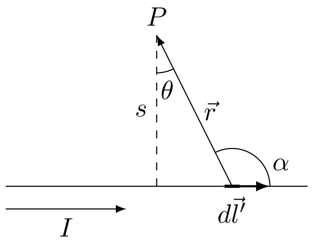
Magnetismo

1 Campo magnético de um fio infinito



Vamos considerar um fio infinito, percorrido por uma corrente estacionária I, onde queremos encontrar o campo magnético a uma distância s do fio.

A Lei de Biot-Savart é descrita por

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l'} \times \hat{r}}{r^2}. \tag{1}$$

O ponto s é fixo, e l' será nossa variável de integração, que irá varrer toda a reta, indo de $-\infty$ até ∞. A distância entre o elemento de integração e o ponto de análise é

$$r^2 = l'^2 + s^2. \tag{2}$$

$d\vec{l'} \times \hat{r}$, por sua vez, será, pela definição do produto vetorial,

$$d\vec{l'} \times \hat{r} = dl' \sin \alpha \hat{\phi}. \tag{3}$$

θ, por sua vez, é igual a $\alpha - \pi/2$. Logo,

$$\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

O seno de α será então

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \sin(\theta) \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \cos(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos \theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Logo, teremos que

$$d\vec{l'} \times \hat{r} = dl' \cos \theta \hat{\phi}. \tag{6}$$

O cosseno de θ, por sua vez, será

$$\cos \theta = \frac{s}{r}. \tag{7}$$

Então

$$d\vec{l'} \times \hat{r} = dl' \frac{s}{r} \hat{\phi}. \tag{8}$$

Nossa integral será então

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl' s \hat{\phi}}{(l'^2 + s^2)^{3/2}} \tag{9}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-L}^{L} \frac{dl' s \hat{\phi}}{(l'^2 + s^2)^{3/2}} \tag{10}$$

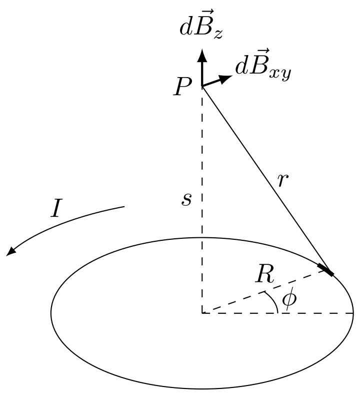
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I \; 2s \int_0^L \frac{dl'}{(l'^2 + s^2)^{3/2}} \hat{\phi} \tag{11}$$

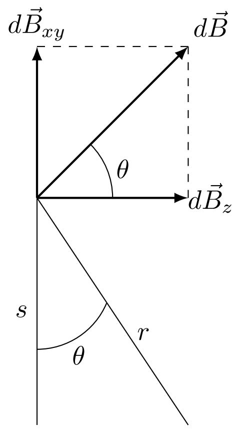
$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I \; s \left[\frac{l'}{s^2 \sqrt{l'^2 + s^2}} \right]_{l'=0}^{l'=L} \hat{\phi} \tag{12}$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{s} \frac{L}{\sqrt{L^2 + s^2}} \hat{\phi}. \tag{13}$$

Não sei se isto está correto, mas creio que sim, pois no limite em que $L \to \infty$, recuperamos o resultado original.

2 Campo magnético acima do centro de um loop de corrente





No ponto em que vamos calcular o campo, haverá uma influência do campo no plano xy e em z para cada elemento infinitesimal do loop de corrente, devido à assimetria provocada por tomar um elemento de corrente fora do eixo z, enquanto o ponto de análise está diretamente acima do eixo z. Porém, ao integrarmos em todo o loop, a assimetria deve desaparecer, nos deixando somente a componente no eixo z.

