Inferência Estatística

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

9 de dezembro de 2021

Departamento de Estatística (UEPB)

Estimação pontual

- O objetivo da estimação pontual é a partir da informação trazida por $X_1, \ldots, X_n$, obter uma estatística $\hat{\theta} = T(X_1, \ldots, X_n)$ que representa um valor plausível para θ, ou seja, uma estatística $\hat{\theta}$ que assuma valores em Θ. Neste caso, $\hat{\theta}$ é chamado um estimador para θ.

- Um dos grandes problemas da estatística é o de encontrar um estimador razoável para o parâmetro desconhecido θ.

- Um dos procedimentos comumente usados para avaliar o desempenho de um estimador é o seu erro quadrático médio (EQM) que vai ser apresentado a seguir.

Definição: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma AAS de uma distribuição com parâmetro desconhecido. O erro quadrático médio (EQM) de um estimador $\hat{\theta}$ do parâmetro θ é dado por

$$EQM[\hat{\theta}] = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right]$$

Pode-se mostrar que

$$EQM[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}] + B^2(\hat{\theta})$$

em que

$$B(\hat{\theta}) = E[\hat{\theta}] - \theta$$

é denominado o viés do estimador $\hat{\theta}$.

Definição: Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma AAS de uma distribuição com parâmetro desconhecido. Dizemos que um estimador $\hat{\theta}$ é não viciado para θ se

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

para todo $\theta \in \Theta$, ou seja $B(\hat{\theta}) = 0$, para todo $\theta \in \Theta$.

Definição: Se $\lim_{n\to\infty} B(\hat{\theta}) = 0$ para todo $\theta \in \Theta$, dizemos que o estimador $\hat{\theta}$ é assintoticamente não viciado para θ.

- No caso em que $\hat{\theta}$ é um estimador não viciado para θ, temos que

$$EQM[\hat{\theta}] = \text{Var}[\hat{\theta}]$$

ou seja, o erro quadrático médio de $\hat{\theta}$ se reduz à sua variância.

Exercício 1: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória X com $E[X] = \mu$ e $\text{Var}[X] = \sigma^2$. Verifique se $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ são estimadores não viesados para μ e σ^2, respectivamente.

Comparação entre estimadores

- O erro quadrático médio é comumente usado na comparação de estimadores. Dizemos, então que $\hat{\theta}_1$ é melhor que $\hat{\theta}_2$ se

$$EQM(\hat{\theta}_1) \leq EQM(\hat{\theta}_2), \quad \forall \theta \in \Theta$$

Exercício 2: Sejam X_1, X_2, X_3 uma amostra aleatória da variável aleatória X com $\mathbb{E}(X) = \theta$ e $\text{Var}(X) = 1$. Consideremos os estimadores

$$\widehat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3},$$

$$\widehat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

(a) Calcule $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_1)$ e $\text{Var}(\widehat{\theta}_1)$
(b) Calcule $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_2)$ e $\text{Var}(\widehat{\theta}_2)$
(c) Verifique se $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$ são estimadores não viesados para θ
(d) Qual o melhor estimador entre $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$

Exercício 3: Sejam $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Calcule o EQM dos estimadores $\widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}$ e $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ para o parâmetro σ^2.