Práctica 2

Pedro Bonilla Nadal
Johanna Capote Robayna
Guillermo Galindo Ortuño

Ejercicio 5. Calcula el orden de precisión con respecto a h de las siguiente fórmulas para la aproximación numérica de $f'(c)$:

a) $f'(c) \simeq \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18f(c+h) - 9f(c+2h) + 2f(c+3h))$

solución
<u>orden 1:</u>

$f(c{+}h) = f(c){+}hf'(\xi)$; $f(c{+}2h) = f(c){+}2hf'(\xi)$; $f'(c{+}3h) = f(c){+}3hf'(\xi)$

$$f'(c) = \frac{1}{6h}(-11f(c){+}18[f(c){+}hf'(\xi)]{-}9[f(c){+}2hf'(\xi)]{+}2[f(c){+}3hf'(\xi)]) =$$

$$= \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18f(c) - 9f(c) + 2f(c) + 18hf'(\xi) - 18hf'(\xi) + 6hf'(\xi)) =$$

$$= \frac{1}{6h}(6hf'(c)) = f'(c)$$

<u>orden 2:</u>

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi)$$

$$f(c+2h) = f(c) + 2hf'(c) + \frac{4h^2}{2!}f''(\xi)$$

$$f'(c+3h) = f(c) + 3hf'(c) + \frac{9h^2}{2!}f''(\xi)$$

$$f'(c) = \frac{1}{6h}(-11f(c){+}18[f(c){+}hf'(c){+}\frac{h^2}{2!}f''(\xi)]{-}9[f(c){+}2hf'(c){+}\frac{4h^2}{2!}f''(\xi)]+$$

$$+2[f(c)+3hf'(c)+\frac{9h^2}{2!}f''(\xi)]) = \frac{1}{6h}(6hf'(c)+f''(\xi)[\frac{18h^2}{4} - 9h^2 + \frac{18h^2}{4}]) =$$

$$\frac{1}{6h}(6hf'(c)+f''(\xi)(\frac{18h^2}{2}+9h^2))=f'(c)$$

<u>orden 3:</u>

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{2!}f''(c)+\frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f(c+2h)=f(c)+2hf'(c)+\frac{4h^2}{2!}f''(c)+\frac{8h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f'(c+3h)=f(c)+3hf'(c)+\frac{9h^2}{2!}f''(c)+\frac{27h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$f'(c)=\frac{1}{6h}(6hf'(c)+f'''(\xi)[\frac{18h^3}{3!}-\frac{72h^3}{3!}+\frac{54h^3}{3!}])=\frac{1}{6h}(6hf'(c)+f'''(\xi)[3h^3-12h^3+9h^3])=f'(c)$

<u>orden 4:</u>

$$f(c+h)=f(c)+hf'(c)+\frac{h^2}{2!}f''(c)+\frac{h^3}{3!}f'''(c)+\frac{h^4}{4!}f^v(\xi)$$

$$f(c+2h)=f(c)+2hf'(c)+\frac{4h^2}{2!}f''(c)+\frac{8h^3}{3!}f'''(c)+\frac{16h^4}{4!}f^v(\xi)$$

$$f'(c+3h)=f(c)+3hf'(c)+\frac{9h^2}{2!}f''(c)+\frac{27h^3}{3!}f'''(c)+\frac{81h^4}{4!}f^v(\xi)$$

$f'(c)=\frac{1}{6h}(6hf'(c)+f^v(\xi)[\frac{18h^4}{4!}-\frac{144h^4}{4!}+\frac{162h^4}{4!}])=\frac{1}{6h}(6hf'(c)+f^v(\xi)\frac{36h^4}{24})\neq f'(c)$

Ejercicio 13. Sea

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i),$$

una fórmula de Newton-Cotes. Demuestra que:

- Si n es par: $\alpha_{n/2-i}=\alpha_{n/2+i}$ con $i=0,...,\frac{n}{2}$
- Si n es impar: $\alpha_i=\alpha_{n-i}$ con $i=0,...,\frac{n-1}{2}$

Solución.

