

Lista 3 - Distribuição do mínimo e máximo de amostras aleatórias

Professor: Pedro M.A. Junior

26 de agosto de 2025

1. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população contínua X com densidade f e função de distribuição F e considere as estatísticas $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$ e $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$. Mostre então que a função de distribuição acumulada de:

(a) Z é dada por $F_Z(z) = 1 - \prod_{i=1}^n [1 - F_{X_i}(z)]$

(b) W é dada por $F_W(w) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(w)$

2. Seja X_1, \dots, X_n uma amostra aleatória de uma população contínua X com densidade f e função de distribuição F e considere as estatísticas $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$ e $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$. Mostre então que a função densidade de:

(a) Z é dada por $g(z) = n [F_X(z)]^{n-1} f_X(z)$

(b) W é dada por $h(w) = n [1 - F_X(w)]^{n-1} f_X(w)$

3. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com distribuição Uniforme(0,2):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

(a) Calcule a função densidade de $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$

(b) Calcule a função densidade de $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

(c) Calcule $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ e $\text{Var}(Z)$

(d) Calcule $\mathbb{E}(W)$, $\mathbb{E}(W^2)$ e $\text{Var}(W)$

4. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2)$$

(a) Calcule a função densidade de $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$

(b) Calcule $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ e $\text{Var}(Z)$

5. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3)$$

(a) Calcule a função densidade de $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$

(b) Calcule a função densidade de $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

(c) Calcule $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ e $\text{Var}(Z)$

(d) Calcule $\mathbb{E}(W)$, $\mathbb{E}(W^2)$ e $\text{Var}(W)$

6. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x | \theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1 \text{ e } \theta > 0$$

(a) Calcule a função densidade de $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$

(b) Calcule a função densidade de $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

(c) Calcule $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ e $\text{Var}(Z)$

(d) Calcule $\mathbb{E}(W)$, $\mathbb{E}(W^2)$ e $\text{Var}(W)$

7. Sejam X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x|\theta) = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1; 0 < \theta < 1$$

(a) Calcule a função densidade de $Z = \text{Min}(X_1, \dots, X_n)$

(b) Calcule a função densidade de $W = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

(c) Calcule $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{E}(Z^2)$ e $\text{Var}(Z)$

(d) Calcule $\mathbb{E}(W)$, $\mathbb{E}(W^2)$ e $\text{Var}(W)$