{2x}$$

da equação

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$$

são linearmente independentes pois

$$W(e^x, e^{-x}, e^{2x}) = \det \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{bmatrix} = -6e^{2x} \neq 0\,, \ \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

Teorema [**Fundamental das Equações Lineares não Homogéneas**]:

Seja $y_p$ uma solução (particular) da equação linear não homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (*)$$

e seja $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ um conjunto fundamental de soluções da equação homogénea correspondente

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0\,. \quad (**)$$

Então toda a **solução** de $(*)$ pode ser escrita na forma

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \cdots + c_n\, y_n(x)\,.}$$

$$\boxed{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes e $a_n \neq 0$.

Faz sentido procurar soluções da forma $e^{rx}$!

Para $y = e^{rx}$, vem

$$\begin{aligned} & a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} \\ = \; & e^{rx} (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0) \\ = \; & e^{rx} P(r) \end{aligned}$$

onde

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 \,.$$

Assim,

$$e^{rx} \;\; \text{é solução} \Leftrightarrow P(r) = 0 \,.$$

$$\boxed{P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0}$$

equação característica da equação diferencial

## I - Raízes reais distintas

Se $P(r) = 0$ admite $n$ raízes reais distintas $r_1, r_2, \ldots, r_n$ então as $n$ funções

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\ y_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots,\ y_n(x) = e^{r_n x}$$

são soluções da equação diferencial.

Estas funções são linearmente independentes e, portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}}$$

## II - Raízes reais repetidas

Se a equação característica tem uma raiz $r_1$ com multiplicidade $m$, pode provar-se que as $m$ funções

$$y_1(x) = e^{r_1 x},\ y_2(x) = xe^{r_1 x}, \dots,\ y_m(x) = x^{m-1}e^{r_1 x}$$

são linearmente independentes e são ainda soluções da equação diferencial.

Assim, neste caso, a "parte" da solução geral da equação diferencial que corresponde a esta raiz múltipla é dada por

$$\boxed{(c_1 + c_2 x + \cdots + c_m x^{m-1})e^{r_1 x}}$$

## III - Raízes complexas distintas

$$r_1 = a + bi \quad \Rightarrow \quad r_2 = a - bi \qquad \text{nenhuma repetida}$$

Pode provar-se que as funções

$$y_1(x) = e^{ax}\cos(bx) \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$$

são linearmente independentes e são ainda soluções da equação diferencial.

Assim, neste caso, a "parte" da solução geral da equação diferencial que corresponde às raízes complexas conjugadas $a \pm bi$ (não repetida) é dada por

$$\boxed{e^{ax}(c_1\cos(bx) + c_2\operatorname{sen}(bx))}$$

## IV - Raízes complexas repetidas

Se $a + bi$ é uma raiz de multiplicidade $m$ da equação característica, então a "parte"da solução geral da equação diferencial correspondente a esta raiz (e à sua complexa conjugada) é uma combinação linear das $2m$ funções

$$e^{ax}\cos(bx),\ xe^{ax}\cos(bx),\ \ldots,\ x^{(m-1)}e^{ax}\cos(bx)$$

$$e^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ xe^{ax}\operatorname{sen}(bx),\ \ldots,\ x^{(m-1)}e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,,$$

ou seja, é da forma,

$$\boxed{e^{ax}[(c_1 + c_2x + \cdots + c_mx^{m-1})\cos(bx) + (c_{m+1} + c_{m+2}x + \cdots + c_{2m}x^{m-1})\operatorname{sen}(bx)]}$$

Consideremos novamente a equação

$$\boxed{a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f} \quad (*)$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes e $a_n \neq 0$.

O método que vamos descrever para encontrar uma solução particular de $(*)$ só funciona para certo tipo de funções $f$.

**Funções CI** (de coeficiente indeterminado):

- $x^n, \quad n \in \mathbb{N}_0$
- $e^{ax}, \quad a \neq 0$
- $\operatorname{sen}(bx+c),\ \cos(bx+c), \quad b \neq 0$
- Produtos (finitos) de quaisquer funções anteriores.

**Conjuntos CI**:

- $x^n \quad \longrightarrow \quad \{x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\}$
- $e^{ax} \quad \longrightarrow \quad \{e^{ax}\}$
- $\operatorname{sen}(bx+c),\ \cos(bx+c) \quad \longrightarrow \quad \{\operatorname{sen}(bx+c), \cos(bx+c)\}$
- Produto de duas funções anteriores $\longrightarrow$ conjunto formado pelos produtos obtidos multiplicando todos os elementos do conjunto CI da primeira pelos elementos do conjunto CI da segunda.

**Exemplos**:

1. $x^3 \quad \longrightarrow \quad \{x^3, x^2, x, 1\}$

2. $e^{2x} \quad \longrightarrow \quad \{e^{2x}\}$

3. $x^3 e^{2x} \quad \longrightarrow \quad \{x^3 e^{2x}, x^2 e^{2x}, x e^{2x}, e^{2x}\}$

O método aplica-se quando

$$f = A_1 g_1 + A_2 g_2 + \cdots + A_m g_m$$

onde $g_1, g_2, \ldots, g_m$ são funções CI e $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são constantes conhecidas.

1. Encontrar o conjunto CI de cada uma das funções $g_i$.
2. Eliminar entre estes os que sejam subconjunto de algum outro.
3. Se algum dos conjuntos resultantes contiver uma solução da equação homogénea, multiplicar todos os seus elementos pr $x^s$, onde $s$ é o menor inteiro que garante que o conjunto resultante já não possui nenhuma solução dessa equação.
4. Considerar para $y_p$ uma combinação linear (com coeficientes a determinar) de todas as funções dos conjuntos resultantes.
5. Determinar esses coeficientes desconhecidos, obrigando a função $y_p$ a satisfazer identicamente a equação dada.