1 Rotação de estados no R^3

Uma das possíveis maneiras de atingir o estado desejado é fazer uma rotação de $\pi/2$ em torno de y e outra de ϕ em torno de z.

A matriz de rotação pode ser escrita como:

$$\mathcal{D}(\vec{R},\phi) = e^{-\frac{i\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}} = e^{-\frac{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\phi}{2}}. \tag{1}$$

Para nosso problema, podemos fazer

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}(\vec{z},\phi)\mathcal{D}(\vec{y},\pi/2)\,|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\sigma_z\phi}{2}}e^{-\frac{i\sigma_y\pi}{4}}\,|+\rangle. \tag{2}$$

Vamos avaliar quem é a exponencial das matrizes de Pauli. Sabemos que

$$\sigma_i^2 = I. \tag{3}$$

Desta forma, todas as potências pares na expansão em série da exponencial serão múltiplos da matriz identidade.

$$\begin{aligned}
e^{i\sigma_i\xi} &= \cos(\sigma_i\xi) + i\sin(\sigma_i\xi) \\
&= I + \frac{\sigma_i^2\xi^2}{2!} + \frac{\sigma_i^4\xi^4}{4!} + \cdots + i\left(\sigma_i\xi + \frac{\sigma_i^3\xi^3}{3!} + \frac{\sigma_i^5\xi^5}{5!}\cdots\right) \\
&= I + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + \cdots + i\sigma_i\left(\xi + \frac{\sigma_i^2\xi^3}{3!} + \frac{\sigma_i^4\xi^5}{5!}\cdots\right) \\
&= I + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^4}{4!} + \cdots + i\sigma_i\left(\xi + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^5}{5!}\cdots\right) \\
&= I\cos\xi + i\sigma_i\sin\xi,
\end{aligned} \tag{4}$$

e

$$e^{-i\sigma_i\xi} = I\cos\xi - i\sigma_i\sin\xi. \tag{5}$$

Assim,

$$e^{-\frac{i\sigma_y\pi}{4}}\,|+\rangle = \left(I\cos\frac{\pi}{4} - i\sigma_y\sin\frac{\pi}{4}\right)|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(I - i\sigma_y\right)|+\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|+\rangle + |-\rangle\right). \tag{6}$$

Agora, fazendo a rotação em ϕ em torno do eixo z:

$$e^{-\frac{i\sigma_z\phi}{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(I\cos\frac{\phi}{2} - i\sigma_z\sin\frac{\phi}{2}\right)\left(|+\rangle + |-\rangle\right) \tag{7}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(\cos\frac{\phi}{2} - i\sin\frac{\phi}{2}\right)|+\rangle + \left(\cos\frac{\phi}{2} + i\sin\frac{\phi}{2}\right)|-\rangle\right) \tag{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{-i\frac{\phi}{2}}\,|+\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}}\,|-\rangle\right). \tag{9}$$

2 Alterando as representações dos harmônicos esféricos

Seja $\psi_\alpha(x,y,z) = A(x+y+2z)e^{-\alpha r}$ nossa função de onda, podemos utilizar a separação de variáveis para escrever $\psi_\alpha(x,y,z) = \psi_\alpha(r)\psi_\alpha(\theta,\phi)$, podemos escrever a parte angular como

$$\psi_\alpha(\theta,\phi) = A_\Omega(\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\sin\theta + 2\cos\theta). \tag{10}$$

Levando em conta que $\psi_\alpha(\theta,\phi) = \langle\hat{n}|\alpha\rangle$, e sabendo que

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \qquad Y_1^{\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}, \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \tag{11}$$

podemos combinar os harmônicos esféricos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
Y_1^{-1} - Y_1^{+1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} + \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\left(e^{-i\phi} + e^{i\phi}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\left(2\cos\phi\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\cos\phi,
\end{aligned} \tag{12}$$

onde chegamos em

$$\sin\theta\cos\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{+1}\right), \tag{13}$$

e também é válido analisar

$$\begin{aligned}
Y_1^{-1} + Y_1^{+1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\left(e^{-i\phi} - e^{i\phi}\right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\left(-2i\sin\phi\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta\sin\phi, \qquad (14)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sin\theta\sin\phi = i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} + Y_1^{+1}\right). \tag{15}$$

