Relatório 1º projeto ASA 2021/2022

Grupo: t20
Alunos: Guilherme Pascoal (99079), Pedro Lobo (99115)

1 Descrição do Problema e da Solução

O 1º problema apresentado tem como objetivo determinar o número de subsequências estritamente crescentes de tamanho máximo de uma sequência de inteiros e indicar qual esse tamanho máximo.

Este problema pode ser resolvido recursivamente, apresentando subestrutura ótima. L corresponde à função que, para um dado índice, devolve o tamanho da maior subsequência estritamente crescente até à posição i. O, de forma semelhante, representa o número de ocorrências de subsequências de tamanho máximo até à posição i.

$$L[i] = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se } i = 1 \\ 1 + max(L[j] \mid 1 \leq j < i \wedge x_j \leq x_i), & \text{se } L[j] + 1 = L[i] \mid 1 \leq j < i \wedge x_i \geq x_j) \end{array} \right\}$$

$$O[i] = \left\{ \begin{array}{ll} O[j], & \text{se } L[j] + 1 > L[i] \\ O[i] + O[j], & \text{se } L[j] + 1 = L[i] \end{array} \mid 1 \leq j < i \wedge x_i \geq x_j) \right\}$$

São utilizados dois vetores, para manter a informação descrita acima. Estes são preenchidos sequencialmente. O maior tamanho será o máximo do vetor L e o número de ocorrências é dado pela soma dos valores de O onde L é máximo.

O 2º problema apresentado tem como objeto determinar o tamanho do maior subsequência estritamente crescentes comum a duas sequências de inteiros.

Este problema pode ser resolvido recursivamente, apresentando subestrutura ótima. O tamanho da maior subsequência pode ser definido como

$$L[i][j] = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{se } i = 0 \text{ ou } j = 0 \\ L[i-1][j], & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_1[i] \neq x_2[j] \\ 1 + max(L[i-1][k] \mid 1 \leq k < j \wedge x_1[i] > x_2[j]), & \text{se } i, j > 0 \text{ e } x_1[i] = x_2[j] \end{array} \right\}$$

A matriz é preenchida linha a linha, coluna a coluna, sendo o resultado dado pelo valor máximo da última linha preenchida. No entanto, este problema pode ser resolvido recorrendo apenas a uma matriz $2 \times j$, uma vez que apenas são necessários valores da linha atual e da linha anterior. Assim, o resultado do problema corresponde ao valor máximo da última linha preenchida da matriz.

2 Análise Teórica

2.1 Problema 1

- Leitura dos dados de entrada. $\mathcal{O}(N)$
- Aplicação do algoritmo. $\mathcal{O}(N^2)$
- Apresentação do resultado. $\mathcal{O}(1)$

Complexidade global: $\mathcal{O}(N^2)$

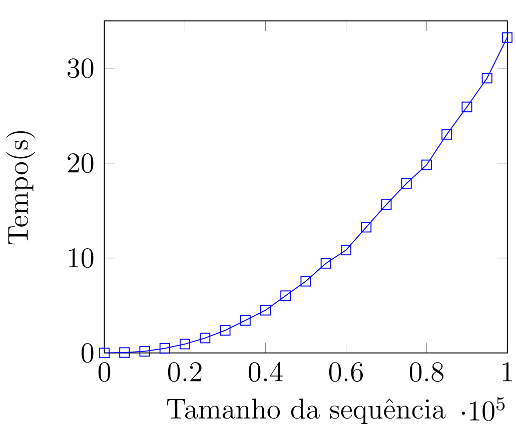
2.2 Problema 2

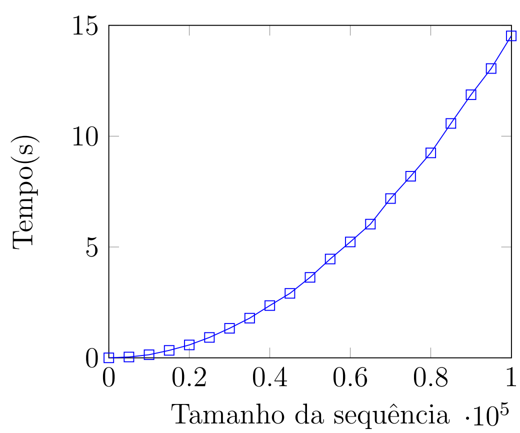
- Leitura do primeira sequência. $\mathcal{O}(N)$
- Leitura do segunda sequência. $\mathcal{O}(M)$
- Comparação do tamanho das sequências. $\mathcal{O}(1)$
- Inicialização do vetor auxiliar. $\mathcal{O}(N)$ ou $\mathcal{O}(M)$
- Aplicação do algoritmo. $\mathcal{O}(NM)$
- Procura do resultado. $\mathcal{O}(N)$ ou $\mathcal{O}(M)$
- Apresentação do resultado. $\mathcal{O}(1)$

Complexidade global: $\mathcal{O}(NM)$

3 Avaliação Experimental dos Resultados

Foram geradas sequências aleatórias de tamanho 1 a 100001 em incrementos de 1000. Abaixo estão os gráficos do problema 1 e 2, respetivamente.





Os gráficos estão de acordo com a análise teórica realizada.

4 Bibliografia

- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein (2009) *Introduction to Algorithms, Third Edition*, The MIT Press.
- *https://wcipeg.com/wiki/Longest_increasing_subsequence*