Fundamentos Teóricos da Computação

– Linguagens e Expressões Regulares –

Sumário

1. Conceitos Básicos
   - Alfabeto e Palavra/Sentença
   - Concatenação de Palavras
   - Subsentença
   - Operações sobre Sentenças
2. Linguagens Formais
   - Conceito
   - Operações sobre Linguagens
3. Expressões Regulares
   - Conjuntos Regulares
   - Expressões Regulares

Conceitos Básicos

Alfabeto

Toda *linguagem* possui um *alfabeto* associado sendo este um conjunto finito não vazio de elementos distintos (denominados símbolos).

Palavra (ou sentença)

Uma *palavra* w sobre um *alfabeto* Σ é uma sequência finita de símbolos de Σ.

O tamanho da *palavra* w é dado pelo número de símbolos presentes na palavra e é representado por $|\, w \,|$.

Uma *palavra* vazia (ou sem símbolos) é denotada por λ. Dessa forma, $|\, \lambda \,| = 0$.

Conceitos Básicos

Alfabetos importantes

$\Sigma = \{ 1 \}$ e $\Gamma = \{ 0, 1 \}$

Pode-se escrever qualquer número natural com os alfabetos dados.
Qual o mais prático?

Seja a um símbolo qualquer. Denota-se a^n, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência com n repetições do símbolo a.

Exemplos:
$$
\begin{aligned}
1^0 &= \lambda \\
0^4 &= 0000 \\
1^3 0 1^2 &= 111011 \ldots
\end{aligned}
$$

Fechamento de Kleene (ou, simplesmente, fecho)

Fechamento (ou fecho) é o conjunto de todas as palavras sobre um alfabeto Σ e é representado por Σ^*.

Conceitos Basicos

Concatenação de palavras

Sejam w e v duas palavras quaisquer. Uma nova palavra wv é formada pela justaposição da primeira sentença seguida pela segunda sentença.

Exemplo: $w = aba$ e $v = ba$, então $wv = ababa$.

Propriedades da Concatenação de Palavras

- $\mid wv \mid = \mid w \mid + \mid v \mid$
- $\lambda w = w\lambda = w$, para toda sentença w
- $(wv)u = w(vu)$ (associativa)
- $wv \neq vw$ (não comutativa)

Conceitos Basicos

Subsentença

A palavra v é uma subsentença de w se houver palavras x e y (que podem ser vazias) tal que $w = xvy$.

Sufixos: $w = xv$, v é chamado sufixo de w

Prefixos: $w = vy$, v é chamada prefixo de w

Conceitos Basicos

Auto-Concatenação de Sentenças

Para toda palavra w e todo inteiro $i \geq 0$, a palavra w^i é definida por:

1. $w^0 = \lambda$
2. $w^i = w^{i-1}w$

Reverso de Sentenças

O reverso de uma palavra w, denotado por w^R, é definido por:

1. $w^R = w = \lambda$, se $\mid w \mid = 0$
2. $w^R = ay^R$, se $\mid w \mid > 0$, sendo $w = ya$ para algum $a \in \Sigma$ e $y \in \Sigma^*$

Linguagens Formais

Conceito

Uma linguagem qualquer sobre um alfabeto Σ é um subconjunto de Σ^* (isto é, do fecho do alfabeto).

Exemplos:

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \{0, 1\} \\
\Sigma^* &= \{\lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, \dots\} \\
L_0 &= \emptyset \\
L_1 &= \{\lambda\} \\
L_2 &= \{0, 1, 00\} \\
L_3 &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ é número binário múltiplo de } 3\} \\
L_4 &= \{w \in \Sigma^* \mid w = 01^i, i \geq 0\}
\end{aligned}$$

Linguagens Formais

Operações próprias de conjuntos

Como linguagens são conjuntos (subconjuntos de Σ^*), podemos realizar operações da álgebra de conjuntos, isto é, $\cup$, $\cap$, $-$, complemento em relação a Σ^*, etc.

Exemplos:

$$\begin{aligned}
L_1 \cup L_2 &= \{w \mid w \in L_1 \text{ ou } w \in L_2\} \\
L_1 \cap L_2 &= \{w \mid w \in L_1 \text{ e } w \in L_2\} \\
L_1 - L_2 &= \{w \mid w \in L_1 \text{ e } w \notin L_2\} \\
\overline{L_1} &= \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ e } w \notin L_1\}
\end{aligned}$$

Linguagens Formais

Operações próprias de conjuntos

Exercício.