Substituindo na expressão para a função de onda, teremos

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha(\theta,\phi) &= A_\Omega\left(\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{+1}\right) + i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} + Y_1^{+1}\right) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0\right) \qquad (16) \\
&= A_\Omega\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_1^{-1} - Y_1^{+1} + iY_1^{-1} + iY_1^{+1} + 2\sqrt{2}Y_1^0\right) \\
&= A_\Omega\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left((1+i)Y_1^{-1} + (i-1)Y_1^{+1} + 2\sqrt{2}Y_1^0\right), \qquad (17)
\end{aligned}$$

ou, em outra representação:

$$\langle\hat{n}\,|\,\alpha\rangle = A_\Omega\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left((1+i)\langle\hat{n}\,|\,1,-1\rangle + (i-1)\langle\hat{n}\,|\,1,1\rangle + 2\sqrt{2}\langle\hat{n}\,|\,1,0\rangle\right), \tag{18}$$

que nos leva a

$$|\alpha\rangle = A_\Omega\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left((1+i)\,|1,-1\rangle + (i-1)\,|1,1\rangle + 2\sqrt{2}\,|1,0\rangle\right). \tag{19}$$

Vamos agora calcular quanto vale a constante de normalização A_Ω:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha\,|\,\alpha\rangle &= (A_\Omega)^2\frac{2\pi}{3}\left((1+i)(1-i)\langle 1,-1\,|\,1,-1\rangle + (i-1)(-i-1)\langle 1,1\,|\,1,1\rangle + 8\langle 1,0\,|\,1,0\rangle\right) \\
1 &= (A_\Omega)^2\frac{2\pi}{3}\left((1+i)(1-i) + (i-1)(-i-1) + 8\right) \\
1 &= (A_\Omega)^2\frac{2\pi}{3}12,
\end{aligned}$$

chegando em

$$A_\Omega = \sqrt{\frac{1}{8\pi}}. \tag{20}$$

Vamos agora calcular as probabilidades de obtermos cada um dos autovalores de L_z, assim como seu valor esperado.

Incorporando a constante de normalização ao nosso estado, teremos que

$$|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{1}{12}}\left((1+i)\,|1,-1\rangle + (i-1)\,|1,1\rangle + 2\sqrt{2}\,|1,0\rangle\right). \tag{21}$$

A probabilidade de se obter cada autovalor é obtida simplesmente tomando o quadrado do coeficiente que acompanha cada autoestado correspondente. Logo:

$$+\hbar \to \frac{1}{6}, \tag{22}$$

$$0 \to \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \tag{23}$$

$$-\hbar \to \frac{1}{6}. \tag{24}$$

Destes resultados, é observado de cara que o valor esperado de L_z será nulo:

$$\langle L_z\rangle = +\hbar\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{2}{3} - \hbar\cdot\frac{1}{6} = 0. \tag{25}$$

3 Relação de comutação entre as componentes do momento angular

Calculemos então as relações de comutação para as componentes do momento angular, utilizando a definição de momento angular e as relações de comutação entre momentos e coordenadas.

A definição de momento angular a ser utilizada será $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$. Desta forma, a comutação entre a componente i e a componente j será:

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= [\epsilon_{ilm} x_l p_m, \epsilon_{jrs} x_r p_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs} [x_l p_m, x_r p_s] \\
&= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs} \left(x_l [p_m, x_r] p_s + x_l x_r [p_m, p_s] + [x_l, x_r] p_s p_m + x_r [x_l, p_s] p_m \right).
\end{aligned}
$$

Vamos relembrar as relações de comutação entre os x e p:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \tag{26}$$
$$[x_i, x_j] = 0, \tag{27}$$
$$[p_i, p_j] = 0. \tag{28}$$

