Cálculo

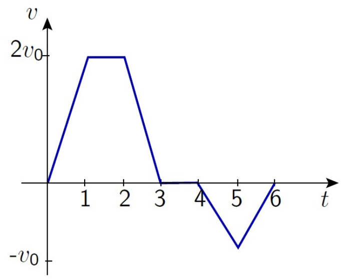
folha 8 — 2017'18

Integral de Riemann.

1. Um objeto move-se ao longo de um eixo de coordenadas x e o seu movimento é descrito por uma função $x = x(t)$ no intervalo de tempo $[0, 6]$, t em horas.

Sabendo que a posição do objeto no instante inicial é $x(0) = 0$ e que a lei das velocidades deste movimento é descrita pelo gráfico ao lado.

Determine:



(a) os intervalos de tempo onde o objeto está respetivamente: parado, em movimento uniforme, em movimento acelerado e em movimento desacelerado

(b) as distâncias percorridas nos mesmos intervalos de tempo

(c) a posição no instante $t = T$ e o deslocamento total

(d) a lei do movimento $x(t)$ e esboce o seu gráfico.

2. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a > 0$. Nestas condições, prove que

(a) $\displaystyle\int_a^b \alpha\, dx = \alpha(b - a)$ (b) $\displaystyle\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

3. Nas somas –esquerda, direita e média– de Riemann, as "alturas" dos retângulos calculam-se usando, respetivamente, o extremo esquerdo, o direito e o ponto médio de cada subintervalo. Nestas condições,

(a) estime o valor de $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$, usando as somas esquerda, direita e média e dois subintervalos de $[1, 2]$.

(b) compare os resultados obtidos na alínea anterior com o valor exato do integral.

(c) esboce, numa representação gráfica apropriada, as quatro quantidades obtidas anteriormente.

4. Mostre, geometricamente, que

$$\int_0^1 \sqrt{2 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$$

5. Sem efetuar cálculos, indique o sinal de cada um dos seguintes integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^3\, dx$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi x \cos x\, dx$ (c) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

6. Em cada alínea e sem efetuar cálculos, indique qual é o maior dos integrais definidos

(a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ **e** $\displaystyle\int_0^1 x\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x\, dx$ **e** $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x\, dx$

(c) $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\, dx$ **e** $\displaystyle\int_1^2 e^x\, dx$

7. Sabendo que $\int_0^1 f(x)\,dx = 6$, $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$, $\int_2^5 f(x)\,dx = 1$; calcule

(a) $\int_0^5 f(x)\,dx$ (c) $\int_1^5 f(x)\,dx$ (e) $\int_2^0 f(x)\,dx$

(b) $\int_1^2 f(x)\,dx$ (d) $\int_0^0 f(x)\,dx$ (f) $\int_5^1 f(x)\,dx$

8. Sabendo que $\int_0^1 f(t)\,dt = 3$, calcule

(a) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(2t)\,dt$ (b) $\int_0^1 f(1-t)\,dt$ (c) $\int_1^{\frac{3}{2}} f(3-2t)\,dt.$

9. Identifique as funções primitiváveis e/ou as integráveis e, no caso de ser integrável defina uma função "área "adequada e calcule o integral

(a) $f(x) = 1$, com $x \in [0,2]$

(b) $h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 2\right] \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}$

(c) $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ 1 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1[\\ x-1 & \text{se } x \in]1,2] \end{cases}$

10. Em cada uma das alíneas, calcule a função derivada de F, sendo F definida em $\mathbb{R}$ por:

(a) $F(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}\,dt$ (b) $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}\,dt$ (c) $F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{t^6}{1+t^4}\,dt$

11. Sabendo que $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz a igualdade abaixo para $x \geq 0$, calcule f em cada um dos seguintes casos:

(a) $\int_0^x f(t)\,dt = x^2(1+x)$ (b) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^3 e^x - x^4.$

12. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

Defina a função F, sabendo que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0,2] \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

13. Seja $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$F(x) = 3 + \int_0^x \frac{1+\operatorname{sen} t}{2+t^2}\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sem calcular o integral, encontre um polinómio P de grau não superior a 2 e tal que $P(0) = F(0)$, $P'(0) = F'(0)$, $P''(0) = F''(0)$.

14. Seja $a > 0$ e $f : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Justifique que

(a) se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$ (b) se f é par, então $\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx.$

15. Dados $a < b \in \mathbb{R}$, mostre que se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.