Seja $\Sigma = \{a, b, c\}$, e a linguagens:

$$L_1 = \{a^m b^n c^n \mid m \geq n \geq 0\}$$

$$L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n \geq m \geq 0\}$$

Determine:

$$L_1 \cup L_2 =$$

$$L_1 \cap L_2 =$$

$$\overline{L_1} =$$

Linguagens Formais

Operações próprias de linguagens

Como linguagens são conjuntos de palavras, podemos esten- der as operações sobre palavras (por exemplo, concatenação, reverso, etc.) para as linguagens

Exemplos:

$$
\begin{aligned}
L_1 L_2 &= \{xy \mid x \in L_1 \text{ e } y \in L_2\} \\
L^R &= \{w \mid w^R \in L_1\} \\
L^0 &= \{\lambda\} \\
L^i &= L^{i-1} L
\end{aligned}
$$

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i \qquad L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i \qquad \text{(Fecho de Kleene)}$$

Linguagens Formais

Operações próprias de conjuntos

Exercício.

Sejam as linguagens:

$$L_1 = \{ab, 1\}$$

$$L_2 = \{\lambda, b, bb\}$$

Determine:

$$L_1 L_2 =$$

$$L_1^* =$$

$$L_1^+ =$$

$$L_2^* =$$

$$L_2^+ =$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular

Um conjunto é **regular** se puder ser gerado a partir das operações de união, concatenação e fechamento sobre os elementos de um alfabeto.

Definição recursiva de Conjunto Regular

1. **base:** $\emptyset$, $\{\lambda\}$ e $\{a\}, \forall a \in \Sigma$ são conjuntos regulares sobre Σ;
2. **passo recursivo:** Sejam X e Y conjuntos regulares sobre Σ, então $X \cup Y$, XY e X^* também são conjuntos regulares sobre Σ;
3. **fechamento:** X é um conjunto regular sobre Σ se e somente se puder ser obtido a partir de um número finito de aplicações do passo recursivo sobre os elementos da base.

Expressões Regulares

Conjunto Regular

Exercício.

Seja L a linguagem contendo todas as palavras sobre o alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ que possuem pelo menos uma ocorrência de "**bb**", isto é, um par de **b**s seguidos.

A linguagem L é regular?

Expressões Regulares

Expressão Regular

Uma **expressão regular** representa um conjunto regular.

Definição recursiva de Expressão Regular

1. **base:** os conjuntos regulares $\emptyset$, $\{\lambda\}$ e $\{a\}, \forall a \in \Sigma$ são representados pelas expressões regulares $\emptyset$, λ e $a, \forall a \in \Sigma$;
2. **passo recursivo:** Sejam r e s duas expressões regulares que denotam os conjuntos regulares R e S, respectivamente, então:
   - $r \cup s$ é uma expressão regular que denota $R \cup S$,
   - rs é uma expressão regular que denota RS, e
   - r^* é uma expressão regular que denota R^*.
3. **fechamento:** R é uma expressão regular sobre Σ se e somente se puder ser obtida a partir de um número finito de aplicações do passo recursivo sobre os elementos da base.

Expressões Regulares

Conjunto Regular $\times$ Expressão Regular

Conjunto Regular	Expressão Regular
$\{b\}$	
$\{a, b\}$	
$\{a\,b\}$	
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular × Expressão Regular

Conjunto Regular	Expressão Regular
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	
$\{a\, b\}$	
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular × Expressão Regular

Conjunto Regular	**Expressão Regular**
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	$a \cup b$
$\{a\,b\}$	
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular $\times$ Expressão Regular

Conjunto Regular	**Expressão Regular**
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	$a \cup b$
$\{a\,b\}$	$a\,b$
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular × Expressão Regular

Conjunto Regular	Expressão Regular
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	$a \cup b$
$\{a\,b\}$	$a\,b$
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	$(a \cup b)(a \cup b)$
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular × Expressão Regular

Conjunto Regular	**Expressão Regular**
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	$a \cup b$
$\{a\,b\}$	$a\,b$
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	$(a \cup b)(a \cup b)$
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	a^*
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Conjunto Regular × Expressão Regular

Conjunto Regular	Expressão Regular
$\{b\}$	b
$\{a, b\}$	$a \cup b$
$\{a\,b\}$	$a\,b$
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$	$(a \cup b)(a \cup b)$
$\{a\}^* = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$	a^*
$\{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}$	$(a \cup b)^*$

Parênteses desnecessários podem ser omitidos.