Assim, nosso comutador original ficará como

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs} \left(x_l [p_m, x_r] p_s + x_r [x_l, p_s] p_m \right) \\
&= i\hbar\ \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs} \left(x_l p_s (-\delta_{mr}) + x_r p_m \delta_{ls} \right) \\
&= i\hbar \left(-\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\delta_{mr} x_l p_s + \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\delta_{ls} x_r p_m \right).
\end{aligned}
$$

Vamos fazer uso das propriedades dos deltas, filtrando suas componentes:

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\hbar \left(-\epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\delta_{mr} x_l p_s + \epsilon_{ilm}\epsilon_{jrs}\delta_{ls} x_r p_m \right) \\
&= i\hbar \left(-\epsilon_{ilr}\epsilon_{jrs} x_l p_s + \epsilon_{ism}\epsilon_{jrs} x_r p_m \right)
\end{aligned} \tag{29}
$$

Fazendo uso da identidade para o produto de tensores Levi-Civita,

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}, \tag{30}$$

teremos que nossos produtos de tensores Levi-Civita serão

$$\epsilon_{ilr}\epsilon_{jrs} = -\epsilon_{ril}\epsilon_{rjs} = -\left(\delta_{ij}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lj} \right), \tag{31}$$
$$\epsilon_{ism}\epsilon_{jrs} = -\epsilon_{sim}\epsilon_{sjr} = -\left(\delta_{ij}\delta_{mr} - \delta_{ir}\delta_{mj} \right). \tag{32}$$

Retornando à comutação:

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= i\hbar \left(-\epsilon_{ilr}\epsilon_{jrs} x_l p_s + \epsilon_{ism}\epsilon_{jrs} x_r p_m \right) \\
&= -i\hbar \left(-\left(\delta_{ij}\delta_{ls} - \delta_{is}\delta_{lj} \right) x_l p_s + \left(\delta_{ij}\delta_{mr} - \delta_{ir}\delta_{mj} \right) x_r p_m \right) \\
&= -i\hbar \left(\delta_{is}\delta_{lj} x_l p_s - \delta_{ij}\delta_{ls} x_l p_s + \delta_{ij}\delta_{mr} x_r p_m - \delta_{ir}\delta_{mj} x_r p_m \right).
\end{aligned} \tag{33}
$$

Reorganizando os termos:

$$
\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= -i\hbar \left(\delta_{is}\delta_{lj} x_l p_s - \delta_{ir}\delta_{mj} x_r p_m + \delta_{ij}\delta_{mr} x_r p_m - \delta_{ij}\delta_{ls} x_l p_s \right) \\
&= -i\hbar \left(x_j p_i - x_i p_j + \delta_{ij} x_r p_r - \delta_{ij} x_s p_s \right) \\
&= -i\hbar \left(x_j p_i - x_i p_j \right).
\end{aligned} \tag{34}
$$

Voltemos à definição de momento angular:

$$L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k = x_j p_k - x_k p_j. \tag{35}$$

Ora, então

$$x_j p_i - x_i p_j = -\left(x_i p_j - x_j p_i \right) = -\left(\epsilon_{ijk} x_i p_j \right) = -L_k, \tag{36}$$

o que nos leva a

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k. \tag{37}$$

4 Adição de momento angular orbital l e spin

4.1 Spin $1/2$

Primeiro de tudo, sabemos que a relação de recorrência é:

$$\sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 \,|\, j_1 j_2; j, m \pm 1\rangle = \\ \sqrt{(j_1 \mp m_1 + 1)(j_1 \pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 \,|\, j_1 j_2; j, m\rangle + \\ \sqrt{(j_2 \mp m_2 + 1)(j_2 \pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 \mp 1 \,|\, j_1 j_2; j, m\rangle, \tag{38}$$

onde a regra de seleção para o m agora é outra. Como os operadores escada J_- e J_+ foram utilizados para deduzir a relação de recorrência, os valores de m subiram ou desceram de uma unidade, de tal forma que agora temos $m_1 + m_2 = m \pm 1$.

