Situações particulares do método simplex:

- Selecção de um vértice admissível inicial
  - Se não existir, **problema é impossível**.
- Repetir
  - Selecção da coluna pivô:
    - Coeficiente mais negativo na linha da função objectivo
    - (em caso de empate, escolha arbitrária)
    - Se não existir coef.<0, solução óptima.
  - Selecção da linha pivô:
    - Menor razão (lado direito/coluna pivô) positiva (*i.e.*, coef.col.>0)
    - (em caso de empate, o próximo vértice é **degenerado)**
    - Se não existir coef.col.>0, **solução óptima é ilimitada**.
  - Fazer eliminação de Gauss
- Enquanto (solução não for óptima)

- O que é um algoritmo?
- O algoritmo simplex converge?

Ver Mais

Degenerescência: caracterização

Vértice degenerado: geometria

- Normalmente, o vértice é definido pela intersecção de $(n-m)$ hiperplanos (*i.e.*, há $(n-m)$ restrições activas).
- Um vértice é *degenerado* se o número de hiperplanos for maior.

Vértice degenerado: várias bases, a mesma solução básica

- Uma *base* é um conjunto de variáveis básicas (de vectores linearmente independentes).
- Resolvendo o sistema de equações em ordem às variáveis básicas (da base), obtém-se uma solução básica (vértice).
- Pode haver várias bases (quadros simplex) cuja solução corresponda ao mesmo vértice (solução básica), que é *degenerado*.

Domínio ilimitado (aberto)

- O domínio é ilimitado quando se pode caminhar ao longo de um raio (≡ semi-recta) permanecendo no domínio admissível.

Um raio é um conjunto de pontos

- $R = \{ x : x = v + \theta \,.\, d, \; \theta \in \mathbb{R}_+ \}$,

  sendo $v \in \mathbb{R}^n$ um vértice e $d \in \mathbb{R}^n$ uma direcção (um vector não-nulo).

Domínio ilimitado: como identificar no quadro simplex?

Quadro simplex: como identificar um raio?

- Há uma coluna de uma variável não-básica em que os coeficientes das restrições são todos ≤ 0.

- Exemplo:

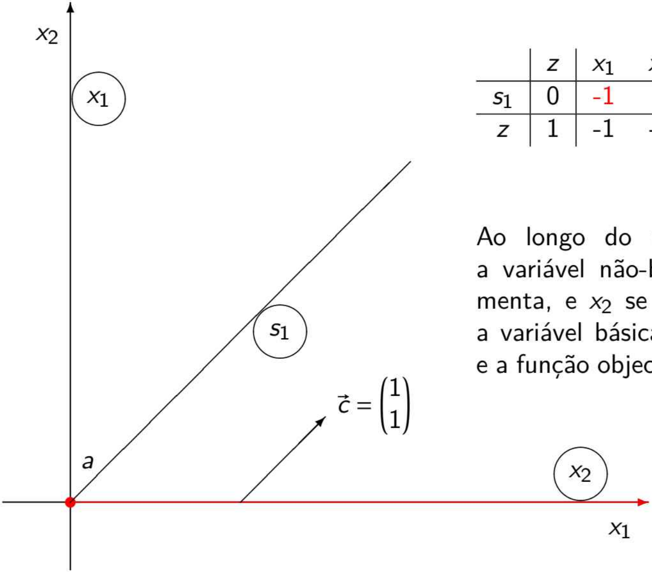
$$\begin{cases} s_1 &= 0 + 1x_1 - 1x_2 \\ z &= 0 + 1x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Ao longo de um raio, todos os pontos são admissíveis, porque:

- há uma **única** variável não-básica que aumenta de valor,
- todas as vars básicas aumentam (coef.<0) ou mantêm o valor (coef.=0),
- sendo portanto $x, s \geq 0$.

Exemplo: domínio ilimitado e solução óptima ilimitada



	z	x_1	x_2	s_1	
s_1	0	-1	1	1	0
z	1	-1	-1	0	0

Ao longo do raio, quando a variável não-básica x_1 aumenta, e x_2 se mantém $=0$, a variável básica s_1 aumenta e a função objectivo também.

3. Vértice admissível inicial

- E se não houver um vértice admissível (quadro simplex) inicial?
- Exemplo: problema com restrições de $\geq$.
- O Método das 2 Fases
  - Fase I: obter um vértice admissível inicial
  - Fase II: aplicar algoritmo simplex

Um problema com restrições de ≥ e de minimização

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0} & &
\end{array}
$$

- Há uma relação este problema e o que vimos anteriormente.
- Iremos explorar essa relação depois.

Transformação na forma canónica

$$
\begin{array}{lcl}
\min z & = & cx \\
 & & Ax \geq b \\
 & & x \geq 0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{lcl}
\min z & = & cx \\
 & & Ax - u = b \\
 & & x, u \geq 0
\end{array}
$$

sendo $u \in \mathrm{IR}_{+}^{m \times 1}$ um vector de variáveis de folga da mesma dimensão que $b \in \mathrm{IR}^{m \times 1}$.

Transformação Inequações → Equações

- Qualquer inequação do tipo ≥ pode ser transformada numa equação (equivalente), introduzindo uma variável adicional, designada por *variável de folga*, com valor não-negativo.
- Exemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 & \geq 120 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 1u_1 & = 120 \\ x_1, x_2, u_1 & \geq 0 \end{cases}$$

- O número de unidades produzidas numa solução $(x_1, x_2)^t$ é igual ao valor da função linear: $3x_1 + 2x_2$.
- u_1 (variável de folga) é o número de unidades produzidas em excesso relativamente às necessárias (no exemplo, 120).
- Há autores que designam estas variáveis por *variáveis de excesso*.

