Derivadas

Investigando o Código das Variações

Prof. Pedro Bonfim de Assunção Filho
pedro.filho@ifg.edu.br

Instituto Federal de Goiás
IFG

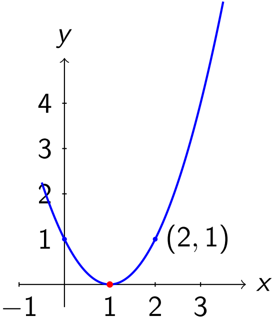
12 de junho de 2025

- Isaac Newton (1643-1726)."*Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes*"

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716). "*Mais importante que as invenções é como foram inventadas.*"

Funções

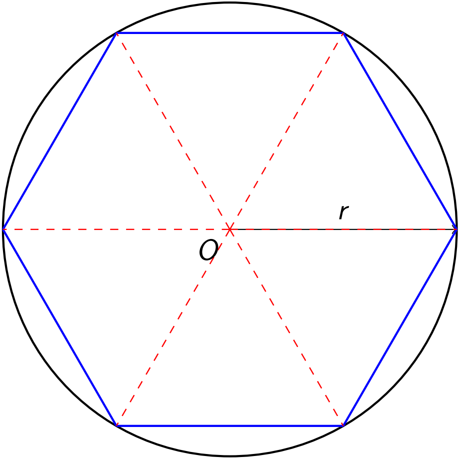
- **Definição.** Uma função é uma relação entre dois conjuntos $f : X \to Y$, que associa cada elemento do conjunto X chamado domínio a um único elemento no outro conjunto Y chamado contra-domínio.
- **Exemplo:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$.



Funções

- **Exemplo:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$
- **Exemplo:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b(x)$, $b > 0$.
- **Exemplo:** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, $a > 0$.
- Um pouco mais geral, $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ Polinômio de grau n.

Noção de Limite



- À medida que $n \to \infty$, o perímetro do polígono se aproxima de $2\pi r$.

$$\text{Perímetro} \approx n \cdot 2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 2\pi r$$

Uma definição não rigorosa

Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a x_0 é L e denotamos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Se os valores de $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de x_0.

Considerando uma sequência (x_k) com a distância $|x_k - x_0|$ se aproximando de zero. $|x_k - x_0| \to 0$ a medida que k cresce. Assim, $|f(x_k) - L| \to 0$.
No caso polinomial é sempre verdade que:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

Exemplo: $p(x) = x^2 - 5x + 6$

Limite, continuidade e derivadas

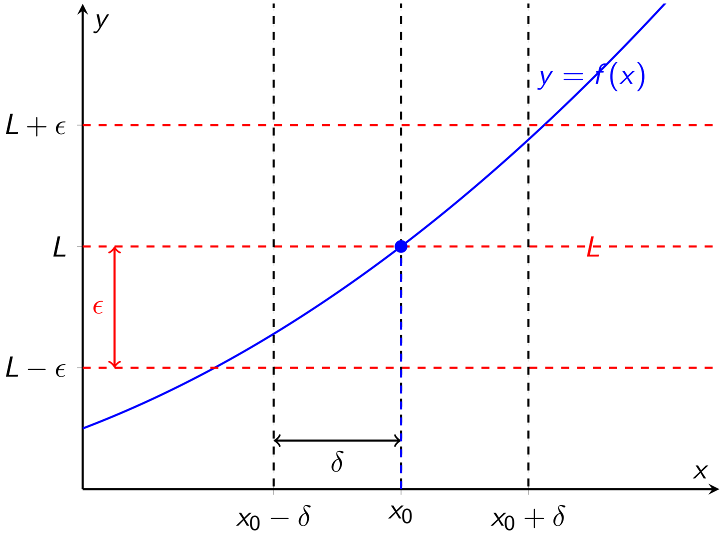
Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}$, e seja x_0 um ponto de acumulação de D. Dizemos que f tem limite $L \in \mathbb{R}$ quando x tende a x_0, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