Não vou me extender explicando, pois é desnecessário aqui, mas sabemos que os valores possíveis para cada uma das variáveis de nosso problema são:

$$|m_1| \leq j_1, \qquad |m_2| \leq j_2, \qquad -j \leq m_1 + m_2 \leq j. \tag{39}$$

Em nosso problema, temos

$$j_1 = l, \qquad m_1 = m_l, \\ j_2 = s = \frac{1}{2}, \qquad m_2 = m_s = \pm\frac{1}{2}, \tag{40}$$

além do limite para o j total, que nos leva a

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2, \tag{41}$$

ou, neste caso,

$$j = l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, \tag{42}$$

visto que l é inteiro.

Vamos seguir a sugestão do ***S A K U R A I*** e considerar primeiramente ~~bom dia~~ o caso $j = l + 1/2$. Começando com os valores dos m como $m_1 = m - 1/2$ e $m_2 = 1/2$, a relação de recorrência fica:

$$\sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \mp m\right)\left(l + \frac{1}{2} \pm m + 1\right)}\left\langle l, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\middle| l, \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}, m \pm 1\right\rangle = \\ \sqrt{\left(l \mp \left(m - \frac{1}{2}\right) + 1\right)\left(l \pm \left(m - \frac{1}{2}\right)\right)}\left\langle l, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2} \mp 1, \frac{1}{2}\middle| l, \frac{1}{2}; j, m\right\rangle + \\ \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)}\left\langle l, \frac{1}{2}; m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mp 1\middle| l, \frac{1}{2}; j, m\right\rangle. \tag{43}$$

Pegando o sinal de baixo, o último termo já zera de cara. Sakurai também omite os valores de j_1 e j_2 nos *brakets*, nos deixando com

$$\sqrt{\left(l + \frac{1}{2} + m\right)\left(l + \frac{1}{2} - m + 1\right)}\left\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\middle| l + \frac{1}{2}, m - 1\right\rangle = \\ \sqrt{\left(l + \left(m - \frac{1}{2}\right) + 1\right)\left(l - \left(m - \frac{1}{2}\right)\right)}\left\langle m - \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{2}\middle| l + \frac{1}{2}, m\right\rangle, \tag{44}$$

ou,

$$\sqrt{\left(l + \frac{1}{2} + m\right)\left(l + \frac{1}{2} - m + 1\right)}\left\langle m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\middle| l + \frac{1}{2}, m - 1\right\rangle = \\ \sqrt{\left(l + m + \frac{1}{2}\right)\left(l - m + \frac{1}{2}\right)}\left\langle m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\middle| l + \frac{1}{2}, m\right\rangle. \tag{45}$$

Sakurai, porém, não apresenta este resultado. Ao invés disto, nos é apresentado

$$\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+m\right)\left(l+\frac{1}{2}-m+1\right)}\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m-1\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l+m+\frac{1}{2}\right)\left(l-m+\frac{1}{2}\right)}\left\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m\right\rangle. \tag{46}$$

Se fizermos a transformação no *ket* (e na raiz quadrada do lado esquerdo) $m \to m+1$, o resultado sairá igual ao do Sakurai:

$$\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+(m+1)\right)\left(l+\frac{1}{2}-(m+1)+1\right)}\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},(m+1)-1\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l+(m+1)+\frac{1}{2}\right)\left(l-(m+1)+\frac{1}{2}\right)}\left\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},(m+1)\right\rangle, \tag{47}$$

ou,

$$\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}+m+1\right)\left(l+\frac{1}{2}-m\right)}\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l+m+\frac{1}{2}\right)\left(l-m+\frac{1}{2}\right)}\left\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m+1\right\rangle, \tag{48}$$

O porquê, eu não sei. Talvez com a operação do operador escada J_- o valor de m total cresça em 1, visto que agora a regra de seleção é $m_1+m_2=m\pm 1$. Sakurai menciona algo com "*move horizontally by one unit*", mas ao meu ver isto teria algo a ver com a recursão, e não com esta alteração. Enfim, se alguém souber, por favor, me explique.

