

# Fundamentos Teóricos da Computação

– Fechamento - Lema do Bombeamento –

# Sumário

- 1 **Fechamento de Operações em LR's**
  - Definição – Fechamento de Operações
  - Fechamento sob Concatenação
  - Fechamento sob Fecho de Kleene
  - Aplicações de Fechamento
- 2 **Lema do Bombeamento**
  - Lema sobre Linguagens Infinitas
  - Lema do Bombeamento para LR's
- 3 **Linguagens que não são LR's**
  - Prova Usando o Lema do Bombeamento para LR's
  - Prova Usando Propriedades de Fechamento de LR's

# Fechamento de Operações para LRs

## O Que é Fechamento

Seja uma classe de linguagens  $\mathcal{L}$  e uma operação sobre linguagens  $\mathcal{O}$ . Diz-se que  $\mathcal{L}$  é **fechada sob**  $\mathcal{O}$  se a aplicação de  $\mathcal{O}$  a linguagens pertencentes a  $\mathcal{L}$  sempre resulta em uma linguagem pertencente a  $\mathcal{L}$ .

## Propriedades de Fechamento

Considere duas linguagens regulares  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é regular
- $L_1 \cap L_2$  também é regular
- $L_1 L_2$  também é regular
- $L_1^*$  também é regular
- $\overline{L_1}$  também é regular

# Fechamento de Operações para LRs

## O Que é Fechamento

Seja uma classe de linguagens  $\mathcal{L}$  e uma operação sobre linguagens  $\mathcal{O}$ . Diz-se que  $\mathcal{L}$  é **fechada sob**  $\mathcal{O}$  se a aplicação de  $\mathcal{O}$  a linguagens pertencentes a  $\mathcal{L}$  sempre resulta em uma linguagem pertencente a  $\mathcal{L}$ .

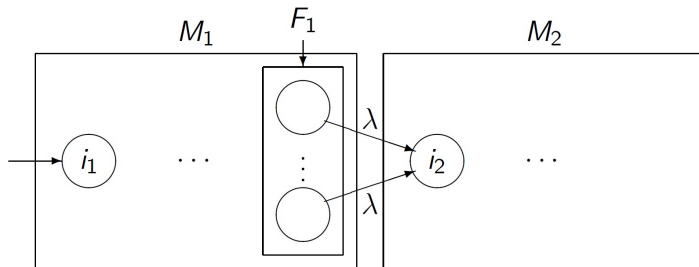
## Propriedades de Fechamento

Considere duas linguagens regulares  $L_1$  e  $L_2$ , então:

- $L_1 \cup L_2$  também é regular
- $L_1 \cap L_2$  também é regular
- $L_1 L_2$  também é regular
- $L_1^*$  também é regular
- $\overline{L_1}$  também é regular

# Fechamento de Operações para LR

## Fechamento sob Concatenação – Esquema



# Fechamento de Operações para LR's

## Fechamento sob Concatenação

Sejam dois AFD's:

$$M_1 = (E_1, \Sigma_1, \delta_1, i_1, F_1) \text{ e } M_2 = (E_2, \Sigma_2, \delta_2, i_2, F_2), E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

O AFN- $\lambda$   $M_3$  reconhece  $L(M_1)L(M_2)$ :

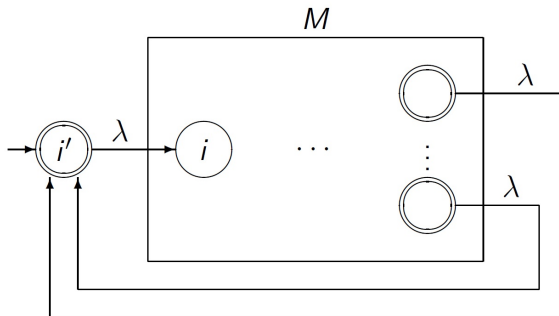
$$M_3 = (E_1 \cup E_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta_3, i_1, F_2)$$

em que  $\delta_3$  é dada por:

- $\delta_3(e, a) = \begin{cases} \{\delta_1(e, a)\} & , \text{ para todo } e \in E_1, a \in \Sigma_1 \\ \{\delta_2(e, a)\} & , \text{ para todo } e \in E_2, a \in \Sigma_2 \end{cases}$
- $\delta_3(e, \lambda) = \begin{cases} \{i_2\} & , \text{ para todo } e \in F_1 \\ \emptyset & , \text{ para todo } e \in (E_1 \cup E_2) - F_1 \end{cases}$