A lei de Biot-Savart é

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}dl' = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int \frac{d\vec{l'}\times\hat{r}}{r^2}. \tag{14}$$

Nossa discussão anterior sugere começarmos a calcular nosso campo pela componente z. Pois esperamos que

$$\vec{B}(P) = \vec{B}_z(P). \tag{15}$$

Avaliando os elementos infinitesimais:

$$d\vec{B}_z = d\vec{B}\sin\theta, \tag{16}$$

onde

$$\sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}}. \tag{17}$$

A integral se reduz a (depois retorno aqui e explico melhor)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int \frac{d\vec{l'}\times\hat{r}}{r^2} \tag{18}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I\int \frac{d\vec{l'}}{r^2}\sin\theta \tag{19}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I\int \frac{Rd\vec{l'}}{r^3} \tag{20}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}I\frac{R2\pi R}{(s^2+R^2)^{3/2}} \tag{21}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(s^2+R^2)^{3/2}}. \tag{22}$$

Creio que esteja certo.

3 Campo magnético gerado por loops de corrente

Vamos calcular o campo magnético no centro de vários loops de corrente.

3.1 Loop quadrado, de lado $2R$

Como estamos no centro do loop, o campo total será quatro vezes aquele causado por um dos fios. Além disto, o campo estará na direção $\hat{z}$, pois pegará contribuições radiais dos 4 "fios", dos 4 lados do loop. O campo de um fio finito já foi calculado, então esta tarefa é bem fácil.

O campo do fio, já calculado anteriormente, é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\frac{L}{\sqrt{L^2+s^2}}\hat{\phi}. \tag{23}$$

Só que, neste caso, temos $s = R$ e $L = R$ (perceba que L é o meio comprimento de cada fio), além de 4 fios formando o loop. Logo,

$$\vec{B} = 4\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{R}{\sqrt{R^2+R^2}}\hat{z} \tag{24}$$

$$= 2\frac{\mu_0}{\pi}I\frac{1}{R\sqrt{1+1}}\hat{z} \tag{25}$$

$$= \frac{2\mu_0}{\sqrt{2}\pi}\frac{I}{R}\hat{z} \tag{26}$$

3.2 Polígono de n lados, com o centro a uma distância R de cada lado

A distância é R de cada lado. Sabemos que o ângulo de cada triângulo é $2\pi/n$. Logo, o lado de cada polígono (comprimento de cada fio) será

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{L}{R}, \tag{27}$$

$$L = R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{28}$$

Assim,

$$\vec{B}_{\text{fio}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\frac{L}{\sqrt{L^2+s^2}}\hat{\phi} \tag{29}$$

$$\vec{B} = n\cdot B_{\text{fio}}\hat{z} \tag{30}$$

$$= n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\frac{L}{\sqrt{L^2+s^2}}\hat{z} \tag{31}$$

$$= n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{\left(R\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2+R^2}}\hat{z} \tag{32}$$

$$= n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{\tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)+1}}\hat{z} \tag{33}$$

$$= n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sec\left(\frac{\pi}{n}\right)}\hat{z} \tag{34}$$

$$= n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\hat{z}. \tag{35}$$

Para $n = 4$, vemos que, de fato, recupera-se o resultado anterior:

$$\vec{B} = 4\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{z} = \frac{2\mu_0}{\sqrt{2}\pi}\frac{I}{R}\hat{z}. \tag{36}$$

No limite em que $n \to \infty$,

$$\vec{B} = \lim_{n\to\infty} n\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\hat{z} \tag{37}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\frac{1}{u}\sin(\pi u)\hat{z} \tag{38}$$

$$= \lim_{u\to 0}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R}\pi\cos(\pi u)\hat{z} \tag{39}$$

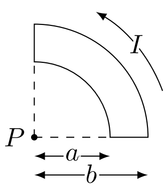
$$= \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{z}, \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

que é justamente o campo obtido anteriormente, para o loop circular, com $s = 0$.

