Inferência Estatística

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

14 de dezembro de 2021

Departamento de Estatística (UEPB)

Eficiência

- Seja Ω_θ o conjunto dos estimadores não viesados para o parâmetro θ. Se quisermos escolher dentre os estimadores em Ω_θ o que seja mais preciso, nós podemos decidir pelo que apresentar a menor variância.

- Um conceito relacionado com isto é chamado de **eficiência do estimador**.

Limite Inferior de Cramér-Rao

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma AAS de uma distribuição com o parâmetro θ desconhecido. Dizemos que a **eficiência de um estimador** $\theta \in \Omega_\theta$ é definida como segue

$$C_\theta = \frac{LI(\theta)}{V_n(\theta)}$$

em que, $LI(\theta) = \frac{1}{n\mathcal{I}(\theta)}$ é chamado **Limite Inferior de Cramér-Rao** e $\mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta)\right)^2\right]$ sendo a **informação de Fisher** de X, em que $f(x,\theta)$ é a função densidade ou de probabilidade da v.a. X.

Função Escore

A quantidade,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x,\theta) = S(\theta)$$

é chamada de **função escore**.

Condições de regularidade

(i) O suporte $A(x) = \{x,\ f(x, \theta) > 0\}$ não depende de θ;

(ii) É possível a troca da ordem das operações de integração e derivação com relação a θ, duas vezes.

Estas condições de regularidade implicam que

$$\mathbb{E}\left[S(\theta)\right] = 0$$

e

$$\mathcal{I}(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f(x, \theta)\right]$$

- Para uma AAS, $X_1, \ldots, X_n$, da v.a. X com $f(x, \theta)$, função densidade ou função de probabilidade e informação de Fisher $\mathcal{I}(\theta)$, a informação total de Fisher de θ correspondente a amostra observada é a soma da informação de Fisher das n observações da amostra, ou seja, sendo

$$f(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

a densidade conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_1,\ldots,x_n;\theta)\right)^2\right] &= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log f(x_1,\ldots,x_n;\theta)\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log\left(\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\right)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i;\theta)\right] \\
&= -\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x_i;\theta)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x_i;\theta)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathcal{I}(\theta) \\
&= n\mathcal{I}(\theta)
\end{aligned}
$$

Teorema de Cramér-Rao

O teorema de Cramér-Rao diz que sob certas condições de regularidade, se $\widehat{\theta}$ é um estimador não viesado de θ, então

$$Var(\widehat{\theta}) \geq \frac{1}{n\mathcal{I}(\theta)}$$

Prova: (FAZER)

- Se $\widehat{\theta} \in \Omega_\theta$ é tal que $C_\theta(\widehat{\theta}) = 1$, $\widehat{\theta}$ é dito ser **eficiente**, pois em certo sentido ele é o estimador ideal, uma vez que é o **estimador não viesado de mínima variância**.

- Vale salientar que nem sempre é possível encontrar um estimador eficiente, pois o limite inferior de Cramér-Rao é muito pequeno, e portanto, em muitos casos o estimador não viesado de variância mínima tem variância estritamente maior do que este limite, isto é, o melhor estimador não viesado não consegue atingir o limite inferior de Cramér-Rao.

Caso Geral

- Em muitas situações, o interesse é estimar uma função $g(\theta)$.

- Suponha, por exemplo, que temos uma AAS da v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e que desejamos estimar o desvio padrão populacional σ, neste caso, $g(\sigma^2) = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$.

- Qualquer estatística que assuma valores somente no conjunto dos possíveis valores de $g(\theta)$ é um estimador para $g(\theta)$.

Teorema (Cramér-Rao caso geral) : Seja $\widehat{\theta}$ um estimador, tal que $\mathbb{E}(\widehat{\theta}) = g(\theta)$. Então,

$$Var(\widehat{\theta}) \geq \frac{[g'(\theta)]^2}{n\mathcal{I}(\theta)}$$

Exercício 1: Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma AAS da v.a. $X \sim \text{bin}(2, \theta)$.

(a) Defina sua função de log-verossimilhança

(b) Calcule o vetor escore

(c) Encontre a informação de Fisher

(d) Encontre o LI(θ)

(e) Verifique se $\frac{\bar{X}}{2}$ é um estimador eficiente para θ

Exercício 2: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da variável aleatória $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, com função de probabilidade dada por

$$f(x \mid \theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots,$$

verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para θ.

Exercício 3: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da variável aleatória $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, em que σ^2 é conhecido, com função densidade dada por

$$f(x \mid \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

verifique se o estimador $\bar{X}$ é eficiente para μ.