

Différences finies

27 septembre 2007

Table des matières

1	Equations différentielles	2
1.1	EDP	2
1.2	Conditions auxiliaires	3
1.3	Classification des EDP du second ordre	3
1.3.1	Rappel sur les coniques	3
1.3.2	EDP	5
2	Discrétisation en différences finies	5
2.1	Préliminaires : formule de Taylor, petit o , grand O	5
2.2	Discrétisation de l'espace et du temps	6
2.3	Discrétisation des équations	6
2.4	Une application simple	7
2.5	Quelques définitions	7
3	Différences finies, volumes finis, éléments finis	8
3.1	Différences finies	8
3.2	Volumes finis	9
3.3	Éléments finis	9
4	Propriétés des schémas de discrétisation	11
4.1	Consistance	11
4.2	Stabilité	11
4.2.1	Coefficient et matrice d'amplification	12
4.2.2	Méthode de Von Neumann	12
4.3	Convergence	13
4.4	Précision	14
4.4.1	Diffusion	14
4.4.2	Dispersion	14
5	Equations elliptiques	15
5.1	Discrétisation	15
5.1.1	Schéma de discrétisation à 5 points	15
5.1.2	Schéma de discrétisation à 9 points	16
5.2	Méthodes de résolution directes	16
5.2.1	Elimination de Gauss	16
5.2.2	Transformée de Fourier rapide	16
5.3	Résolutions itératives	16
5.3.1	Méthode des itérations de Gauss-Jacobi	17
5.3.2	Méthode des itérations de Gauss-Seidel	17
5.3.3	Méthode de relaxation	17
5.4	Méthodes itératives pour les systèmes symétriques, définis positifs	18

5.4.1	Approche générale	18
5.4.2	Méthode de descente la plus profonde	18
5.4.3	Méthode des directions conjuguées	19
5.4.4	Méthode du gradient conjugué	19
6	Equations paraboliques : l'équation de la chaleur	19
6.1	θ -schéma	20
6.1.1	Schéma de Crank-Nicholson	20
6.2	Schéma de Dufort et Frankel	20

1 Equations différentielles

1.1 EDP

Les EDP diffèrent singulièrement des EDO, d'abord par la variété de leurs solutions. Par exemple, $\frac{du}{dx} = 0$ possède la solution générale $u = C$, ou C est une constante arbitraire imposée par une condition limite. L'équation $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$ a comme solution générale $u(x,y) = F(y)$, ce qui requiert une condition limite de dimension infinie (une fonction).

Une EDO peut souvent se résoudre en 2 étapes successives : la construction d'une solution générale puis l'utilisation des conditions aux limites pour déterminer les constantes d'intégration. Cela est en général impossible pour une EDP. En général la résolution de l'EDP est fortement contrainte par les conditions auxiliaires, et on parle de problème aux dérivées partielles plutôt que d'EDP seulement. Une EDP possède généralement une infinité de solution. Ce qui rend la solution unique, ce sont les conditions auxiliaires.

Un problème est bien posé si (critères de Hadamard) :

- une solution existe ;
- Cette solution est unique ;
- la solution dépend continument des conditions auxiliaires, de la géométrie des frontières et des coefficients de l'équation.

Exemple 1.1 On considère l'équation de Laplace, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, que l'on cherche à résoudre à l'aide d'une représentation en série de Fourier :

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(t) e^{in\pi x}$$

L'intégration fournit la solution

$$a_n(t) = C_n e^{n\pi t} + D_n e^{-n\pi t}$$

qui fait intervenir 2 constantes d'intégration par mode de Fourier. Pour déterminer les 2 constantes, il faut donc 2 conditions auxiliaires par mode, par exemple :

$$u(x, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\pi x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{-\infty}^{\infty} n\pi B_n e^{in\pi x}$$

d'où la solution :

$$u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{A_n + B_n}{2} e^{n\pi t} + \frac{A_n - B_n}{2} e^{-n\pi t} \right) e^{in\pi x}$$

L'absence de continuité par rapport aux conditions aux limites est évident : si $A_n = -B_n$, la solution s'atténue avec le temps (elle tend vers 0) alors que si $A_n + B_n = \epsilon \neq 0$, La solution n'est pas bornée et tend vers l'infini. L'équation de Laplace avec seulement des conditions initiales est donc un problème mal posé.

1.2 Conditions auxiliaires

Soit Ω le domaine d'étude et Σ sa frontière.

Conditions aux limites de Dirichlet :

$$\forall t, \forall x \in \Sigma, u(x, t) \text{ est donné}$$

Conditions aux limites de Von Neumann : Avec μ la normale à Σ dirigée vers l'extérieur de Ω :

$$\forall t, \forall x \in \Sigma, \frac{\partial u}{\partial \mu} \text{ est donné}$$

Conditions aux limites mixtes : de Dirichlet sur une partie de Σ et de Von Neumann sur l'autre partie.

Conditions aux limites de Robin : Combinaison linéaire entre une condition de Dirichlet et une condition de Von Neumann.

Conditions de Cauchy : u et $\frac{\partial u}{\partial t}$ sont donnés sur un arc de l'espace-temps. Une EDP avec les conditions de Cauchy définissent un problème de Cauchy. En pratique, les conditions de Cauchy concernent souvent les conditions initiales :

$$\forall x \in \Omega, u(x, 0) \text{ et/ou } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \text{ sont donnés}$$

et des conditions aux limites complémentaires peuvent être nécessaires.