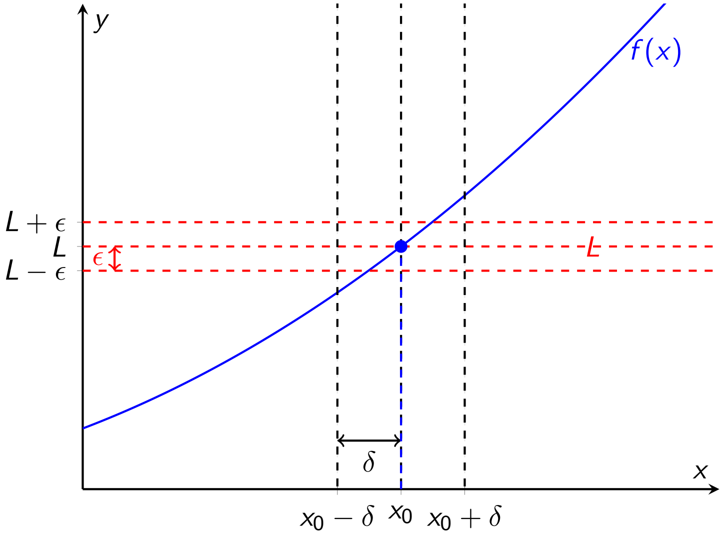
se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$ e $x \in D$, então

$$|f(x) - L| < \epsilon.$$

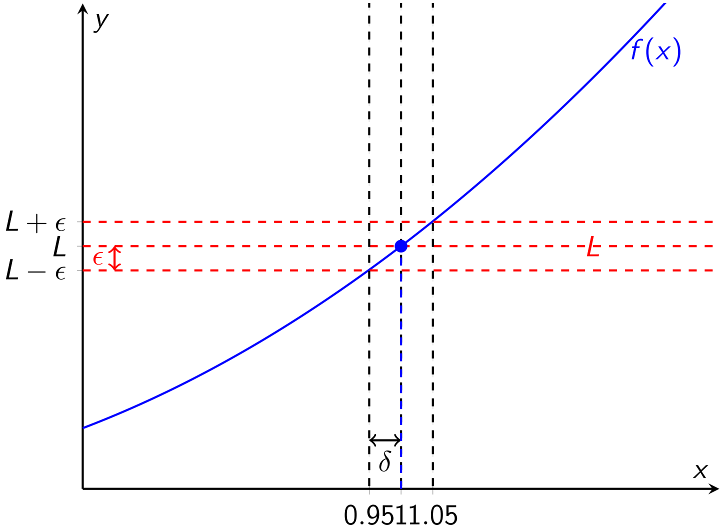
Definição do limite: $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$ [Burden, 2013].



y
$y = f(x)$
$L + \epsilon$
L
L
ϵ
$L - \epsilon$
δ
x
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$



y
$f(x)$
$L+\epsilon$
L
ϵ
$L-\epsilon$
L
δ
x
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$



y
$f(x)$
$L + \epsilon$
L
$L - \epsilon$
ϵ
L
δ
x
0.951
1.05

Continuidade

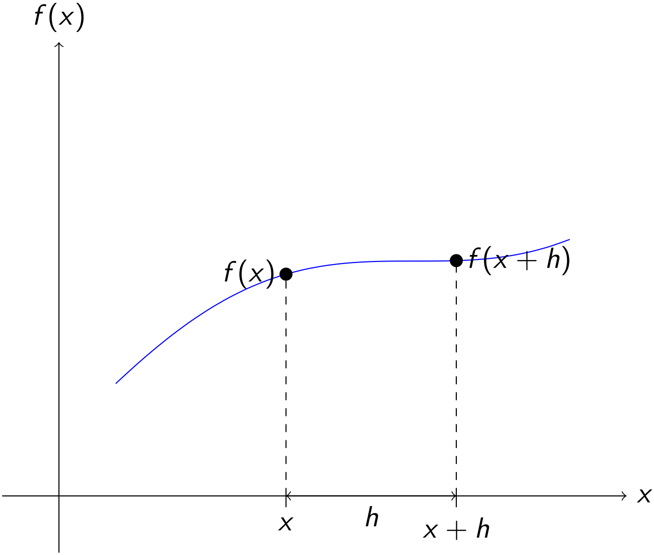
Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- se $x_0 = a \Rightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- se $x_0 = b \Rightarrow \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
- se $x_0 \in (a, b) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