- Sabemos que $\alpha_i=\int_a^b l_i(x)dx$ con $l_i=\prod_{j=0\ j\neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

  Además, podemos escribir los x_i como $x_i=x_{n/2}+h(i-n/2)$, entonces:

$$x_{n/2-i}=x_{n/2}+h(n/2-i-n/2)=x_{n/2}-hi$$

$$x_{n/2+i} = x_{n/2} + h(n/2 + i - n/2) = x_{n/2} + hi$$

No es dificil comprobar tampoco que :

$$x_0 - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_n$$

$$x_1 - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_0$$

Entonces se comprueba que $\prod_{j=0\ j\neq n/2-i}^{n} |\frac{1}{(x_i-x_j)}| = \prod_{j=0\ j\neq n/2+i}^{n} |\frac{1}{(x_i-x_j)}|$. Además, podemos ver que también son iguales en signo, pues cada uno tendrá tantos nodos positivos como el otro negativos, y al ser n par el productorio es de longitud par. Por todo esto si uno tiene impares negativos el otro tendrá n-impares negativos, es decir, impares. Como esto se cumple de manera analoga para el caso par, podemos deducir que tienen el mismo signo.

Consideremos entonces si:

$$\int_a^b \prod_{j=0\ j\neq n/2-i}^{n} (x - x_j)dx = \int_a^b \prod_{j=0\ j\neq n/2+i}^{n} (x - x_j)dx$$

O de manera equivalente:

$$\int_a^b (x - x_0)...(x - x_{n/2-i-1})(x - x_{n/2-i+1})...(x - x_n)dx = \tag{1}$$

$$\int_a^b (x - x_0)...(x - x_{n/2+i-1})(x - x_{n/2+i+1})...(x - x_n)dx \tag{2}$$

Para solucionar esto haremos un cambio de variable que será la simetría respecto el punto medio en la integral (2) y después usando que $x_i - x_{n/2} = x_{n/2} - x_{n-i}$:

$$\int_b^a -(2x_{n/2}-x-x_0)...(2x_{n/2}-x-x_{n/2+i-1})(2x_{n/2}-x-x_{n/2+i+1})...(2x_{n/2}-x-x_n) =$$

$$\int_b^a -(x_{n/2}-x+x_{n/2}-x_0)...(x_{n/2}-x+x_{n/2}-x_{n/2+i-1})(x_{n/2}-x+x_{n/2}-x_{n/2+i+1})...(x_{n/2}-x+x_{n/2}-x$$

Ahora, por estar los puntos uniformemente distribuidos, sabemos que:

$$x_{n/2} - x_{n-i} = x_{0+i} - x_{n/2}$$

Por tanto, aplicándolo sobre nuestra integral:

$$\int_b^a -(x_{n/2}-x+x_n-x_{n/2})...(x_{n/2}-x+x_{n/2-i+1}-x_{n/2})(x_{n/2}-x+x_{n/2-1-1}-x_{n/2})...(x_{n/2}-x+x_0-x_n$$

$$\int_a^b (x_n-x)(x_{n-1}-x)...(x_{n-(n/2+i-1)}-x)(x_{n-(n/2+i+1)}-x)...(x_0-x) =$$

$$\int_a^b (x_n - x)(x_{n-1} - x)...(x_{n/2-i+1} - x)(x_{n/2-i-1)} - x)...(x_0 - x)$$

Que es (1), considerando igualdad en el signo al haber pares polinomios
.

- De manera analoga, comprobamos primero que:

$$x_0 - x_i = x_{n-i} - x_n$$

$$x_1 - x_i = x_{n-i} - x_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_i = x_{n-i} - x_0$$

Y por lo tanto tenemos el mismo valor absoluto en el denominador de cadas uno de nuestras interpolaciones l_i,l_{n-i} pero con signo opuesto.

Entonces tenemos que comprobar que la integrales (3), (4) nos salen iguales en valor absoluto, pero con signo opuesto

$$\int_a^b (x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)dx = \tag{3}$$

$$\int_a^b (x - x_0)...(x - x_{n-i-1})(x - x_{n-i+1})...(x - x_n)dx \tag{4}$$

Y realizando en 4 el cambio utilizado anteriormente nos queda:

$$\int_a^b (x_n - x)...(x_{i+1} - x)(x_{i-1} - x)...(x_0 - x)dx$$

Que de manera obvia tendrá el mismo valor absoluto, pero al haber impares factores, signo opuesto.

Ejercicio 20.