TESTE DE QUI-QUADRADO (χ^2)

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

18 de julho de 2021

Departamento de Estatística (UEPB)

Relembrando (Teste Binomial) ....

- É aplicado em amostras provenientes de populações que constituem-se de apenas 2 categorias (variáveis dicotômicas).
- Cada observação é classificada como sucesso ou fracasso;
- O teste binomial calcula a probabilidade de obter valores mais extremos do que os observados.
- Inicia-se com a formulação das hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p > p_0 \ ou \ H_1 : p < p_0 \text{ (unilateral) ou } H_1 : p \neq p_0 \text{(bilateral)} \end{cases}$$

Relembrando ....

Em resumo, estes são os passos no uso do teste binomial:

1. Formule as hipóteses $H_0 \times H_1$;
2. Determine $N =$ número total de casos observados.
3. Determine as frequências das ocorrências observadas em cada uma das duas categorias.
4. O método para encontrar a probabilidade de ocorrência sob H_0 dos valores observados, ou de valores ainda mais extremos, depende do tamanho da amostra:
   - Se $N \leq 35$, usa-se o teste binomial baseado na distribuição binomial
   - Se $N > 35$, o teste pode ser aproximado através da distribuição normal.
5. Se a probabilidade associada com o valor observado de Y ou um valor ainda mais extremo é igual ou menor do que α, rejeite H_0. Caso contrário, não rejeite H_0.

TESTE DE QUI-QUADRADO (χ^2)

- Frequentemente a pesquisa baseia-se no fato de que o pesquisador está interessado no número de sujeitos, objetos ou respostas que se enquadram em diversas categorias.

- Por exemplo, pessoas podem ser categorizadas de acordo com o fato delas serem "a favor de", "indiferentes a"ou "contra"uma opinião para que o pesquisador possa testar a hipótese de que essas respostas diferirão em frequência

- Pode ser usada para **testar se existe uma diferença significante** entre um número observado de objetos (ou respostas) ocorrendo em cada categoria e um número esperado baseado na hipótese nula.

- O **teste qui-quadrado** estabelece o grau de correspondência entre as observações observadas e as esperadas em cada categoria.

TESTE DE QUI-QUADRADO (χ^2)

- É um teste amplamente utilizado em análise de dados provenientes de experimentos onde o interesse está em observar frequências em diversas categorias (pelo menos duas).

- É uma prova de aderência útil para **comprovar se a frequência observada difere significativamente da frequência esperada**. Esta geralmente especificada por uma distribuição de probabilidade.

- **HIPÓTESES:**

$$H_0 : f_1 = f_2 = \cdots = f_k \quad \text{versus} \quad H_1 : f_1 \neq f_2 \neq \cdots \neq f_k$$

Pressupostos

1. Quando o número de categorias é igual a 2 ($k = 2$) as frequências esperadas devem ser superiores a 5;

2. Quando $k > 2$, o teste de Qui-Quadrado não deve **ter mais de 20% das frequências esperadas abaixo de 5 e nenhuma frequência esperada igual a zero**;

3. Para evitar frequências esperadas pequenas deve-se combinar as categorias até que as exigências sejam atendidas;

4. Caso as categorias sejam combinadas em apenas duas e mesmo assim as exigências não tenham sido atendidas, deve-se utilizar o Teste Binomial;

5. As observações devem ser independentes.

O método

Após se definir a hipótese nula, testamos se as frequências observadas diferem muito das frequências esperadas da seguinte forma:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} \text{ em que } \begin{cases} k = & \text{número de categorias (classes)} \\ o_i = & \text{frequência observada na categoria i} \\ e_i = & \text{frequência esperada na categoria } i \end{cases} \tag{1}$$

Decisão

- Quanto maior o valor de X^2 maior será a probabilidade de as frequências observadas estarem divergindo das frequências esperadas.

