Teste da Aleatoriedade (teste das séries)

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

23 de julho de 2021

Departamento de Estatística (UEPB)

Teste de Aleatoriedade

- Se um investigador deseja chegar a alguma conclusão sobre uma população usando a informação contida em uma amostra dessa população, então a amostra precisa ser aleatória.

- As sucessivas observações precisam ser independentes. Várias técnicas têm sido desenvolvidas para comprovar a hipótese de que uma amostra é aleatória.

- Essas técnicas são baseadas na ordem ou sequência na qual os escores ou observações individuais foram obtidos originalmente.

- Uma série é definida como uma sucessão de símbolos idênticos, os quais são precedidos e seguidos por símbolos diferentes daqueles ou por nenhum símbolo.

- Suponha uma série de eventos binários (indicados por mais e menos) ocorridos nesta ordem:

$$+ + - - - - + - - - - - + + -$$

- Podemos agrupar estes escores em séries sublinhando e numerando cada sucessão de símbolos idênticos:

$$\underbrace{++}_{1}\ \underbrace{---}_{2}\ \underbrace{+}_{3}\ \underbrace{----}_{4}\ \underbrace{++}_{5}\ \underbrace{-}_{6}\ \underbrace{+}_{7}$$

Observamos sete séries no total: $r = 7$ é o número de séries.

- O número total de séries em uma amostra de qualquer tamanho dado fornece uma indicação sobre a amostra ser aleatória ou não.
    1. Se muito poucas séries ocorrem, uma tendência temporal ou alguma tendência a aglomerados, provocando a falta de independência.

    2. Se um grande número de séries ocorre, sistemáticas flutuações cíclicas de curto período parecem estar influenciando os escores.

  Por exemplo, suponha que uma moeda fosse lançada 20 vezes e a seguinte sequência de caras (H) e coroas (T) fosse observada:

$$\underbrace{HHHHHHHHHH}_{10}\underbrace{TTTTTTTTTT}_{10}$$

- Somente duas séries ocorreram em 20 lançamentos. Isso pareceria ser muito pouco para uma moeda "honesta"(ou para um lançador honesto!).

- Por outro lado considere o seguinte

$$HTHTHTHTHTHTHTHTHTH$$

  Aqui um número excessivo de séries é observado. Nesse caso, com $r = 20$, quando $N = 20$, também pareceria razoável rejeitar a hipótese de que a moeda é "honesta".

Método

- Seja m o número de elementos de um tipo, e n o número de elementos de outro tipo em uma sequência de $N = m + n$ eventos binários.

- m pode ser o número de caras e n o número de coroas em uma sequência de lançamentos da moeda; ou m pode ser o número de mais e n o número de menos em uma sequência de respostas a um questionário.

- Para usar o teste das séries de uma amostra, primeiro observe os m e n eventos na sequência na qual eles ocorreram e determine o valor de r, o número de séries.

- **PEQUENAS AMOSTRAS:** Se ambos m e n são menores ou iguais a 20, então a Tabela seguinte dá os valores críticos de r sob H_0 para $\alpha = 0,05$.

- Estes são valores críticos da distribuição amostral de r sob H_0 quando é assumido que a sequência é aleatória. Se o valor observado de r ocorre entre os valores críticos, não podemos rejeitar H_0. Se o valor observado de r é igual ou mais extremo do que um dos valores críticos, rejeitamos H_0.

- Há duas entradas para cada valor de m e n na tabela:
  1. A primeira entrada dá o máximo entre os valores de r que são tão pequenos que a probabilidade associada com sua ocorrência sob H_0 é $p = 0,025$ ou menos.
  2. A segunda entrada dá o mínimo entre os valores de r que são tão grandes que a probabilidade associada com sua ocorrência sob H_0 é $p = 0,025$ ou menos.

