CAPÍTULO 2

OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

Agora que já conhecemos o que são proposições e os conectivos que podem ser utilizados para formarmos proposições compostas, vamos estudar quais tipos de operações podem ser realizadas.

Fala Professor

Em Lógica Simbólica, a ação de combinar proposições é chamada **"operação"**, os conectivos são chamados **"operadores"**, que são representados por símbolos específicos. Apresentamos no Quadro 1 as cinco **operações lógicas sobre proposições**, com seus respectivos conectivos e símbolos (PINHO, 1999):

Operação	**Conectivo**	**Símbolo**
Conjunção	e	$\wedge$
Disjunção	ou	$\vee$
Negação	não	~ ou ¬
Condicional	se ... então	$\rightarrow$
Bicondicional	se e somente se	$\leftrightarrow$

Quadro 1 – Operações lógicas sobre proposições.

Como podemos determinar o valor lógico de uma proposição composta, em função dos valores lógicos das proposições que a compõe?

Para responder a essa pergunta, temos que definir as operações, isto é, dar o resultado da operação para cada possível conjunto de valores dos operandos.

2.1 Negação (~)

Negação – de uma proposição **p** é a proposição representada por "**não p**" ou por "~ **p**", cujo valor lógico é verdade (V) quando **p** é falso e falsidade (F) quando **p** é verdadeiro. Ou seja, "**não p**" tem o valor lógico oposto de **p** (ALENCAR FILHO, 2003).

Conceitos

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da negação e as igualdades válidas nesse caso:

Igualdades:

~ V = F e ~ F = V

V (~ p) = ~ V(p)

p	**~ p**
V	F
F	V

Como vemos, negação é o fato de negar, opor-se ou se colocar de forma contrária a algo. Isso em nossa linguagem é feita utilizando-se o advérbio "não" ou expressões como "não é verdade que", "é falso que" etc.

Exemplos:

p : Maria é jornalista.
~p : Maria **não** é jornalista.
~p : **é falso que** Maria é jornalista.
~p : **não é verdade que** Maria é jornalista.

2.2 Conjunção (^)

Conceitos

Conjunção – de duas proposições **p** e **q** é a proposição representada por "**p e q**" ou "**p ∧ q**", cujo valor lógico é a verdade (**V**) quando as proposições **p e q** são verdadeiras e a falsidade (**F**) nos demais casos (ALENCAR FILHO, 2003).

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da conjunção e as igualdades válidas neste caso:

Igualdades:

V ∧ V = V
V ∧ F = F
F ∧ V = F
F ∧ F = F
V(p ∧ q) = V(p) ∧ V(q)

p	**q**	**p ^ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos:

1) p: o mar é azul (V)
q: 1 é impar (V)
----
p ∧ q = o mar é azul e 1 é ímpar (V)
V(p ∧ q) = V(p) ∧ V(q) = V ∧ V = V

2) p: a lua é quadrada (F)
q: 1 é ímpar (V)

$p \wedge q$ = a lua é quadrada **e** 1 é ímpar (F)
$V(p \wedge q) = V(p) \wedge V(q) = F \wedge V = F$

Marcos é alto, mas não é elegante.

↓

O mas neste caso tem sentido de e (conjunção). É equivalente a dizer: Marcos é alto e não é elegante.

2.3 Disjunção (∨)

Conceitos

Disjunção – de duas proposições **p** e **q** é a proposição representada por "**p ou q**" ou "**p** ∨ **q**", cujo o valor lógico é a verdade (**V**) quando ao menos uma das proposições **p** e **q** é verdadeira e a falsidade (**F**) quando as proposições p e q são ambas falsas (ALENCAR FILHO, 2003).

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da disjunção e as igualdades válidas neste caso:

Igualdades:

$V \vee V = V$
$V \vee F = V$
$F \vee V = V$
$F \vee F = F$
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q)$

p	**q**	**p ∨ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos:

1) p: Rio de Janeiro é a capital do Brasil (F)
q: 1 + 3 = 4 (V)

$p \vee q$ = Rio de Janeiro é a capital do Brasil **ou** 1 + 3 = 4 (V)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee V = V$

2) p: Aparecida do Norte é padroeira do ES (F)
q: Vasco da Gama descobriu o Brasil (F)

$p \vee q$ = Aparecida do Norte é padroeira do ES **ou** Vasco da Gama descobriu o Brasil (F)
$V(p \vee q) = V(p) \vee V(q) = F \vee F = F$

2.4 Disjunção Exclusiva ($\veebar$)

Ocorre quando no cotidiano encontramos situações onde dadas duas sentenças não faz sentido dizermos que a "disjunção" das duas possa ser verdadeira quando ambas são verdadeiras.

Conceitos

Disjunção exclusiva – de duas proposições **p** e **q** é a proposição representada por "**ou p ou q**" ou "**p** $\veebar$ **q**", cujo valor lógico é a verdade (**V**) somente quando **p** é verdadeira ou **q** é verdadeira, mas não quando **p** e **q** são ambas verdadeiras, e a falsidade (**F**) quando p e q são ambas verdadeiras ou falsas. (ALENCAR FILHO, 2003).

Na literatura é possível encontrar outro símbolo para disjunção exclusiva: p $\oplus$ q.

