CAPÍTULO 11

LÓGICA DE PREDICADOS E SENTENÇAS ABERTAS

Fala Professor

*Até o momento examinamos uma parte da Lógica chamada **Lógica das Proposições**, ou **Cálculo Proposicional**. Aprendemos técnicas que nos permitiram verificar se um determinado tipo de argumento é válido ou inválido. Agora trataremos de aspectos ainda não vistos. Trata-se de outra parte da lógica, chamada **Lógica de Predicados**.*

Nos argumentos estudados na lógica proposicional, os enunciados simples eram combinados por meio dos conectivos, formando enunciados compostos. A validade desses argumentos dependia, essencialmente, da forma pela qual os enunciados compostos se apresentavam (PINHO, 1999).

Porém, no nosso cotidiano, encontramos argumentos como, por exemplo:

Todos os humanos são inteligentes
Pedro é um humano
Logo, Pedro é inteligente

Esse argumento é claramente válido, mas sua validade não depende da forma pela qual os enunciados simples se compõem, uma vez que, neste argumento, não há enunciados compostos. Pode-se perceber que sua validade depende, na verdade, da estrutura interna dos enunciados que constituem o argumento. A construção de métodos para analisar argumentos como esse vai, portanto, exigir a criação de técnicas para descrever e simbolizar a estrutura interna dos enunciados.

A premissa "Pedro é um humano" é uma declaração de que determinado indivíduo (Pedro) possui uma propriedade específica (ser humano).

Conceitos

Na linguagem natural, o indivíduo que possui uma propriedade é chamado **sujeito**, enquanto a propriedade descrita é chamada **predicado** (PINHO, 1999).

O predicado, na verdade, explicita certas qualidades que o sujeito possui e que permite incluí-lo em uma categoria; por exemplo, quando dizemos "Pedro é um humano" queremos dizer que o objeto chamado

"Pedro" possui certas características que permitem incluí-lo no conceito que fazemos daquilo que chamamos "humano".

Em Lógica Simbólica, **representamos o predicado por sua inicial minúscula**, e o sujeito a seguir, entre parênteses; assim, "Pedro é um humano" fica representado por

h (pedro)

A linguagem natural permite ainda a construção de um outro tipo de sentença, como "ele foi presidente do Brasil" em que o sujeito não é um substantivo, mas um pronome, isto é, um termo que fica no lugar do nome.

Em Lógica Simbólica, também existem termos que ocupam o lugar dos nomes. Tais termos são chamados **variáveis,** e costumam ser representados, como na Matemática, pelas últimas letras do alfabeto, em maiúsculas: X, Y, Z, etc. Utilizando a variável x no lugar de "ele", a sentença assume a forma: **x foi presidente do Brasil.**

Em Lógica Simbólica, representando o predicado "foi presidente do Brasil" por P, e levando em conta que x é sujeito, teríamos a representação: p(X).

11.1 Sentenças Abertas

Uma frase na qual o sujeito é uma constante, como "Pedro é um humano", pode ser verdadeira ou falsa; mas se o sujeito for uma variável, como em "ele foi presidente do Brasil", ela não é verdadeira nem falsa, vai depender do nome que assumir o lugar do pronome. Uma frase como essa não é, portanto, um **enunciado** (PINHO, 1999).

Os enunciados são chamadas **sentenças fechadas**, ou simplesmente, **fechados**, enquanto que frases como "x foi presidente do Brasil" , "y escreveu Os Lusíadas" e "z viajou para os Estados Unidos" são chamadas **sentenças abertas,** ou, simplesmente, **abertos**.

Conceitos

Sentença aberta – com uma variável em um conjunto A é uma expressão p(X) tal que p(a) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo a ∈ A (PINHO, 1999).Ou seja, p(X) torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa) todas as vezes que a variável X é substituída por qualquer elemento a do conjunto A.

O conjunto A recebe o nome de conjunto universo (ou domínio) da variável X.

Sentenças abertas não são verdadeiras nem falsas. Dizemos apenas que são satisfeitas para certos valores das variáveis, e não satisfeitas para outros. A substituição das variáveis de uma sentença aberta, por constantes, chama-se instanciação ou especificação. Ela transforma uma sentença aberta em um enunciado, que, este sim, pode ser verdadeiro ou falso.

11.2 Conjunto Verdade de uma Sentença-Aberta

Chama-se Universo de uma variável o conjunto de valores que ela pode assumir. Na linguagem corrente, o Universo (às vezes chamado Universo do Discurso) não é, muitas vezes, explicitado; intuitivamente, incluímos os objetos que podem substituir o pronome e descartamos aqueles objetos que sabemos que não podem; por exemplo, na frase "isto está verde", sabemos que "isto" pode ser qualquer coisa.

Conjunto – Verdade (V_p) – Em um aberto p(X) é o conjunto de elementos do Universo que, quando instanciam a variável, satisfazem (tornam verdadeiro) o enunciado; ou seja

$V_p = \{ a \in U \mid$ V[p(a)] $= V \}$ (PINHO, 1999).

