Lista - Eficiência

Professor: Pedro M.A. Junior

23 de setembro de 2025

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim \text{Binomial}(2, \theta)$, com função de probabilidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \left(\begin{array}{c} 2 \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{2-x}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

   (a) Defina sua função de log-verossimilhança
   (b) Calcule a função escore
   (c) Encontre a informação de Fisher
   (d) Encontre o $\text{LI}(\theta)$
   (e) Verifique se $\frac{\bar{X}}{2}$ é um estimador eficiente para θ

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, com função de probabilidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta} \theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

   (a) Defina sua função de log-verossimilhança
   (b) Calcule a função escore
   (c) Encontre a informação de Fisher
   (d) Encontre o $\text{LI}(\theta)$
   (e) Verifique se $\bar{X}$ é um estimador eficiente para θ

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, em que σ^2 é conhecido, com função densidade dada por

$$f(x \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

(a) Defina sua função de log-verossimilhança
(b) Calcule a função escore
(c) Encontre a informação de Fisher
(d) Encontre o LI(θ)
(e) Verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para μ.

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{bernoulli}(p)$, com densidade dada por:

$$f(x, \theta) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x \in 0, 1$$

(a) Defina sua função de log-verossimilhança
(b) Calcule a função escore
(c) Encontre a informação de Fisher
(d) Encontre o LI(θ)
(e) Verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para θ.

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim \exp(\theta)$, com densidade dada por:

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta} x}, \quad x > 0$$

(a) Defina sua função de log-verossimilhança
(b) Calcule a função escore
(c) Encontre a informação de Fisher
(d) Encontre o LI(θ)
(e) Verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para θ.

6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \theta)$.

(a) Defina sua função de log-verossimilhança
(b) Calcule a função escore
(c) Encontre a informação de Fisher
(d) Encontre o LI(θ)

(e) Verifique se o estimador $\widehat{\theta} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ é eficiente para θ.

7. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X, variável aleatória com função de densidade dada por:

$$f(x, \theta) = \sigma x^{\sigma - 1}, \quad 0 < x < 1,\ \sigma > 0.$$

(a) Defina sua função de log-verossimilhança

(b) Calcule a função escore

(c) Encontre a informação de Fisher

(d) Encontre o LI(σ)

(e) Verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para $g(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma+1}$.

8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de X, variável aleatória com distribuição gama de parâmetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tal que a densidade de X é

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha - 1} \exp - \frac{1}{\beta} x, \quad x > 0$$

admita que α é conhecido.

(a) Defina sua função de log-verossimilhança

(b) Calcule a função escore

(c) Encontre a informação de Fisher

(d) Encontre o LI(β)

(e) Verifique se o estimador $\widehat{\beta} = \frac{\bar{X}}{\alpha}$ é eficiente para β.

(f) Seja $g_1(\beta) = \alpha\beta$ e $g_2(\beta) = \alpha\beta^2$, verifique se $g_1(\widehat{\theta}) = \alpha \widehat{\beta}$ e $g_2(\widehat{\theta}) = \alpha \widehat{\beta}^2$ é um estimador eficiente para $g_1(\beta)$ e $g_2(\beta)$, respectivamente.