

Problema de PL e representação matricial

Geral	Exemplo																																																			
$\begin{array}{ll} \max & cx \\ & Ax + Is = b \\ & x \geq 0 \end{array}$	$\begin{array}{ll} \max & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \\ \text{suj.} & 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + s_1 = 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 1x_3 + s_2 = 150 \\ & 2x_1 + 1x_2 \quad \quad + s_3 = 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$																																																			
<table><tr><td>A</td><td>I</td><td>b</td></tr><tr><td>$-c$</td><td>$\tilde{0}$</td><td>0</td></tr></table>	A	I	b	$-c$	$\tilde{0}$	0	<table><tr><td></td><td>z</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>x_3</td><td>s_1</td><td>s_2</td><td>s_3</td><td></td></tr><tr><td>s_1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>40</td></tr><tr><td>s_2</td><td>0</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>150</td></tr><tr><td>s_3</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>20</td></tr><tr><td>z</td><td>1</td><td>-30</td><td>-20</td><td>-10</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table>		z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3		s_1	0	1	1	2	1	0	0	40	s_2	0	2	2	1	0	1	0	150	s_3	0	2	1	0	0	0	1	20	z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0
A	I	b																																																		
$-c$	$\tilde{0}$	0																																																		
	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3																																													
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40																																												
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150																																												
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20																																												
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0																																												

A resolução mostrada no diapositivo anterior pode ser representada em quadros, como se segue.

Resolução do sist. de equações: representação matricial - ii

- Pré-multiplicando o Quadro Inicial, obtém-se o Quadro Final.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} & \tilde{0} \\ \hline c_B B^{-1} & 1 \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & I & b \\ \hline -c & \tilde{0} & 0 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \begin{array}{|c|c|c|} \hline B^{-1}A & B^{-1} & B^{-1}b \\ \hline c_B B^{-1}A - c & c_B B^{-1} & c_B B^{-1}b \\ \hline \end{array}$$

- Nota: tal como vimos no diapositivo anterior, nas posições que a matriz B ocupa no Quadro Inicial, aparecem as colunas da matriz identidade no Quadro Final.

Exemplo

- Dado o Quadro Inicial:

	z	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	1	1	2	1	0	0	40
s_2	0	2	2	1	0	1	0	150
s_3	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0

- para resolver o sistema de equações em ordem às variáveis básicas $x_B = \{x_3, s_2, x_2\}$, i.e., obter um Quadro Final em que essas variáveis são básicas,
- a matriz B e o vector c_B são os abaixo apresentados, e permitem calcular a matriz B^{-1} e o vector $c_B B^{-1}$:

$$B = \begin{array}{c|ccc} & x_3 & s_2 & x_2 \\ \hline & 2 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 1/2 & 0 & -1/2 \\ & -1/2 & 1 & -3/2 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$c_B = \begin{array}{c|ccc} & 10 & 0 & 20 \end{array}$$

$$c_B B^{-1} = \begin{array}{c|ccc} & 5 & 0 & 15 \end{array}$$

Exemplo

1/2	0	-1/2	0
-1/2	1	-3/2	0
0	0	1	0
5	0	15	1

*

	z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃		
s ₁	0	1	1	2	1	0	0	40	=
s ₂	0	2	2	1	0	1	0	150	
s ₃	0	2	1	0	0	0	1	20	
z	1	-30	-20	-10	0	0	0	0	

=

	z	x ₁	x ₂	x ₃	s ₁	s ₂	s ₃	
x ₃	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1/2	10
s ₂	0	-3/2	0	0	-1/2	1	-3/2	100
x ₂	0	2	1	0	0	0	1	20
z	1	5	0	0	5	0	15	500

*

B^{-1}	$\tilde{0}$
$c_B B^{-1}$	1

=

A	I	b
$-c$	$\tilde{0}$	0
$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$
$c_B B^{-1}A - c$	$c_B B^{-1}$	$c_B B^{-1}b$