CAPÍTULO 7

MÉTODO DEDUTIVO

Vamos dar um grande passo agora: realizar demonstrações por meio de proposições. Isso é muito importante, inclusive, na nossa vida, para conseguirmos deduzir soluções dos problemas do dia-a-dia.

Fala Professor

Até o momento fizemos demonstrações por intermédio de tabelas-verdade, que podem ser utilizadas para mostrar que um argumento é válido ou inválido. No entanto, esse método apresenta dois sérios inconvenientes (PINHO, 1999):

Em primeiro lugar, o número de linhas cresce muito rapidamente, à medida que aumenta o número de proposições simples envolvidas no argumento. Por exemplo, com 10 proposições a tabela necessita de 1024 linhas, e com 11, o número de linhas vai a 2048. Com mais umas poucas proposições, sua construção se torna impraticável.

A segunda restrição é ainda pior. No Cálculo de Predicados, que veremos mais tarde, muitas vezes não existe um procedimento que permita estabelecer o valor lógico de uma dada afirmação, o que torna impossível a construção da Tabela Verdade.

Por esse motivo foram desenvolvidos outros métodos para que se possa mostrar a validade de um argumento. Tais métodos são chamados **métodos dedutivos,** cuja aplicação se chama dedução.

Segundo Descartes, **o método dedutivo** é um método lógico que pressupõe a existência de verdades gerais já afirmadas e que sirvam de base (premissas) para se chegar, por meio dele, a conhecimentos novos. Em termos mais formais, o conceito de dedução pode ser apresentado da seguinte forma:

Através do método dedutivo obtém-se novos conhecimentos a partir de conhecimentos preliminares (chamados de premissas)

Dado um argumento P1 ∧ P2 ∧ ... ∧ Pn ∧ Q chama-se **demonstração** ou **dedução** de Q a partir das premissas P1 , ... Pn, a seqüência finita de proposições X1, X2, ... Xk, tal que cada Xi ou é uma premissa ou decorre logicamente de proposições anteriores da seqüência, de tal modo que a última proposição Xk seja a conclusão Q do argumento dado (PINHO, 1999).

Conceitos

Cada proposição Xi que incluímos na seqüência deve decorrer logicamente das anteriores; isso significa que deve ser obtida através da atuação de equivalências ou inferências sobre uma proposição ou uma conjunção de proposições anteriores.

Se for possível obter a conclusão Q com base no procedimento de dedução, o argumento é válido; caso contrário, não é válido.

Assim, se todas as premissas são verdadeiras, a conclusão deve ser verdadeira.

O processo de dedução consiste basicamente dos seguintes passos (PINHO, 1999):

Dado um argumento: $\mathbf{P1 \wedge P2 \wedge \ldots \wedge Pn \rightarrow Q}$

- Definimos o conjunto P constituído pelas premissas $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$;
- Fazemos atuar equivalências e inferências conhecidas sobre um ou mais elementos do conjunto, obtendo novas proposições, e incluindo-as no conjunto P;
- Repetimos o passo acima até que a proposição incluída seja o conseqüente Q.

7.1 Exemplos

A seguir vamos ver alguns exemplos de demonstrações usando o método dedutivo. Aqui, **T** representará tautologias e **C** contradições (ALENCAR FILHO, 2003).

(1) Demonstrar a implicação: $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow p}$ **(Simplificação)**

Se $\mathbf{p \wedge q \Rightarrow p}$, então $p \wedge q \rightarrow p$ é uma tautologia. Assim:

Demonstração: $p \wedge q \rightarrow p \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim(p \wedge q) \vee p \underset{\text{regra de De Morgan}}{\Leftrightarrow} (\sim p \vee \sim q) \vee p \underset{\text{Associação}}{\Leftrightarrow} (\sim p \vee p) \vee \sim q \Leftrightarrow T \vee \sim q \underset{\text{Identidade}}{\Leftrightarrow} T$

(2) Demonstrar a implicação: $\mathbf{p \Rightarrow p \vee q}$ **(Adição)**

Demonstração: $p \rightarrow p \vee q \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim p \vee (p \vee q) \underset{\text{Associação}}{\Leftrightarrow} (\sim p \vee p) \vee q \Leftrightarrow T \vee q \underset{\text{Identidade}}{\Leftrightarrow} T$

(3) Demonstrar a implicação: $\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q}$ **(Modus ponens)**

Demonstração: $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim((p \rightarrow q) \wedge p) \vee q \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim((\sim p \vee q) \wedge p) \vee q \underset{\text{regra de De Morgan}}{\Leftrightarrow} \sim(\sim p \vee q) \vee \sim p \vee q \underset{\text{regra de De Morgan}}{\Leftrightarrow} (p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee q \underset{\text{regra de De Morgan}}{\Leftrightarrow} (p \wedge \sim q) \vee \sim(p \wedge \sim q) \Leftrightarrow T$

(4) Demonstrar a implicação: $\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p}$ **(Modus tollens)**