Bola pra frente. Conseguimos então relacionar os dois produtos internos:

$$\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{\frac{\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{\left(l+m+\frac{3}{2}\right)}}\left\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m+1\right\rangle, \tag{49}$$

onde agora sim iremos utilizar o "*move horizontally by one unit*". Fazendo a mesma substituição anterior $(m \to m+1)$ **em toda a expressão**, teremos

$$\left\langle m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m+1\right\rangle = \sqrt{\frac{\left(l+m+\frac{3}{2}\right)}{\left(l+m+\frac{5}{2}\right)}}\left\langle m+\frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m+2\right\rangle. \tag{50}$$

Perceba que o produto interno no lado esquerdo desta equação aparece no lado direito da outra. Como m vai crescer de um em um, e iremos multiplicar raízes quadradas análogas à apresentada, teremos:

$$\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{\frac{\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{(2l+1)}}\left\langle l,\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}\right\rangle, \tag{51}$$

onde levamos m até seu valor máximo.

Bom, os *kets* correspondentes a $|m_1=l, m_2=1/2\rangle$ e $|j=l+1/2, m=l+1/2\rangle$ devem representar o mesmo estado, pois ambos correspondem ao máximo valor de m_1 e m_2 somados, não havendo nenhuma outra possibilidade para qualquer outra representação deste estado. Logo, iremos tomar o produto interno como

$$\langle m_1=l, m_2=1/2\,|\,j=l+1/2, m=l+1/2\rangle = 1. \tag{52}$$

Desta forma, obtemos nosso primeiro coeficiente de Clebsch-Gordan:

$$\left\langle m-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{\frac{\left(l+m+\frac{1}{2}\right)}{(2l+1)}}. \tag{53}$$

Agora vamos calcular como seria nosso resultado caso utilizássemos outro valor de m_2, numa tentativa de obter o valor do outro coeficiente. Testando agora o mesmo valor de j, $j=l+1/2$, $m_2=-1/2$ e m_1 como

$m_1 = m - 1/2$, a relação de recorrência fica:

$$\sqrt{\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\mp m\right)\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\pm m+1\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};\left(m-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\right)\middle|l,\frac{1}{2};\left(l+\frac{1}{2}\right),m\pm 1\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l\mp\left(m-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(l\pm\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};\left(m-\frac{1}{2}\right)\mp 1,\left(-\frac{1}{2}\right)\middle|l,\frac{1}{2};\left(l+\frac{1}{2}\right),m\right\rangle +$$
$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\mp\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(\frac{1}{2}\pm\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};\left(m-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\right)\mp 1\middle|l,\frac{1}{2};\left(l+\frac{1}{2}\right),m\right\rangle, \tag{54}$$

Com $m \to m-1$ e tomando o sinal de cima:

$$\sqrt{\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)-(m-1)\right)\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)+(m-1)+1\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};\left(m-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2}\right)\middle|l,\frac{1}{2};\left(l+\frac{1}{2}\right),(m-1)+1\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l-\left(m-\frac{1}{2}\right)+1\right)\left(l+\left(m-\frac{1}{2}\right)\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};\left(m-\frac{1}{2}\right)-1,\left(-\frac{1}{2}\right)\middle|l,\frac{1}{2};\left(l+\frac{1}{2}\right),(m-1)\right\rangle, \tag{55}$$

ou,

$$\sqrt{\left(l+\frac{1}{2}-m+1\right)\left(l+\frac{1}{2}+m-1+1\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\right\rangle =$$
$$\sqrt{\left(l-m+\frac{1}{2}+1\right)\left(l+m-\frac{1}{2}\right)}\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-1\right\rangle. \tag{56}$$

Bom, vamos organizar a expressão e tentar novamente uma recursão

$$\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})}{(l+m+\frac{1}{2})}}\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-1\right\rangle. \tag{57}$$

Baixando novamente o valor de m, de um em um, teremos:

$$\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-1\right\rangle = \sqrt{\frac{(l+m-\frac{3}{2})}{(l+m-\frac{1}{2})}}\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-2\right\rangle, \tag{58}$$

ou seja,

$$\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m\right\rangle = \sqrt{\frac{(l+m-\frac{1}{2})}{(l+m+\frac{1}{2})}}\sqrt{\frac{(l+m-\frac{3}{2})}{(l+m-\frac{1}{2})}}\left\langle l,\frac{1}{2};m-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}\middle|l,\frac{1}{2};l+\frac{1}{2},m-2\right\rangle. \tag{59}$$

Iterando até m atingir seu valor mínimo, teremos

4.2 Spin 1

Vamos com calma que agora o bicho pega.

