Aula 9 - Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro Alencar - 05.11.2025

(Com base nas notas de Alves, 2024)

1. EDO de primeira ordem

Definição 1.1. *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, é uma equação da forma:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1.1}$$

onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função definida no conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 1.2. *Uma função* $y = y(t)$ *é uma solução da equação* (1.1) *em um intervalo* $J \subset \mathbb{R}$ *se:*

(***i***) $(t, y(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in J;$

(***ii***) $y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J,$

onde f *é definida em* (1.1).

1. EDO de primeira ordem

Definição 1.1. *Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, é uma equação da forma:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1.1}$$

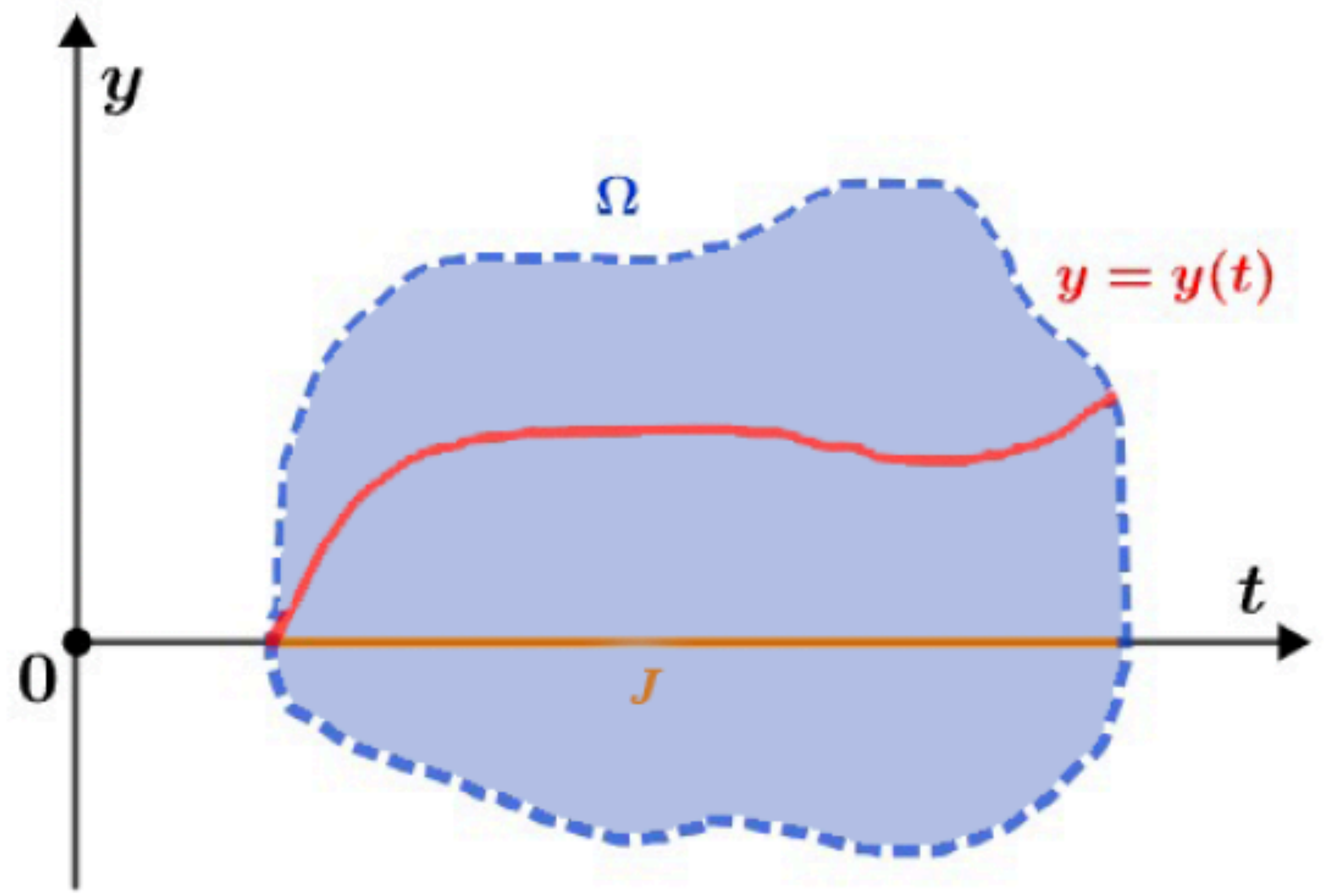
onde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é uma função definida no conjunto aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 1.2. *Uma função* $y = y(t)$ *é uma solução da equação* (1.1) *em um intervalo* $J \subset \mathbb{R}$ *se:*