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2											2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –
3					2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	2 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –
4				2 9	2 9	2 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	3 –	4 –	4 –	4 –	4 –
5			2 9	2 10	3 10	3 11	3 11	3 –	3 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	4 –	5 –	5 –	5 –
6		2 –	2 9	3 10	3 11	3 12	3 12	4 13	4 13	4 13	4 13	5 –	5 –	5 –	5 –	5 –	5 –	6 –	6 –
7		2 –	2 –	3 11	3 12	3 13	4 13	4 14	5 14	5 14	5 14	5 15	5 15	6 15	6 –	6 –	6 –	6 –	6 –
8		2 –	3 –	3 11	3 12	4 13	4 14	5 14	5 15	5 15	6 16	6 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 17	7 17	7 17
9		2 –	3 –	3 –	4 13	4 14	5 14	5 15	5 16	6 16	6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 18	8 18	8 18
10		2 –	3 –	3 –	4 13	5 14	5 15	5 16	6 16	6 17	7 17	7 18	7 18	7 18	8 19	8 19	8 19	8 20	9 20
11		2 –	3 –	4 –	4 13	5 14	5 15	6 16	6 17	7 17	7 18	7 19	8 19	8 19	8 20	9 20	9 20	9 21	9 21
12	2 –	2 –	3 –	4 –	4 13	5 14	6 16	6 16	7 17	7 18	7 19	8 19	8 20	8 20	9 21	9 21	9 21	10 22	10 22
13	2 –	2 –	3 –	4 –	5 –	5 15	6 16	6 17	7 18	7 19	8 19	8 20	9 20	9 21	9 21	10 22	10 22	10 23	10 23
14	2 –	2 –	3 –	4 –	5 –	5 15	6 16	7 17	7 18	8 19	8 20	9 20	9 21	9 22	10 22	10 23	10 23	11 23	11 24
15	2 –	3 –	3 –	4 –	5 –	6 15	6 16	7 18	7 18	8 19	8 20	9 21	9 22	10 22	10 23	11 23	11 24	11 24	12 25
16	2 –	3 –	4 –	4 –	5 –	6 –	6 147	7 18	8 19	8 20	9 21	9 21	10 22	10 23	11 23	11 24	11 25	12 25	12 25
17	2 –	3 –	4 –	4 –	5 –	6 –	7 17	7 18	8 19	9 20	9 21	10 22	10 23	11 23	11 24	11 25	12 25	12 26	13 26
18	2 –	3 –	4 –	5 –	5 –	6 –	7 17	8 18	8 19	9 20	9 21	10 22	10 23	11 24	11 25	12 25	12 26	13 26	13 27
19	2 –	3 –	4 –	5 –	6 –	6 –	7 17	8 18	8 20	9 21	10 22	10 23	11 23	11 24	12 25	12 26	13 26	13 27	13 27
20	2 –	3 –	4 –	5 –	6 –	6 –	7 17	8 18	9 20	9 21	10 22	10 23	11 24	12 25	12 25	13 26	13 27	13 27	14 28

Figura 1: Valores críticos para o teste da aleatoriedade

Região crítica pela Tabela

- **Decisão:** Qualquer valor observado de r que é igual ou menor do que o valor no topo mostrado na Tabela anterior ou é igual ou maior do que o valor na base mostrado na Tabela anterior está na região de rejeição para $\alpha = 0,05$.

- Por exemplo, no primeiro experimento de lançamento da moeda discutido anteriormente, observamos duas séries; uma série de 10 caras seguida de uma série de 10 coroas. Aqui $m = 10, n = 10$ e $r = 2$. A Tabela anterior mostra que, para esses valores de m e n, uma amostra aleatória conteria entre 7 e 15 séries 95% das vezes. Qualquer r observado menor ou igual a 6 ou maior ou igual a 16 está na região de rejeição para $\alpha = 0,05$.

Exemplo: Para pequenas amostras. No estudo da dinâmica de agressão em crianças pequenas, um investigador observou pares de crianças em uma situação de brincadeiras sob controle. A maioria das 24 crianças que serviram como sujeitos no estudo vieram da mesma creche e, assim, brincavam juntas diariamente. Como o investigador conseguia observar somente duas crianças por dia, ele estava consciente de que podiam ser introduzidos vícios no estudo por meio das interações entre aquelas crianças que já tinham servido como sujeitos e aquelas que ainda viriam a servir mais tarde. Se tais interações tivessem qualquer efeito sobre o nível de agressão nas sessões de brincadeiras, este efeito poderia mostrar uma falta de aleatoriedade nos escores de agressão na ordem em que foram coletados. Depois do estudo ser completado, a aleatoriedade da sequência de escores foi testada convertendo cada escore de agressão infantil para um mais ou um menos, dependendo do escore ocorrer acima ou abaixo do grupo mediano, e então era aplicado o teste das séries de uma amostra à sequência observada de mais e menos.

