Departamento de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

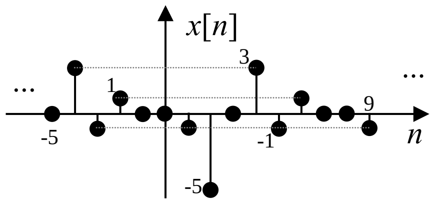
Duração: 01:15 **2º Teste Prático de Processamento de Sinal** 31 de Maio de 2019

NOME: **Solução** **Nº:**

Assinale na seguinte tabela as opções com um **X**. Cada resposta errada desconta 0.02 valores.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)										
b)										
c)										
d)										
e)										
f)										
Nenhuma das anteriores										

Problema 1 – Considere o sinal periódico da figura. Identifique o período do sinal e faça um plot do sinal num período. Calcule os coeficientes de Fourier do sinal periódico. O coeficiente a_{-3} deste sinal é:



a) $\frac{5}{8}-\frac{1}{2}j$ **b)** $-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}j$ **c)** $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}j$ **d)** $\frac{9}{8}-\frac{1}{2}j$

e) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}j$ **f)** $-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}j$

R: Por inspeção visual da figura, pode verificar-se que as amostras se repetem, por exemplo, a partir da amostra em n=-4 até n=3. Contando, são 8 amostras, logo o período é N=8. Para calcular os a_k precisamos de um período do sinal a começar em n=0 e a acabar em n=7. A DFT deste sinal a dividir por N dá-nos o valor dos 8 coeficientes de Fourier. Estes são periódicos de período N=8. Se queremos o a_{-3}, é o mesmo que o coeficiente a_{8-3}=a_5. O último coeficiente calculado, correspondente (neste caso) a k=7 e é o a_{-1}, o penúltimo a_{-2} e o antepenúltimo a_{-3}).
Código:

```
N=8;
x=[0,-1,-5,0,3,-1,1,0];
ak=fft(x)/N
ak(5+1) %-0.3750 + 0.7500i
format rat
ak(5+1)   %-3/8  +  3/4i
ak(end-2) %-3/8  +  3/4i →f)
```

Teoria: os coeficientes de Fourier do sinal periódico podem ser calculados a partir da DTFT de qualquer sinal (de energia) tal que, a repetição periódica desse sinal de N em N amostras é o sinal periódico observado. Por exemplo, o sinal de comprimento N correspondente a um período do sinal, serve, pois o sinal periódico corresponde à sua repetição periódica de período 8 (sem "aliasing" temporal). Se for $x[n]$ esse sinal de energia então $a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\big|_{\omega=k\frac{2\pi}{N}}$. Se $x[n]$ for igual a um período do sinal periódico, então $a_k = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}\{x[n]\}$ onde $x[n]=\tilde{x}[n], n=0...N-1$, sendo $\tilde{x}[n]$ o sinal periódico.

Problema 2 – Considere o sinal $x[n]=\left(\frac{999}{1000}\right)^n u[n]$. Determine a sua TZ $X(z)$. Pretende-se saber o valor $v=X\left(e^{j\frac{7\pi}{13}}\right)$ usando para tal uma função racional onde aparece uma DFT de N pontos, tomada a partir da expressão de $X(z)$. O valor mínimo de N a tomar e o valor de $v=X\left(e^{j\frac{7\pi}{13}}\right)$ são:

a) N=26, $v \approx 0.5004-0.4430j$ **b)** N=26, $v \approx 0.5060-1.3184j$ **c)** N=32, $v \approx 0.5023-0.2673j$
d) N=13, $v \approx 0.5105-0.9526j$ **e)** N=32, $v \approx 0.5102-0.9353j$ **f)** N=16, $v \approx 0.5021-0.0995j$