# Fechamento de Operações para LR

## Fechamento sob Fecho de Kleene – Esquema



# Fechamento de Operações para LRs

## Fechamento sob Fecho de Kleene

Seja um AFD  $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$

O AFN- $\lambda$   $M'$  reconhece  $L(M)^*$ :

$$M' = (E \cup \{i'\}, \Sigma, \delta', i', F \cup \{i'\})$$

em que  $i' \notin E$  e  $\delta'$  é dada por:

- $\delta'(i', \lambda) = \{i\}$
- $\delta'(e, a) = \{\delta(e, a)\}$  para todo  $e \in E, a \in \Sigma$
- $\delta'(e, \lambda) = \begin{cases} \{i'\} & , \text{ para todo } e \in F \\ \emptyset & , \text{ para todo } e \in E - F \end{cases}$



# Fechamento de Operações para LR

## Aplicações das Propriedades de Fechamento

Três aplicações para as propriedades de fechamento das LR:

- ① Provar que uma linguagem é regular
- ② Provar que uma linguagem não é regular
- ③ Facilitar a obtenção de AF para uma linguagem regular

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 1

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Prove que  $L_1 - L_2$  é regular.

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, pois é possível construir AFs para reconhecê-las.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então  $L_1 - L_2$  é linguagem regular, pois  $\overline{L_2}$  é linguagem regular e a interseção de linguagens regulares, isto é  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , também resulta em linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 1

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Prove que  $L_1 - L_2$  é regular.

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, pois é possível construir AFs para reconhecê-las.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então  $L_1 - L_2$  é linguagem regular, pois  $\overline{L_2}$  é linguagem regular e a interseção de linguagens regulares, isto é  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , também resulta em linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 1

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Prove que  $L_1 - L_2$  é regular.

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares, pois é possível construir AFs para reconhecê-las.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então  $L_1 - L_2$  é linguagem regular, pois  $\overline{L_2}$  é linguagem regular e a interseção de linguagens regulares, isto é  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , também resulta em linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 2

Seja  $L = \{a^k b^m c^n \mid k = m + n\}$ . Prove que  $L$  não é linguagem regular.

Suponha que  $L$  seja uma linguagem regular.

Como  $\{a\}^* \{b\}^*$  é linguagem regular e a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, segue-se que  $L \cap \{a\}^* \{b\}^*$  deve ser uma linguagem regular.

Contudo,  $L \cap \{a\}^* \{b\}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é linguagem regular. Isto é absurdo, logo  $L$  não é linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 2

Seja  $L = \{a^k b^m c^n \mid k = m + n\}$ . Prove que  $L$  não é linguagem regular.

Suponha que  $L$  seja uma linguagem regular.

Como  $\{a\}^* \{b\}^*$  é linguagem regular e a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, segue-se que  $L \cap \{a\}^* \{b\}^*$  deve ser uma linguagem regular.

Contudo,  $L \cap \{a\}^* \{b\}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é linguagem regular. Isto é absurdo, logo  $L$  não é linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 2

Seja  $L = \{a^k b^m c^n \mid k = m + n\}$ . Prove que  $L$  não é linguagem regular.

Suponha que  $L$  seja uma linguagem regular.

Como  $\{a\}^* \{b\}^*$  é linguagem regular e a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, segue-se que  $L \cap \{a\}^* \{b\}^*$  deve ser uma linguagem regular.

Contudo,  $L \cap \{a\}^* \{b\}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é linguagem regular. Isto é absurdo, logo  $L$  não é linguagem regular.

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 2

Seja  $L = \{a^k b^m c^n \mid k = m + n\}$ . Prove que  $L$  não é linguagem regular.

Suponha que  $L$  seja uma linguagem regular.

Como  $\{a\}^* \{b\}^*$  é linguagem regular e a classe das linguagens regulares é fechada sob interseção, segue-se que  $L \cap \{a\}^* \{b\}^*$  deve ser uma linguagem regular.

Contudo,  $L \cap \{a\}^* \{b\}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é linguagem regular. Isto é absurdo, logo  $L$  não é linguagem regular.



# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 3

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Construir um AFD para  $L_1 - L_2$ .