- A estatística do teste X^2 tem distribuição Qui-Quadrado com $gl = k - 1$ graus de liberdade onde:

Exemplo 1

Exemplo 1: Fãs de corridas de cavalos freqüentemente sustentam que uma corrida em torno de uma pista circular proporciona significante vantagem inicial para os cavalos colocados em certas posições dos postos. Cada posição do cavalo corresponde ao posto atribuído no começo do alinhamento. Em uma corrida de oito cavalos, a posição 1 é a mais próxima da raia no lado interno da pista; a posição 8 está no lado externo, mais distante da raia. Podemos testar o efeito da posição do posto analisando os resultados da corrida, dados de acordo com a posição do posto, durante o primeiro mês de corridas na estação em uma pista circular particular.

Resolução Exemplo 1

Resolução Exemplo 1

1. **Hipótese nula:** H_0 : Não há diferença no número esperado de vencedores começando de cada uma das posições dos postos e H_1 : as frequências teóricas não são todas iguais. Isto é,

$$H_0 : f_1 = f_2 = \cdots = f_k \quad \text{versus} \quad H_1 : f_1 \neq f_2 \neq \cdots \neq f_k$$

Resolução Exemplo 1

1. **Hipótese nula:** H_0 : Não há diferença no número esperado de vencedores começando de cada uma das posições dos postos e H_1 : as frequências teóricas não são todas iguais. Isto é,

$$H_0 : f_1 = f_2 = \cdots = f_k \quad \text{versus} \quad H_1 : f_1 \neq f_2 \neq \cdots \neq f_k$$

2. **Teste estatístico:** O teste qui-quadrado é escolhido porque a hipótese sob teste refere-se à comparação de frequências observadas e esperadas em categorias discretas. Neste exemplo, as oito posições dos postos formam as categorias.

Resolução Exemplo 1

1. **Hipótese nula:** H_0 : Não há diferença no número esperado de vencedores começando de cada uma das posições dos postos e H_1 : as frequências teóricas não são todas iguais. Isto é,

$$H_0 : f_1 = f_2 = \cdots = f_k \quad \text{versus} \quad H_1 : f_1 \neq f_2 \neq \cdots \neq f_k$$

2. **Teste estatístico:** O teste qui-quadrado é escolhido porque a hipótese sob teste refere-se à comparação de frequências observadas e esperadas em categorias discretas. Neste exemplo, as oito posições dos postos formam as categorias.

3. **Nivel de significância:** Seja $\alpha = 0,01$ e $N = 144$ o número total de vencedores em 18 dias de corridas.

4. **Distribuição amostral**. A distribuição amostral da estatistica X^2 como calculada a partir da Equação (1) segue a distribuição qui-quadrado com $gl = k - 1 = 8 - 1 = 7$

4. **Distribuição amostral**. A distribuição amostral da estatistica X^2 como calculada a partir da Equação (1) segue a distribuição qui-quadrado com $gl = k - 1 = 8 - 1 = 7$

5. **Região de rejeição**. H_0 será rejeitada se o valor observado de X^2 é tal que a probabilidade associada com o valor calculado sob H_0 para $gl = 7$ é $\leq 0,01$.

4. **Distribuição amostral**. A distribuição amostral da estatistica X^2 como calculada a partir da Equação (1) segue a distribuição qui-quadrado com $gl = k - 1 = 8 - 1 = 7$

5. **Região de rejeição**. H_0 será rejeitada se o valor observado de X^2 é tal que a probabilidade associada com o valor calculado sob H_0 para $gl = 7$ é $\leq 0,01$.

6. **Decisão**. A amostra de 144 vencedores forneceu os dados apresentados na Tabela Seguinte. As freqüências observadas de vitórias são dadas no centro de cada célula; as frequências esperadas e observadas são dadas. Por exemplo, 29 vitórias foram para os cavalos da posição 1, enquanto sob H_0 somente 18 vitórias teriam sido esperadas. Somente 11 vitórias foram para os cavalos da posição 8 , enquanto sob H_0 18 teriam sido esperadas.