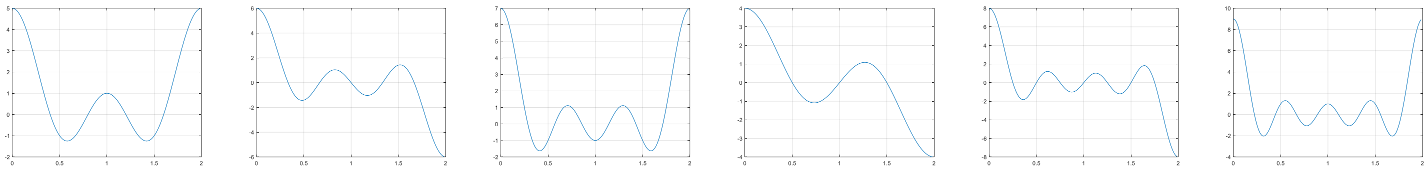
R: Temos que $x[n]=a^n u[n]$, logo $X(e^{j\omega})=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$. O valor requerido é $v=X\left(e^{j\frac{7\pi}{13}}\right)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\frac{7\pi}{13}}}$. Mas queremos obter v a partir de uma DFT que terá de ser $X[k]=\dfrac{1}{\mathrm{DFT}_N\{[1,-a]\}}$ desde que N>2 (nº de coeficientes do denominador). Como queremos que a frequência seja $\omega=\frac{7\pi}{13}=7\times\frac{2\pi}{26}$, podemos tomar uma DFT no mínimo com 26 pontos e escolher o valor k=7 (o 8º elemento do resultado).

Código:

```
a=999/1000;
format short
v=1/(1-a*exp(-7j*pi/13)) % 0.5004 - 0.4430i
N=26;
X=1./fft([1,-a],N);
X(7+1) % 0.5004 - 0.4430i → a)
```

Nota: o valor de a é próximo de 1, pelo que $x[n]$ decresce muito lentamente com n. Por exemplo com n=1000 $x[n]$ vale apenas 0.3677. Não se pretende uma solução aproximada com uma DFT de um sinal muito comprido. Por exemplo, uma DFT de 13000 pontos, truncando $x[n]$ e escolhendo k=7000, seria ainda apenas uma aproximação com poucos algarismos significativos corretos.

Problema 3 – Considere o sinal $x[n]=u[n-2]-u[n-9]$. Faça um plot do sinal em `n=0:15`. A DTFT deste sinal pode ser colocada na forma $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega n_0}X_r(\omega)$, onde $X_r(\omega)$ é uma expressão real em ω e n_0 é o atraso em relação ao sinal com simetria par. O valor de n_0 e o gráfico de $X_r(\omega)$ (frequência normalizada em [0,2[), são:



a) n_0=5; **b)** n_0=4.5 **c)** n_0=5 **d)** n_0=4.5 **e)** n_0=4.5 **f)** n_0=4

R: O sinal $x[n]$ é um pulso retangular desde n=2 até n=8 logo com 7 valores a 1. Tem uma amostra central em n=5. Logo, se adiantarmos $x[n]$ de 5 amostras ficamos com um pulso retangular par cuja DTFT é real: $X_r(\omega)$. O sinal $x[n]$ é então o atraso de 5 amostras deste: $X(e^{j\omega})=e^{-j\omega 5}X_r(\omega)$ onde $X_r(e^{j\omega})=\dfrac{\sin(\omega 7/2)}{\sin(\omega/2)}$. Ou seja,

$X_r(e^{j\omega})=e^{+j\omega 5}X(\omega)$. Basta então fazer um gráfico de $X_r(\omega)$ e compará-lo com as figuras a) e c).

Código:

```
x=[0,0,1,1,1,1,1,1,1];
Nfft=256; X=fft(x,Nfft); k= (0:Nfft-1); w=k*2*pi/Nfft;
n0=5;
Xr=exp(+1j*w*n0).*X;
isreal(Xr) %tem de ser real.
%Se não for, a parte imaginária deverá ter apenas erros de arredondamento:
max(abs(imag(Xr))) % 2.6201e-14. Logo:
Xr=real(Xr); plot(w/pi,Xr) % → c)
%ou:
u=@(n)(n>=0)*1; %degrau unitário
n=0:15; x=u(n-2)-u(n-9); stem(n,x) %sinal
w=(0:255)/256*2*pi;
Xr=sin(w*7/2)./sin(w/2); % find(isnan(Xr))→1
Xr(isnan(Xr))=7;
plot(w/pi,Xr);
```

`Nota: se` $x[n]=u[n-2]-u[n-8]$, teríamos menos uma amostra: pulso com 6 valores a um. O valor central seria em torno de n_0=4.5. A solução seria agora `Xr=sin(w*3)./sin(w/2); → b)`

