# Testes não paramétricos duas amostras independentes

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

29 de julho de 2021

Departamento de Estatística (UEPB)

# Teste Qui-Quadrado para duas amostras independentes

# Teste Qui-Quadrado

- Quando os dados consistem de frequências em categorias discretas, o teste qui-quadrado pode ser usado para determinar a significância de **diferenças entre dois grupos independentes**.
- A mensuração envolvida pode ser tão fraca quanto a **escala nominal** ou **categórica**.
- A hipótese que vamos testar é a de que dois grupos diferem com relação a alguma característica;

- Para testar essa hipótese, contamos o número de casos de cada grupo que caem nas várias categorias e comparamos a proporção de casos de um grupo nas várias categorias com a proporção de casos do outro grupo.
    - **Se as proporções são iguais, então não existe interação**;
    - **se as proporções diferem, existe uma interação**.

- O objetivo do teste é verificar se as diferenças nas proporções excedem aquelas esperadas como desvios da proporcionalidade devido ao <u>acaso</u> ou <u>aleatoriedade</u>.

- Por exemplo, podemos testar se dois grupos políticos diferem em sua concordância ou discordância com alguma opinião, etc.

# Quando podemos usar o teste

Aplicável a dados representados em forma de frequência para detectar significância estatística da diferença entre dois grupos independentes. Tem as mesmas características do teste para uma amostra, com os mesmos procedimentos e restrição com relação ao tamanho das frequências.

**Pressupostos:**

- ✓ Nível de mensuração em escala nominal(ao menos);
- ✓ $\mathrm{N} > 20$ e frequências esperadas superiores a 5 quando ocorre o caso $2\mathrm{x}2$;
- ✓ _ Se $\mathrm{k} > 2$, o número de células com frequência esperada inferior a 5 deve ser menos de 20% do total de células.

# O método

- Primeiro, os dados são dispostos em uma tabela de contingência ou de frequências na qual as colunas representam grupos e cada linha representa uma categoria da variável medida.

| Variáveis | Grupos | | Total |
|---|---|---|---|
| | Grupo 1 | Grupo 2 | |
| 1 | $O_{11}$ | $O_{12}$ | $L_1$ |
| 2 | $O_{21}$ | $O_{22}$ | $L_2$ |
| 3 | $O_{31}$ | $O_{32}$ | $L_3$ |
| Total | $C_1$ | $C_2$ | N |

- Nesta tabela, existe uma coluna para cada grupo e a variável medida pode tomar três valores. A frequência observada de ocorrência do $i$-ésimo valor ou categoria para o $j$-ésimo grupo é denotada por $O_{ij}$.

## Estatística do teste

- A hipótese nula de que os grupos sao amostrados de uma mesma populaçao pode ser testada por

$$X^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{c} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \tag{1}$$

em que $O_{ij}$ = número observado de casos categorizados na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna $E_{ij}$ = número de casos esperados na $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna quando $H_0$ é verdadeira e o duplo somatório estende-se sobre todas as linhas e colunas da tabela (isto é, somatório sobre todas as células).

- Os valores de $X^2$ dados pela Equação (1) são distribuídos assintoticamente (quando $N$ cresce) como um qui-quadrado com $gl = (r-1)(c-1)$, onde $r$ é o número de linhas e $c$ é o número de colunas na tabela de contingência.

- Sob a suposição de independência, a frequência esperada de observações em cada célula deveria ser proporcional à distribuição dos totais por linhas e colunas.