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares e é possível construir AFs para reconhecê-las. Para  $L_1$  é possível se obter um AFD  $M$  com 6 estados que a reconhece, enquanto que para  $L_2$  pode-se construir facilmente um AFN com 4 estados que a reconheça, que pode ser transformado em um AFD  $N$  equivalente.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então basta obter um AFD  $K$  que reconheça  $\overline{L_2}$  a partir do AFD  $N$  (complementando-se o conjunto de estados de aceitação de  $N$ ). Em seguida, basta produzir um AFD para  $L_1 \cap \overline{L_2}$  por meio do produto cartesiano entre o AFD  $M$  e o AFD  $K$ .

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 3

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Construir um AFD para  $L_1 - L_2$ .

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares e é possível construir AFs para reconhecê-las. Para  $L_1$  é possível se obter um AFD  $M$  com 6 estados que a reconhece, enquanto que para  $L_2$  pode-se construir facilmente um AFN com 4 estados que a reconheça, que pode ser transformado em um AFD  $N$  equivalente.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então basta obter um AFD  $K$  que reconheça  $\overline{L_2}$  a partir do AFD  $N$  (complementando-se o conjunto de estados de aceitação de  $N$ ). Em seguida, basta produzir um AFD para  $L_1 \cap \overline{L_2}$  por meio do produto cartesiano entre o AFD  $M$  e o AFD  $K$ .

# Fechamento de Operações para LRs

## Exemplo de Aplicação do Tipo 3

Considere:

- $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ representa um número binário divisível por } 6\}$
- $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{o terceiro dígito de } w, \text{ da direita para esquerda, é } 1\}$

Construir um AFD para  $L_1 - L_2$ .

$L_1$  e  $L_2$  são linguagens regulares e é possível construir AFs para reconhecê-las. Para  $L_1$  é possível se obter um AFD  $M$  com 6 estados que a reconhece, enquanto que para  $L_2$  pode-se construir facilmente um AFN com 4 estados que a reconheça, que pode ser transformado em um AFD  $N$  equivalente.

Como  $L_1 - L_2$  é equivalente a  $L_1 \cap \overline{L_2}$ , então basta obter um AFD  $K$  que reconheça  $\overline{L_2}$  a partir do AFD  $N$  (complementando-se o conjunto de estados de aceitação de  $N$ ). Em seguida, basta produzir um AFD para  $L_1 \cap \overline{L_2}$  por meio do produto cartesiano entre o AFD  $M$  e o AFD  $K$ .

# Lema sobre Linguagens Infinitas

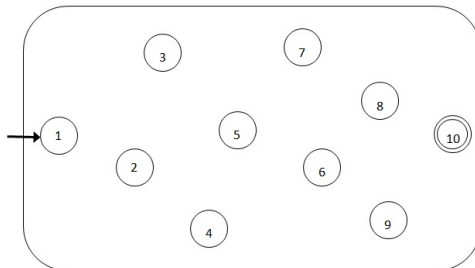
## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.

# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

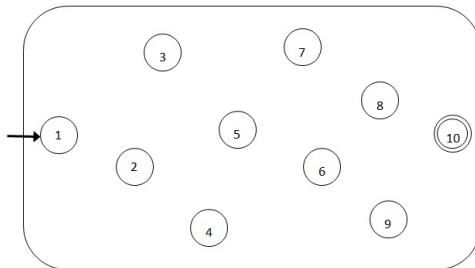
Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.



# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.

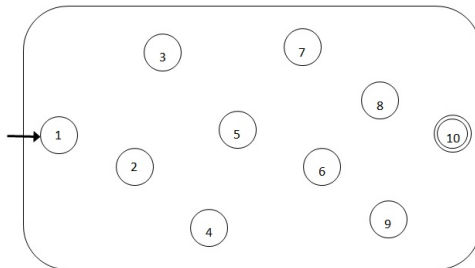


⇒ Uma palavra de tamanho 1 deve ser reconhecida em caminho com 2 estados !

# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.

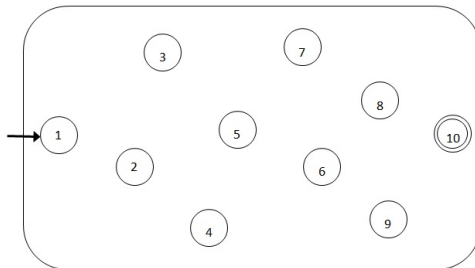


⇒ Uma palavra de tamanho 2 deve ser reconhecida em caminho com 3 estados !

# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.



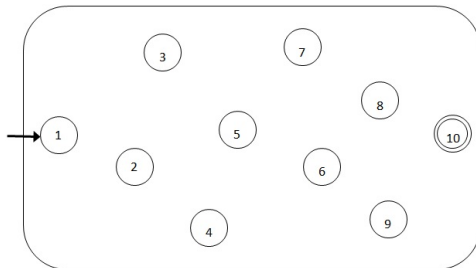
⇒ Uma palavra de tamanho 3 deve ser reconhecida em caminho com 4 estados !



# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.

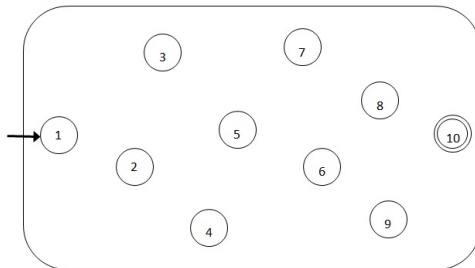


⇒ Uma palavra de tamanho ...

# Lema sobre Linguagens Infinitas

## Lema

Seja  $M$  um AFD com  $k$  estados. Se  $M$  aceita uma sentença  $w$  tal que  $|w| \geq k$ , então existe pelo menos um ciclo no caminho de  $M$  no qual  $w$  é aceito.



⇒ Uma palavra de tamanho 10 deve ser reconhecida em caminho com 11 estados !

# Lema do Bombeamento para LR's

## Lema do Bombeamento (*Pumping lemma*)

Seja  $L$  uma linguagem regular aceita por um autômato  $M$  de  $k > 0$  estados. Toda sentença  $w$  de  $L$  de tamanho maior ou igual a  $k$  pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

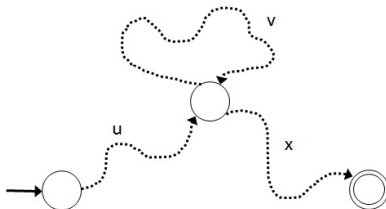
- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

# Lema do Bombeamento para LR

## Lema do Bombeamento (*Pumping lemma*)

Seja  $L$  uma linguagem regular aceita por um autômato  $M$  de  $k > 0$  estados. Toda sentença  $w$  de  $L$  de tamanho maior ou igual a  $k$  pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L, \forall i = 0, 1, 2, \dots$



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda palavra  $w \in L_1$  pode ser escrita como

$w = uv^kz$ , com  $|v| \leq k$  e  $|u|, |z| \geq 0$ .

Se  $|v| = 0$ , então

$|a^n b^n| = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow w = \epsilon \Rightarrow |u| = |z| = 0$  e  $|v| = 0$ .

Se  $|v| > 0$ ,  $v \in L_1 \Rightarrow v = a^i b^i$ , com  $i \geq 1$  e  $|u|, |z| \geq 0$ .

Como  $uv^kz = a^n b^n \in L_1$ , temos  $|u| + k|v| + |z| = n$  e  $|u| + |v| + |z| = n$ . Logo,  $(k-1)|v| = 0$  e  $k = 1$ . Logo,  $|v| = 0$  e  $|u|, |z| \geq 0$ .

Concluímos, portanto, que  $L_1$  não é uma linguagem regular. (Se  $L_1$  fosse regular, então  $|v| = 0$  e  $|u|, |z| \geq 0$  para toda palavra  $w \in L_1$ .)

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Como  $uv^i x = a^i b^i \in L_1$ , Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ ,  $|u| < k$  e  $|v|$  é maior ou igual a 1, então  $uv^i x$  tem no máximo  $k$  caracteres  $a$  e no máximo  $k$  caracteres  $b$ .

Então,  $uv^i x = a^i b^i$  com  $i \geq k$  não pode ser escrito com no máximo  $k$  caracteres  $a$  e no máximo  $k$  caracteres  $b$ . Logo,  $L_1$  não é linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 1º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_1$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_1$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_1$ . Toda sentença  $w \in L_1, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_1, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_1$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_1, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. **Isto é absurdo, logo  $L_1$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR's

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda palavra  $w \in L_2$  pode ser escrita na forma  $w = xyz$ , onde  $|xy| \leq k$  e  $|y| > 0$ .

Seja  $w = a^m b^n \in L_2$ , então

$$w = xyz = a^m b^n$$

$$|a^m b^n| = m + n \leq |a^m b^n| + |a^m b^n| = 2(m + n) = 2|w|$$

$$|a^m b^n| \leq |a^m b^n| + |a^m b^n| = 2|w| \Rightarrow |a^m b^n| \leq 2|w|$$

Como  $|w| = m + n \leq n$ , temos  $|w| \leq n$ . Como  $|xy| \leq k$ , temos  $|xy| \leq k$ . Logo,  $|xy| \leq k$  e  $|y| > 0$ .

