Lista 5 - Estimadores não viesados e EQM

Professor: Pedro M.A. Junior

28 de agosto de 2025

1. Sejam X_1, X_2, X_3 uma amostra aleatória da variável aleatória X com $\mathbb{E}(X) = \theta$ e $\text{Var}(X) = 1$. Consideremos os estimadores

$$\widehat{\theta}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3},$$

$$\widehat{\theta}_2 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3.$$

   (a) Calcule $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_1)$ e $\text{Var}(\widehat{\theta}_1)$

   (b) Calcule $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_2)$ e $\text{Var}(\widehat{\theta}_2)$

   (c) Verifique se $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$ são estimadores não viesados para θ

   (d) Qual o melhor estimador entre $\widehat{\theta}_1$ e $\widehat{\theta}_2$

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição de Bernoulli, ou seja, $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$, com $0 < p < 1$.

   (a) Mostre que $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é um estimador não viesado de p.

   (b) Calcule o EQM de $\hat{p}$

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Poisson(λ), com $\lambda > 0$.

   (a) Mostre que $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ é um estimador não viesado de λ.

   (b) Calcule o EQM de $\hat{\lambda}$

4. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de

$$f(x|\theta) = (1-\theta) + \frac{\theta}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x < 1; 0 < \theta < 1$$

(a) Mostre que $\bar{X}$ é um estimador viesado de θ e encontre seu viés

(b) Estude o comportamento deste viés quando $n \to \infty$

(c) Calcule o EQM de $\bar{X}$

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com mesma função de densidade:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \ \ \lambda > 0. \tag{1}$$

(a) Verifique se $\bar{X}$ é um estimador não viesado (E.N.V) de λ

(b) Calcule o EQM de $\bar{X}$

6. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com fdp dada por

$$f(x \mid \theta) = \sigma x^{\sigma-1}, \quad 0 < x < 1 \text{ e } \sigma > 0$$

(a) Mostre que $\bar{X}$ é um estimador não viesado (E.N.V) de $\frac{\sigma}{\sigma+1}$

(b) Calcule o EQM de $\bar{X}$

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com distribuição uniforme $X_i \sim U(0, \theta)$, onde $0 < \theta < \infty$. Mostre que $\hat{\theta} = 2\bar{X}$, onde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, é um estimador não viesado de θ.

8. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população com média θ e variância σ^2. Considere os seguintes estimadores da média populacional θ: $T_1 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ e $T_2 = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$

(a) Mostre que T_1 é um estimador não viesado para θ.

(b) Determine o viés de T_2.

(c) O estimador T_2 é assintoticamente não viesado? Justifique.

9. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \theta), \quad 0 < \theta < \infty$. Mostre que $\hat{\theta} = n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$ é um estimador não viesado de θ.

10. Sejam $X_1 \ldots, X_n$ v.a.'s que, dado θ, são condicionalmente i.i.d. com distribuição comum binomial negativa (k, θ), ou seja,

$$P\left(X_1 = m \mid \theta\right) = \left(\begin{array}{c} m-1 \\ k-1 \end{array}\right) \theta^k (1-\theta)^{m-k}, m = k, k+1 \ldots.$$

Construa um estimador não viesado para $1/\theta$.

11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição da variável aleatória X, em que $X \sim N(\mu, 1)$. Considere os estimador $\hat{\mu} = \bar{X}$. Encontre o EQM de $\hat{\mu}$ como função de μ.

12. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, 1)$. Encontre um estimador não viesado para $\theta = \mu^2$.

13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim N(0, \sigma^2)$. Seja $S^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$. Considere os estimadores,

$$\hat{\sigma}_c^2 = c\, S^2$$

(a) Encontre o EQM do estimador acima

(b) Encontre o valor de c que minimiza o EQM em (a)

14. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição de uma variável aleatória $X \sim U(0, \theta)$. Considere os estimadores $\hat{\theta}_1 = c_1 \bar{X}$ e $\hat{\theta}_2 = c_2 X_{(n)}$.

(a) Encontre c_1 e c_2 que tornam os estimadores não viciados.

(b) Encontre e compare os EQMs dos dois estimadores.