

Práctica 1

Pedro Bonilla Nadal
Johanna Capote Robayna
Guillermo Galindo Ortuño

Ejercicio 1. Demuestra que la ecuación $x^3 + 4x^2 = 10$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 2]$. Aproxima dicha raíz con el método de bisección con un error menor que 10^{-5} . ¿Cuántas iteraciones serán necesarias para conseguir un error menor que 10^{-8} ?

Solución.

Para demostrar la existencia de esa solución nos basta con utilizar el teorema de Bolzano, ya que, como la función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ es continua de manera evidente, y $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$, entonces existe un c en el intervalo $(1, 2)$ tal que $f(c) = 0$.

Ahora, para demostrar la unicidad estudiaremos la derivada de dicha función (es derivable en todo \mathbb{R}). Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 8x$, por tanto, es evidente que esa función no se anula en el intervalo $(1, 2)$, luego $f(x)$ es estrictamente monótona en ese intervalo y solamente puede tener una raíz.

Ahora, utilizando el programa para calcular la aproximación obtenida por el método de bisección que hemos diseñado tenemos que la raíz es: 1,36522674.

Supuesto que x^* es la raíz buscada, que x_n es la aproximación n -ésima, y que ϵ es el error máximo aceptable sabemos que:

$$|x_n - x^*| < \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

Por tanto, despejando n de

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} = \epsilon$$

nos aseguramos que el error sea el deseado. Así, tras operar un poco, es suficiente con:

$$n \geq \log_2\left(\frac{b - a}{\epsilon}\right) - 1$$

Sustituyendo en nuestro caso particular tenemos que es suficiente con $n \geq 15$

Ejercicio 7. Se considera la ecuación $x + \log x = 0$

- a) Prueba que dicha ecuación posee una única solución.
- b) Sea $a \in (0, \frac{1}{2})$. Prueba que si $x_0 \in [a, 1]$ en método de Newton-Raphson es convergente.

Solución.

- a) Primero vamos a probar la unicidad:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que es inyectiva por lo tanto la función a cada x solo le asigna un único valor.

Veamos su existencia por Bolzano:

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - 2,302585093 = -2,202585093 < 0$$

$$f(e) = 2 > 0$$

Por el teorema de Bolzano sabemos que $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$

- b) Para probar que $f(x) = x + \ln x$ es convergente tenemos que demostrar que:

- i) $f(a) \cdot f(1) < 0$
- ii) $\forall x \in [a, 1], f'(x) \neq 0$
- iii) $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, 1]$

i)

$$f(a) \cdot f(1) = f(a) \cdot 1 = f(a)$$

$$f(a) = a + \ln a < 0, \forall a \in (0, \frac{1}{2})$$

ii)

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, 1]$$

iii)

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x) < 0, \forall x \in [a, 1]$$

Ejercicio 16. Demuestra que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2} - x + \frac{7}{24} &= 0 \\ xy - y + \frac{1}{9} &= 0 \end{cases}$$

tiene una única solución en el intervalo $[0, 0,4] \times [0, 0,4]$. Calcula una aproximación de la solución en el intervalo anterior mediante 4 iteraciones del método de Newton partiendo de $(0,0)$.

Solución.

Para demostrar que existe una única solución utilizaremos el teorema de convergencia global. Para ello, transformaremos nuestro sistema en una ecuación de punto fijo, definida en un conjunto cerrado y acotado, que en nuestro caso es $D = [0, 0,4] \times [0, 0,4]$

$$\begin{cases} \frac{x^2 y^2}{2} - x + \frac{7}{24} &= 0 \\ xy - y + \frac{1}{9} &= 0 \end{cases} \longrightarrow g(x, y) = \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{7}{24}, xy + \frac{1}{9} \right)$$

Una vez realiza esta transformación, necesitaremos varias condiciones para poder aplicar el teorema.

- $g(x) \in D \forall x \in D$

Cada componente de g es positiva, por lo que ambas son superiores que 0 siempre. Ahora, es evidente que ambas alcanzan su máximo en el punto $0,4$, con $g_1(0, 4) = 0,304\dots$ y $g_2(0,4) = 0,27$, luego la condición se cumple.

- g es contractiva

Para demostrar que g es contractiva utilizaremos un resultado de clase que afirma que si D es cerrado, acotado y convexo (en nuestro caso lo es) y «“HEAD $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase 1 y existe un L tal que $\|Jg(x)\| < L$ para todo x en D , entonces g es contractiva.

===== $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase 1 y existe un L tal que $\|Jg(x)\| \leq L < 1$ para todo x en D , entonces g es contractiva.

”»¿1b4442b6b68ead763cb546f76d982f2bb0abf03 Podríamos utilizar cualquier norma, pero por comodidad utilizaremos la norma del máximo.

$$Jg(x) = \begin{pmatrix} y^2x & x^2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Y en nuestro intervalo $\|Jg(x)\| \leq 0,8 < 1$ por lo que es contractiva y por lo tanto tiene solución única.