Como  $|xy| \leq k$ , temos  $|xy| \leq k$ . Logo,  $|xy| \leq k$  e  $|y| > 0$ . Como  $|w| = m + n \leq n$ , temos  $|w| \leq n$ . Logo,  $|w| \leq n$  e  $|y| > 0$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Como  $uv^0 x = u^0 x \in L_2$ , temos  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ . Logo,  $uv^0 x$  possui no máximo  $k$  caracteres.

Então,  $uv^i x = uv^0 x$  para  $i \geq 1$ . Logo,  $uv^i x$  possui no máximo  $k$  caracteres.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 2º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_2 = \{a^m b^n \mid m \leq n\}$ . Prove que  $L_2$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_2$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_2$ . Toda sentença  $w \in L_2, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_2, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_2$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^k \notin L_2, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é maior que número de bs. **Isto é absurdo, logo  $L_2$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ .

Seja  $w = a^m b^n \in L_3$  com  $m < n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $|w| = n$ .

Seja  $|w| = n$  e  $|w| = n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $|w| = n$  e  $|w| = n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $|w| = n$  e  $|w| = n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $|w| = n$  e  $|w| = n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Seja  $uv^0x = uvx = a^m b^n \in L_3$ . Então  $|u| + |v| + |x| = m + n$  e  $|u| + |v| \leq k$ . Logo,  $|v| \leq k$ . Como  $|v| > 0$ , temos  $0 < |v| \leq k$ . Assim,  $v$  contém apenas  $a$ 's ou apenas  $b$ 's.

Considerando  $uv^0x = uvx = a^m b^n$ , temos  $|u| + |v| + |x| = m + n$ . Como  $|u| + |v| \leq k$ , temos  $|x| \geq m + n - k$ . Como  $|x| \geq m + n - k$ , temos  $|x| \geq m + n - k$ . Como  $|x| \geq m + n - k$ , temos  $|x| \geq m + n - k$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 3º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_3 = \{a^m b^n \mid m < n\}$ . Prove que  $L_3$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_3$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_3$ . Toda sentença  $w \in L_3, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_3, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_3$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}b^{k+1} \notin L_3, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou maior que número de bs. **Isto é absurdo, logo  $L_3$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda palavra  $w \in L_4$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$w = uv^kz$$

$$u, v, z \in \Sigma^+ \text{ e } |u| + |v| + |z| \leq k \text{ e } |v| \geq 1$$

$$u = a^i b^j, v = a^m b^n, z = a^p b^q$$

Como  $uv^kz \in L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ , temos  $|u| + |v| + |z| \leq k$  e  $|v| \geq 1$ , logo  $|u| + |z| \leq k - |v| < k$  e  $|u| + |z| < |v|$ . Assim,  $|u| + |z| < |v|$ .

Considerando  $k = 1$ , temos  $|u| + |z| < |v|$  e  $|u| + |v| + |z| \leq 1$ , logo  $|u| + |z| = 0$  e  $|v| = 1$ . Assim,  $u = z = \epsilon$  e  $v = a$  ou  $v = b$ . Se  $v = a$ , então  $w = a^k z$  e  $w \in L_4$ . Se  $v = b$ , então  $w = b^k z$  e  $w \notin L_4$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Logo,  $uv^0 x = u^0 x^0 \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ ,  $uv^0 x$  possui pelo menos um  $a$  e pelo menos um  $b$ .

Então,  $uv^0 x = a^m b^n$ , com  $m \geq n$ . Como  $|uv| \leq k$ ,  $u$  e  $x$  possuem pelo menos um  $a$  e pelo menos um  $b$ . Logo,  $uv^0 x$  possui pelo menos dois  $a$ 's e pelo menos dois  $b$ 's.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 4º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRS

Seja  $L_4 = \{a^m b^n \mid m \geq n\}$ . Prove que  $L_4$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_4$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_4$ . Toda sentença  $w \in L_4, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_4, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^k \in L_4$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0 x = a^{k-|v|} b^k \notin L_4, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é menor que número de bs. **Isto é absurdo, logo  $L_4$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ .

Seja  $w = a^m b^n \in L_5$  com  $m > n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m > n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m > n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m > n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m > n$ . Então  $w$  é aceito pelo AF.

## Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR's

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR's

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 5º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_5 = \{a^m b^n \mid m > n\}$ . Prove que  $L_5$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_5$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_5$ . Toda sentença  $w \in L_5, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_5, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k+1}b^k \in L_5$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^0x = a^{k+1-|v|}b^k \notin L_5, 1 \leq |v| \leq k$ , pois número de as é igual ou menor que número de bs. **Isto é absurdo, logo  $L_5$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ .

Seja  $w = a^{n^2}$  com  $|w| \geq k$ . Então, pelo Lema do Bombeamento, existe uma decomposição  $w = xyz$  tal que:

$$|xy| \leq k,$$

$$|y| \geq 1, \text{ e}$$

$$xy^iz \in L_6 \text{ para todo } i \geq 0.$$

Como  $|xy| \leq k$ ,  $|xy^iz| \leq |w| + k$ . Portanto, para  $i \geq 1$ ,  $|xy^iz| < (n+1)^2$ . Logo,  $xy^iz \notin L_6$  para  $i \geq 1$ . Isso contradiz o Lema do Bombeamento.

Conclui-se, portanto, que  $L_6$  não é uma linguagem regular. (O Lema do Bombeamento não pode ser usado para provar que uma linguagem é regular, apenas para provar que ela não é regular.)

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Consideremos  $uv^i x \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$ ,  $|v| \leq k$ ,  $|v|$  é limitado. Logo,  $uv^i x$  tem comprimento limitado.

Consideremos  $uv^i x \in L_6$ . Como  $|v| \leq k$ ,  $|v|$  é limitado. Logo,  $uv^i x$  tem comprimento limitado.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 6º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_6 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$ . Prove que  $L_6$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_6$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_6$ . Toda sentença  $w \in L_6, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_6, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k^2} \in L_6$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Contudo,  $uv^2x = a^{k^2+|v|} \notin L_6, k^2 + 1 \leq k^2 + |v| \leq k^2 + k$ , pois número de  $a$ s não é quadrado de um número natural, já que  $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$ . **Isto é absurdo, logo  $L_6$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ .

Seja  $w = a^k b^k$ . Então  $ww = a^k b^k a^k b^k \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $ww$ .

Seja  $ww = a^k b^k a^k b^k$ .

Seja  $u = a^k$ . Então  $u \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $u$ .

Seja  $v = a^k b^k$ . Então  $v \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $v$ .

Seja  $w = a^k b^k$ . Então  $w \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $w$ .

Seja  $ww = a^k b^k a^k b^k$ . Então  $ww \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $ww$ .

Seja  $ww = a^k b^k a^k b^k$ . Então  $ww \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $ww$ .

Seja  $ww = a^k b^k a^k b^k$ . Então  $ww \in L_7$ . Logo, existe uma derivação para  $ww$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $uv^0x = uvx \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$ ,  $uvx$  é lido pelo AF em  $k$  estados ou menos. Assim,  $uv^1x$  também é lido pelo AF em  $k$  estados ou menos. Portanto,  $uv^1x \in L_7$ , pois  $|uv^1x| \geq k$ , e a leitura de  $uv^1x$  pelo AF termina no mesmo estado que a leitura de  $uvx$ . Assim,  $uv^2x \in L_7$ , pois  $|uv^2x| \geq k$ , e a leitura de  $uv^2x$  pelo AF termina no mesmo estado que a leitura de  $uvx$ . Assim,  $uv^i x \in L_7$ , pois  $|uv^i x| \geq k$ , e a leitura de  $uv^i x$  pelo AF termina no mesmo estado que a leitura de  $uvx$ . Assim,  $uv^i x \in L_7$ , pois  $|uv^i x| \geq k$ , e a leitura de  $uv^i x$  pelo AF termina no mesmo estado que a leitura de  $uvx$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b a^k b \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b a^k b \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b a^k b \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b a^k b \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|}ba^kb \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 7º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_7 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ . Prove que  $L_7$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_7$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_7$ . Toda sentença  $w \in L_7, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_7, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b a^k b \in L_7$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Contudo,  $uv^2x = a^{k+|v|} b a^k b \notin L_7$ , pois, caso  $|v|$  seja ímpar o tamanho de  $uv^2x$  é ímpar ou, caso  $|v|$  seja par, só existem  $bs$  na segunda metade de  $uv^2x$ . **Isto é absurdo, logo  $L_7$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ .

Seja  $w = a^p$  com  $p$  primo e  $|w| \geq k$ . Então,  $w$  pode ser escrito na forma

$$w = xyz, \text{ com } |xy| \leq k,$$

$$|y| \geq 1, \text{ e } xy^iz \in L_8 \text{ para todo } i \geq 0.$$

$$\text{Logo, } xy^2z \in L_8 \text{ e } |xy^2z| = |w| + |y| = p + |y|.$$

Como  $p$  é primo,  $p + |y|$  não é primo. Logo,  $xy^2z \notin L_8$ .

