Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

Mestrado Integrado em Engenharia Informática

Teste 2 :: 30 de maio de 2018

Nome | Número

I

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, se a afirmação é verdadeira ou falsa; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

V F

Questão 1. Se $f(0,0) = 1$, $\nabla f(0,0) = (1,2)$, $g(0,0) = 1$ e $\nabla g(0,0) = (2,4)$ então as curvas de nível 1 de f e g são tangentes em $(0,0)$. ◯ ◯

Questão 2. O ponto de coordenadas $(\frac{1}{2}, -2, -\frac{3}{4})$ é um ponto da superfície definida pela equação $z = 8 - 3x^2 - 2y^2$ no qual o plano tangente é perpendicular à reta definida por $x = 2 - 3t$, $y = 7 - 8t$ e $z = 5 - t$, $t \in \mathbb{R}$. ◯ ◯

Questão 3. Se $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^3$ é um conjunto limitado e $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada então f tem máximo e mínimo. ◯ ◯

Questão 4. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^2 f(x,y)\, dy dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x+1, 2y)\, dy dx.$ ◯ ◯

Questão 5. As coordenadas cartesianas do ponto cujas coordenadas esféricas são $\rho = 1$, $\theta = \pi$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$ são $(-1, 0, 0)$. ◯ ◯

II

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas e devem ser dadas na folha de teste.

Questão 1. [3 valores] Considere a superfície cónica definida por $z^2 = x^2 + y^2$.

a) Defina a reta normal à superfície no ponto de coordenadas $(-1, 1, \sqrt{2})$.

b) Verifique se a reta determinada na alínea anterior interseta algum dos eixos coordenados.

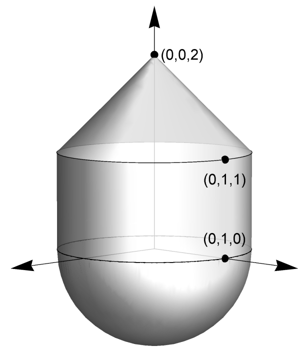
Questão 2. [3 valores] Considere a função definida por $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

a) Determine os pontos críticos de f.

b) Classifique os pontos críticos encontrados na alínea anterior.

c) Mostre que f não possui extremos absolutos.

Questão 3. [4 valores] Considere o sólido limitado por uma superfície esférica, uma cilíndrica e uma cónica, representado na figura.



a) Escreve as equações que definem cada uma das superfícies.

b) Exprima, usando um integral duplo, o volume do sólido.

c) Exprima, usando um integral triplo, o volume do sólido.

d) Calcule o volume do sólido.

III

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Considerando as funções $\boldsymbol{f}(x,y)=(x+y,xy)$ e $\boldsymbol{g}(u,v)=(e^{u+v},e^{uv})$, o elemento da segunda linha e primeira coluna da matriz jacobiana de $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}$ é:

- ○ $e^{(x+y)xy}(2xy+x^2)$;
- ○ $e^{(x+y)xy}(x^2+y^2)$;
- ○ $e^{(x+y)xy}(2xy+y^2)$;
- ○ nenhuma das anteriores.

Questão 2. Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^2$ e P um ponto crítico de f. Se a matriz hessiana de f no ponto P é $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, então:

- ○ P é ponto de máximo local de f;
- ○ P é ponto de sela;
- ○ P é ponto de mínimo local de f;
- ○ nenhuma das anteriores.

Questão 3. Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma aplicação linear não nula e seja $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 1\}$. Se $f(a,b)=\min f_{|S}$ e $f(c,d)=\max f_{|S}$ então:

- ○ $a^2+b^2<c^2+d^2\leq 1$;
- ○ $1\geq a^2+b^2>c^2+d^2$;
- ○ $a^2+b^2=c^2+d^2=1$;
- ○ nenhuma das anteriores.

Questão 4. O valor do integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} y\,dydx$ é:

- ○ 0;
- ○ 1;
- ○ -1;
- ○ 2.

Questão 5. A mudança da ordem de integração no integral $\displaystyle\int_0^1\int_{-x^2}^{x} f(x,y)\,dydx$ permite escrever este integral na forma:

- ○ $\displaystyle\int_{x^2}^{x}\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$;
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^1 f(x,y)\,dxdy$;
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{y}}^{1} f(x,y)\,dxdy+\int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dxdy$;
- ○ $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{-y}}^{1} f(x,y)\,dxdy+\int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dxdy$.