1.3 Classification des EDP du second ordre

1.3.1 Rappel sur les coniques

L'équation générale d'une conique est :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

ou encore

$${}^tXQX + {}^tDX + f = 0, \quad \text{avec} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Pour trouver les éventuelles directions asymptotiques, il faut remarquer que sur une branche infinie de la courbe, l'équation est équivalente à :

$${}^tXQX = 0 \quad (3)$$

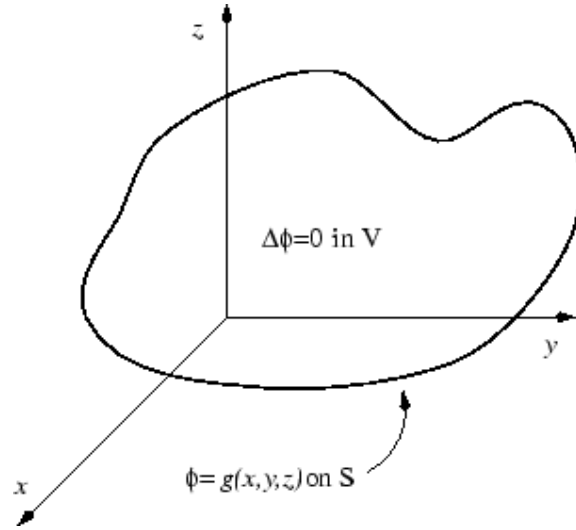


FIG. 1 – Conditions de Dirichlet pour le problème de Laplace.

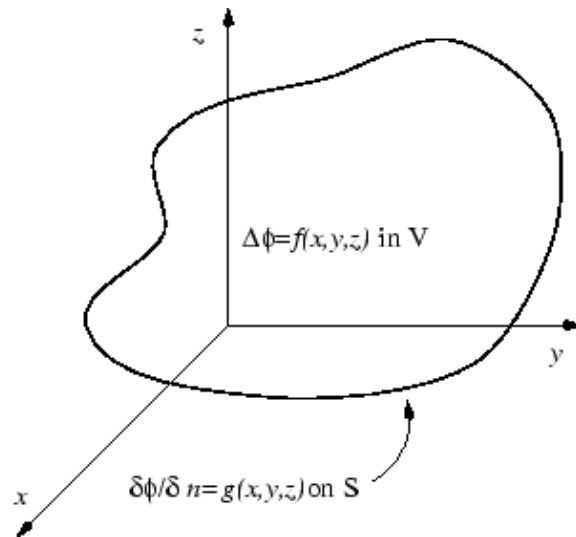


FIG. 2 – Conditions de Neumann pour le problème de Poisson.

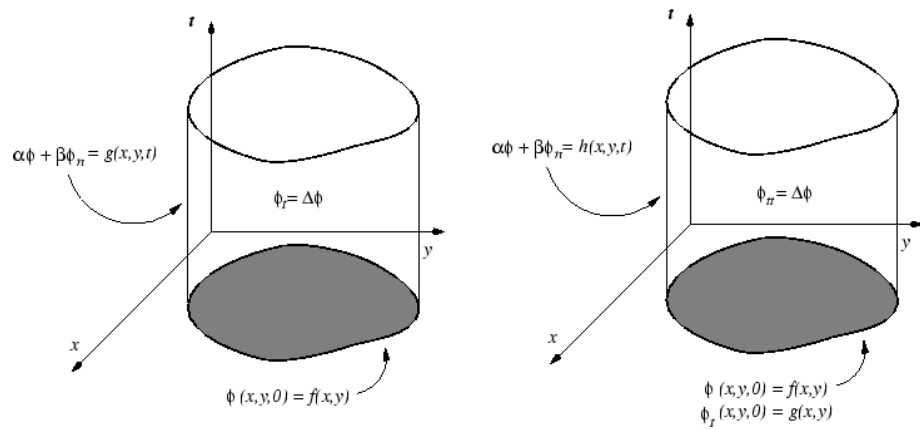


FIG. 3 – Conditions de Cauchy pour des problèmes parabolique et hyperbolique.

Si $\det(Q) > 0$, les 2 valeurs propres de Q sont de même signe. En décomposant X dans la base propre (orthogonale car Q est symétrique), on montre que l'équation 3 ne peut être vérifiée autrement qu'avec $X = 0$. Pas de direction asymptotique : c'est une ellipse.

Si $\det(Q) < 0$, les 2 valeurs propres de Q sont de signes opposés. C'est une hyperbole.

Si $\det(Q) = 0$, une direction asymptotique réelle : c'est une parabole.

1.3.2 EDP

Par analogie avec les coniques, les EDP sont classées en EDP elliptiques, hyperboliques, paraboliques, dont les prototypes classiques sont les équations de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f,$$

des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

et de diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

Chaque classe d'EDP nécessite des conditions auxiliaires spécifiques.

Un aspect essentiel de cette classification réside dans le caractère évolutif ou non évolutif des problèmes. La façon naturelle d'intégrer numériquement une équation parabolique ou hyperbolique est d'appliquer une procédure pas à pas. Ces problèmes sont en général de type Cauchy avec des conditions aux limites complémentaires.

Pour les EDP hyperboliques, la classification aussi débouche naturellement sur une méthode de résolution "des caractéristiques".

Un problème elliptique est stationnaire et requiert, au contraire, le traitement simultané de tout le champ. On a vu dans l'exemple 1.1 que l'équation de Laplace ne pouvait pas représenter un système évolutif. Une évolution est souvent introduite artificiellement afin de résoudre le système de façon itérative.

2 Discrétisation en différences finies

2.1 Préliminaires : formule de Taylor, petit o, grand O

Formule de Taylor :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k \quad (4)$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + O((b-a)^3) \quad (5)$$

$f = O(g)$ s'il existe une constante A fixe telle que $|f| < Ag$ sur tout le domaine de définition de f .

$f = o(g)$ si $f/g \rightarrow 0$.

2.2 Discrétisation de l'espace et du temps

2.3 Discrétisation des équations

Les machines représentent les nombres sous forme discrète (vecteurs, tableaux, ...). Pour résoudre numériquement un problème continu (exact), il faut le transformer en un problème discret. On distingue alors les opérateurs différentiels continus des opérateurs discrets qui leur correspondent. Par exemple $L(u) = \frac{\partial u}{\partial x}$, et $L_\Delta(u_j) = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x}$. Il faut également bien distinguer la solution théorique (telle que $L(u) = 0$) de la solution numérique (telle que $L_\Delta(u_j) = 0$) qui n'est définie qu'en certains points de l'espace.

