Lista 4- Função de Verossimilhança

Professor: Pedro M.A. Junior

26 de agosto de 2025

1. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x \mid \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1 \text{ e } \theta > 0$$

   Obtenha a função de verossimilhança de θ.

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x|\theta) = (1-\theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1; 0 < \theta < 1$$

   Obtenha a função de verossimilhança de θ.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade (log-logística):

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left[1 + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]^2} \quad \alpha > 0, \beta > 0, x > 0$$

   Obtenha a função de verossimilhança de α e β.

4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade (Weibull Inversa):

$$f(x; \lambda, k) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{k+1} e^{-(\lambda/x)^k}, \quad \lambda > 0, k > 0 e x > 0$$

   Obtenha a função de verossimilhança de λ

5. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Exp(\theta), \quad x > 0 \ , \theta > 0$. Obtenha a função de verossimilhança de θ.

6. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim N(\theta, 1), \quad -\infty < x < \infty \ , -\infty < \theta < \infty$. Obtenha a função de verossimilhança de θ.

7. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim N(0, \sigma^2), \quad -\infty < x < \infty \ , \sigma^2 > 0$. Obtenha a função de verossimilhança de σ^2.

8. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Poisson(\lambda), \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots \ , \lambda > 0$. Obtenha a função de verossimilhança de λ.

9. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Bernoulli(p), \quad x = 0, 1 \ , 0 < p < 1$. Obtenha a função de verossimilhança de p.

10. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Binomial(n, p), \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots, n \ , 0 < p < 1$. Obtenha a função de verossimilhança de p.

11. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Gamma(\alpha, \beta), \quad x > 0 \ , \alpha, \beta > 0$. Obtenha a função de verossimilhança de $\alpha \ , \beta$.

12. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim Beta(\alpha, \beta), \quad 0 \leq x \leq 1 \ , \alpha, \beta > 0$. Obtenha a função de verossimilhança de $\alpha \ , \beta$.

    Obs: $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

    em que $B(\alpha, \beta)$ é a função beta:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt.$$