Logo,  $L_8$  não é uma linguagem regular. Q.E.D.

Podemos usar o mesmo argumento para mostrar que  $L_9 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$  não é uma linguagem regular.

Prova: Se  $L_9$  é regular, então existe AF com  $k$  estados que aceita  $L_9$ .

Seja  $w = a^p$  com  $p$  primo e  $|w| \geq k$ . Então,  $w$  pode ser escrito na forma

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Consideremos  $a^k \in L_8, k \geq k$ . Então  $a^k = uvx$ . Como  $|uv| \leq k$ ,  $uv^0x = ux = a^k$ . Logo,  $u = a^i$  e  $x = a^{k-i}$  para algum  $i$ .

Então, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^i v^i a^{k-i} = a^{i(1+i)+k-i} = a^{i^2 + i + k}$ .

Proposição:  $a^{i^2 + i + k} \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR's

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$   $a$ s.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ).

Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 8º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_8 = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ . Prove que  $L_8$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_8$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_8$ . Toda sentença  $w \in L_8, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_8, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^{k'} \in L_8, k' \geq k, k'$  primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  e no máximo  $k$  as.

Assim, para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k' + |v|(i-1)}$ . Porém, para  $i = k' + 1$ , tem-se  $k' + |v|(k' + 1 - 1) = k' + |v|k' = k'(1 + |v|)$ , que não é primo (pois  $|v| > 0$ ). Logo  $uv^{k'+1} x \notin L_8$ . **Isto é absurdo, logo  $L_8$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ .

Seja  $w = a^m b^n \in L_9$ .

Seja  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Então,  $w$  pode ser escrito como  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Então,  $w$  pode ser escrito como  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Então,  $w$  pode ser escrito como  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ . Então,  $w$  pode ser escrito como  $w = a^m b^n$ .

Seja  $w = a^m b^n$  com  $m, n > 0$  e  $\text{mdc}(m, n) = 1$ .

22 / 27



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 9º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_9 = \{a^m b^n \mid \text{mdc}(m, n) = 1\}$ . Prove que  $L_9$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_9$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_9$ . Toda sentença  $w \in L_9, |w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_9, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^p b^{(p-1)!} \in L_9, p - k \geq 2, p$  é primo. Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{p+|v|(i-1)} b^{(p-1)!}$ . Porém, para  $i = 0$ , tem-se  $a^{p-|v|} b^{(p-1)!} \notin L_9$ , pois  $\text{mdc}(p - |v|, (p-1)!) = p - |v| \geq p - k \geq 2$ . **Isto é absurdo, logo  $L_9$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ .

Seja  $w = a^k b^k \in L_{10}$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^k b^k$ .

Seja  $w = a^k b^k$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^k b^k$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^k b^k$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^k b^k$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.

Seja  $w = a^k b^k$ . Então,  $w$  é aceito pelo AF.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LR's

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(>0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Então,  $uv^0x = uvx = a^m b^n \in L_{10}$ ,  $|uvx| \leq k$ . Logo,  $m+n \leq k$ .  
 Portanto,  $m \leq k$  e  $n \leq k$ . Logo,  $uv^1x \in L_{10}$  e  $|uv^1x| \leq k$ .  
 Portanto,  $m+n \leq k$  e  $m \leq k$ . Logo,  $n \leq k$ .

Então,  $uv^2x \in L_{10}$  e  $|uv^2x| \leq k$ . Logo,  $m+2n \leq k$ .  
 Portanto,  $m+2n \leq k$  e  $m \leq k$ . Logo,  $n \leq k$ .

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v|[(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+1} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+1}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v|[(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(> 0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando o Lema do Bombeamento

## 10º Exemplo do Uso do Lema do Bombeamento para LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular, então existe AF com  $k(>0)$  estados que aceita  $L_{10}$ . Toda sentença  $w \in L_{10}$ ,  $|w| \geq k$ , pode ser escrita da forma  $w = uvx$ , em que:

- $|uv| \leq k$ ,
- $|v| > 0$  (ou  $v \neq \lambda$ ),
- $uv^i x \in L_{10}, \forall i = 0, 1, 2, \dots$

Considere  $w_1 = a^k b^{k+k!} \in L_{10}$ . Como  $|uv| \leq k$  e  $v \neq \lambda$ , logo  $v$  possui pelo menos um  $a$  (no máximo  $k$  as) e nenhum  $b$ .