En différences finies, la discrétisation s'opère en manipulant des développements de Taylor :

$$u(t + \Delta t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Delta t^k \quad (6)$$

$$= u(t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^3 + \dots \quad (7)$$

Exemple 2.1 *Considérons une variable u dépendant du temps et d'une dimension spatiale x , discrétisées avec des pas de temps et d'espace Δt et Δx . Avec $u_j^n = u(n\Delta t, j\Delta x)$, on peut écrire*

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n,j} \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n,j} \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \quad (8)$$

ce qui donne une écriture de la dérivée première en (n, j) dans l'espace discret :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n,j} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (9)$$

En écrivant plutôt

$$u_j^{n-1} = u_j^n - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n,j} \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{n,j} \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \quad (10)$$

on obtient

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{n,j} = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (11)$$

En soustrayant 10 de 8, on obtient une troisième écriture possible de la dérivée première :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2). \quad (12)$$

Exercice 2.1 *A l'aide de l'exemple précédent, trouver une discrétisation de $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ en différences finies, en considérant un pas de temps constant.*

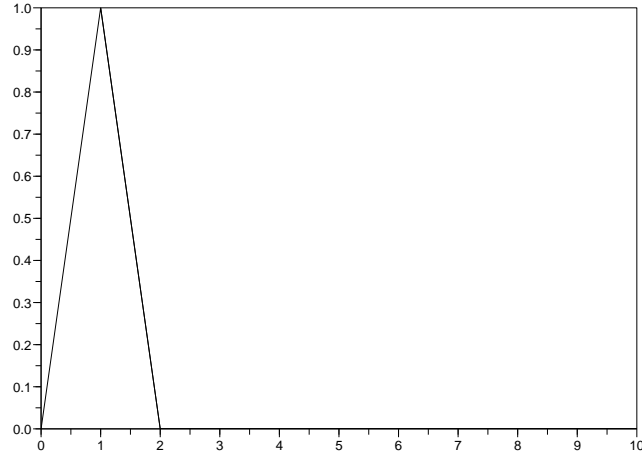


FIG. 4 – Etat initial $u_j^0, j = 1, 10$ pour l'exercice 4.3.

2.4 Une application simple

2.5 Quelques définitions

Schéma de discrétisation : Soit un domaine Ω de l'espace-temps, un opérateur différentiel L et l'équation

$$L(u(x, t)) = f \quad \text{sur } \Omega. \quad (13)$$

On découpe Ω en cellules élémentaires $(\Delta x, \Delta t)$ et on discrétise L sur chaque cellule. L'opérateur discret L_Δ obtenu est appelé schéma de discrétisation.

Exemple 2.2 *L'opérateur de l'équation de transport*

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14)$$

a comme schéma de discrétisation possible :

$$L_\Delta(u) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (15)$$

Schéma explicite, schéma implicite : Un schéma est explicite en temps si on peut exprimer u_j^{n+1} explicitement en fonction des $u_k^n, m \leq n$. Il est implicite si u_j^{n+1} dépend de $u_k^{n+1}, k \neq j$. Le schéma 15 est explicite.

Schéma centré, schéma décentré : Un schéma est centré en n s'il y a symétrie des indices autour de n . Dans l'exemple 2.1, le premier schéma est décentré aval, le deuxième est décentré amont, le troisième est centré.

Niveaux de temps de la discrétisation : Un schéma est à l niveaux de temps s'il fait intervenir l indices temporels consécutifs. Le schéma 15 est à 2 niveaux de temps.

Erreur de troncature : (ou de discrétisation, ou de consistance) c'est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte :

$$e_{\Delta} = L_{\Delta}(u) - L(u) \quad (16)$$

Ordre d'une EDP : Ordre de dérivation maximal d'une EDP. L'équation 14 est d'ordre 1, en temps et en espace.

Ordre d'un schéma de discrétisation en différences finies : Un schéma est d'ordre p en temps lorsque l'erreur de troncature est proportionnelle à $(\Delta t)^p$.

Exercice 2.2 1. Le schéma solution de l'exercice 2.1 est-il centré ou décentré ? Calculer son erreur de troncature et préciser son ordre.

2. Trouver un schéma de discrétisation de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ d'ordre 4. Quels sont les avantages et les inconvénients par rapport à un schéma d'ordre 2 ?

3. Le pas de discrétisation est maintenant variable. Reprendre le schéma utilisé en 1 et évaluer à quelles conditions il reste d'ordre 2.

3 Différences finies, volumes finis, éléments finis

Cette section illustre au travers d'un exemple simplissime la différence d'approche entre les méthodes des différences finies, des volumes finis, et des éléments finis. En revanche, on ne met pas en évidence les avantages et les inconvénients de chacune.

Soit le problème de l'équilibre thermique d'une barre homogène, unidimensionnelle, soumise à une source de chaleur f mais dont la température aux extrémités est contrainte à 0 :

$$\begin{cases} -\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

3.1 Différences finies

On discrétise en différences finies, sur une grille régulière de $N + 1$ points $0, \dots, N$:

$$-\sigma \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{\Delta x^2} = f_j \quad (18)$$

$$u_0 = 0, \quad u_N = 0 \quad (19)$$

L'équation précédente peut alors s'écrire sous forme matricielle, comme :

$$AU = B \quad (20)$$

avec

$$A = \frac{\sigma}{\Delta x^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (21)$$

Il reste alors à résoudre numériquement ce système.

3.2 Volumes finis

On intègre l'équation sur un volume fini autour du point de maillage x_j :

$$-\int_{x_j-\frac{\Delta x}{2}}^{x_j+\frac{\Delta x}{2}} \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = \int_{x_j-\frac{\Delta x}{2}}^{x_j+\frac{\Delta x}{2}} f dx \quad (22)$$

et en considérant que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \left(x_j + \frac{\Delta x}{2} \right) \sim \frac{u(x_j + \Delta x) - u(x_j)}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \quad (23)$$

on obtient un système identique à celui des différences finies.