4 Outros loops com formato alternativo

4.1 Borda de pizza



Vamos aqui aplicar a lei de Biot-Savart para cada pedaço do loop em questão. Neste exemplo, teremos uma contribuição positiva da curva exterior, do “fio” que desce do fio de raio b até o fio de raio a, e então uma contribuição negativa da curva interior e do “fio” que vai do fim da curva de raio a até o começo da curva de raio b. Todas estas análises foram feitas utilizando a regra da mão direita.

Bom, na lei de Biot-Savart, teremos

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{I}\times\hat{r}}{r^2}dl' = \frac{\mu_0}{4\pi}I\int\frac{d\vec{l'}\times\hat{r}}{r^2}. \tag{42}$$

Vamos dividir o problema em 4 partes:

Caminho da curva exterior:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi b/2} \frac{dl'}{b^2}\hat{z} && (43)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\pi b}{2b^2}\hat{z} && (44)\\
&= \frac{\mu_0 I}{8b}\hat{z}. && (45)
\end{aligned}$$

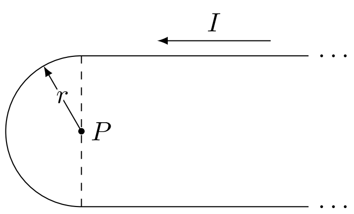
Para a curva interior, teremos quase a mesma coisa. A diferença será o sinal da contribuição do campo e o raio:

$$\vec{B}(P) = -\frac{\mu_0 I}{8a}\hat{z}. \tag{46}$$

Nos outros dois caminhos, a corrente é paralela ao vetor que liga o elemento de área ao ponto avaliado, então não teremos contribuição. Neste caso,

$$\vec{B}_{\text{tot}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{8}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\hat{z} \tag{47}$$

4.2 Loop em forma de U infinito



Neste caso, iremos fazer a mesma coisa do problema anterior: considerar a lei de Biot-Savart por partes no fio. Perceba que aqui todas as componentes irão somar positivamente em $\vec{B}$.

Para a semi circunferência de corrente, teremos que, pela lei de Biot-Savart,

$$\begin{aligned}
\vec{B}(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l'} \times \hat{r}}{r^2} && (48)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{\pi R} \frac{dl'}{R^2}\hat{z} && (49)\\
&= \frac{\mu_0 I}{4R}\hat{z}. && (50)
\end{aligned}$$

Por simetria, cada um dos outros fios dará a mesma contribuição para o campo no ponto. Aplicando a lei de Biot-Savart para um fio semi-finito (tá meio errado, mas vai funcionar):

$$\begin{aligned}
\vec{B}_z(P) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\vec{l'} \times \hat{r}}{r^2} && (51)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\infty^0 \frac{dl' \sin\theta}{R^2 + l'^2}\hat{z} && (52)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_\infty^0 \frac{dl' R}{(R^2 + l'^2)^{3/2}}\hat{z} && (53)\\
&= \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_\infty^{R^2} \frac{l' dl'}{l'^3}\hat{z} && (54)\\
&= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\left[-\frac{1}{l'}\right]_\infty^{R^2}\hat{z} && (55)\\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z}. && (56)
\end{aligned}$$

Teremos 2 destas contribuições, logo, o resultado final será

$$\vec{B}_{\text{tot}}(P) = \frac{\mu_0 I}{4R}\hat{z} + 2\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4R}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\hat{z}. \tag{57}$$

5 Campo provocado por um fio infinito

Vamos agora resolver um problema já conhecido, mas utilizando a lei de Ampère, a qual é escrita na sua forma integral como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}. \tag{58}$$

Num fio infinito, qualquer que seja o ponto analisado, o campo magnético estará circulando o fio. A superfície amperiana será então uma circunferência com centro no eixo do fio. A corrente enclausurada será também a corrente estacionária do loop. Logo,

$$\oint B dl = \mu_0 I \tag{59}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 I \tag{60}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}. \tag{61}$$

Como sabemos a direção do $\vec{B}$,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}, \tag{62}$$

em coordenadas cilíndricas.