(i) $(t, y(t)) \in \Omega, \quad \forall t \in J;$

(ii) $y'(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J,$

onde f *é definida em* (1.1).



1. EDO de primeira ordem

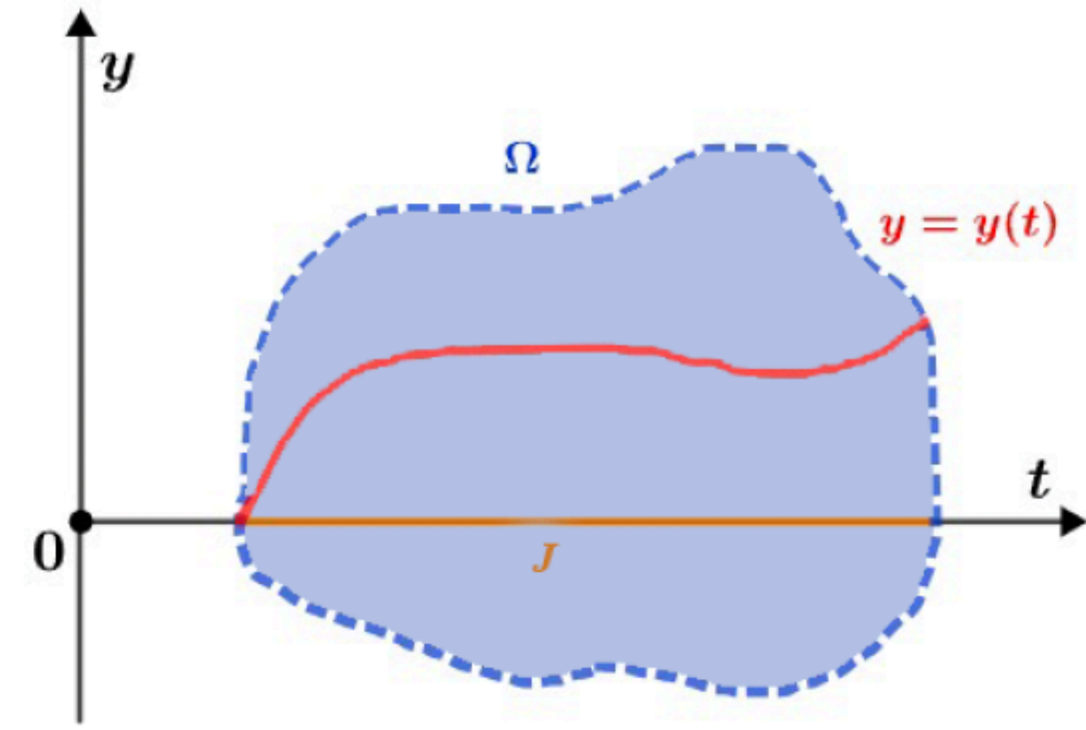
Problema de valor inicial

- Alguns problemas de EDO estão relacionados a condições iniciais (e.g. posição, volume, massa, etc)

Definição 1.3. *A forma geral de um problema de valor inicial para a equação* (1.1) *é:*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

A solução para tal problema, se existir, é uma curva que satisfaz a equação diferencial no intervalo J e passa pelo ponto (t_0, y_0).