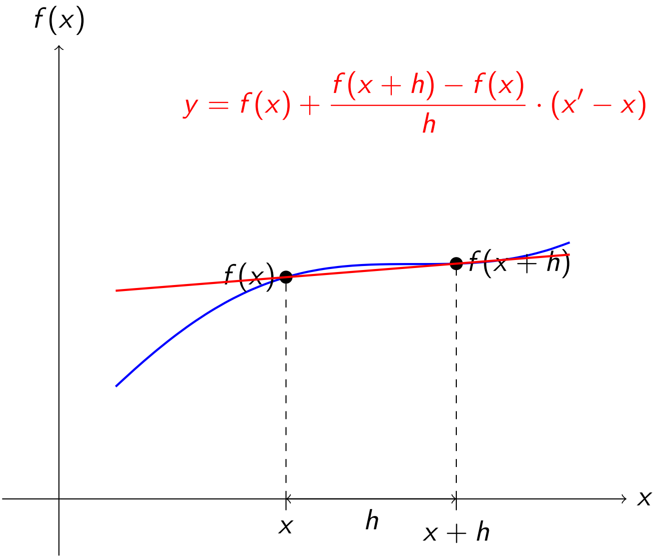
$$\Rightarrow f \text{ é contínua em } x_0 \in [a, b]$$

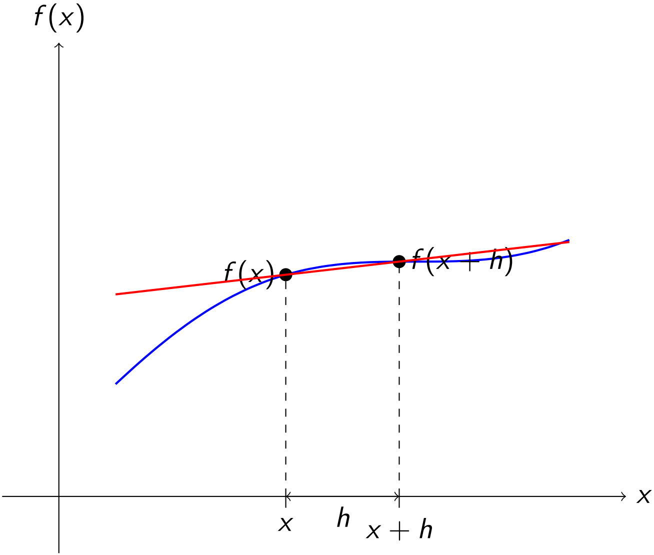
- f é contínua em $[a, b]$ se for contínua em todo $x_0 \in [a, b]$.
- Se f é contínua em $[a, b]$ escrevemos $f \in C[a, b]$.