Problema 4 – Considere o sinal $x[n]$ de largura N=13 (janela de Hamming) e o sinal periódico $y[n]$ de período M=5 (soma com sobreposição de janelas de Hamming de M em M amostras):

$$x[n]=\begin{cases}0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}n\right), & n=0,1,\cdots,N-1\\ 0 & \text{, outros casos}\end{cases}; \qquad y[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[n-mM].$$

Verifique que a 1ª e a última amostra de $x[n]$ são iguais, de valor 0.08. Relacione os coeficientes de Fourier do sinal $y[n]$ com a DTFT $X(e^{j\omega})$. Determine o valor DC do sinal $y[n]$, que é:

a) $a_0=\frac{137}{100}$ **b)** $a_0=\frac{164}{125}$ **c)** $a_0=\frac{191}{150}$ **d)** $a_0=\frac{22}{15}$ **e)** $a_0=\frac{247}{200}$ **f)** $a_0=\frac{301}{200}$

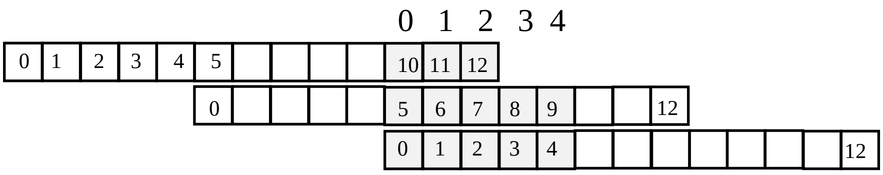
R: $y[n]$ é um sinal periódico de período M=5. Seja $X(e^{j\omega})$ a DTFT do sinal $x[n]$. Os coeficientes de Fourier de $y[n]$ são $a_k=\frac{1}{M}X(e^{j\omega})$ quando $\omega=k\frac{2\pi}{M}$, k=0...M–1. Queremos apenas o coeficiente a_0 ou valor DC. É preciso calcular $X(e^{j0})=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]$, logo $a_0=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{12}x[n]$. Também poderíamos calcular a DFT de $x[n]$ de qualquer comprimento maior ou igual a 13 e tomar o primeiro: $X[0]$.

Código:

```
N=13; M=5; n=0:N-1;
x=0.54-0.46*cos(2*pi/(N-1)*n);
X=fft(x); a0=X(0+1)/M %1.3120
sum(x)/M               %1.3120
format rat, a0         %164/125 → b)
```

Nota: não era necessário calcular um período de $y[n]$. Mas se quisermos saber quais as 5 amostras de um período basta fazer 3 sobreposições para conhecer $y[n]$ em n=0:4, com m=-2, m=-1 e m=0. A primeira sobreposição começa em n=-10 e termina em n=2; a segunda começa em n=-5 e termina em n=7; a terceira começa em n=0 e termina em n=12. As amostras de $y[n]$ para n=0:4 são as seguintes:

$y[0]=x[10]+x[5]+x[0]$
$y[1]=x[11]+x[6]+x[1]$
$y[2]=x[12]+x[7]+x[2]$
$y[3]=\quad x[8]+x[3]$
$y[4]=\quad x[9]+x[4]$



A média é $a_0=(y[0]+y[1]+\ldots+y[4])/5=(x[0]+x[1]+\ldots+x[12])/5$, tal como visto anteriormente.

```
n=0:12; x=0.54-0.46*cos(2*pi/12*n);
yy=[x(11:13),0,0]+... %m=-2, n=0:4
    x(6:10)+...       %m=-1, n=0:4
    x(1:5)            %m= 0, n=0:4  %yy= 1.3284    1.2833    1.3284    1.3100    1.3100
mean(yy) %1.3120
```

Problema 5 – Considere o sinal $x[n]$ de comprimento N_x=9, com amostras em `n=0:8` que são: `x=[2,-4,-2, 5, 2, 2,-5,-1, 3]`. Seja $X_7[k]$ a amostragem da DTFT $X(e^{j\omega})$ amostrada em N = 7 pontos: $X_N[k]=X(e^{j\omega_k}),\omega_k=k\frac{2\pi}{N},k=0,\cdots,N-1$. Determine uma DFT de $x[n]$, considerando um número de pontos maior ou igual a N_x, tal que consiga obter depois $X_N[k]$. O valor de $X_7[3]=X\left(e^{j\frac{2\pi}{7}\times 3}\right)$ é:

a) 9.1332+2.2766j **b)** 4j **c)** –0.5000+0.8660j **d)** 4.8482–7.7876j **e)** 1.8413–0.5406j **f)** –0.0718

