Asignatura: MÉTODOS NUMÉRICOS II – Curso: 2017–2018
Relación de problemas 1: Resolución numérica de ecuaciones y sistemas no lineales

---

1. Demuestra que la ecuación $x^3 + 4x^2 = 10$ tiene una única solución en el intervalo $[1, 2]$. Aproxima dicha raíz con el método de bisección con un error menor que 10^{-5}. ¿Cuántas iteraciones serán necesarias para conseguir un error menor que 10^{-8}?

2. Encuentra una aproximación de la raíz cúbica de 52 con un error menor que 10^{-8} mediante el algoritmo de bisección y de regula-falsi, respectivamente, y compara el número de iteraciones que has tenido que realizar en cada caso.

3. Encuentra una aproximación de las soluciones de las siguientes ecuaciones por el método de Newton-Raphson con una tolerancia (diferencia entre dos aproximaciones sucesivas) de 10^{-7}, partiendo de un valor inicial x_0, próximo a cada una de ellas. Justifica teóricamente que la elección de x_0 es adecuada.

    a) $3x = 2 + x^2 - e^x$

    b) $x^2 + 10 \cos x + x = 0$.

4. Para la función $f(x) = 3x^2 + e^x - 2$,

    a) Encuentra, mediante el método de bisección y el método de regula falsi una aproximación de la raíz en $[0, 1]$ con una tolerancia (diferencia entre dos aproximaciones sucesivas) de 10^{-5} y determina el número de iteraciones realizadas en cada caso.

    b) Encuentra, mediante los métodos de la secante y Newton-Raphson, una aproximación de la raíz en [0,1] con una tolerancia de 10^{-5}, partiendo de $x_0 = 0$, y determina el número de iteraciones realizadas en cada caso.

5. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2\, 2^{-x} + 3x\, 4^{-x} - 8^{-x}$.

    a) Utiliza el método de Newton-Raphson para calcular la solución de $f(x) = 0$ en [0,1], fijando una tolerancia máxima (diferencia entre dos aproximaciones sucesivas).

    b) Analiza la convergencia de las iteraciones y explica por qué no es cuadrática.

    c) Repite los cálculos utilizando como criterio de parada el residuo. Indica qué resultado es más preciso y explica la razón.

6. En el método de Newton-Raphson x_{n+1} se obtiene como la raíz del polinomio de Taylor de grado 1 de f en x_n. El llamado método de Euler consiste en aproximar f por el polinomio de Taylor de grado 2 en x_n y tomar como x_{n+1} una de las raíces de dicha parábola. Se pide:

    a) Escribe la expresión de las raíces de dicha parábola.

b) Estudia con cual de los dos signos en la expresión de las raíces es conveniente quedarse.

c) Comprueba que para la elección realizada el método puede escribirse como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2\frac{f(x_n)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}}} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

d) Aplica el método a la función del ejercicio 4 y analiza qué puedes decir a partir de los resultados numéricos de su convergencia en relación al método de Newton-Raphson.

e) Prueba que para raices simples y funciones f suficientemente regulares, el método de Euler tiene orden de convergencia 3.

7. Se considera la ecuación $x + \log x = 0$.

   a) Prueba que dicha ecuación posee una única solución.

   b) Sea $a \in (0, 1/2)$. Prueba que si $x_0 \in [a, 1]$ el método de Newton-Raphson es convergente.

8. Estudia el comportamiento de un método de iteración funcional con punto fijo $x^\star$ y $|g'(x^\star)| = 1$. Para ello:

   a) Comprueba que $x^\star = 0$ es un punto fijo de las funciones $g_1(x) = \operatorname{sen} x$ y $g_2(x) = \tan x$ y que $|g_1'(0)| = |g_2'(0)| = 1$.

   b) Escribe el valor de las 5 primeras iteraciones de punto fijo para ambas funciones partiendo de un valor x_0 próximo a 0. Analiza los resultados.

   c) Prueba que si un método de iteración funcional con punto fijo $x^\star$ y $|g'(x^\star)| = 1$ es convergente entonces cada error es asintóticamente de la misma magnitud que el anterior. ¿Qué podemos decir en ese caso de la convergencia del método?

9. Un estudiante quiere obtener un elevado número de cifras decimales del número e. Para ello observa que e es solución de la ecuación $1 - \log x = 0$ y propone para resolverla los siguientes métodos iterativos:

   - $x_{n+1} = 1 - \log x_n$.
   - $x_{n+1} = x_n + 1 - \log x_n$.
   - $x_{n+1} = x_n - (1 - \log x_n)$.
   - $x_{n+1} = x_n + (1 - \log x_n)/3$.

   a) Analiza si cada uno de los métodos anteriores le sirve para sus propósitos.

   b) Para aquellos métodos que sean convergentes, partiendo de una adecuada aproximación inicial, calcula
   $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - e}{x_n - e},$$
   e indica cual converge más rápidamente.

10. Considera la función $g(x) = \lambda x(1-x)$, con $\lambda \in [0,4]$.

   a) Demuestra que $g([0,1]) \subset [0,1]$.

   b) Calcula los puntos fijos de la función en $[0,1]$ en función de λ.

   c) Considera la sucesión de iteraciones $x_{n+1} = g(x_n)$, $n = 0,1,\ldots$ y analiza la convergencia de dicha sucesión a los puntos fijos de g, en función de λ.

11. Demuestra que la función $f(x) = x^3+4x^2-10$ tiene una única raíz real $x^\star$. Además:

   a) Comprueba que para calcular una aproximación de $x^\star$ podemos utilizar las iteraciones de punto fijo dadas por

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3+4x_n^2+10}{3x_n^2+8x_n}, \quad n \geq 0,$$

   partiendo de un valor x_0 fijado adecuado.

   b) Estudia la convergencia de las aproximaciones a $x^\star$.