3.3 Eléments finis

Dans l'approche par différences finies, on reformule de façon discrète (approchée) l'équation physique puis on résout l'équation approchée de façon exacte. C'est l'équation qui est modélisée numériquement. Avec les éléments finis, l'équation physique est reformulée de façon exacte sous forme intégrale, et cette équation est résolue de façon approchée. C'est la solution qui est modélisée numériquement.

Formulation variationnelle de l'équation d'origine : Soit V l'ensemble des fonctions C^0 de $[0, 1]$, nulles en 0 et 1. u (température) appartient à V , et la formulation originale du problème est équivalente à dire que

$$\forall v \in V, \quad -\int_0^1 \sigma v u'' dx = \int_0^1 f v dx.$$

Après intégration par parties, cette égalité se réécrit :

$$\forall v \in V, \quad \int_0^1 \sigma v' u' dx = \int_0^1 f v dx. \quad (24)$$

Construction de l'espace variationnel discret : L'idée de la méthode des éléments finis est de résoudre l'équation 24 non pas dans l'espace V tout entier, mais dans un sous-espace V_Δ de dimension finie. Pour cela :

- on discrétise le segment $[0, 1]$ en N segments réguliers,
- on choisit la dimension et une base de V_Δ .

Dans cet exemple on considère que V_Δ est de dimension $N + 1$ et on choisit la base $(\Phi_j), j = 0, N$ telle que, en notant $\Delta x = \frac{1}{N+1}$:

$$\Phi_j(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_j - x}{\Delta x} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ 1 - \frac{x - x_j}{\Delta x} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (25)$$

Φ_j est représenté sur la figure 5.

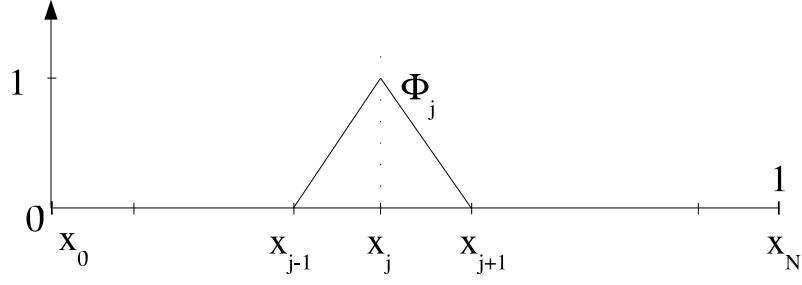


FIG. 5 – Discrétisation du segment et forme de la fonction Φ_j .

Calcul de la solution approchée : On décompose u_h , la représentation de u dans le sous-espace V_Δ , dans la base (Φ_j) :

$$u_\Delta(x) = \sum_{j=0}^N u_j \Phi_j(x) \quad (26)$$

puis on écrit l'équation 24 avec v identifié successivement aux Φ_i , ce qui conduit à (avec $u_0 = 0$) :

$$\sum_{j=1}^N \sigma u_j \int_0^1 \Phi_i' \Phi_j' dx = \int_0^1 f \Phi_i dx \quad (27)$$

ce qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A_\Delta U_\Delta = B_\Delta, \quad \text{avec } (A_\Delta)_{ij} = \sigma \int_0^1 \Phi_i' \Phi_j' dx, \quad U_\Delta = (u_i), \quad (B_\Delta)_i = \int_0^1 f \Phi_i dx \quad (28)$$

Avec

$$\Phi_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ -\frac{1}{\Delta x} & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (29)$$

on constate que

$$A_\Delta = \frac{\sigma}{\Delta x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

dont on peut faire l'analogie avec le cas des différences finies. En revanche, suivant la forme de f , B_h peut être compliqué à calculer. Les éléments finis apparaissent plus compliqués à mettre en œuvre que les différences finies sur cet exemple. C'est dû à la simplicité de la géométrie et des conditions auxiliaires du problème. Les différences finies complexifient rapidement la résolution avec un maillage non structuré, ce qui n'est pas le cas des éléments finis.

4 Propriétés des schémas de discrétisation

4.1 Consistance

L'approximation de L par L_Δ est consistante (ou cohérente) si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0. La consistance ne concerne que le schéma de résolution, pas la solution. Un schéma consistant peut fournir une mauvaise solution.

Exemple 4.1 On considère l'équation de la chaleur dans une barre métallique de longueur l :

$$L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (31)$$

u représente la température. On discrétise la barre avec un pas d'espace constant Δx , et le temps avec Δt . Avec le schéma

$$L_\Delta(u) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \sigma \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \quad (32)$$

(explicite, 2 niveaux de temps), l'erreur de troncature s'écrit

$$e_\Delta(u) = \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sigma \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4). \quad (33)$$

L'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. Le schéma 32 est donc bien consistant. En utilisant l'équation 31, et si σ est constant, $e_\Delta(u)$ peut en outre s'écrire

$$e_\Delta(u) = \frac{\sigma}{2} \left(\sigma \Delta t - \frac{\Delta x^2}{6} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4). \quad (34)$$

Un choix adéquat des pas de discrétisation permet de réduire l'erreur de troncature et d'améliorer la consistance du schéma (donc la précision).

Exercice 4.1 (Schéma de Dufort et Frankel) Le schéma de discrétisation de Dufort et Frankel pour l'équation de la chaleur est le suivant :

$$L_\Delta(u) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \sigma \frac{u_{j-1}^n - u_j^{n+1} - u_j^{n-1} + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \quad (35)$$

La discrétisation est croisée : la dérivée partielle par rapport à une variable fait intervenir plusieurs niveaux d'une autre variable. Ce schéma est-il consistant ?

4.2 Stabilité

La stabilité d'un schéma traduit sa capacité à ne pas amplifier les erreurs au cours de la procédure de calcul séquentielle ou itérative. Si un schéma numérique s'écrit $u^{n+1} = Au_n$, n définissant l'indice temporelle ou l'itération, le schéma est stable s'il existe une constante K telle que $\|A^n\| \leq K$. Le schéma est universellement stable si K est bornée quels que soient les pas de discrétisation ; conditionnellement stable si K est bornée pour certaines valeurs de pas de discrétisation.