6 Campo magnético causado por um solenoide longo

Vamos considerar um solenoide longo, com n voltas por unidade de comprimento, de raio R e carregando uma corrente I. As n voltas estão muito próximas umas das outras, de maneira que cada volta será circular. Como o solenoide é longo, o campo magnético só pode existir em sua componente longitudinal, digamos, $\hat{z}$. Isto ocorre porque não há campo magnético na direção da corrente ($\hat{\phi}$) e também há a simetria radial. Existem outras explicações, talvez melhores, para isto, mas creio que esta baste.

A estratégia será utilizar uma curva amperiana retangular, com dois dos lados paralelos ao eixo longitudinal, e primeiramente do lado de fora do solenoide. A lei de Ampère diz que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}. \tag{63}$$

Como não temos campo na direção radial nem corrente enclausurada[1],

$$B(r = s_1)L - B(r = s_2)L = 0, \tag{64}$$

o que nos diz que

$$B(r = s_1) = B(r = s_2), \tag{65}$$

o que só é possível caso B seja zero fora do solenoide, pois não podemos esperar que uma distribuição do tipo cause um campo constante fora do solenoide. Sua magnitude deve no mínimo diminuir quando aumentamos a distância do ponto de análise (porém, vemos que um campo carregado eletricamente provoca um campo uniforme no espaço inteiro, *oh, the irony!*).

Vamos agora avaliar uma amperiana retangular, também com dois lados paralelos ao eixo longitudinal do solenoide, mas desta vez um destes lados estará dentro do cilindro e outro lado fora. Pela lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{66}$$

$$\int_0^L B(r = s)dl - \int B(r = s' > R)dl = \mu_0 K L \tag{67}$$

$$B(r = s)L = \mu_0 K L. \tag{68}$$

Logo, para pontos dentro do solenoide, teremos que

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}, \tag{69}$$

independente de qual seja o valor do raio.

7 Campo magnético de uma bobina toroidal

Vamos considerar (estou usando demais esta expressão, mas, quer saber? f o d a s e) um toroide de secção transversal quadrada, onde nele há um fio enrolado com N voltas, carregando uma corrente I.

Neste caso, teremos um campo angular, pois cada volta da bobina irá produzir um campo magnético normal à superfície delimitada pela volta. A curva amperiana em questão será então uma circunferência concêntrica com a bobina, a uma determinada altura. O campo será constante em ϕ pela simetria azimutal.

[1] Lembre-se de que o campo só pode variar radialmente, pois é a única direção em que a simetria é quebrada.

A lei de Ampère fica como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{70}$$

$$B_\phi 2\pi s = \mu_0 NI \tag{71}$$

$$\vec{B}_\phi = \frac{\mu_0 NI}{2\pi s}\hat{\phi}. \tag{72}$$

Perceba que, independente da altura onde é posta a amperiana, a corrente que irá cruzar a superfície será a mesma. $\vec{B}_\phi$ não depende então da altura em que estamos, basta estar dentro do loop. Caso um loop de raio maior do que o toroide seja considerado, a corrente líquida será zero na lei de Ampère, fazendo com que não haja campo magnético angular nesta região.

Bom, para determinar completamente o campo, basta provar que o mesmo só tem componente radial. Infelizmente não vou fazer isso agora. Talvez depois.

8 Potencial vetor de uma casca esférica rotacionando

Uma casca esférica de raio R, carregando uma densidade superficial de cargas σ está rotacionando com uma velocidade angular ω. Encontrar o potencial vetor.