Para um  $i$  qualquer,  $uv^i x = a^{k+|v|(i-1)} b^{k+k!}$ . Porém, para  $i = (k!/|v|) + 1$ , tem-se  $k + |v| [(k!/|v|) + 1 - 1] = k + |v|(k!/|v|) = k + k!$ . Logo  $uv^{(k!/|v|)+1} x \notin L_{10}$ . **Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{10}$  deve ser uma linguagem regular. Portanto, devemos ter uma expressão regular para  $L_{10}$ . Mas, como  $L_{10}$  não é uma linguagem regular, não podemos ter uma expressão regular para  $L_{10}$ .

Logo,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Como  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ , temos  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\}$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}}$  é uma linguagem regular. Logo,  $L_{10}$  é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{10}$  é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 1º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{10} = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ . Prove que  $L_{10}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{10}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{10}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Observe que  $\overline{L_{10}} = \{a^m b^n \mid m = n\} \cup (a \cup b)^* ba(a \cup b)^*$ .

Portanto,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{10}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

**Isto é absurdo, logo  $L_{10}$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{11}$  satisfaz a propriedade de fechamento de bombeamento. Logo,  $L_{11}$  é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular.

Logo,  $L_{11}$  não é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular.

Logo,  $L_{11}$  não é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular. Logo,  $L_{11}$  não é regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{11}} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Logo,  $\overline{L_{11}} \cap a^*b^* = \{a^m b^n \mid m \neq n\} \cap a^*b^* = \{a^m b^n \mid m \neq n\}$ , que não é uma linguagem regular.

Logo  $L_{11}$  não é regular.  $\square$

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{11}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{11}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{11}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 2º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{11} = \{a^m b^n c^k \mid m = n + k\}$ . Prove que  $L_{11}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{11}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{11}} \cap a^* b^* = \{a^m b^n \mid m = n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

**Isto é absurdo, logo  $L_{11}$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{12}$  deve ser uma linguagem regular. Então,  $L_{12}$  deve satisfazer as propriedades de fechamento de uma linguagem regular.

Porém,  $L_{12}$  não é uma linguagem regular, pois  $L_{12}$  não satisfaz as propriedades de fechamento de uma linguagem regular.

Portanto,  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.



# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$  deve ser uma linguagem regular (pois  $\overline{L_{12}}$  é regular, que é fechada sob a operação de complementação).

Podemos, então, concluir que  $\{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Logo a suposição de que  $L_{12}$  é uma linguagem regular é falsa.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^* = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^* = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^* = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^* = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 3º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LRs

Seja  $L_{12} = \{a^n \mid n \text{ é composto}\}$ . Prove que  $L_{12}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{12}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $\overline{L_{12}}$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de complementação).

Portanto,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $\overline{L_{12}} \cap aaa^* = \{a^n \mid n \text{ é primo}\}$ , que não é uma linguagem regular.

**Isto é absurdo, logo  $L_{12}$  não é uma linguagem regular.**

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13}$  é fechado por uma linguagem regular. Como as linguagens regulares são fechadas sob união,  $L_{13} \cup L_{13}^*$  também é uma linguagem regular.

Porém,  $L_{13} \cup L_{13}^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \cup \{a^i b^j \mid i \neq j\}$ , que não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{13}$  não é uma linguagem regular. Portanto,  $L_{13}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Portanto,  $L_{13} \cap a^*b^* = \{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Logo,  $L_{13} \cap a^*b^*$  não é regular. Logo,  $L_{13}$  não é regular. Q.E.D.



# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $L_{13} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{13}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $L_{13} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{13}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $L_{13} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

Isto é absurdo, logo  $L_{13}$  não é uma linguagem regular.

# Prova Usando Propriedades de Fechamento

## 4º Exemplo do Uso de Propriedades de Fechamento de LR's

Seja  $L_{13} = \{w \in \{a, b\}^* \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ . Prove que  $L_{13}$  não é linguagem regular.

### Prova

Suponha que  $L_{13}$  seja uma linguagem regular.

Então,  $L_{13} \cap a^*b^*$  deve ser uma linguagem regular (pois as linguagens regulares são fechadas sob a operação de interseção).

Porém,  $L_{13} \cap a^*b^* = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ , que não é uma linguagem regular.

**Isto é absurdo, logo  $L_{13}$  não é uma linguagem regular.**