Relembrando a relação de recorrência,

$$\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2 \,|\, j_1 j_2; j, m\pm 1\rangle =$$
$$\sqrt{(j_1\mp m_1+1)(j_1\pm m_1)}\langle j_1 j_2; m_1\mp 1, m_2 \,|\, j_1 j_2; j, m\rangle +$$
$$\sqrt{(j_2\mp m_2+1)(j_2\pm m_2)}\langle j_1 j_2; m_1 m_2\mp 1 \,|\, j_1 j_2; j, m\rangle, \tag{60}$$

vamos tentar proceder de forma análoga ao exemplo anterior. Considerando o caso $j = l+1$, vamos começar com os valores dos m como $m_1 = m-1$ e $m_2 = 1$, além dos j como $j_1 = l$ e $j_2 = 1$. A relação de recorrência fica então:

$$\sqrt{(l+1\mp m)(l+1\pm m+1)}\langle l,1; m-1,1 \,|\, l,1; l+1, m\pm 1\rangle =$$
$$\sqrt{(l\mp m-1+1)(l\pm m-1)}\langle l,1; m-1\mp 1,1 \,|\, l,1; l+1, m\rangle +$$
$$\sqrt{(1\mp 1+1)(1\pm 1)}\langle l,1; m-1,1\mp 1 \,|\, l,1; l+1, m\rangle, \tag{61}$$

e, fazendo a mesma substituição anterior:

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1\mp(m+1))(l+1\pm(m+1)+1)}\langle l,1;m-1,1\,|\,l,1;l+1,(m+1)\pm 1\rangle = \\ \sqrt{(l\mp m-1+1)(l\pm m-1)}\langle l,1;m-1\mp 1,1\,|\,l,1;l+1,(m+1)\rangle + \\ \sqrt{(1\mp 1+1)(1\pm 1)}\langle l,1;m-1,1\mp 1\,|\,l,1;l+1,(m+1)\rangle.\end{aligned} \tag{62}$$

Vamos repetir o mesmo esquema e considerar o sinal inferior, talvez seja inclusive por esta razão que peguemos o sinal inferior. Depois vale a pena tentar usar o sinal superior e/ou utilizar uma substituição diferente para ver no que dá. Bom,

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1+(m+1))(l+1-(m+1)+1)}\langle l,1;m-1,1\,|\,l,1;l+1,(m+1)-1\rangle = \\ \sqrt{(l+m-1+1)(l-(m-1))}\langle l,1;m-1+1,1\,|\,l,1;l+1,(m+1)\rangle + \\ \sqrt{(1+1+1)(1-1)}\langle l,1;m-1,1+1\,|\,l,1;l+1,(m+1)\rangle,\end{aligned} \tag{63}$$

ou,

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+m+2)(l+1-m)}\langle l,1;m-1,1\,|\,l,1;l+1,m\rangle = \\ \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\langle l,1;m,1\,|\,l,1;l+1,m+1\rangle,\end{aligned} \tag{64}$$

o que nos leva a

$$\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)}{(l+m+2)}}\langle m,1\,|\,l+1,m+1\rangle. \tag{65}$$

Moving horizontally by one unit $(m \to m+1)$:

$$\langle m,1\,|\,l+1,m+1\rangle = \sqrt{\frac{(l+m+1)}{(l+m+3)}}\langle m+1,1\,|\,l+1,m+2\rangle. \tag{66}$$

Incrivelmente, o produto interno no lado esquerdo da equação anterior está também presente na relação original.

