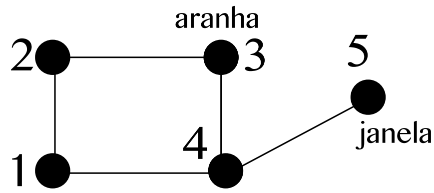
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo

SME 0121 - Processos Estocásticos:
Primeiro Projeto

Resolva os problemas a seguir teoricamente, como fizemos na aula, e depois simule usando a linguagem de programação que preferir. Faça um gráfico do valor obtido (probabilidade ou esperança) em função do número de simulações. Ou seja, no eixo das abscissas do gráfico ficará o número de simulações e nas ordenadas, o valor calculado. Mostre ainda, com uma reta em vermelho, o valor teórico e verifique que quando aumentamos o número de simulações, os resultados simulados se aproximam do valor teórico.
Veja alguns exemplos em: `https://github.com/franciscoicmc/simulacao`

Envie um documento em pdf que inclua todas as resoluções teóricas, códigos usados nas simulações e os gráficos obtidos. Os documentos devem ser inseridos no Moodle.

Exercício 1 Imagine que uma mosca está na posição 1 do grafo abaixo.
(a) Qual é a probabilidade da mosca escapar pela janela sem ser pega pela aranha? Assuma que a mosca se move pelo grafo escolhendo uma aresta com a mesma probabilidade.
(b) Calcule o número médio de visitas às posições 2 e 4 antes da mosca ser pega pela aranha ou sair pela janela. Assuma que a mosca iniciou na posição 1.
(c) Assuma agora que a aranha **não** está na posição 3. Qual é o tempo médio que a mosca leva para sair pela janela?
(d) Simule esse problema e compare o resultado com o valor teórico. Faça um gráfico da probabilidade obtida em função do número de experimentos.



Exercício 2
Para o problema da ruína do apostador, temos

$$U_{i0} = P(X_T = 0|X_0 = i) = \begin{cases} \frac{(q/p)^i-(q/p)^N}{1-(q/p)^N}, & \text{if } p \neq q \\ \frac{N-i}{N}, & \text{if } p = q = 1/2 \end{cases}$$

onde N é a fortuna total (apostador mais oponente), p é a probabilidade ganho em uma jogada e $q = 1 - p$.
a) A probabilidade do jogador A vencer em um jogo é $p = 0,49$. Ele começa o jogo com R$ 6,00. Seu oponente, o jogador B, começa com R$ 10,00. Qual a probabilidade de A vencer? Assuma que em cada jogo é apostado R$ 2,00.
b) Simule o problema acima e compare o resultado com o resultado teórico.

Exercício 3
Uma moeda é lançada sucessivamente até que duas caras apareçam em sequência. Seja p a probabilidade de sair cara.

a) Escreva a matriz de probabilidades de transição e determine o número médio de lançamentos necessários.

b) Simule esse problema e compare o resultado com o valor teórico. Faça um gráfico da probabilidade obtida em função do número de experimentos.

Exercício 4 Considere o grafo abaixo. Seja a probabilidade de transição do vértice i para j dada por $P_{ij} = w_{ij}/\sum_j w_{ij}$, onde w_{ij} é o peso da aresta que conecta i e j.
a) Determine a distribuição de probabilidade estacionária. (Dica: Considere que a cadeia de Markov é reversível. Ver pag. 241 do livro do Sheldon Ross).
b) Implemente uma rotina que simule uma caminha aleatória no grafo. Verifique que após um grande número de passos, o número médio de visitas a cada estado se aproxima da distribuição estacionária.