R: Queremos $\omega=\frac{2\pi}{7}\times 3$, mas como 7<$N_x$ devemos tomar um múltiplo de 7 e considerar, por exemplo, $\omega=\frac{2\pi}{14}\times 6$, isto é considerar uma DFT de comprimento 14 (14>N_x, caso contrário não tomávamos todas as amostras de $x[n]$) e obter o valor $X_{14}[6]$.

Código:

```
x=[2,-4,-2, 5, 2, 2,-5,-1, 3]
X=fft(x,14);
```

```
X(6+1)  % 4.8482 - 7.7876i → d)
%alternativa, pela definição de DTFT:
n=0:8; w=3*2*pi/7;
v = sum(x.*exp(-1j*w*n)) %4.8482 - 7.7876i
```

Problema 6 – Considere o sinal $x(t)=2+\cos(35\pi t)$ que é amostrado a uma frequência de amostragem de $\omega_s=100\pi$ rad/s (f_s=50 Hz). A sequência resultante é também periódica. Faça um plot com `n=0:100` do sinal $x[n]$ de forma a verificar que este período é:

a) N=8 **b)** N=14 **c)** N=20 **d)** N=24 **e)** N=28 **f)** N=30

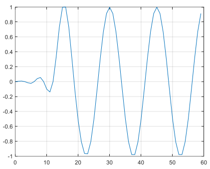
R: Relação fundamental da amostragem: $x[n]=x(nT)$, T=1/50. $x[n]=2+\cos\left(35\pi\frac{n}{50}\right)=2+\cos\left(\frac{7\times5}{10\times5}\pi n\right)$.

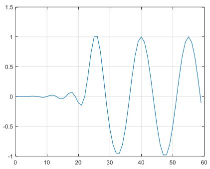
Ou: $x[n]=2+\cos\left(\frac{7\times2\pi}{20}n\right)$. Trata-se de um sinal de período N=20.

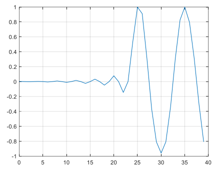
Código:

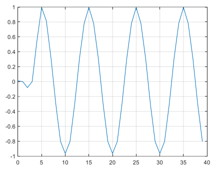
```
n=0:100; x=2*cos(35*pi*n/50); plot(n,x), grid
```

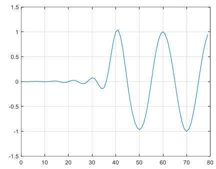
Problema 7 – Considere um sinal $x[n]$ que se pretende interpolar por um fator L=3. Equivale a converter a frequência de amostragem implícita em $x[n]$, f_s, para uma frequência de amostragem f_y=Lf_s (sem decimação). O filtro de interpolação a usar deve ser o seguinte: `h=L*fir1(50,1/3)`. Considere que o sinal $x[n]$ é dado por: `x=cos(2*pi/5*(0:19))`. O sinal $y[n]$ é:

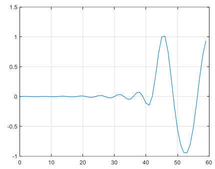

a)


b)


c)


d)


e)


f

R: Código:

```
L=3; h=L*fir1(50,1/L); x=cos(2*pi/5*(0:19));
xe = kron(x,[1,0,0]); % o mesmo que: xe=upsample(x,3)
y  = filter(h,1,xe);
plot(0:20*L-1,y) %ou simplesmente: plot(y) → b)
```

Problema 8 – Um sistema LTI tem a seguinte função de transferência: $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{13}{12}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}-\frac{1}{24}z^{-3}}$. Se o sistema for causal a resposta a impulso deste sistema é:

a) $h[n]=\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{128}{35}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\frac{27}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ **b)** $h[n]=54\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-128\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+75\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

c) $h[n]=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{128}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-25\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ **d)** $h[n]=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{32}{7}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\frac{25}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

e) $h[n]=\frac{18}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{32}{35}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-9\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$ **f)** $h[n]=\frac{54}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{32}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\frac{75}{7}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