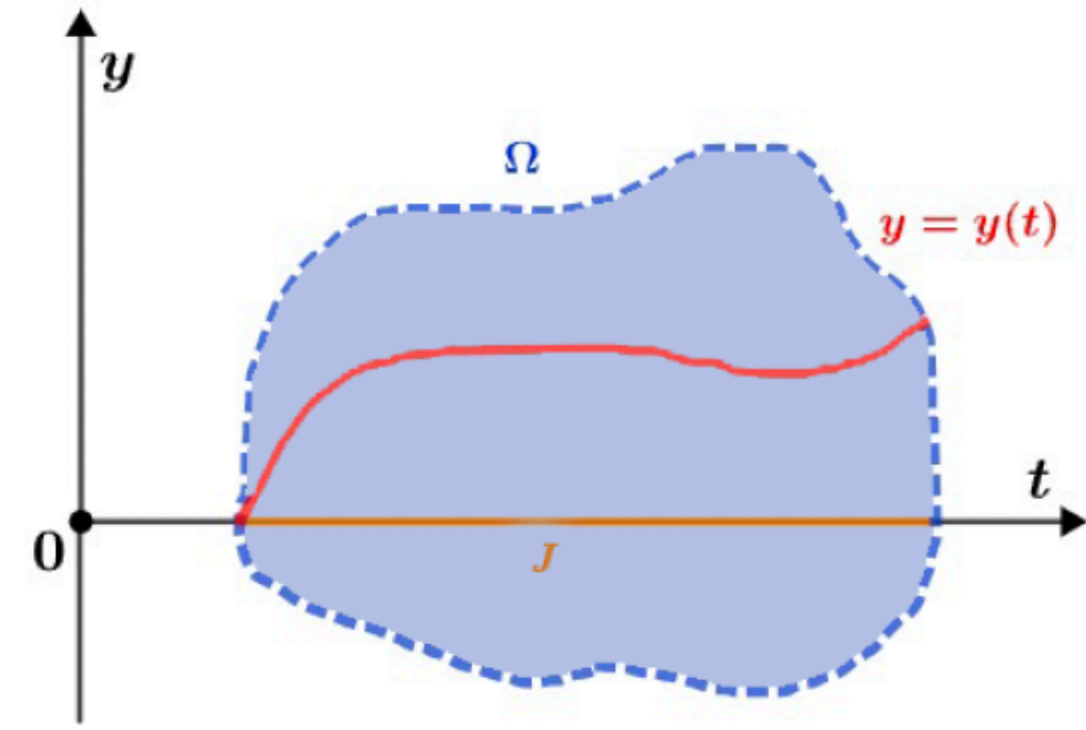


1. EDO de primeira ordem

Teorema de Picard–Lindelöf

- Este teorema estabelece condições para a existência e unicidade da solução de uma EDO com condição inicial.

Teorema 1.1. (*O Teorema de Existência e Unicidade*) *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a < t < b, c < y < d$, que contém o ponto (t_0, y_0) em seu interior. Se $f(t, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo J contendo t_0 e uma única função $y(t)$ definida em J que satisfaz o problema de valor inicial* (1.3).



1. EDO de primeira ordem

Exemplos

1. Avalie a EDO abaixo quanto a existência e unicidade da solução

$$\begin{cases} ty' + 2y & = & 4t^2 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

1. EDO de primeira ordem

Definição 1.4. *Uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem é uma equação da forma:*

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{1.5}$$

*onde $p(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas em seu domínio. Se $g(t) = 0$, dizemos que a equação (1.5) é uma **equação diferencial ordinária linear homogênea de primeira ordem**, caso contrário, é uma **equação diferencial ordinária linear não homogênea de primeira ordem**.*

2. Método do Fator Integrante

- O fator integrante é uma função $\mu(t)$ selecionada de modo que a equação abaixo seja integrável:

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y(t) = \mu(t)g(t)$$

- Note que se fizermos $\mu'(t) = \mu(t)p(t)$ então:

$$\mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = (\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t)$$ *; regra da derivada do produto*

Nota: $\mu(t) \neq 0$!!!