O potencial vetor é dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{K}}{r} da'. \tag{73}$$

A corrente superficial irá surgir devido ao movimento da densidade de cargas ao rotacionar. Iremos considerar que o eixo de rotação é o eixo $\hat{z}$, e o ponto de análise estará em uma posição arbitrária, fora da esfera, $\vec{r}$. A definição de corrente superficial, creio eu, é

$$\vec{K} \equiv \sigma\vec{v}, \tag{74}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da linha de corrente. A velocidade de cada ponto terá como módulo sua distância do eixo de rotação multiplicado por ω, e como direção terá a componente angular $\hat{\phi}$ em coordenadas cilíndricas. Isto é justamente o produto vetorial entre ω e $\vec{r}'$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{75}$$

Em coordenadas esféricas, teremos

$$v = \omega r' \sin\theta, \tag{76}$$

logo,

$$K = \sigma\omega r' \sin\theta'. \tag{77}$$

Iremos omitir as direções aqui, pois já sabemos que no final $\vec{A}$ terá a mesma direção que $\hat{\phi}$ (direção da corrente). Bom, voltando à integral:

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{K}{r} da' \tag{78}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\sigma\omega r' \sin\theta'}{r} da'. \tag{79}$$

r, por sua vez, será a distância entre o elemento de integração e nosso ponto arbitrário no espaço. A este ponto, daremos uma posição r, ϕ, θ. Iremos considerar, sem perda de generalidade, $\phi = 0$. A simetria esférica fará com que esta seja uma decisão equivalente a tomar qualquer valor de ϕ. Logo, precisamos somente nos preocupar com as distâncias a seguir:

$$(x - x') = r\sin\theta\cos\phi - r'\sin\theta'\cos\phi' \tag{80}$$

$$(y - y') = r\sin\theta\sin\phi - r'\sin\theta'\sin\phi' \tag{81}$$

$$(z - z') = r\cos\theta - r'\cos\theta'. \tag{82}$$

Em nosso caso,

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = r\sin\theta\cos\phi - r'\sin\theta'\cos\phi' \tag{83}$$

Pela lei dos cossenos,

$$r^2 = r'^2 + r^2 - 2rr'\cos\alpha, \tag{84}$$

onde α é o ângulo entre os dois vetores.

ESQUEÇA ESTA PORRA

Melhor considerar o ponto em questão em cima do eixo $\hat{z}$, de maneira que o ângulo entre o ponto que observamos $\vec{A}$ e o elemento de integração em $\vec{r}'$ será o próprio θ'.

O potencial vetor é dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}}{r} da'. \tag{85}$$

A corrente superficial irá surgir devido ao movimento da densidade de cargas ao rotacionar. A definição de corrente superficial, creio eu, é

$$\vec{K} \equiv \sigma \vec{v}, \tag{86}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade da linha de corrente. A velocidade de cada ponto terá como módulo sua distância do eixo de rotação multiplicado por ω, e como direção terá a componente angular $\hat{\phi}$ em coordenadas cilíndricas. Isto é justamente o produto vetorial entre ω e $\vec{r}'$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{87}$$

Escolhemos isto pois, aparentemente, calcular o produto vetorial é menos complicado que descobrir qual é o ângulo entre os dois vetores. Bom, o produto vetorial será

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega \sin\psi & 0 & \omega \cos\psi \\ r' \sin\theta' \cos\phi' & r' \sin\theta' \sin\phi' & r' \cos\theta' \end{vmatrix} \\
&= R\omega \left[-\cos\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{x} + \left(\cos\psi \sin\theta' \cos\phi' - \sin\psi \cos\theta' \right) \hat{y} + \sin\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{z} \right],
\end{aligned} \tag{88}$$

pois todos elementos de integração estarão na superfície ($r' = R$).

Bom, a distância entre o ponto considerado e o elemento de integração será simplesmente a lei dos cossenos:

$$r = \sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}. \tag{89}$$

Como a integral será proporcional à velocidade em cada componente, e o denominador não tem nenhum termo em ϕ', vamos avaliar como ficará a integral de $\vec{v}$ em ϕ':

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} d\phi' = \int_0^{2\pi} R\omega \left[-\cos\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{x} + \left(\cos\psi \sin\theta' \cos\phi' - \sin\psi \cos\theta' \right) \hat{y} + \sin\psi \sin\theta' \sin\phi' \hat{z} \right] d\phi' \tag{90}$$

$$\begin{aligned}
&= R\omega \Bigg[-\cos\psi \sin\theta' \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \hat{x} + \left(\cos\psi \sin\theta' \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' - \sin\psi \cos\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \right) \hat{y} + \\
&\qquad + \sin\psi \sin\theta' \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' \hat{z} \Bigg].
\end{aligned} \tag{91}$$

