

## Práctica 2

Pedro Bonilla Nadal  
Johanna Capote Robayna  
Guillermo Galindo Ortuño

**Ejercicio 5.** Calcula el orden de precisión con respecto a  $h$  de las siguiente fórmulas para la aproximación numérica de  $f'(c)$ :

a)  $f'(c) \simeq \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18f(c+h) - 9f(c+2h) + 2f(c+3h))$

**solución**

orden 1:

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + hf'(\xi) ; f(c+2h) = f(c) + 2hf'(\xi) ; f'(c+3h) = f(c) + 3hf'(\xi) \\ f'(c) &= \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18[f(c) + hf'(\xi)] - 9[f(c) + 2hf'(\xi)] + 2[f(c) + 3hf'(\xi)]) = \\ &= \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18f(c) - 9f(c) + 2f(c) + 18hf'(\xi) - 18hf'(\xi) + 6hf'(\xi)) = \\ &= \frac{1}{6h}(6hf'(\xi)) = f'(c) \end{aligned}$$

orden 2:

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi) \\ f(c+2h) &= f(c) + 2hf'(c) + \frac{4h^2}{2!}f''(\xi) \\ f'(c+3h) &= f(c) + 3hf'(c) + \frac{9h^2}{2!}f''(\xi) \\ f'(c) &= \frac{1}{6h}(-11f(c) + 18[f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi)] - 9[f(c) + 2hf'(c) + \frac{4h^2}{2!}f''(\xi)] + \\ &+ 2[f(c) + 3hf'(c) + \frac{9h^2}{2!}f''(\xi)]) = \frac{1}{6h}(6hf'(c) + f''(\xi)[\frac{18h^2}{4} - 9h^2 + \frac{18h^2}{4}]) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6h}(6hf'(c) + f''(\xi)(\frac{18h^2}{2} + 9h^2)) = f'(c)$$

orden 3:

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f(c+2h) = f(c) + 2hf'(c) + \frac{4h^2}{2!}f''(c) + \frac{8h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f'(c+3h) = f(c) + 3hf'(c) + \frac{9h^2}{2!}f''(c) + \frac{27h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f'(c) = \frac{1}{6h}(6hf'(c) + f'''(\xi)[\frac{18h^3}{3!} - \frac{72h^3}{3!} + \frac{54h^3}{3!}]) = \frac{1}{6h}(6hf'(c) + f'''(\xi)[3h^3 - 12h^3 + 9h^3]) = f'(c)$$

orden 4:

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \frac{h^3}{3!}f'''(c) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$f(c+2h) = f(c) + 2hf'(c) + \frac{4h^2}{2!}f''(c) + \frac{8h^3}{3!}f'''(c) + \frac{16h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$f'(c+3h) = f(c) + 3hf'(c) + \frac{9h^2}{2!}f''(c) + \frac{27h^3}{3!}f'''(c) + \frac{81h^4}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

$$f'(c) = \frac{1}{6h}(6hf'(c) + f^{(4)}(\xi)[\frac{18h^4}{4!} - \frac{144h^4}{4!} + \frac{162h^4}{4!}]) = \frac{1}{6h}(6hf'(c) + f^{(4)}(\xi)\frac{36h^4}{24}) \neq f'(c)$$

**Ejercicio 13.** Sea

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i),$$

una fórmula de Newton-Cotes. Demuestra que:

- Si  $n$  es par:  $\alpha_{n/2-i} = \alpha_{n/2+i}$  con  $i = 0, \dots, \frac{n}{2}$
- Si  $n$  es impar:  $\alpha_i = \alpha_{n-i}$  con  $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$

Solución.

- Sabemos que  $\alpha_i = \int_a^b l_i(x)dx$  con  $l_i = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

Además, podemos escribir los  $x_i$  como  $x_i = x_{n/2} + h(i - n/2)$ , entonces:

$$x_{n/2-i} = x_{n/2} + h(n/2 - i - n/2) = x_{n/2} - hi$$

$$x_{n/2+i} = x_{n/2} + h(n/2 + i - n/2) = x_{n/2} + hi$$

No es difícil comprobar tampoco que :

$$x_0 - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_n$$

$$x_1 - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n/2-i} = x_{n/2+i} - x_0$$

Entonces se comprueba que  $\prod_{j=0}^n \prod_{j \neq n/2-i} \left| \frac{1}{(x_i - x_j)} \right| = \prod_{j=0}^n \prod_{j \neq n/2+i} \left| \frac{1}{(x_i - x_j)} \right|$ . Además, podemos ver que también son iguales en signo, pues cada uno tendrá tantos nodos positivos como el otro negativos, y al ser  $n$  par el productorio es de longitud par. Por todo esto si uno tiene impares negativos el otro tendrá n-impares negativos, es decir, impares. Como esto se cumple de manera analoga para el caso par, podemos deducir que tienen el mismo signo.

Consideremos entonces si:

$$\int_a^b \prod_{j=0}^n \prod_{j \neq n/2-i} (x - x_j) dx = \int_a^b \prod_{j=0}^n \prod_{j \neq n/2+i} (x - x_j) dx$$

O de manera equivalente:

$$\int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_{n/2-i-1}) (x - x_{n/2-i+1}) \dots (x - x_n) dx = \quad (1)$$

$$\int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_{n/2+i-1}) (x - x_{n/2+i+1}) \dots (x - x_n) dx \quad (2)$$

Para solucionar esto haremos un cambio de variable que será la simetría respecto el punto medio en la integral (2) y después usando que  $x_i - x_{n/2} = x_{n/2} - x_{n-i}$  :

$$\int_b^a -(2x_{n/2}-x-x_0) \dots (2x_{n/2}-x-x_{n/2+i-1}) (2x_{n/2}-x-x_{n/2+i+1}) \dots (2x_{n/2}-x-x_n) =$$

$$\int_a^b (x_n - x)(x_{n-1} - x) \dots (x_{n-(n/2+i-1)} - x)(x_{n-(n/2+i+1)} - x) \dots (x_0 - x) =$$

$$\int_a^b (x_n - x)(x_{n-1} - x) \dots (x_{n/2-i+1} - x)(x_{n/2-i-1} - x) \dots (x_0 - x)$$

Que es (1), considerando igualdad en el signo al haber pares polinomios .

- De manera analoga, comprobamos primero que:

$$x_0 - x_i = x_{n-i} - x_n$$

$$x_1 - x_i = x_{n-i} - x_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_i = x_{n-i} - x_0$$

Y por lo tanto tenemos el mismo valor absoluto en el denominador de cada uno de nuestras interpolaciones  $l_i, l_{n-i}$  pero con signo opuesto.

Entonces tenemos que comprobar que la integrales (3), (4) nos salen iguales en valor absoluto, pero con signo opuesto

$$\int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) dx = \quad (3)$$

$$\int_a^b (x - x_0) \dots (x - x_{n-i-1})(x - x_{n-i+1}) \dots (x - x_n) dx \quad (4)$$

Y realizando en 4 el cambio utilizado anteriormente nos queda:

$$\int_a^b (x_n - x) \dots (x_{i+1} - x)(x_{i-1} - x) \dots (x_0 - x) dx$$

Que de manera obvia tendrá el mismo valor absoluto, pero al haber impares factores, signo opuesto.

**Ejercicio 20.**