4.2.1 Coefficient et matrice d'amplification

Une approche naturelle de l'étude de l'amplification des erreurs est de distinguer un par un les modes d'oscillation de la solution, donc de travailler sur la transformée de Fourier de la solution :

$$\hat{u}^n(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u^n(x) e^{-i\omega x} dx$$

On définit ainsi le coefficient (scalaire) ou la matrice d'amplification (suivant la dimension de $\hat{u}^n(\omega)$) :

$$\hat{u}^{n+1}(\omega) = S(\omega) \hat{u}^n(\omega)$$

Si $S(\omega)$ est un scalaire, la stabilité n'est assurée que s'il est inférieur ou égal à 1.

Si le schéma de discrétisation présente plus de 2 niveaux de temps, ou s'il fait intervenir plusieurs variables, S est une matrice d'amplification. Le schéma est stable si et seulement si tous les éléments de S^n restent bornés lorsque n tend vers l'infini, donc si

$$\|S^n\| \leq 1$$

$\|\cdot\|$ représente une norme dans l'espace des matrices carrées de la taille de S . Il existe une infinité de normes, notamment celles définies à l'aide des normes vectorielles L^p :

$$\|S\| = \max_v \frac{\|Sv\|_p}{\|v\|_p} \quad \text{où } \|v\|_p = \left(\sum_i v_i^p \right)^{1/p}$$

En pratique, on utilise plutôt le rayon spectral de S , $\rho(S)$, pour déterminer la stabilité du schéma. Le rayon spectral est le plus grand module des valeurs propres de S :

$$\rho(S) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(S)} (|\lambda|)$$

avec les théorèmes suivant :

Théorème 4.1 *Une condition nécessaire de stabilité (dite de Von Neumann) est que $\rho(S) \leq 1$.*

Cette condition est en général facile à exprimer, et exploitable.

Théorème 4.2 *Une condition suffisante de stabilité est que $\|S\| \leq 1$.*

La norme n'est pas facile à calculer pour une matrice quelconque. Ce théorème n'est donc pas facile à exploiter. Pour certaines matrices particulières, le rayon spectral se confond avec la norme, et la condition de Von Neumann devient une condition suffisante.

Théorème 4.3 *Si tous les éléments de S sont bornés et si toutes les valeurs propres de S , sauf peut-être une, sont strictement inférieures à 1, alors la condition de stabilité de Von Neumann est une condition suffisante.*

4.2.2 Méthode de Von Neumann

La Méthode de Von Neumann est une méthode systématique d'étude de conditions nécessaires de stabilité, basée sur la transformée de Fourier de la solution. Elle consiste à étudier le coefficient ou matrice d'amplification dans le cas de solutions oscillatoires du type $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$.

Exercice 4.2 Etudier la stabilité du schéma de discrétisation suivant, pour l'équation de diffusion :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (36)$$

Exercice 4.3 Application (TD) : mise en évidence d'une instabilité (cas du transport en Euler aval) On considère l'équation de transport 14 que l'on discrétise selon le schéma d'Euler décentré aval :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (37)$$

avec $V = 1 \text{ m.s}^{-1}$, $\Delta t = 1 \text{ s}$, et $\Delta x = 1 \text{ m}$, et la condition initiale $u_1^0 = 1, u_j^0 = 0$ pour $j \neq 1$ (figure 4).

1. En appliquant le changement de variable $X = x - Vt, T = t$, résoudre analytiquement l'équation de transport 14 et tracer les solutions aux temps 1, 2, et 3 secondes.
2. Résoudre numériquement l'équation pour les mêmes pas de temps et conclure.

Exercice 4.4 Stabilité de schémas de discrétisation pour l'équation de transport :

1. Schéma d'Euler décentré aval

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (38)$$

2. Schéma d'Euler décentré amont

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (39)$$

3. Schéma FTCS

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (40)$$

4. Schéma leap-frog

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + V \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (41)$$

4.3 Convergence

Les notions de consistance et de stabilité ne concernent que le schéma numérique. La notion de convergence concerne la solution. On dit qu'un schéma est convergent si la solution numérique tend vers la solution réelle lorsque tous les pas de discrétisation tendent vers 0. Au final, c'est la seule notion qui nous intéresse mais elle est aussi la plus difficile à prouver. On utilise le théorème de Lax.

Théorème 4.4 Pour un problème linéaire, bien posé et satisfaisant la notion de consistance, alors convergence et stabilité sont deux notions équivalentes.

Autre formulation :

Pour un problème linéaire et bien posé, la consistance et la stabilité sont nécessaires et suffisantes pour assurer la convergence.

En pratique, on étend ce théorème aux problèmes (raisonnablement) non linéaires.

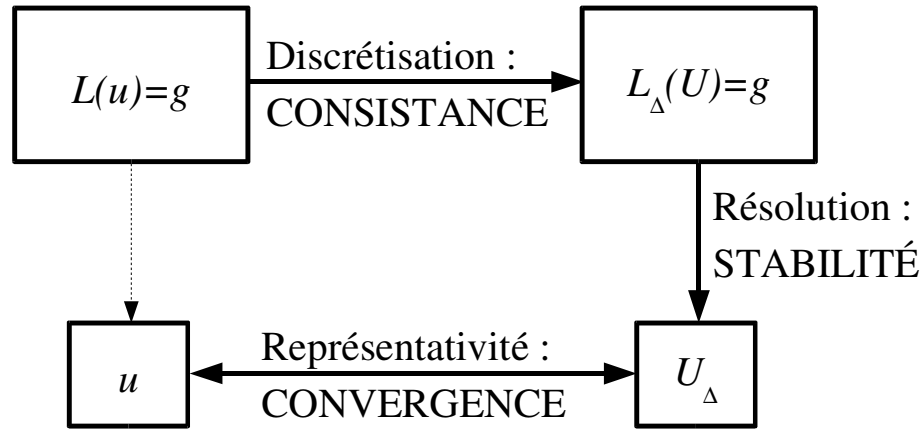


FIG. 6 – Représentation d’une solution numérique

4.4 Précision

La précision représente le niveau d’exactitude de la solution numérique. Un schéma peut être plus précis qu’un autre : A pas de temps et d’espace identiques, sa solution numérique est plus proche de la solution réelle. En général la précision a un coût (temps de calcul, mémoire). Pour améliorer la précision, 2 recettes :