Exemplo: transformação na forma canónica

Modelo original

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\min z = & 120y_3 & + & 80y_4 & + & 30y_5 & & \\
 & 3y_3 & + & 1y_4 & + & 1y_5 & \geq & 12 \\
 & 2y_3 & + & 2y_4 & & & \geq & 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}$$

Modelo na forma canónica (equivalente ao modelo original)

- Variáveis de decisão: y_3, y_4, y_5.
- Variáveis de excesso: y_1, y_2.

$$\begin{array}{rrrcrrrl}
\min z = & & & & 120y_3 + & 80y_4 + & 30y_5 & \\
 & {\color{red}-1y_1} & & + & 3y_3 + & 1y_4 + & 1y_5 & = 12 \\
 & & {\color{red}-1y_2} & + & 2y_3 + & 2y_4 & & = 10 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0}
\end{array}$$

Não há um vértice admissível inicial, porque ...

- o lado direito é positivo e não há uma matriz identidade no quadro :

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
	0	-1	0	3	1	1	12
	0	0	-1	2	2	0	10

Lembrete: antes havia um vértice admissível inicial, porque:

- as restrições eram todas de $\leq$ (havia uma matriz identidade $I_{m\times m}$), e
- os coeficientes do lado direito eram todos ≥ 0.

- Quando não há um vértice admissível inicial, usa-se o:

Método das 2 Fases:

- na Fase I, resolve-se um *problema auxiliar* para tentar encontrar um vértice admissível inicial.
- Se se conseguir encontrar, na Fase II, aplica-se o algoritmo simplex; caso contrário, o problema é impossível.

Método das 2 fases: estratégia

Fase I: adicionar variáveis artificiais e minimizar a sua soma

- resolver problema auxiliar ($\mathbf{1}a$ é a soma das variáveis artificiais):

$$
\begin{aligned}
\min z_a &= \mathbf{1}a \\
& Ax - u + a = b \\
& x, u, a \geq 0
\end{aligned}
$$

  sendo $a \in \mathbb{R}_+^{m\times 1}, \mathbf{1} = [1, 1, \ldots, 1]$ um vector linha com m elementos.
- Se $(\min z_a = \mathbf{1}a = 0) \Rightarrow a = \widetilde{0}$ (todas as variáveis artificiais $= 0$) $\Rightarrow$ há um vértice admissível que obedece às restrições originais;
- caso contrário ($\min z_a > 0$), não é possível obter uma solução que obedeça a todas as restrições originais $\Rightarrow$ problema é impossível.

Fase II: optimizar problema original

- Existe um vértice admissível inicial para o algoritmo simplex;
- optimiza-se a função objectivo (original) do problema.

Fase I: adicionar vars artificiais a_1 e a_2, e $\min z_a$

- Função objectivo da Fase I: $\min z_a = 1a_1 + 1a_2$.
- Equação da linha da função objectivo: $z_a - 1a_1 - 1a_2 = 0$

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	3	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	0	0	0	0	0	- 1	- 1	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos. ▸ Validar Quadro

- O quadro seguinte é válido; vamos ▸ minimizar a função auxiliar z_a:

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

Fase I: iterações

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
a_1	0	-1	0	$\boxed{3}$	1	1	1	0	12
a_2	0	0	-1	2	2	0	0	1	10
z_a	1	-1	-1	5	3	1	0	0	22

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/3	0	1	1/3	1/3	1/3	0	4
a_2	0	2/3	-1	0	$\boxed{4/3}$	-2/3	-2/3	1	2
z_a	1	2/3	-1	0	4/3	-2/3	-5/3	0	2

	z_a	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	a_1	a_2	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	1/2	-1/4	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	-1/2	3/4	3/2
z_a	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0

- Solução óptima: $\min z_a = 0$.
- Foi encontrado um vértice admissível.

Fase I: conclusão

- O vértice admissível é $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^t = (0, 0, 7/2, 3/2, 0)^t$.
- Variáveis artificiais (a_1, a_2) e função objectivo auxiliar (z_a) não são necessárias na Fase II, e podem ser eliminadas.

		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3		-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4		1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2

- Na Fase II, iremos optimizar a função objectivo original (z), partindo do vértice admissível encontrado na Fase I.

Fase II: função objectivo original

- Função objectivo da Fase II: min $z = 120y_3 + 80y_4 + 30y_5$.
- Equação da linha da função objectivo: $z - 120y_3 - 80y_4 - 30y_5 = 0$

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	0	0	-120	-80	-30	0

- O quadro não é válido: os coeficientes da linha da função objectivo debaixo da matriz identidade devem ser nulos.

Validar Quadro

- O quadro seguinte é válido; vamos optimizar a função original z:

	z	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	
y_3	0	-1/2	1/4	1	0	1/2	7/2
y_4	0	1/2	-3/4	0	1	-1/2	3/2
z	1	-20	-30	0	0	-10	540

- O primeiro vértice admissível encontrado é a solução óptima
- (problema de minimização e nenhum coeficiente na linha da função objectivo é positivo).
- Isto nem sempre acontece!

Conclusão

- Há outros algoritmos para resolver problemas de programação linear, como os métodos de pontos interiores.
- O algoritmo simplex permanece competitivo, embora tenham sido identificados problemas em que os métodos de pontos interiores têm melhor desempenho.