Lembre-se de que as integrais em seno e cosseno em um período completo são zero. Logo, teremos

$$\int_0^{2\pi} \vec{v} d\phi' = 2\pi \sin\psi \cos\theta' \hat{y}. \tag{92}$$

Voltando para a integral original:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma}{4\pi} \int \frac{\vec{v}}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}} da' \tag{93}$$

$$= -\frac{\mu_0 \sigma 2\pi \sin\psi}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}} R^2 \sin\theta' d\theta' \tag{94}$$

$$= -\frac{\mu_0 \sigma \sin\psi R^2}{2} \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta' \sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta'}}. \tag{95}$$

Fazendo a mesma substituição do Griffiths ($u = \cos\theta'$):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \sigma \sin\psi R^2}{2} \int_{-1}^{1} \frac{u du}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rRu}}. \tag{96}$$

Outra substituição, $w = R^2 + r^2 - 2rRu$, $dw = -2rRdu \to du = -dw/2rR$, nos dará a resposta direta. Não vou calcular aqui, pois isto é um saco. Enfim,

$$x \tag{97}$$

9 Potencial vetor do solenoide infinito explorado anteriormente

Para resolver esta questão, é necessário um truque que relaciona a lei de Ampère com o potencial vetor:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{a}, \text{ (teorema de Gauss)} \tag{98}$$

$$= \int \vec{B} \cdot d\vec{a} \tag{99}$$

$$= \Phi_M, \tag{100}$$

onde Φ_M é o fluxo magnético através da superfície considerada.

Ora, percebemos que a expressão tem uma forma semelhante à lei de Ampère, só que teremos agora o fluxo magnético ao invés da corrente enclausurada. Bom, sabemos que o potencial vetor terá a mesma direção da corrente, então iremos considerar uma curva amperiana centrada no eixo $\hat{z}$, e de raio s. Se s for maior que R,

$$A 2\pi s = \Phi_M. \tag{101}$$

O campo magnético dentro do solenoide é constante, e vale

$$\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}, \tag{102}$$

logo, o fluxo será

$$\Phi_M = B \cdot A = (\mu_0 n I)(\pi s^2). \tag{103}$$

Assim,

$$A 2\pi s = \mu_0 n I \pi s^2 \tag{104}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 n I}{2} s \hat{\phi}. \tag{105}$$

Fora do cilindro, $\vec{B} = 0$, logo,

$$\vec{A} 2\pi s = \mu_0 n I \pi R^2 \hat{\phi} \tag{106}$$

$$= \mu_0 n I \frac{R^2}{s} \hat{\phi}. \tag{107}$$

10 Corrente provocada por dois solenoides longos

Vamos considerar dois solenoides longos e coaxiais, cada um percorrido por corrente em uma direção. Bom, a corrente é angular, então os campos magnéticos serão na direção $\hat{z}$, cada um em uma direção (positivo e negativo). Vamos considerar o loop exterior causando um campo em $\hat{z}$ positivo.

Fora dos dois solenoides, o campo será nulo, pois só existe campo magnético dentro dos solenoides. Entre o primeiro e o segundo solenoide, teremos o campo do solenoide exterior, que será

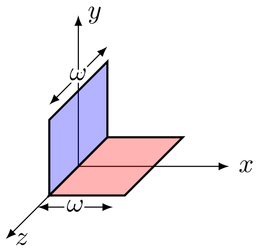
$$\vec{B} = \mu_0 n_1 I \hat{z}. \tag{108}$$

