Inferência Estatística

Professor: Pedro M. Almeida-Junior

17 de fevereiro de 2022

Departamento de Estatística (UEPB)

Família Exponencial

Muitos dos modelos estatísticos considerados nas seções anteriores podem ser considerados como casos especiais de uma família mais geral de distribuições .

Definição: Dizemos que a distribuição da variável aleatória X pertence à <u>família exponencial unidimensional</u> de distribuições, se pudermos escrever sua f.p. ou f.d.p. como

$$f(x \mid \theta) = \exp\left\{c(\theta)T(x) + d(\theta) + S(x)\right\}, \quad x \in A$$

onde c, d são funções reais de θ; T, S são funções reais de x e A não depende de θ.

Exemplo 1: Seja X uma variável aleatória com distribuição Bernoulli(θ). Verifique se a sua função de probabilidade pode ser escrita na forma da família exponencial.

Exemplo 2: Seja X uma variável aleatória com distribuição Normal($\mu, 1$). Verifique se a sua função de probabilidade pode ser escrita na forma da família exponencial.

Amostras aleatórias de famílias exponenciais unidimensionais são também membros da família exponencial unidimensional

Teorema: Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho *nda* variável aleatória X, com função de densidade (ou de probabilidade) pertencente a família exponencial. Então, a distribuição conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é dada por

$$f\left(x_1, \ldots, x_n \mid \theta\right) = \exp\left\{c^*(\theta) \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i\right) + d^*(\theta) + S^*(\mathrm{x})\right\}, \ \mathrm{x} \in A^n$$

que também é da família exponencial com

$$T(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} T\left(x_i\right), \quad c^*(\theta) = c(\theta),$$

$$d^*(\theta) = nd(\theta) \quad \text{e} \quad S^*(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} S\left(x_i\right)$$

Notemos que a função de densidade na forma da família exponencial, pode ser fatorada pelo **critério da fatoração**, com

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} S(x_i)\right\} \prod_{i=1}^{n} I_A(x_i),$$

$$g_\theta(T) = \exp\left\{c(\theta)\sum_{i=1}^{n} T(x_i) + nd(\theta)\right\}$$

Portanto, pelo C.F., temos que a estatística $T(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} T(X_i)$ é suficiente para θ.

Família Exponencial de dimensão k

Definição: Dizemos que a distribuição da variável aleatória (ou de um vetor aleatório) X pertence à família exponencial de dimensão k se a função de densidade (ou de probabilidade) de X é dada por

$$f(x \mid \theta) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j(\theta) T_j(x) + d(\theta) + S(x)\right\}, \quad x \in A \quad (1)$$

onde c_j, T_j, d e S são funções reais, $j = 1, \ldots, k$, e como no caso unidimensional, $d(\theta)$ está associado à constante de normalização de (2.4.3) e A não depende de θ.

Amostras Aleatórias de famílias exponenciais de dimensão k têm distribuições que são membros da família exponencial de dimensão k

Para uma amostra $X_1, \ldots, X_n$ de uma variável aleatória com função de densidade (ou de probabilidade) dada por (1), temos que a função de densidade (ou de probabilidade) conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ é dada por

$$f\left(x_1, \ldots, x_n \mid \theta\right) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j^*(\theta) \sum_{i=1}^{n} T_j\left(\mathrm{x}_1\right) + d^*(\theta) + S^*(\mathrm{x})\right\}$$

onde

$$T_j^*(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} T_j\left(x_i\right), \quad c_j^*(\theta) = c_j(\theta)$$

$$S^*(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} S\left(x_i\right), \quad d^*(\theta) = nd(\theta)$$

Nesse caso, $(T_1^*, \ldots, T_k^*)$ é conjuntamente suficiente para θ.

Exemplo: Considere o caso em que $X_1, \ldots, X_n$ é uma AAS da v.a. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ em que μ e σ^2 são desconhecidos. Neste caso, temos $\boldsymbol{\Theta} = (\mu, \sigma^2)$. Verifique que X pertence à família exponencial bidimensional e encontre as estatísticas conjuntamente suficientes.