(a) Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma AAS de $X \sim bin(2, \theta)$. Então, a função densidade de X é

$$f(x;\theta) = \binom{2}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{2-x},$$

Assim, a log-verossimilhança é dada por

$$\log f(x;\theta) = \log\left\{\binom{2}{x} \theta^{x} (1-\theta)^{2-x}\right\}$$

$$= \log\binom{2}{x} + x \log\theta + (2-x)\log(1-\theta)$$

A função escore é dada por

$$S(\theta) = \frac{\partial \log f(x;\theta)}{\partial\theta} = \frac{x}{\theta} - \frac{(2-x)}{1-\theta}$$

(b) A informação de Fisher é dada por

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f(x,\theta)\right],$$

em que,

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f(x;\theta) = -\frac{x}{\theta^2} - \frac{(2-x)}{(1-\theta)^2}$$

Então,

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x;\theta)\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{X}{\theta^2} - \frac{(2-X)}{(1-\theta)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta^2}\mathbb{E}(X) + \frac{1}{(1-\theta)^2}\mathbb{E}(2-X)$$

$$= \frac{1}{\theta^{\cancel{2}}}2\cancel{\theta} + \frac{1}{(1-\theta)^2}(2-2\theta)$$

$$= \frac{2}{\theta} + \frac{2\cancel{(1-\theta)}}{(1-\theta)^{\cancel{2}}} = 2\left(\frac{1}{\theta} + \frac{1}{1-\theta}\right)$$

$$= \frac{2}{\theta(1-\theta)}.$$

Portanto,

$$\boxed{I(\theta) = \frac{2}{\theta(1-\theta)}}$$

(c)

$$LI(\theta) = \frac{1}{nI(\theta)} = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

(d) Para verificar se $\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{2}$ é eficiente para θ, temos que verificar se

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{LI(\theta)}{Var(\hat{\theta})} = 1$$

De fato,

$$Var(\hat{\theta}) = Var\left(\frac{\overline{X}}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(\overline{X})$$

Seja $X_1, \ldots, X_n$ AAS de $X \sim bin(2, \theta)$,

(i) $E(X_1) = \ldots = E(X_n) = 2\theta$

(ii) $Var(X_1) = \ldots = Var(X_n) = 2\theta(1-\theta)$

(iii) Os X_i's são independentes com distribuição comum $X \sim bin(2, \theta)$

Portanto,

$$Var(\overline{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cancel{n}\, 2\theta(1-\theta)$$

$$= \frac{2\theta(1-\theta)}{n} \Rightarrow Var(\bar{X}) = \frac{2\theta(1-\theta)}{n}.$$

Logo,

$$Var\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{4} Var(\bar{X}) = \frac{1}{4} \frac{2\theta(1-\theta)}{n}$$

$$\therefore Var\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{\theta(1-\theta)}{2n}$$

Dessa forma, obtemos

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{LI(\theta)}{Var\left(\frac{\bar{X}}{2}\right)} = 1$$

Portanto, o estimador $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2}$ é um estimador eficiente para θ.