Caso adentremos os dois solenoides, teremos uma superposição dos campos magnéticos

$$\vec{B} = \mu_0 I (n_1 - n_2) \hat{z}. \tag{109}$$

11 Momento de dipolo magnético

Vamos calcular o momento de dipolo magnético de uma geometria de correntes demonstrado na figura a seguir:



O momento de dipolo magnético é definido como

$$\vec{m} \equiv I \int d\vec{a} = I\vec{a}. \tag{110}$$

Vamos separar agora os dois loops, o do plano xz é

$$\vec{m}_1 = I\omega^2 \hat{y}, \tag{111}$$

e no plano xy é

$$\vec{m}_2 = I\omega^2 \hat{z}. \tag{112}$$

A soma total do momento magnético será então

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 = I\omega^2 (\hat{y} + \hat{z}). \tag{113}$$

Muito fácil, não é? Tem nem graça.

12 Campo magnético de um plano infinito

Vamos considerar um plano infinito percorrido por uma densidade superficial de corrente uniforme em uma direção $\vec{K} = K\hat{x}$. Pela regra da mão direita, o campo deve estar na direção $-\hat{y}$ acima do plano e $\hat{y}$ abaixo do plano. A lei de Ampère nos diz que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}. \tag{114}$$

Pela simetria do problema, nossa curva amperiana será um retângulo, onde a densidade de corrente irá cruzar perpendicularmente o retângulo. Assim,

$$B(d)L - B(-d)L = \mu_0 KL \tag{115}$$

$$B(d)L + B(d)L = \mu_0 KL \tag{116}$$

$$B(d) = \frac{\mu_0 K}{2}. \tag{117}$$

Utilizando a lei de Ampère para o potencial vetor:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_M \tag{118}$$

$$AL = BLd \tag{119}$$

$$A = Bd \tag{120}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 K}{2} z\hat{x}. \tag{121}$$

Calculando o rotacional de $\vec{A}$ para ver se obtivemos o campo realmente:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z}\hat{y} = \frac{\mu_0 K}{2}\hat{y} = \vec{B}, \tag{122}$$

confirmando nossa expectativa.

13 Campo elétrico e magnético dentro de um solenoide infinito percorrido por corrente

Vamos considerar um solenoide infinito, com n voltas, percorrido centralmente por uma corrente não estacionária do tipo $I = I_0 \sin \omega t$. Sabendo da equação de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{123}$$

14 Potencial vetor do fio percorrido por corrente

Teremos que, pela lei de Ampère, fora do foi:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{124}$$

$$B 2\pi s = \mu_0 J \pi R^2 \tag{125}$$

$$B = \frac{\mu_0 J R^2}{2s}. \tag{126}$$

Já que $\vec{B}$ está na direção $\hat{\phi}$, $\vec{A}$ deve estar na direção $\hat{z}$. Nossa curva amperiana será um retângulo de dois lados paralelos ao eixo $\hat{z}$:

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \Phi_M \tag{127}$$

$$A(d_1)L - A(d_2)L = L\frac{\mu_0 J R^2}{2}\int_{d_1}^{d_2} \frac{ds}{s} \tag{128}$$

$$A(d_1) - A(d_2) = \frac{\mu_0 J R^2}{2} \ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right). \tag{129}$$

Dentro do fio:

$$B = \frac{\mu_0 J s}{2} \tag{130}$$

$$\tag{131}$$

15 Primeira questão do Jackson

Começando da expressão

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} dl' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}, \tag{132}$$

para a indução magnética no ponto P com coordenadas $\vec{x}$, produzido por um incremento de corrente Idl' em $\vec{x}'$, vamos mostrar explicitamente que para um loop fechado carregando uma corrente I a indução magnética em P é

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \nabla\Omega, \tag{133}$$

onde Ω é o ângulo sólido subentendido pelo loop no ponto P. Isto corresponde a um potencial escalar magnético de $\Phi_M = -\mu_0 I\Omega/4\pi$. A convenção de sinal para o ângulo sólido é tal que Ω é positivo se o ponto P vê o lado "interior" da superfície expandindo o loop, isto é