Tabela 1: Distribuição do número de vitórias dos cavalos na sua posição de largada

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de Vitórias	29	19	18	25	17	10	15	11
	18*	18*	18*	18*	18*	18*	18*	18*

* vitórias esperadas

Os cálculos de X^2 é dado por

$$
\begin{aligned}
X^2 &= \sum_{i=1}^{8} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \\
&= \frac{(29-18)^2}{18} + \frac{(19-18)^2}{18} + \frac{(18-18)^2}{18} \\
&+ \frac{(25-18)^2}{18} + \frac{(17-18)^2}{18} + \frac{(10-18)^2}{18} \\
&+ \frac{(15-18)^2}{18} + \frac{(11-18)^2}{18} \\
&= \frac{121}{18} + \frac{1}{18} + 0 + \frac{49}{18} + \frac{1}{18} + \frac{64}{18} + \frac{9}{18} + \frac{49}{18} \\
&= 16,3
\end{aligned}
$$

Usando a função $pchisq(q = 16.3, df = 7, lower.tail = F)$, temos que $P\left[X^2 \geq 16,3\right]$ para $gl = 7$ tem probabilidade de ocorrência $p = 0,02$. Para $\alpha = 0,01$, não podemos rejeitar H_0 neste nível de significância.

Exemplo 2

EXEMPLO 2: A tabela dada a seguir apresenta o número observado de falhas mecânicas, por hora, em uma linha de montagem a partir de um experimento com duração de 40 horas.

Tabela 2: Distribuição do número de falhas mecânicas por hora em uma linha de montagem.

Falhas	0	1	2	3	4	5	6	7	+de7
Freq. Observada	0	6	8	11	7	4	3	1	0
Freq. Esperada	1,6	5,2	8,3	8,9	7,1	4,6	2,4	1,1	0,7

Como a tabela dada apresenta mais de 20% das frequiências com valores inferiores a 5 devemos unir as categorias. Assim:

Tabela 3: Junção das Categorias em que as frequiências são inferiores ao valor 5.

Falhas	0e1	2	3	4	5 **ou mais**
Freq. Observada	6	8	11	7	8
Freq. Esperada	6,8	8,3	8,9	7,1	8,8

Como a tabela dada apresenta mais de 20% das frequiências com valores inferiores a 5 devemos unir as categorias. Assim:

Tabela 3: Junção das Categorias em que as frequiências são inferiores ao valor 5.

Falhas	0e1	2	3	4	5 **ou mais**
Freq. Observada	6	8	11	7	8
Freq. Esperada	6,8	8,3	8,9	7,1	8,8

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{5} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0,675$$

Como a tabela dada apresenta mais de 20% das frequências com valores inferiores a 5 devemos unir as categorias. Assim:

Tabela 3: Junção das Categorias em que as frequências são inferiores ao valor 5.

Falhas	0e1	2	3	4	5 **ou mais**
Freq. Observada	6	8	11	7	8
Freq. Esperada	6,8	8,3	8,9	7,1	8,8

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{5} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = 0,675$$

$gl = 5 - 1 = 4$ então χ^2_4 indica que o valor 0,675 acusa um p-valor $= 0,954375$. Conclusão: Ao nível de significância de 5% não podemos rejeitar H_0. A distribuição das falhas mecânicas parece se ajustar satisfatoriamente a um processo de Poisson com uma média de 3,2 falhas por hora.

Discussão do Método

- ✓ Se os dados permitirem a utilização de uma técnica paramétrica esta prova certamente leva a perda de informações;
- ✓ Para variáveis nominais é a única técnica adequada de verificação da bondade do ajuste;
- ✓ Para variáveis ordinais não é sensível ao efeito da ordem. Quando a hipótese levar em conta a ordem , o teste de Qui-Quadrado deixa de ser a melhor opção.