Conceitos

1) Condição Universal: p(X) é verdadeira para todo x ∈ U (Vp = U).

2) Condição Impossível: p(X) é falsa para todo x ∈ U (Vp = ∅).

3) Condição Possível: ∃x ∈ U (existe elementos do universo) tal que p(X) é verdadeira (Vp ⊂ U).

Por exemplo, seja U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } e a expressão "x é primo" representada por p(X). Temos então Vp = { 2, 3, 5, 7 }.

Observe que o Conjunto Verdade é um subconjunto do conjunto Universo.

11.3 Sentenças Abertas com n Variáveis

Os predicados podem ser monádicos (de um só termo), diádicos (de dois termos), triádicos (de três termos) ou poliádicos (de quatro ou mais termos). Muitos preferem chamar os predicados de dois ou mais termos de "relação", reservando o nome predicado para os predicados monádicos (PINHO, 1999).

Conceitos

Eis alguns exemplos de relações e a respectiva sugestão de forma simbólica:

x gosta de y	gosta(X, Y).
João é casado com Maria	casado(joao, maria).
x está entre y e z	esta_entre(X, Y, Z).
Camões é o autor de Os Lusíadas	autor(camoes, os lusíadas).

Nas relações, a ordem das variáveis é importante. No exemplo dado, gosta(X, Y) significa "x gosta de y" mas não significa "y gosta de x". Esse fato deve ser levado em conta mesmo em predicados que sabemos ser comutativos. No exemplo, casado(joao, maria) significa "João é casado com Maria", mas não significa "Maria é casada com João" . O motivo para isso é que a Lógica Formal leva em conta apenas a forma das expressões, e não seu significado (PINHO, 1999).

Na instanciação, variáveis iguais devem ser substituídas por nomes iguais; variáveis distintas, no entanto, podem ser substituídas por nomes iguais ou distintos. Por exemplo, a sentença aberta "x é maior ou igual a y" permite tanto a instanciação "7 é maior ou igual a 3" como a instanciação "7 é maior ou igual a 7".

11.4 Conjunto Verdade de uma Sentença-Aberta com n Variáveis

Em relações com duas variáveis, o Conjunto Universo é constituído pelo produto cartesiano dos Universos das variáveis; o Conjunto–Verdade é constituído pelos pares ordenados dos valores que satisfazem a relação (PINHO, 1999).

Por exemplo, considere o aberto m(X, Y) representando "x é metade de y", onde Ux = {1, 2, 3} e Uy = { 4, 5 , 6 }. Então V_M = { (2, 4), (3, 6) }.

A sentença aberta com n variáveis é uma expressão p(X1, X2, …, Xn) tal que a p(a1, a2, …, an) é V ou F para toda n-upla (a1, a2, …, an) ∈ A1 x A2 x … x An. E o conjunto verdade Vp são todas as n-uplas tais que a proposição é verdadeira.

Atividades

ATIVIDADE 18:

1. Resolver os demais exercícios do capítulo 14 do livro Alencar Filho, Edgard de. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 2003.

2. Determinar o conjunto-verdade em N de cada uma das seguintes sentenças abertas:

(a) 2x = 6 (b) x – 5 ∈ N

3. Determinar o conjunto-verdade em **A = {1, 3, 4, 7, 9, 11}** de cada uma das seguintes sentenças abertas:

(a) x é divisor de 27 (b) $x^2 \in A$

Indicações

Ler o capítulo 14 – Sentenças Abertas do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.

11.5 Operações Lógicas sobre Sentenças-Abertas

No Cálculo de Predicados podemos definir as operações de conjunção, disjunção, negação, condicional e bicondicional, sobre enunciados e/ou sentenças abertas. Assim, por exemplo, a sentença aberta "x é médico" é representada por $m(X)$ e "x é professor" é representada por $p(X)$. Podemos, então, representar "x é médico e professor" por $m(X) \wedge p(X)$ (PINHO, 1999)..

Conjunção:

Seja U o conjunto Universo de x; os valores de U que satisfazem $m(X) \wedge p(X)$ devem satisfazer simultaneamente $m(X)$ e $p(X)$; consequentemente,

$$V_{M \wedge P} = V_M \cap V_P$$

Disjunção:

Da mesma forma, podemos representar "x é médico ou professor" por $m(X) \vee p(X)$. Este aberto é satisfeito por todos os elementos que são médicos e por todos que são professores; portanto,

$$V_{M \vee P} = V_M \cup V_P$$

Negação:

Na operação de negação, podemos representar "x não é médico" por $\sim m(X)$, e seu Conjunto-Verdade será constituído por todos os elementos do Universo que não satisfazem $m(X)$, isto é, o complemento de V_m:

$$V_{\sim M} = U - V_M$$

Uma notação de uso generalizado para o complemento de V_M é V'_M.

Condicional

Considere a expressão "se x trabalha, então x fica cansado"; representando "x trabalha" por $t(X)$, e "x fica cansado" por $c(X)$, a expressão fica representada por $t(X) \rightarrow c(X)$. Seu Conjunto – Verdade é constituído por duas classes de elementos: pelos que trabalham e ficam cansados e pelos que não trabalham (uma vez que quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira).