1. augmenter l’ordre du schéma de discrétisation ;
2. réduire les pas de discrétisation ;

Il n’y a pas de méthode vraiment satisfaisante pour estimer les erreurs de discrétisation et la précision d’une méthode numérique particulière. Ca se fait :

- en testant sur un problème aux dérivées partielles pour lequel une solution exacte est connue ;
- en raffinant la discrétisation ;
- en comparant avec des résultats expérimentaux ;
- en vérifiant que la solution présente une apparence physiquement raisonnable.

4.4.1 Diffusion

Un schéma est diffusif lorsque il génère un phénomène de diffusion supérieur au seul effet de la diffusion physique. La diffusion numérique est particulièrement facile à diagnostiquer pour les équations conservatives (qui peuvent s’écrire comme la divergence d’un vecteur). En effet, il suffit que le module du coefficient d’amplification soit strictement inférieur à 1 pour conclure à de la diffusion numérique. Il est en général délicat de mettre en évidence de la diffusion numérique lorsqu’il y a de la diffusion physique.

Exercice 4.5 On considère le schéma d’Euler amont pour l’équation de transport 14, avec la condition initiale de la figure 4 et $V\Delta t/\Delta x = 0.5$. Constater le caractère diffusif du schéma en considérant le coefficient d’amplification, puis de façon graphique.

4.4.2 Dispersion

Il y a dispersion lorsque le schéma introduit un déphasage spatial de la solution.

Exemple 4.2 Avec une condition initiale en e^{imx} , la solution de l’équation de transport

est $u(x, t) = e^{im(x-ct)}$, ou en discret :

$$u_j^n = e^{im(j\Delta x - nc\Delta t)} \quad \text{et} \quad u_j^{n+1} = e^{-imc\Delta t} u_j^n$$

Pour le schéma d'Euler amont, on a :

$$u_j^{n+1} = (1 - c + ce^{-imj\Delta x}) u_j^n$$

Soit

$$\phi_m = \arg(u_j^{n+1}/u_j^n) = \arctan\left(\frac{c \sin mj\Delta x}{1 - c + c \cos mj\Delta x}\right)$$

Si $\phi_m - mc\Delta t \neq 0$, alors il y a un déphasage de la solution numérique à chaque pas de temps, donc le schéma est dispersif.

5 Equations elliptiques

Les équations elliptiques ne peuvent pas faire intervenir le temps. Il s'agit donc d'équations stationnaires et les solutions dépendent entièrement des conditions aux limites. Une petite variation locale d'une condition aux limites affecte la solution dans tout l'espace.

Soit l'équation de Poisson :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f.$$

5.1 Discrétisation

5.1.1 Schéma de discrétisation à 5 points

L'équation se discrétise selon

$$\frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij-1} - 2u_{ij} + u_{ij+1}}{\Delta y^2} = f_{ij}$$

ce qui conduit à un système linéaire du type $Au = b$. Les conditions aux limites sont incorporées dans ce système.

Exercice 5.1 Avec $f = 0$, $i = j = 0$, écrire l'expression de u_{00} en fonction de u aux 4 points de grille voisins u_{0-1} , u_{01} , u_{-10} , et u_{10} . Faire de même pour ces quatre dernières quantités, et incorporer le résultat dans l'expression de u_{00} . Que peut-on conclure sur le domaine d'influence de u_{00} ?

Solution :

$$u_{00} = \frac{1}{12}(u_{-20} + u_{20} + u_{0-2} + u_{02}) + \frac{1}{6}(u_{-1-1} + u_{-11} + u_{1-1} + u_{11})$$

On pourrait continuer le processus de substitution jusqu'à atteindre les bords du domaine. Cela illustre donc le fait que n'importe quel point du domaine est influencé par toutes les conditions aux bords.

Exercice 5.2 On recherche la distribution de température sur une plaque rectangulaire $abcd$ soumise à une température constante u_0 sur les côtés ab et bc , à un flux constant

$\phi_0 = \partial u / \partial n$ sur cd . Le côté ca est isolant ($\partial u / \partial n = 0$). n est la coordonnées normale à la paroi. L'équation s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

1. K_x et K_y sont constants.

(a) Ecrire la discrétisation.

(b) Appliquer le cas précédent au cas où $K_x = K_y$ et $\Delta x = \Delta y$. Constater que ce résultat peut s'appliquer à $K_x \neq K_y$ avec un choix approprié de Δx et Δy .

(c) Ecrire la discrétisation pour les conditions aux limites. Pour les conditions en $\partial u / \partial n$, on introduira un point fictif à l'extérieur du domaine.

(d) Ecrire le système d'équations pour un domaine découpé en 4 mailles.

2. K_x et K_y sont fonctions de x et y . Discrétiser l'équation et constater que les dérivées premières doivent être approximées au moins à l'ordre 2 pour que le schéma soit consistant.