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da disjunção exclusiva e as igualdades válidas neste caso:

Igualdades:

V $\veebar$ V = F
V $\veebar$ F = V
F $\veebar$ V = V
F $\veebar$ F = F
V(p $\veebar$ q) = V(p) $\veebar$ V(q)

p	**q**	**p $\veebar$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos:

p: João é Argentino (V)
q: João torce pro Brasil (V)

---

p $\veebar$ q = **ou** João é Argentino **ou** João torce pro Brasil (F)
V(p $\veebar$ q) = V(p) $\veebar$ V(q) = V $\veebar$ V = F

Exemplo 2: p: Carlos é gaúcho. q: Carlos é mineiro.	Não faz sentido, tratando-se de uma única pessoa, que ambas sentenças p e q sejam verdadeiras. Por isso utiliza-se a disjunção exclusiva. p $\oplus$ q: Ou Carlos é gaúcho ou Carlos é mineiro.

2.5 Condicional ($\rightarrow$)

Conceitos

Condicional – é uma proposição representada por "**se p então q**" ou "**p** $\rightarrow$ **q**", cujo valor lógico é a falsidade (**F**) no caso em que **p** é verdadeira e **q** é falsa e a verdade (V) nos demais casos (ALENCAR FILHO, 2003).

i) p é condição suficiente para q.
ii) q é condição necessária para p.

Se temos p $\rightarrow$ q, dizemos que p é o antecedente e q é o conseqüente.

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da condicional e as igualdades válidas neste caso:

Igualdades:

$V \rightarrow V = V$
$V \rightarrow F = F$
$F \rightarrow V = V$
$F \rightarrow F = V$
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q)$

p	**q**	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Uma condicional é verdadeira todas as vezes que o seu antecedente é uma proposição falsa.

Exemplos:

1) p: Marisa Monte é uma cantora brasileira (V)
q: Marisa Monte nasceu no Chile (F)

$p \rightarrow q$ = **se** Marisa Monte é uma cantora brasileira **então** Marisa Monte nasceu no Chile (F)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

2) p: Fevereiro tem 30 dias (F)
q: Todo ano temos ano bissexto (F)

$p \rightarrow q$ = **se** Fevereiro tem 30 dias **então** Todo ano temos ano bissexto (V)
$V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = V$

2.6 Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Conceitos

Bicondicional – é uma proposição representada por "**p se e somente se q**" ou "$\mathbf{p \leftrightarrow q}$", cujo valor lógico é a verdade(V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos. (ALENCAR FILHO, 2003).

Se temos $p \leftrightarrow q$, dizemos que p é uma condição suficiente e necessária a q.

A seguir é mostrada a tabela verdade com os valores lógicos da bicondicional e as igualdades válidas neste caso:

Igualdades:

$V \leftrightarrow V = V$

$V \leftrightarrow F = F$

$F \leftrightarrow V = F$

$F \leftrightarrow F = V$

$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q)$

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemplos:

1) p: 6/3 = 3 (F)
   q: Ronaldinho é jogador de futebol (V)

$p \leftrightarrow q$ = 6/3 = 3 **se e somente se** Ronaldinho é jogador de futebol (F)
$V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$

Atividades

ATIVIDADE 3:

1. Dadas as proposições **p: João é cantor** e **q: Maria é professora**, traduza as seguintes proposições para o português:

(a) $\sim p$ (b) $p \vee q$ (c) $p \wedge q$ (d) $p \rightarrow q$

(e) $q \leftrightarrow p$ (f) $p \vee q \rightarrow q$ (g) $p \wedge \sim q$ (h) $\sim p \vee \sim q$

(i) $\sim\sim p$ (j) $\sim p \wedge q \rightarrow p$ (k) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ (l) $\sim p \leftrightarrow \sim q$

2. Dadas as proposições **p: Pedro é elegante** e **q: Pedro é bonito**, traduza as seguintes proposições para a linguagem simbólica:

(a) Pedro é elegante e bonito

(b) Pedro é elegante, mas não é bonito

(c) Não é verdade que Pedro seja bonito e elegante

(d) Pedro não é elegante nem bonito

(e) Pedro é bonito ou feio, mas é elegante

(f) Ou Pedro é bonito ou não é elegante

3. Traduzir para linguagem simbólica as seguintes expressões matemáticas:

(a) Se $x > 0$ então $y = 7$ (b) Se $x = 1$ então $y > 1$ e $z < 4$

(c) $x = 0$ ou $x > 0$ (d) $x \neq 0$ ou ($x = 0$ e $y = 1$)

Atividades

4. Determine o valor lógico (**V** ou **F**) das expressões abaixo:

(a) $3 + 2 = 7$ e $5 + 5 = 10$

(b) $1 > 0 \wedge 2 + 2 = 4$

(c) $\sim(1+1=2 \leftrightarrow 3+4=5)$

(d) $2+2=4 \rightarrow (3+3=7 \leftrightarrow 1+1=4)$

5. Determinar V(p) em cada caso:

(a) $V(q) = F$ e $V(p \wedge q) = F$

(b) $V(q) = F$ e $V(p \rightarrow q) = F$

(c) $V(q) = V$ e $V(q \leftrightarrow p) = F$

(d) $V(q) = F$ e $V(q \rightarrow p) = V$

Indicações

Para maior compreensão, ler o capítulo 2 – Operações Lógicas sobre Proposições do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.