Demonstração: $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} (\sim p \vee q) \wedge \sim q \underset{\text{Distributiva}}{\Leftrightarrow} (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee C \underset{\text{implicação lógica}}{\Leftrightarrow} \sim p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

(5) Demonstrar a equilvalência: $\mathbf{p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)}$

Se $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$, então aplicando as regras de equilvalência em $p \wedge q \rightarrow r$ chegamos a $p \rightarrow (q \rightarrow r)$. Assim:

Demosntração: $p \wedge q \rightarrow r \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim(p \wedge q) \vee r \underset{\text{regra de De Morgan}}{\Leftrightarrow} \sim p \vee \sim q \vee r \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} \sim p \vee (q \rightarrow r) \underset{\text{equivalência da condicional}}{\Leftrightarrow} p \rightarrow (q \rightarrow r)$

7.2 Redução do Número de Conectivos

Conceitos

Teorema: entre os cinco conectivos fundamentais ($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) três são expressados em termos de apenas dois dos seguintes pares: (1) $\sim$ e $\vee$ (2) $\sim$ e $\wedge$ (3) $\sim$ e $\rightarrow$

Caso (1) $p \wedge q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$. Caso (2) $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$. Caso (3) $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \leftrightarrow q$.
Exemplo: caso (1) i) $p \wedge q \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim\sim q \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$.

7.3 Forma Normal

Conceitos

Uma proposição está na **forma normal (FN)** se e somente se contém os conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$ (ALENCAR FILHO, 2003).

Existem dois tipos de FN:

- Forma Normal Conjuntiva
- Forma Normal Disjuntiva

7.4 Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Conceitos

Uma proposição está na **forma normal conjuntiva (FNC)** se e somente forem verificadas as seguintes condições (ALENCAR FILHO, 2003):

- Contém apenas conectivos $\sim$, $\wedge$ e $\vee$
- $\sim$ não aparece repetido, como $\sim\sim$ e não tem alcance sobre $\wedge$ e $\vee$ como em $\sim(p \wedge q)$
- $\vee$ não tem alcance sobre $\wedge$ (não existe $p \vee (q \wedge r)$)

Estão na FNC.:

p ^q
p v q v r
~p ^ ~q

Como transformar uma proposição em outra, equivalente, na FNC?

1. Elimine os conectivos -> e <-> substituindo:

p $\rightarrow$ q por ~p v q

p$\leftrightarrow$q por (~p v q) ^(p v ~q)

2. Elimine as duplas negações e a negação de parênteses substituindo:

~~ p por p
~ (p $\wedge$ q) por ~ p $\vee$ ~ q
~ (p $\vee$ q) por ~ p $\wedge$ ~ q

3. Substitua

p $\vee$ (q $\wedge$ r) por (p $\vee$ q) $\wedge$ (p $\vee$ r)

7.5 Forma Normal Disjuntiva (FND)

Conceitos

Uma proposição está na **forma normal disjuntiva (FND)** se e somente são verificadas as seguintes condições (ALENCAR FILHO, 2003):

- Contém apenas conectivos ~ , ^ e V
- ~ não aparece repetido, como ~~ e só incide sobre letras proposicionais
- ^ não tem alcance sobre v (não existe p ^ (q v r))

Estão na FND:

p ^ q ^ r
p v ~q
p v (q ^ r)

Como transformar uma proposição em outra, equivalente, na FND?

1. Use as duas primeiras regras para FNC

2. Substitua

$p \wedge (q \vee r)$ por $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge r$ por $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

7.6 Dualidade

Seja P uma proposição que só contem os conectivos ~, ∧ e ∨ . A proposição Q obtida de P trocando ∨ por ∧ e trocando ∧ por ∨ é denominada **dual** de P.

P: $\sim(p \vee q) \wedge \sim r$

Dual de P: $\sim(p \wedge q) \vee \sim r$

Conceitos

Princípio da dualidade: Se P1 e P2 são duas proposições equivalentes então as duais Q1 e Q2 também são equivalentes.

Assim, da equivalência $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ deduz-se, pelo Princípio de dualidade a equivalência $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$.

Atividades

ATIVIDADE 12 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 85:

1. Demonstrar as equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (b) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

2. Simplificar as proposições:

(a) $\sim(p \vee \sim q)$ (b) $\sim(\sim p \wedge q)$

(c) $(p \vee q) \wedge \sim p$ (d) $(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$

3. Use o método dedutivo para demonstrar:

(a) $p \wedge \sim p \Rightarrow q$ (b) $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$

(c) $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$ (d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \wedge r$

4. Determinar uma FNC para as proposições:

(a) $p \rightarrow q$ (b) $p \rightarrow \sim p$

(c) $(p \wedge \sim p) \downarrow (q \wedge \sim q)$ (d) $(\sim p \wedge q) \veebar q$

5. Determinar uma FND para as proposições:

(a) $p \uparrow q$ (b) $\sim(\sim p \vee \sim q)$

(c) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p$ (d) $p \leftrightarrow \sim p$

Indicações

LEIA MAIS

Para maior compreensão, ler o capítulo 8 – Método Dedutivo do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.