Derivada

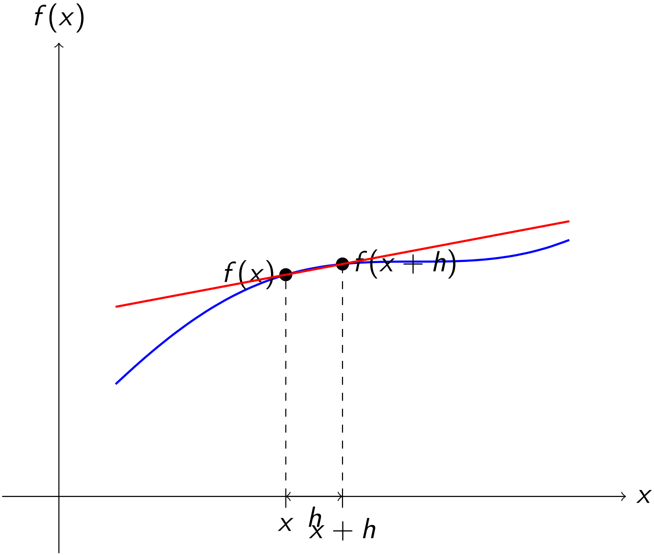


Derivada

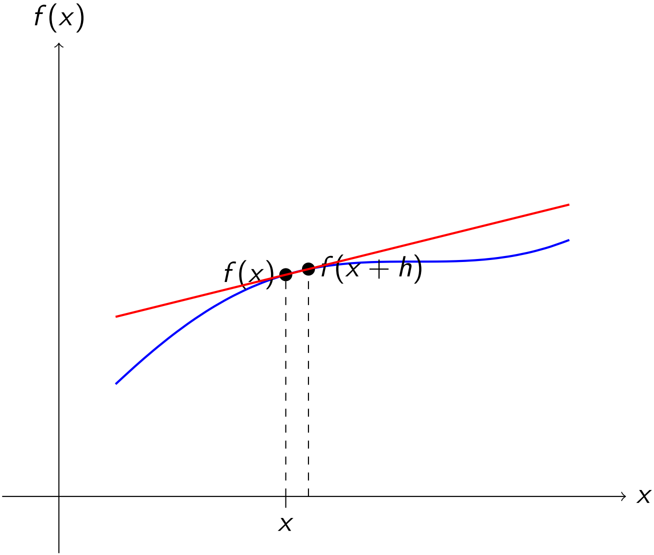




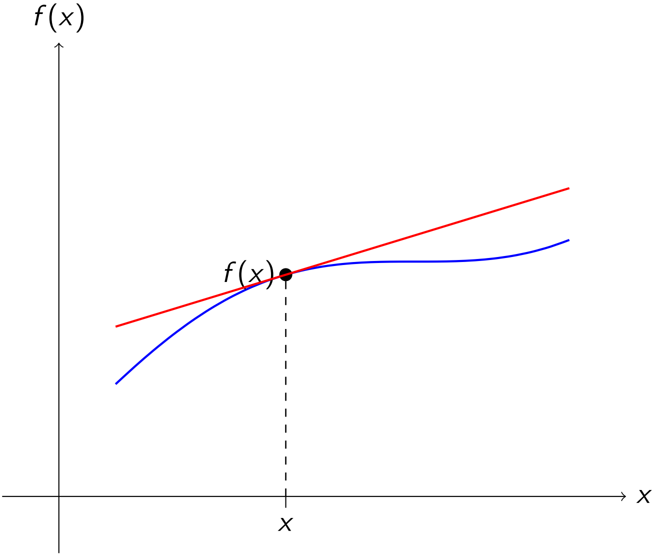
$f(x)$
$f(x)$
$f(x+h)$
x
h
$x+h$
x



$f(x)$
$f(x)$
$f(x+h)$
x
x
h
$x+h$



$f(x)$
$f(x)$
$f(x+h)$
x
x


$f(x)$
$f(x)$
x
x

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}$ é definida pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretação:

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}$ é definida pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretação:

- Razão incremental (taxa de variação média).

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}$ é definida pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretação:

- Razão incremental (taxa de variação média).
- Inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x.

Derivada de uma Função Real

Limite que define a derivada

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x \in \mathbb{R}$ é definida pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Interpretação:

- Razão incremental (taxa de variação média).
- Inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x.
- Se o limite existe, f é **diferenciável** em x.

Derivada

Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- A derivada de f em $x_0 \in (a, b)$ é dada por $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ quando o limite existe.
- Se f possuir derivada em todo $x_0 \in (a, b)$ dizemos que ela é derivável em (a, b). Escrevemos $f \in C^1(a, b)$.
- A derivada nos extremos do intervalo será dada por $f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, $f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$, se os limites existem.

Relação entre derivada e continuidade

Theorem

Se a função f possui derivada em x_0 então ela é contínua em x_0.