$$\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)}{(l+m+2)}}\sqrt{\frac{(l+m+1)}{(l+m+3)}}\langle m+1,1\,|\,l+1,m+2\rangle. \tag{67}$$

Iterando até chegarmos em $m=l$:

$$\begin{aligned}\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle &= \sqrt{\frac{(l+m)}{(l+m+2)}}\sqrt{\frac{(l+m+1)}{(l+m+3)}}\cdots\sqrt{\frac{2l}{(2l+1+1)}}\langle l,1\,|\,l+1,l+1\rangle, \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)}{(l+m+2)}\frac{(l+m+1)}{(l+m+3)}\cdots\frac{2l}{(2l+2)}}\langle l,1\,|\,l+1,l+1\rangle, \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)}{\cancel{(l+m+2)}}\frac{(l+m+1)}{\cancel{(l+m+3)}}\cdots\frac{\cancel{(2l-1)}}{(2l+1)}\frac{\cancel{2l}}{(2l+2)}}\langle l,1\,|\,l+1,l+1\rangle, \\ &= \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}}\langle l,1\,|\,l+1,l+1\rangle.\end{aligned} \tag{68}$$

Com um argumento análogo ao anterior, $\langle l,1 \mid l+1,l+1\rangle = 1$, e temos assim que o primeiro coeficiente, correspondente a $j=l+1$ e $m_1=1$, é

$$\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}}. \tag{69}$$

Falta agora resolver para $m_1=0$ e $m_1=-1$. Para $m_1=0$, iremos utilizar a mesma relação de recorrência, porém, ao invés de utilizarmos a recorrência com o J_-, iremos utilizar com o J_+:

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1\mp(m-1))(l+1\pm(m-1)+1)}\langle l,1;m-1,1\,|\,l,1;l+1,(m-1)\pm 1\rangle = \\ \sqrt{(l\mp m-1+1)(l\pm m-1)}\langle l,1;m-1\mp 1,1\,|\,l,1;l+1,(m-1)\rangle + \\ \sqrt{(1\mp 1+1)(1\pm 1)}\langle l,1;m-1,1\mp 1\,|\,l,1;l+1,(m-1)\rangle.\end{aligned} \tag{70}$$

Vamos considerar o sinal superior desta vez:

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1-(m-1))(l+1+(m-1)+1)}\langle l,1;m-1,1\,|\,l,1;l+1,(m-1)+1\rangle = \\ \sqrt{(l-m-1+1)(l+m-1)}\langle l,1;m-1-1,1\,|\,l,1;l+1,(m-1)\rangle + \\ \sqrt{(1-1+1)(1+1)}\langle l,1;m-1,1-1\,|\,l,1;l+1,(m-1)\rangle,\end{aligned} \tag{71}$$

o que ficará como

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+2-m)(l+1+m)}\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle = \\ \sqrt{(l-m)(l+m-1)}\langle m-2,1\,|\,l+1,m-1\rangle + \\ \sqrt{2}\langle m-1,0\,|\,l+1,m-1\rangle.\end{aligned} \tag{72}$$

Mas lembremos que

$$\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle = \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}}, \tag{73}$$

então

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+2-m)(l+1+m)}\sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} = \\ \sqrt{(l-m)(l+m-1)}\langle m-2,1\,|\,l+1,m-1\rangle + \sqrt{2}\langle m-1,0\,|\,l+1,m-1\rangle.\end{aligned} \tag{74}$$

Com a substituição $m \to m+1$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1-m)(l+2+m)}\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+2)}} = \\ \sqrt{(l-m-1)(l+m)}\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle + \sqrt{2}\langle m,0\,|\,l+1,m\rangle,\end{aligned} \tag{75}$$

substituindo novamente:

$$\begin{aligned}\sqrt{(l+1-m)(l+2+m)}\sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+2)}} = \\ \sqrt{(l-m-1)(l+m)}\langle m-1,1\,|\,l+1,m\rangle + \sqrt{2}\langle m,0\,|\,l+1,m\rangle,\end{aligned} \tag{76}$$