2. Método do Fator Integrante

- Resolvendo $\mu'(t) = \mu(t)p(t)$ com $\mu(t) \neq 0$ temos que:

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \Rightarrow \ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + c \Rightarrow |\mu(t)| = e^{\int p(t)dt}$$; (c = 0)

2. Método do Fator Integrante

- Retomando a equação:

$$\mu(t)y'(t) + \mu'(t)y(t) = (\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t)$$

- Temos que:

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t)$$

$$\mu(t)y(t) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(t)g(t)dt + c$$

2. Método do Fator Integrante

- Portanto:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^{t_1} \mu(t) g(t) dt + c \right], \text{ ou}$$

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \left[\int_{t_0}^{t_1} e^{\int p(t)dt} g(t) dt + c \right]$$

2. Método do Fator Integrante

Exemplos

2. Encontre a função *y(t)* que satisfaz:

$$\begin{cases} ty' + 2y & = & 4t^2 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

3. Equações de variáveis separáveis

- Tome uma equação da forma:

$$y' = \frac{g(t)}{h(y)},\ h(y) \neq 0$$

- Temos que:

$$h(y(t))\frac{dy(t)}{dt} = g(t) \Rightarrow h(y)dy = g(t)dt \Rightarrow \int h(y)dy = \int g(t)dt + c$$

3. Equações de variáveis separáveis

Exemplos

3. Encontre a função *y(t)* que satisfaz:

$$\begin{cases} (1+t)y' - y & = & 0 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

4. Equações diferenciais exatas

- Tome uma equação da forma:

$$P(t,y) + Q(t,y)\frac{dy}{dt} = 0$$

- Esta equação diferencial é dita exata se:

$$\frac{d\phi}{dt} = P(t,y) \;\text{ e }\; \frac{d\phi}{dy} = Q(t,y) \text{ , tal que:}$$

$$\frac{d\phi}{dt} + \frac{d\phi}{dy}\frac{dy}{dt} = 0$$

4. Equações diferenciais exatas

- Para identificar se uma equação é exata, basta que a seguinte condição seja respeitada:
  - Dada a forma $P(t, y) + Q(t, y)\dfrac{dy}{dt} = 0$:

$$\frac{dP(t, y)}{dy} = \frac{dQ(t, y)}{dt}$$

4. Equações diferenciais exatas

Exemplos

4. Encontre a função *y(t)* que satisfaz:

$$\begin{cases} 2ty + (t^2 - 1)y' & = & 0 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$$

5. Equações diferenciais homogêneas

- Tome uma equação da forma:

$$M(t, y) + N(t, y)\frac{dy}{dt} = 0$$

- Esta equação diferencial é dita homogênea se M e N são funções homogêneas de mesmo grau.

- E.g.: $2t^3y + (x^4 + y^4)\frac{dy}{dx} = 0$ e $(x - y) + x\frac{dy}{dx} = 0$

5. Equações diferenciais homogêneas

- A solução destas equações é possível por substituição algébrica:

$y = ut$ ou $t = vy$, em que *u* é função de *t* e *v* é função de *y* (i.e., u e v não são escalares)

$$M(t, ut) + N(t, ut)\left(u\frac{dt}{dt} + t\frac{du}{dt}\right) = 0$$

- Sendo M e N homogêneas, podemos reescrever esta equação como:

$$t^n M(1,u) + t^n N(1,u)\left(u + t\frac{du}{dt}\right) = 0,$$ onde n é o grau das funções M e N

5. Equações diferenciais homogêneas

- Supondo $t^n \neq 0$ (solução não trivial)

$$M(1,u) + uN(1,u) + tN(1,u)\frac{du}{dt} = 0$$

- Esta expressão pode ser reescrita na forma de equação de variáveis separáveis, já vista anteriormente:

$$\frac{du}{dt} + \frac{M(1,u) + uN(1,u)}{tN(1,u)} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{t} + \frac{N(1,u)du}{M(1,u) + uN(1,u)} = 0$$

5. Equações diferenciais homogêneas

Exemplos

5. Encontre a função *y(t)* que satisfaz:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy & = & 0 \\ y(1) & = & 0 \end{cases}$$