A ordem de prioridade das operações é:

$$\textit{fechamento} \rightarrow \textit{concatenação} \rightarrow \textit{união}$$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercício.

Que conjuntos são representados pelas seguintes expressões:

(a) $(a \cup b)^* a (a \cup b)^*$

(b) $a(a \cup b)^* b$

(c) $(a \cup b)^* bb (a \cup b)^*$

(d) $(a \cup c)^* b (a \cup c)^* b (a \cup c)^*$

(e) $((a \cup c)^* b (a \cup c)^* b (a \cup c)^*)^*$

(f) $(a \cup b \cup c)(a \cup b \cup c)$

(g) $(a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios .

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   (d) todas as palavras nas quais todo par de zeros adjacentes é imediatamente seguido por um par de uns adjacentes;
   (e) todas as palavras que não contêm a subsentença **010**;
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.

2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   (b) todas as palavras que contêm exatamente 2 ocorrências de **c**;
   (c) todas as palavras cujo número de **b**s e **c**s seja 3.

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   $(0 \cup 1)(0 \cup 1)1(0 \cup 1)^*$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   $(0 \cup 1)(0 \cup 1)1(0 \cup 1)^*$
   (d) todas as palavras nas quais todo par de zeros adjacentes é imediatamente seguido por um par de uns adjacentes;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   $(0 \cup 1)(0 \cup 1)1(0 \cup 1)^*$
   (d) todas as palavras nas quais todo par de zeros adjacentes é imediatamente seguido por um par de uns adjacentes;
   $(1 \cup 0(1 \cup 011))^*(\lambda \cup 0)$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$
   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$
   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   $(0 \cup 1)(0 \cup 1)1(0 \cup 1)^*$
   (d) todas as palavras nas quais todo par de zeros adjacentes é imediatamente seguido por um par de uns adjacentes;
   $(1 \cup 0(1 \cup 011))^*(\lambda \cup 0)$
   (e) todas as palavras que não contêm a subsentença **010**;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução.

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras que terminam com zero;
   $(0 \cup 1)^*0$

   (b) todas as palavras que possuem 3 zeros consecutivos;
   $(0 \cup 1)^*000(0 \cup 1)^*$

   (c) todas as palavras cujo terceiro símbolo (da esquerda para direita) é 1;
   $(0 \cup 1)(0 \cup 1)1(0 \cup 1)^*$

   (d) todas as palavras nas quais todo par de zeros adjacentes é imediatamente seguido por um par de uns adjacentes;
   $(1 \cup 0(1 \cup 011))^*(\lambda \cup 0)$

   (e) todas as palavras que não contêm a subsentença **010**;
   $(1 \cup 00^*11)^*(\lambda \cup 00^* \cup 00^*1)$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:

   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.

   $\rightarrow$ **Impossível !!!**

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - **Solução (cont).**

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**
2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**
2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   $(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**
2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   $(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$
   (b) todas as palavras que contêm exatamente 2 ocorrências de **c**;

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**

2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   $(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$
   (b) todas as palavras que contêm exatamente 2 ocorrências de **c**;
   $(a \cup b)^* c (a \cup b)^* c (a \cup b)^*$

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**

2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   $(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$
   (b) todas as palavras que contêm exatamente 2 ocorrências de **c**;
   $(a \cup b)^* c (a \cup b)^* c (a \cup b)^*$
   (c) todas as palavras cujo número de **b**s e **c**s seja 3.

Expressões Regulares

Expressão Regular

Exercícios - Solução (cont).

1. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (f) todas as palavras que contêm o mesmo número de **0**s e **1**s.
   $\rightarrow$ **Impossível !!!**

2. Considerando o alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ construa uma expressão regular para cada um dos seguintes conjuntos:
   (a) todas as palavras cujo tamanho seja menor ou igual a 3;
   $(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)(\lambda \cup a \cup b \cup c)$
   (b) todas as palavras que contêm exatamente 2 ocorrências de **c**;
   $(a \cup b)^* c(a \cup b)^* c(a \cup b)^*$
   (c) todas as palavras cujo número de **b**s e **c**s seja 3.
   $a^*(b \cup c)a^*(b \cup c)a^*(b \cup c)a^*$