Observações:

- As derivadas de ordens mais altas definem-se recursivamente:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x), \quad n \geq 2.$$

- O conjunto de funções n vezes derivável em (a, b) é denotado por $C^n(a, b)$.

Teorema de Rolle

Theorem (Teorema de Rolle)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se

$$f(a) = f(b)$$

então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Teorema do Valor Médio (Lagrange)

Theorem (Teorema do Valor Médio)

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Então existe um número $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema de Taylor

Theorem (Teorema de Taylor)

Sejam $n \geq 0$ inteiro e f uma função n vezes continuamente derivável em $[a, b]$ que possui derivada de ordem $n+1$ em (a, b). Se $x_0, x \in [a, b]$ então

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

e existe um número ξ entre x_0 e x tal que

$$R_n(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Expansão de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x; x_0)$$

O polinômio de Taylor de ordem n de f centrado em x_0:

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

O termo $R_n(x; x_0)$ é o resto (ou erro de truncamento).

Exemplo: $f(x) = e^x$

Lembretes:

- $e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828459045...$
- $f^{(k)}(x) = e^x$

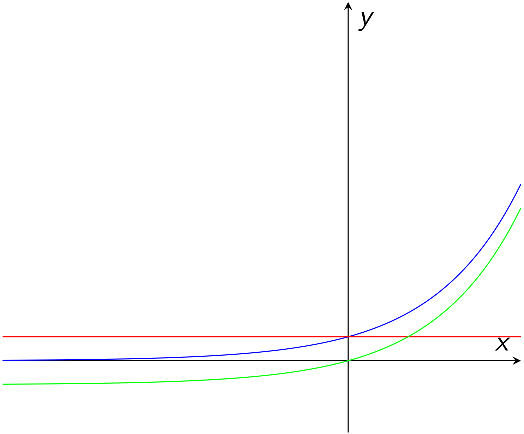
Polinômio de Taylor:

$$T_n(x; x_0) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

Resto:

$$R_n(x; x_0) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Gráficos de Taylor para e^x



Ordem $n = 0$ centrada em $x_0 = 0$.

Exemplo: $f(x) = \ln x$

Lembretes:

- $\ln x$ contínua e infinitamente derivável em $(0, +\infty)$
- $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k}, k \geq 1$

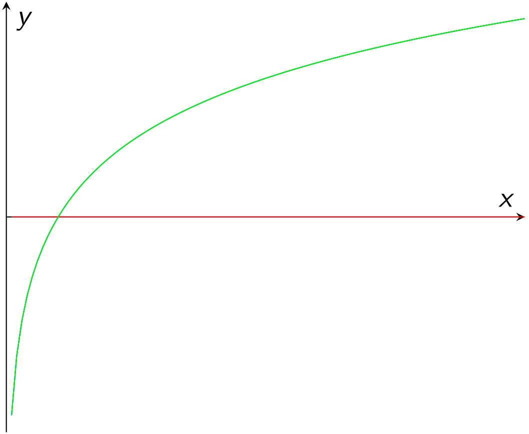
Polinômio de Taylor:

$$T_n(x; x_0) = \ln x_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(x - x_0)^k}{k x_0^k}$$

Resto:

$$R_n(x; x_0) = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)\xi^{n+1}}(x - x_0)^{n+1}$$

Gráficos de Taylor para $\ln x$



Ordem $n = 0$ centrada em $x_0 = 1.5$.

Observações

- Podemos usar os polinômios de Taylor para aproximar os valores de uma função não elementar na vizinhança de um ponto onde conhecemos os valores exatos da função e suas derivadas.
- O intervalo onde essas aproximações são apropriadas depende da função que está sendo estudada.
- É possível usar a fórmula correspondente ao resto para obter uma estimativa do nível de erro cometido nessas aproximações.

Referências

- R.L. Burden e J.D. Faires, *Análise Numérica*. Trad. 8a Edição, Cengage Learning, 2013.