Temos então que

$V_{T \rightarrow C} = (V_T \cap V_C) \cup V_{\sim T}$; utilizando a propriedade distributiva, vem:

$V_{T\rightarrow C} = (V_T \cup V_{\sim T}) \cap (V_{\sim T} \cup V_C)$; mas $V_T \cup V_{\sim T} = U$

$V_{T\rightarrow C} = U \cap (V_{\sim T} \cup V_C)$ ou seja,

$V_{T\rightarrow C} = V_{\sim T} \cup V_C$ ou, ainda,

$$V_{T\rightarrow C} = V'_T \cup V_C$$

Bicondicional:

Para a operação bicondicional, considere a expressão "x trabalha se e somente se ganha dinheiro"; representando "x trabalha" por t(X), e "x ganha dinheiro" por g(X), temos $t(X) \leftrightarrow g(X)$. O conjunto de elementos que satisfazem a essa expressão é constituído pela união entre os conjuntos daqueles que trabalham e ganham dinheiro e daqueles que não trabalham e não ganham dinheiro; assim,

$$V_{T\leftrightarrow C} = (V_T \cap V_C) \cup (V'_T \cap V'_C)$$

Obter a forma simbólica de uma expressão em linguagem textual não é difícil, mas enquanto não se adquire uma certa habilidade, dá algum trabalho. Muitas vezes, para facilitar essa tarefa, construímos uma forma intermediária, chamada forma lógica, obtida apenas por introdução de variáveis na forma textual.

Vamos ver alguns exemplos, obtendo a forma lógica e simbólica de expressões textuais, utilizando os predicados definidos:

11.6 Exemplos (Pinho, 1999, p. 43)

(1) Gatos caçam ratos (G(x) – x é um gato; R(x) – x caça ratos)

> Forma lógica: se x é um gato, x caça ratos
> Forma simbólica: $G(x) \rightarrow R(x)$

(2) Chineses velhos são sábios (C(x) – x é chinês; V(x) – x é velho; S(x) – x é sábio)

> Forma lógica: se x é chinês e x é velho, então x é sábio
> Forma simbólica: $C(x) \wedge V(x) \rightarrow S(x)$

(3) Abacates são deliciosos e nutritivos (A(x) – x é um abacate; D(x) – x é delicioso; N(x) – x é nutritivo)

> Forma lógica: se x é um abacate, então x é delicioso e x é nutritivo
> Forma simbólica: $A(x) \rightarrow D(x) \wedge N(x)$

(4) Abacates e laranjas são deliciosos e nutritivos (A(x) – x é um abacate; L(x) – x é uma laranja; D(x) – x é delicioso; N(x) – x é nutritivo)

Forma lógica: se x é um abacate ou x é uma laranja, então x é delicioso e x é nutritivo
Forma simbólica: $A(x) \lor L(x) \rightarrow D(x) \land N(x)$

(5) São raros os políticos que não mentem (R(x) – x é raro; P(x) – x é político; M(x) – x mente)

Forma lógica: se x é político e x não mente, então x é raro
Forma simbólica: $P(x) \land \sim M(x) \rightarrow R(x)$

(6) Carros só se locomovem com gasolina (C(x) – x é um carro; L(x) – x se locomove; G(x) – x tem gasolina)

Forma lógica: se x é um carro, então x se locomove então x tem gasolina
Forma simbólica: $C(x) \rightarrow (L(x) \rightarrow G(x))$

(7) Estradas de terra são trafegáveis unicamente quando secas (E(x) – x é uma estrada de terra; T(x) – x é trafegável; S(x) – x está seca)

Forma lógica: se x é uma estrada de terra, então se x é trafegável, então x está seca
Forma simbólica: $E(x) \rightarrow (T(x) \rightarrow S(x))$

(8) Homens só se casam com mulheres (H(x) – x é homem; C(x,y) – x é casado com y; M(y) – y é mulher)

Forma lógica: se x é homem, e x é casado com y, então y é mulher
Forma simbólica: $H(x) \land C(x,y) \rightarrow M(y)$

(9) Gatos pretos são melhores caçadores que outros gatos (G(x) – x é um gato; P(x) – x é preto; C(x,y) – x é melhor caçador que y)

Forma lógica: se x é um gato e x é preto e y é um gato e y não é preto, então x é melhor caçador que y
Forma simbólica: $G(x) \land P(x) \land G(y) \land \sim P(y) \rightarrow C(x,y)$

Atividades

ATIVIDADE 19:

1. Resolver os demais exercícios do capítulo 15 do livro de Edgar de Alencar Filho - Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.

2. Determinar o conjunto-verdade em **A = {1, 2, 3, ..., 9, 10}** de cada uma das seguintes sentenças abertas:

(a) $x < 7 \wedge x$ é impar (b) $(x+4) \in A \wedge (x^2 - 5) \notin A$

Indicações

Para maior compreensão, ler o capítulo 15 – Operações Lógica sobre Sentenças Abertas do livro de Edgard de Alencar Filho - Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.