5.1.2 Schéma de discrétisation à 9 points

5.2 Méthodes de résolution directes

5.2.1 Elimination de Gauss

Pour une matrice carré A , il existe au moins une matrice inversible P telle que PA soit triangulaire supérieure. On résout alors $PAu = Pb$. La matrice PA et le vecteur Pb sont construits récursivement. Algorithme, pour $k = 1, n$:

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &\leftarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj} & i = k+1, \dots, n \quad \text{et} \quad j = k+1, \dots, n \\ a_{ik} &\leftarrow 0 & i = k+1, \dots, n \\ b_i &\leftarrow b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k \end{aligned} \quad (42)$$

Une fois PA construite, la résolution se fait récursivement en remontant à partir du dernier élément de u . Un problème peut survenir quand un pivot est nul, ou très petit (proche de la précision de la machine). De plus, la méthode est très couteuse. Il y a beaucoup d'opérations ($O(n^3)$: $n(n-1)/2$ éléments à éliminer, chaque élimination nécessitant $O(n)$ opérations) et la mémoire nécessaire est énorme car il faut stocker toute la matrice. Dans la pratique, cette méthode n'est jamais retenue.

5.2.2 Transformée de Fourier rapide

Pour l'équation de Poisson seulement.

5.3 Résolutions itératives

La dimension devient vite un facteur limitant pour la résolution du système linéaire. Au-delà de 100 (soit un maillage de 10×10), une matrice devient en pratique difficilement inversible. On utilise des méthodes itératives. Par exemple, on peut scinder la matrice A sous la forme $A = M + N$. u vérifie

$$Mu = -Nu + b,$$

et on cherche u par le processus itératif

$$Mu_{k+1} = -Nu_k + b.$$

Il faut bien sûr que la suite u_k converge vers u .

Ainsi la résolution du problème s'apparente à celle d'un problème d'évolution, même si cette évolution n'a pas de sens physique, comme une évolution temporelle. On peut dynamiser l'équation de Poisson, c'est-à-dire la rendre parabolique en introduisant un terme temporel $\frac{\partial u}{\partial t}$. Après discrétisation selon un schéma d'Euler explicite, on obtient

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(-Au^n + b)$$

et u^n converge vers u si le rayon spectral de la matrice $I - \Delta t A$ ne dépasse pas 1.

5.3.1 Méthode des itérations de Gauss-Jacobi

On écrit $A = D - E - F$, avec D diagonale, E triangulaire inf, F triangulaire sup.

$$Du^{(k+1)} = (E + F)u^{(k)} + b$$

$$u^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)u^{(k)} + D^{-1}b$$

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} u_j^{(k)} \right)$$

Pour l'équation de Poisson bidimensionnelle :

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1j}^{(k)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k)} + u_{ij+1}^{(k)}) - \frac{h^2}{4} f_{ij}$$

Remarquons qu'il faut stocker 2 vecteurs u , aux itérations k et $k + 1$.

5.3.2 Méthode des itérations de Gauss-Seidel

$$(D - E)u^{(k+1)} = Fu^{(k)} + b$$

$$u_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j < i} a_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} u_j^{(k)} \right)$$

Pour l'équation de Poisson bidimensionnelle :

$$u_{ij}^{(k+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1j}^{(k+1)} + u_{i+1j}^{(k)} + u_{ij-1}^{(k+1)} + u_{ij+1}^{(k)}) - \frac{h^2}{4} f_{ij}$$

Remarquons qu'il faut stocker 1 seul vecteur u .

5.3.3 Méthode de relaxation

Dans l'esprit des méthodes itératives, l'idée des méthodes de relaxation est d'accélérer la convergence en introduisant un facteur de relaxation ω . Lors du calcul de u_{ij} à l'itération $k + 1$, ω augmente ($\omega < 1$) ou réduit ($\omega > 1$) le poids de u_{ij} de l'itération k . Pour $\omega \geq 2$, la méthode diverge. Pour $0 < \omega < 1$, on parle de sous-relaxation. Pour $1 < \omega < 2$, c'est de la sur-relaxation (SOR : Successive Over-Relaxation). Pour $\omega = 1$, on retrouve la méthode de Gauss-Seidel. Pour certains problèmes il est possible de calculer explicitement la valeur optimale du facteur de relaxation.

$$\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)u^{(k+1)} = \left(\frac{1-\omega}{\omega}D + F\right)u^{(k)} + b$$

$$u_i^{(k+1)} = (1-\omega)u_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}u_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}u_j^{(k)} \right)$$

5.4 Méthodes itératives pour les systèmes symétriques, définis positifs

5.4.1 Approche générale

Ces méthodes utilisent le fait que la solution de $Au = b$ minimise la forme quadratique

$$J(u) = \frac{1}{2}u^T Au - u^T b$$

lorsque A est symétrique définie positive. J est convexe et le minimum existe.

L'approche itérative consiste à se donner une ébauche (état initial) et une direction de recherche. Sur la droite définie ainsi, il s'agit de déterminer l'état qui minimise J . On se donne alors une nouvelle direction de recherche, et ainsi de suite jusqu'à approcher suffisamment la solution. Les méthodes présentées ci-dessous diffèrent par les directions de recherche à chaque itération.

Pour alléger les notations on note u_k le vecteur u à l'itération k . On note u^* la vraie solution.

Soit p_{k-1} la direction de recherche à l'itération k :

$$u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1}p_{k-1}$$

La valeur de α_{k-1} qui minimise J sur cette ligne est

$$\alpha_{k-1} = \frac{p_{k-1}^T r_{k-1}}{p_{k-1}^T A p_{k-1}}$$

On remarque que le résidu $r_k = f - Au_k$ est orthogonal à p_{k-1} :

$$p_{k-1}^T r_k = 0$$

On remarque aussi que le résidu est défini par le gradient de J :

$$\nabla J(u_k) = Au_k - f = -r_k$$

5.4.2 Méthode de descente la plus profonde

(Ou méthode du gradient, ou des déplacements simultanés). La recherche s'opère dans la direction où J décroît le plus rapidement : dans la direction de son gradient ∇J (ou du résidu).

$$u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1}r_{k-1}$$

avec

$$\alpha_{k-1} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{r_{k-1}^T A r_{k-1}}$$

L'algorithme s'écrit alors :
prescription d'un u_0 ;
Pour $k = 1, 2, \dots$
 $r_{k-1} = f - Au_{k-1}$
si r_{k-1} est inférieur à un certain critère, fin.
 $\alpha_{k-1} = (r_{k-1}^T r_{k-1}) / (r_{k-1}^T Ar_{k-1}) ;$
 $u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1} r_{k-1} .$

Cet algorithme peut être amélioré en remarquant que

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} Ar_{k-1}$$

. En introduisant $w_{k-1} = Ar_{k-1}$, on économise une multiplication par A .

