

Tópicos de Matemática Discreta

folha 9

#### 4. Funções

4.1. Considere os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{a, b, c, d\}$ .

- (a) Dê exemplo de uma correspondência de  $A$  para  $B$  que não seja função.
- (b) Quantas funções existem de  $A$  para  $B$  e quantas de  $B$  para  $A$ ?

4.2. Considere as funções:

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x^2 - 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ ;

$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definida por  $f(x) = 2x - 1$ , para todo  $x \in \mathbb{N}$ .

Determine:

- (a)  $g(\{-1, 0, 1\})$ ;
- (b)  $g([-\infty, 0])$ ;
- (c)  $g(\mathbb{R})$ ;
- (d)  $g^{\leftarrow}(\{0\})$ ;
- (e)  $g^{\leftarrow}([-\infty, 0])$ ;
- (f)  $f(\{4, 6, 9\})$ ;
- (g)  $f(\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \ x = 3y\})$ ;
- (h)  $f^{\leftarrow}(\{2\})$ ;
- (i)  $f^{\leftarrow}(\{3, 4, 5\})$ .

4.3. Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$  as funções de  $\mathbb{N}_0$  para  $\mathbb{N}_0$  definidas por:

$$f(n) = n + 1; \quad g(n) = 2n; \quad h(n) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Determine:

- (a)  $f \circ f$ ;
- (b)  $f \circ g$ ;
- (c)  $g \circ f$ ;
- (d)  $g \circ h$ ;
- (e)  $f \circ g \circ h$ ;
- (f)  $h \circ f$ ;
- (g)  $h \circ g$ ;
- (h)  $h \circ f \circ g$ .

4.4. Dê exemplos de:

- (a) duas funções  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f$  e  $g$  não sejam constantes e  $f \circ g$  seja constante.
- (b) uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f \neq id_{\mathbb{R}}$  mas  $f \circ f = id_{\mathbb{R}}$ .

4.5. Sejam  $A, B$  conjuntos e  $f : A \rightarrow B$  uma função. Mostre que  $id_B \circ f = f = f \circ id_A$ .

4.6. Considere os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{a, b, c, d\}$ . Indique, caso exista, uma função de  $A$  para  $B$  que seja: (a) não injetiva; (b) injetiva; (c) sobrejetiva; (d) não sobrejetiva.

4.7. Diga, justificando, quais das seguintes funções são injetivas, sobrejetivas ou bijetivas:

$$f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_1(x) = 2x; \quad f_2 : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x};$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, \quad f_3(x) = x^2; \quad f_4 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_4(x) = |x| + 2.$$

Tópicos de Matemática Discreta

folha 10

**4.8.** Considere as seguintes funções

$$\begin{array}{llll} f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] & g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0 \\ x \longmapsto x^3, & x \longmapsto 2x - 3, & x \longmapsto \begin{cases} 2x, & \text{se } x \geq 0 \\ -2x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{array}.$$

Verifique que  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções bijetivas e determine as respetivas funções inversas.

**4.9.** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Considere a função  $f : A \times B \rightarrow B \times A$  definida por  $f(a, b) = (b, a)$ , para todo  $(a, b) \in A \times B$ .

(a) Mostre que  $f$  é bijetiva.

(b) Determine  $f^{-1}$ .

**4.10.** Considere as funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = |x| + 2$ , para todo o real  $x$ , e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida da seguinte forma

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq -2 \\ x + 2 & \text{se } x > -2 \end{cases}.$$

(a) Determine  $f(\{-2, 2\})$  e  $f([-2, 4])$ .

(b) Determine  $f^{\leftarrow}(\{-2, 0, 1, 2\})$ .

(c) Diga se  $g \circ f$  é injetiva e se é sobrejetiva.

**4.11.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \{3, 10\}$  definida da seguinte forma

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \in ]-\infty, 4[ \cup ]20, 30] \\ 10 & \text{se } x \in [4, 20] \cup ]30, +\infty[ \end{cases}.$$

e a função  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(n) = 2 - \frac{1}{n}$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ .

(a) Determine  $g(\{1, 2, 3, 4\})$  e  $g^{\leftarrow}(\{1, 5\})$ .

(b) Determine  $f(\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 16 = 0\})$  e  $f^{\leftarrow}(\{10\})$ .

(c) Mostre que  $f \circ g$  é uma função constante.

(d) Indique se alguma das funções  $f$  ou  $g$  é injetiva.