Tabela 1: Escores de Agressão na ordem de ocorrência

Criança	Escore	Posição do escore com relação à mediana
1	31	+
2	23	-
3	36	+
4	43	+
5	51	+
6	44	+
7	12	-
8	26	+
9	43	+
10	75	+
11	2	-
12	3	-
13	15	-
14	18	-
15	78	+
16	24	-
17	13	-
18	27	+
19	86	+
20	61	+
21	13	-
22	7	-
23	6	-
24	8	-

Passo a Passo

1. **Hipótese nula** H_0: Os mais e os menos ocorrem em ordem aleatória versus H_1 : a ordem dos mais e dos menos desvia-se da aleatoriedade.

2. **Teste estatístico:** Como as hipóteses referem-se à aleatoriedade de uma única sequência de observações, é escolhido o teste das séries de uma amostra.

3. **Nível de significância:** Seja $\alpha = 0,05$ e N o número de sujeitos $= 24$. Visto que os escores serão caracterizados como mais ou menos dependendo deles ocorrerem acima ou abaixo do escore mais central no grupo, $m = n = 12$.

4. **Distribuição amostral:** Os valores críticos de r da distribuição amostral é dado de forma tabulada.

5. **Região de rejeição:** Como H_1 não prediz a direção do desvio da aleatoriedade, um teste bilateral é usado. Como $m = n = 12$, a consulta à Tabela mostra que H_0 deve ser rejeitada no nível 0,05 de significância se o valor observado de r é menor ou igual a 7 ou maior ou igual a 19 .

Decisão:

- A Tabela 1 mostra os escores de agressão para cada criança na ordem na qual os escores foram obtidos.
- A mediana do conjunto de escores é 25.
- Todos os escores abaixo da mediana são designados como $-$ na Tabela 1;
- Todos os escores acima da mediana são designadas como $+$.
- Da coluna mostrando a sequência de $+$ e $-$ é facilmente visto que ocorreram 10 séries na sequência de observações, isto é, $r = 10$.

GRANDES AMOSTRAS

GRANDES AMOSTRAS: Se m ou n é maior do que 20 , a Tabela com os valores críticos não pode ser usada. Para tais amostras grandes, uma boa aproximação para a distribuição amostral de r é a distribuição normal com

$$\begin{aligned}\text{Média } &= \mu_r = \tfrac{2mn}{N} + 1 \\ \text{Desvio padrão } &= \sigma_r = \sqrt{\tfrac{2mn(2mn-N)}{N^2(N-1)}}\end{aligned}$$

Portanto, quando m ou n é maior do que 20, H_0 precisa ser testada por

$$z = \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} = \frac{r + h - 2mn/N - 1}{\sqrt{[2mn(2mn - N)]/\left[N^2(N-1)\right]}}$$

onde $h = +0,5$ se $r < 2mn/N + 1$, e $h = -0,5$ se $r > 2mn/N + 1$. Como os valores de z são distribuídos de acordo com uma distribuição aproximadamente normal com média 0 e desvio padrão 1 quando H_0 é verdadeira, a significância de qualquer valor observado de z calculado usando a equação pode ser determinada de uma tabela de distribuição normal padrão.

Exemplo: Para grandes amostras. Um pesquisador estava interessado em determinar se a ordenação de homens e mulheres na fila diante do guichê de um teatro era uma ordenação aleatória. Os dados foram obtidos marcando o sexo de cada um de uma sucessão de 50 pessoas à medida que elas se aproximavam do guichê.

Tabela 2: Ordem de 30 homens (H) e 20 Mulheres (M) em fila diante de um guichê de teatro

HMHMHHHMMHMHM
HMHHHHMHMHMHH
MMMHMHMHMHHM
HHMHHHHMHMHH

Conclusão: O teste das séries é usado para testar a hipótese nula de que a sequência de observações é aleatória.