Cet algorithme converge très rapidement lorsque la matrice A est bien conditionnée (le rapport des valeurs propres max et min n'est pas trop grand).

5.4.3 Méthode des directions conjuguées

Dans la méthode précédente les directions sont choisies orthogonales selon le produit scalaire canonique. Ici le produit scalaire adopté est $(u, v) = u^T Av$. Les directions de recherche sont choisies comme étant A -conjuguées, c'est-à-dire que $p_i^T Ap_k = 0$. A l'itération k , on construit p_k non-orthogonale à r_{k-1} (sinon $u_{k+1} = u_k$) et tel que les p_k soient A -conjugués. Ces méthodes convergent en au plus N itérations, N étant la taille du système.

5.4.4 Méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué est celle des directions conjuguées dans laquelle la première direction de recherche est choisie comme $p_0 = r_0$. L'algorithme est le suivant :

prescription d'un u_0 ;
 $r_0 = f - Au_0$
 $p_0 = r_0$
Pour $k = 1, 2, \dots$
 $w_{k-1} = Ap_{k-1}$
 $\alpha_{k-1} = (r_{k-1}^T r_{k-1}) / (p_{k-1}^T w_{k-1}) ;$
 $u_k = u_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1} .$
 $r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} w_{k-1}$
si r_k est inférieur à un certain critère, fin. ;
 $\beta_k = (r_k^T r_k) / (r_{k-1}^T r_{k-1}) ;$
 $p_k = r_k + \beta_{k-1} p_{k-1} .$

6 Equations paraboliques : l'équation de la chaleur

Les équations paraboliques représentent physiquement des phénomènes évolutifs, diffusifs, et non réversibles. Le prototype des équations paraboliques est l'équation de la chaleur. Les solutions dépendent uniquement des conditions initiales et aux limites. Une petite variation locale d'une condition aux limites ou initiale affecte la solution dans tout l'espace.

6.1 θ -schéma

Exercice 6.1 On discrétise l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (43)$$

par le schéma :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (1 - \theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (44)$$

avec $0 \leq \theta \leq 1$. Le schéma est-il explicite, implicite, semi-implicite ? Analyser la stabilité.

Le θ -schéma fait apparaître 2 niveaux de temps. Pour $\theta < 1/2$, il y a une condition de stabilité. Que cette condition ne soit pas vérifiée signifie que pour un point de l'espace, le domaine d'influence numérique ne contient pas le domaine d'influence physique. Le point $(n+1, j)$ est influencé par certains points du temps n , et des conditions aux limites. Loin des bords et si le pas de temps est petit, on imagine facilement qu'il ne soit influencé que par ses plus proches voisins $(n, j-1)$ et $(n, j+1)$, ce qui justifie intuitivement le schéma explicite. Si Δt est trop grand, ce schéma n'est plus justifié, il devient instable. L'erreur de troncature de ce schéma s'écrit

$$e_\Delta(u) = \sigma \left(\left(\frac{1}{2} - \theta \right) \sigma \Delta t - \frac{\Delta x^2}{12} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + O(\Delta t^2) + O(\Delta x^4). \quad (45)$$

Le θ qui minimise cette erreur de troncature n'est ni 0, ni 1. Il incarne un compromis entre un large domaine d'influence numérique ($\theta = 1$) et une diffusion numérique minimale ($\theta = 0$, voir l'exemple 6.1).

Exemple 6.1 Dans le cas du θ -schéma de l'exemple 6.1, $v = v_0 = 1 + A$ si $\theta = 0$ et $v = v_\theta = 1 + \frac{A}{1-\theta A}$ sinon. Comme $A \leq 0$, on trouve facilement que $v_\theta \leq v_0 \leq 1$ et donc que le schéma est le moins diffusif pour $\theta = 0$.

6.1.1 Schéma de Crank-Nicholson

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x^2} \quad (46)$$

Ce schéma est le θ -schéma avec $\theta = 1/2$. Il est universellement stable.

6.2 Schéma de Dufort et Frankel

3 niveaux de temps. L'initialisation doit se faire avec un schéma à 2 niveaux.

Exemple 6.2 (Schéma de Dufort et Frankel pour l'équation de la chaleur) En égalisant l'expression 35 à 0, avec $C = 2\sigma \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, $a_j = e^{ikj\Delta x}$, et $u_j^n = \xi^n e^{ikj\Delta x}$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \xi^{n+1} \\ \chi^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C}{1+C} 2 \cos k\Delta x & \frac{1-C}{1+C} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^n \\ \chi^n \end{pmatrix} \quad (47)$$

et le polynôme caractéristique de la matrice d'amplification est donc :

$$P(X) = X^2 - \frac{C}{1+C} 2 \cos k\Delta x X - \frac{1-C}{1+C} \quad (48)$$

Le produit des 2 racines est inférieur à 1 en valeur absolue. Donc si les racines sont complexes elles sont conjuguées, et il est facile de constater qu'elles sont de module inférieur à 1. Si les racines sont réelles, on remarque que

$$P(1) = \frac{2C}{1+C} (1 - \cos k\Delta x) \geq 0 \quad \text{et} \quad P'(1) = 2(1 - \frac{C}{1+C} \cos k\Delta x) \geq 0,$$

donc $\forall x > 1, P(x) > 0$, et

$$P(-1) = \frac{2C}{1+C} (1 + \cos k\Delta x) \geq 0 \quad \text{et} \quad P'(-1) = -2(1 + \frac{C}{1+C} \cos k\Delta x) \leq 0,$$

donc $\forall x < -1, P(x) > 0$. Donc que les 2 racines sont comprises entre -1 et 1 et le schéma est stable sans condition.