12. Queremos obtener un método iterativo con convergencia al menos cúbica para aproximar $\sqrt{k}$, con $k > 0$. Para ello:

   a) Prueba que los siguientes métodos de iteración de punto fijo, con x_0 apropiado, tienen convergencia local de orden 2:

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{x_n^2+k}{2x_n}$$

$$x_{n+1} = g_2(x_n) = \frac{x_n(3k-x_n^2)}{2k}$$

   b) Encuentra, si existen, constantes α, β de forma que el método

$$x_{n+1} = \alpha g_1(x_n) + \beta g_2(x_n), \quad n \geq 0,$$

   tenga convergencia local de orden 3.

   c) Aplica los resultados anteriores para calcular $\sqrt{7}$ y analiza en los resultados numéricos la evolución del error.

13. *a*) Calcula las diferentes aproximaciones que obtienes de $\sqrt{5}$, mediante los métodos de iteración funcional dados por las funciones

$$g_1(x) = \frac{1}{2}(x+\frac{5}{x}) \quad g_2(x) = x - \frac{1}{10}(x^2-5)$$

   partiendo de $x_0 = 1.5$.

   b) Analiza numéricamente si las sucesiones convergen. En caso afirmativo analiza el orden de convergencia de cada método observado en las iteraciones. Justifica teóricamente la razón de los resultados obtenidos.

   c) Calcula en cada caso el número de iteraciones necesario para aproximar $\sqrt{5}$ con un error menor que 10^{-15}.

d) Aplica el método de Steffensen a la función g_2 para aproximar $\sqrt{5}$ y compara los resultados obtenidos con los del apartado a) ¿Qué puedes decir del orden de convergencia?

14. Considera el polinomio $p(x) = 2x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 6x + 3$.

    a) Calcula una sucesión de Sturm asociada a $p(x)$.

    b) Halla una cota superior e inferior de las raíces de $p(x)$.

    c) Localiza todas las raíces reales de $p(x)$ en un intervalo cada una.

15. Acota las raíces reales de la ecuación $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 3 = 0$, y determina su número. Calcula con un error menor que $5\,10^{-6}$, por el método de Newton, usando el algoritmo de Horner, una de sus raíces positivas (justificando que se verifican las condiciones de la convergencia del mismo). Comprueba el orden de convergencia del método en este caso.

16. Demuestra que el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{x^2y^2}{2} - x + \frac{7}{24} & = & 0 \\ xy - y + \frac{1}{9} & = & 0 \end{array}\right.$$

tiene una única solución en el intervalo $[0, 0.4] \times [0, 0.4]$. Calcula una aproximación de la solución en el intervalo anterior mediante 4 iteraciones del método de Newton partiendo de (0,0).

17. Sea $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase 1 en D. Demuestra que si existe $L \in (0, 1)$ tal que

$$\left|\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D,$$

entonces g es contractiva.

18. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} & = & 0 \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 & = & 0 \\ e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi-3}{3} & = & 0 \end{array}\right.$$

    a) Escribe el sistema anterior en la forma $x = g(x)$ despejando en la ecuación i la variable $x_i, i = 1, 2, 3$.

    b) Demuestra, utilizando el resultado del ejercicio anterior que el sistema de ecuaciones tiene una única solución en

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |\, 1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}.$$

    c) Calcula una aproximación de la solución con el método de iteración funcional tomando $x^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)$ con una tolerancia fijada de 10^{-5}, donde la tolerancia viene dada por la norma infinito de la diferencia de dos aproximaciones sucesivas.

d) Sabiendo que la solución del sistema es $x^\star = (0.5, 0, -\pi/6)$ calcula el error absoluto cometido en la aproximación obtenida.

e) Calcula, utilizando la cota teórica del método de iteración funcional, el número de iteraciones necesarias para asegurar un error absoluto menor que 10^{-5} ¿Qué conclusión extraes?

19. Analizando el paralelismo del método descrito en el ejercicio anterior con el método de Jacobi para resolver sistemas de ecuaciones lineales, propón alguna modicación sencilla del mismo que acelere la convergencia de la sucesión obtenida. Aplica tal modicación al sistema del ejercicio anterior y analiza experimentalmente los resultados.

20. El sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 5x^2 - y^2 & = & 0 \\ y - 0.25\,(\sin x + \cos y) & = & 0 \end{array} \right.$$

tiene una solución cerca de (1/4,1/4).

a) Encuentra un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ y una función $g : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de forma que g tenga un único punto fijo en D y dicho punto fijo sea solución del sistema anterior.

b) Aplica el correspondiente método de iteración funcional para aproximar la solución con una tolerancia de 10^{-5} en norma infinito.

21. Obtén aproximaciones de la solución de los sistemas de los ejercicios 18 y 20 mediante el método de Newton. Compara la convergencia de los resultados obtenidos con los diferentes métodos.

22. El método de Newton precisa en cada iteración de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, con diferentes matrices de coeficientes. Este hecho se traduce en un elevado coste computacional. Se han propuesto diferentes modificaciones al método para reducir este coste. La más sencilla consiste en sustituir en cada iteración $Jf(x^{(n)})$ por una matriz fija, $Jf(x^{(0)})$ y de esta forma todos los sistemas lineales a resolver tienen la misma matriz de coeficientes. Analiza experimentalmente con el sistema del ejercicio 16 como afecta esta modificación a la convergencia del método.