Esta frequência esperada é estimada como o produto dos totais correspondentes das linhas e colunas, dividido pelo número total de observações. A frequência total na $i$-ésima linha é

$$L_i = \sum_{j=1}^{c} O_{ij}$$

Similarmente, a frequência total na $j$-ésima coluna é

$$C_j = \sum_{i=1}^{r} O_{ij}$$

Para encontrar a frequência esperada em cada célula ($E_{ij}$), multiplique os dois totais marginais comuns a uma célula particular e depois divida este produto pelo número total de casos $N$. Assim,

$$E_{ij} = \frac{L_i C_j}{N}$$

**Exemplo:** Em um estudo de ex-fumantes, Shiffman coletou dados durante crises de recaídas. Crises de recaídas incluem períodos de retorno ao vício e situações nas quais uma interrupção na abstinência era iminente, porém foi evitada com sucesso. Esses episódios de crises foram coletados de fumantes que utilizaram linha telefônica emergencial para atendimento de crises de recaídas. Vários dados foram coletados incluindo a estratégia usada na tentativa de evitar uma recaída. As estratégias foram classificadas como comportamentais (por exemplo, abandonando a situação) ou cognitivas (por exemplo, revendo mentalmente as razões que levaram a pessoa a decidir parar de fumar). Alguns sujeitos relataram o uso de um tipo de estratégia, alguns relataram o uso de ambos e outros relataram o uso de nenhum deles. A hipótese foi de que os tipos de estratégias utilizadas iriam diferir entre aqueles que tivessem sucesso e aqueles que não tivessem sucesso em evitar uma recaída.

# Hipóteses do teste

- **Hipótese:**
  - $H_0$ : não existe diferença nas estratégias empregadas por aqueles que evitaram com sucesso uma interrupção na abstinência e naqueles que não tiveram sucesso.
  - $H_1$ : os dois grupos diferem nas estratégias empregadas durante as crises.

# O teste é adequado ?

- Como os comportamentos relatados (comportamental e/ ou cognitivo, e ausente) são variáveis categóricas, como haviam dois grupos (aqueles que interromperam e aqueles que não interromperam) e como as categorias são mutuamente exclusivas, o teste qui-quadrado para grupos independentes é apropriado para testar $H_0$.

**Tabela 1:** Efeito de estratégias sobre crises de recaídas durante o processo de abandono do cigarro

| | Grupo resultante | | |
|---|---|---|---|
| Estratégia | Fumou | Não fumou | Total |
| Comportamental | 15 | 24 | 39 |
| Cognitiva | 15 | 21 | 36 |
| Comportamental e cognitiva | 13 | 43 | 56 |
| Nenhuma | 22 | 6 | 28 |
| Total | 65 | 94 | 159 |

- **Distribuição amostral:** A distribuição amostral de $X^2$ é aproximada pelo qui-quadrado com 3 graus de liberdade (gl). Os gl são determinados por $gl = (r-1)(c-1)$, onde $r$ é o número de categorias (no nosso problema são 4) e $c$ é o número de grupos (no nosso problema são 2). Então $(4-1)(2-1) = 3$.

- Portanto, próximo passo é obter nossa estatística do teste e comparar com a distribuição amostral $\chi^2_{(3)}$ com nível de significância $\alpha = 0,01$;

- **Região de rejeição:** Como $H_1$ simplesmente prediz a diferença entre os dois grupos, a região de rejeição consiste daqueles valores de $X^2$ que excedem o valor crítico da distribuição qui-quadrado, $\chi^2_{(3)} = 11,34$ quando $\alpha = 0,01$.

## Estatística do teste

- A Tabela 1 resume os dados obtidos sobre atendimentos a crises em linha telefônica emergencial.
- Os valores esperados para cada célula foram obtidos usando a fórmula $E_{ij} = L_i C_j / N$. Assim, $E_{11} = (39)(65)/159 = 15,94, E_{21} = 14,72$, etc.
- A estatística do teste é então calculada por

$$\begin{aligned} X^2 &= \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \\ &= \frac{(15 - 15,94)^2}{15,94} + \frac{(24 - 23,06)^2}{23,06} + \ldots + \frac{(6 - 16,55)^2}{16,55} \\ &= 23,78 \end{aligned}$$

# Decisão do teste

**Decisão:** Como o valor observado de $X^2 = 23,78$ excede o valor crítico $\chi^2_{(\alpha=0{,}01;gl=3)} = 11,34$, rejeitamos a hipótese de que o tipo de estratégia escolhido é independente da pessoa ter interrompido ou não a abstinência durante uma crise.