Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 1 :: 21 de março de 2018

Nome

Número

I

As respostas ao grupo I devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3,5 valores] Considere o conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \text{ e } x^2 + y^2 > 1\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 + 1\right\}.$$

a) Represente graficamente o conjunto A.

b) Defina, por extensão, o conjunto $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.

c) Indique um elemento do conjunto $\bar{A} \setminus A$.

d) O conjunto A é limitado?

Questão 2. [1,5 valores] Defina uma função f, real de duas variáveis reais, cuja curva de nível definida por $f(x,y) = 4$ é a circunferência centrada na origem e de raio 2.

Questão 3. [4 valores] Considere a função definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y}{x^2 + xy}$.

a) Indique o domínio de f.

b) Calcule, caso exista, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Questão 4. [6 valores] A função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Justifique que f é uma função contínua.

b) Encontre a derivada direcional de f, no ponto de coordenadas (1,-1), segundo a direção do vetor $(-1,1)$.

c) Prove que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem ambas.

d) Verifique se f é diferenciável em $(0,0)$.

II

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é verdadeira ou falsa: não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

Questão 1. Se f é uma função real de duas variáveis reais injetiva e $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, então $x_0 = x_1$ e $y_0 = y_1$. ○ ○

Questão 2. Se $f(2,3) = 1$, então $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 1$. ○ ○

Questão 3. O plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 12}$, no ponto de coordenadas $(1, -1, 4)$ é definido por $x - y - 2z + 6 = 0$. ○ ○

Questão 4. A função definida por $f(x,y) = |x|$ não é derivável em qualquer ponto do eixo das abcissas. ○ ○

Questão 5. Se $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por $f(x,y) = \big(\ln(x^2 + y^2 + 1), \operatorname{sen}(2x + y), e^x\big)$, então a matriz jacobiana de f em $(0,0)$ é $Jf(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. ○ ○