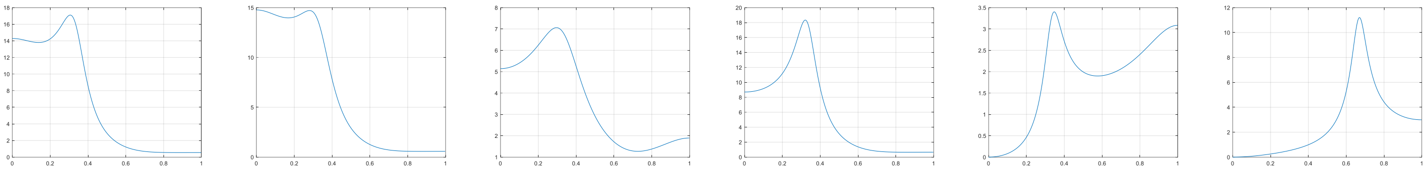
R: Código:

```
B=[1,2,1]; A=[1,-13/12,3/8,-1/24];
format rat
[r,p]=residuez(B,A)
r =
      54
    -128
      75
p =
       1/2
       1/3
       1/4
%Os polos são distintos, logo:
n=0:20; %h[n]=0 para n<0 (sistema causal)
h=r(1)*p(1).^n+r(2)*p(2).^n+r(3)*p(3).^n; % → b)
```

Problema 9 – Considere o sistema causal caracterizado pela seguinte equação de diferenças,

$$y[n]-\tfrac{1}{6}y[n-1]+\tfrac{1}{9}y[n-2]+\tfrac{2}{9}y[n-3]=x[n]+2x[n-1]+3x[n-2]$$

A resposta em frequência deste sistema no intervalo [0,π[, é a seguinte:



a) **b)** **c)** **d)** **e)** **f)**

R: A função de transferência do sistema é $H(z)=\dfrac{1+2z^{-1}+3z^{-2}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}+\frac{2}{9}z^{-3}}$.

Código:

```
A=[1,-1/6,1/9,2/9]; B=[1,2,3];
[H,w]=freqz(B,A);
plot(w/pi,abs(H)) % → c)
```

Nota: a frequência normalizada está no intervalo [0,1[. A resposta em frequência apresentada é em módulo.

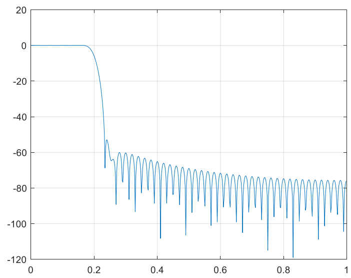
Problema 10 – Considere um filtro obtido com o comando seguinte: `h=fir1(100,1/5)`. O filtro obtido:

a) é passa-baixo, de frequência de corte π/5 e atenuação na banda de rejeição cerca de 21 dB.
b) é passa-baixo, de frequência de corte π/100 e atenuação na banda de rejeição cerca de 53dB.
c) é passa-alto, de frequência de corte π/100 e atenuação na banda de rejeição cerca de 53 dB.
d) é passa-baixo, de frequência de corte π/5 e atenuação na banda de rejeição cerca de 53 dB.
e) é corta-banda, de frequência central π e atenuação na banda de rejeição cerca de 53 dB.
f) é corta-banda, de frequência central π/5 e atenuação na banda de rejeição cerca de 21 dB.

R: O parâmetro 1/5 é a frequência de corte normalizada, logo $\omega_c=\frac{\pi}{5}$. A ordem do filtro é 100, logo o comprimento é N=101. O filtro é passa-baixo. A janela por omissão é a de Hamming (que providencia aproximadamente 53 dB de atenuação na banda de corte (ou de rejeição)).

Verificação:

```
help fir1
h=fir1(100,1/5);
[H,w]=freqz(h,1);
plot(w/pi,db(H)),grid
```



Nota: Os filtros FIR projetados com o método das janelas têm frequência de corte a meio da zona de transição, logo o ganho a essa frequência é de 1/2 (-6dB):

```
plot(w/pi,abs(H)),grid
```