CAPÍTULO 8

ARGUMENTOS E REGRAS DE INFERÊNCIA

Vamos continuar aperfeiçoando nossos conhecimentos em demonstrações por meio de proposições. Para isso aprenderemos alguns novos conceitos.

Fala Professor

8.1 Argumento

Argumento – é toda afirmação que uma dada seqüência finita P_1, P_2,...,P_n de proposições tem como conseqüência, ou acarreta, uma proposição final Q (ALENCAR FILHO, 2003).

Conceitos

As proposições P_1, P_2,..., P_n dizem-se as premissas do argumento, e a proposição final Q diz-se a conclusão do argumento.

Um argumento de premissas P_1, P_2,...,P_n e de conclusão Q indica-se por:

$P_1, P_2,...,P_n \vdash Q$, onde se lê: "$P_1P_2$,...,$P_n$ acarretam Q".
Podemos dizer que Q decorre, ou se deduz ou se infere de P1, P2, …, Pn. Na forma padronizada as premissas invocadas para "servir de justificativa", acham-se sobre o traço horizontal e a conclusão do argumento estará sob o mesmo traço horizontal da seguinte forma:

P1

P2

...

Pn

______

Q

8.2 Validade de um Argumento

Conceitos

Um argumento P1, P2,..., Pn ⊢ Q diz-se **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira **todas as vezes** que as premissas P1, P2,..., Pn são verdadeiras (ALENCAR FILHO, 2003).

Portanto, todo argumento válido goza da seguinte característica: A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

Um argumento não-válido diz-se um **sofisma**.

Desse modo, todo argumento tem um valor lógico, digamos V se é válido(correto, legítimo) ou F se é um sofisma(incorreto, ilegítimo).

As premissas dos argumento são verdadeiras ou, pelo menos admitidas como tal. Aliás, a Lógica só se preocupa com a validade dos argumentos e não com a verdade ou falsidade das premissas e das conclusões.

A validade de um argumento depende, exclusivamente, da relação existente entre as premissas e a conclusão. Portanto, afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas são verdadeiras.

8.3 Critério de Validade de um Argumento

Conceitos

Teorema – um argumento P1, P2,..., Pn ⊢ Q diz-se **válido** se e somente se a condicional: (P1 ∧ P2 ∧...∧ Pn) → Q é **tautológica** (ALENCAR FILHO, 2003).

Representação do argumento: P1, P2, …, Pn ⊢ Q.

8.4 Condicional Associada a um Argumento

Atividades

Dado um argumento P1, P2,..., Pn ⊢ Q, a este argumento corresponde a condicional: (P1 ∧ P2 ∧...∧ Pn) → Q (ALENCAR FILHO, 2003).

cujo antecedente é a conjunção das premissas e cujo consequente é a conclusão, denominada "condicional associada"ao argumento dado.

8.5 Argumentos válidos Fundamentais

São argumentos válidos fundamentais ou básicos (de uso corrente) os constantes da seguinte lista (ALENCAR FILHO, 2003):

I . Adição (AD):

(i) $p \vdash p \vee q$; (ii) $p \vdash q \vee p$

II. Simplificação (SIMP):

(i) $p \wedge q \vdash p$; (ii) $p \wedge q \vdash q$

III. Conjunção (CONJ):

(i) $p, q \vdash p \wedge q$; (ii) $p, q \vdash q \wedge p$

IV Absorção (ABS): $p \rightarrow q \vdash p \rightarrow (p \wedge q)$

V. Modus Ponens (MP): $p \rightarrow q, \quad p \vdash q$

VI. Modus Tollens (MT): $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

VII. Silogismo disjuntivo (SD):

(i) $p \vee q, \sim p \vdash q$; (ii) $p \vee q, \sim q \vdash p$

VIII. Silogismo hipotético (5H):

$p \rightarrow q, \quad q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

IX. Dilema construtivo (DC):

$p \rightarrow q, \ r \rightarrow s, p \vee r \vdash q \vee s$

X. Dilema destrutivo (DD):

$p \rightarrow q, \ r \rightarrow s, \sim q \vee \sim s \vdash \sim p \vee \sim r$

A validade desses dez argumentos é conseqüência imediata das tabelas-verdade. Vide capítulo 5.

8.6 Regras de Inferência

Os argumentos que vimos, anteriormente, são usados para fazer "inferências", isto é, executar os "passos" de uma dedução ou demonstração, por isso chamam-se também, regras de inferência.

Conceitos

Uma **inferência lógica,** ou, simplesmente uma **inferência**, é uma tautologia da forma $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$. A proposição **p** é chamada antecedente, e **q**, conseqüente da implicação. As inferências lógicas, ou regras de inferência, são representadas por $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ (PINHO, 1999).

Da definição decorre imediatamente que $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, se e somente se, o conseqüente **q** assumir o valor lógico **V**, sempre que o antecedente **p** assumir esse valor. Em outras palavras, para que a condicional seja verdadeira, essa condição é necessária, pois, se o conseqüente for falso com o antecedente verdadeiro, a condicional não é verdadeira. Por outro lado, a condição também é suficiente, pois, quando o antecedente é falso, a condicional é verdadeira, não importando o valor lógico do conseqüente.

As regras de inferência são, na verdade, formas válidas de raciocínio, isto é, são formas que nos permitem concluir o conseqüente, uma vez que consideremos o antecedente verdadeiro; em termos textuais, costumamos utilizar o termo "logo" (ou seus sinônimos: portanto, em conseqüência, etc) para caracterizar as Regras de Inferência; a expressão $p \Rightarrow q$ pode então ser lida: p; logo, q.

É possível mostrar que as regras de inferência têm as seguintes propriedades:

Reflexiva: $p \Rightarrow p$

Transitiva: Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, então $p \Rightarrow r$

Aqui neste material será habitual escrevê-los na forma padronizada abaixo indicada, colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço (ALENCAR FILHO, 2003)

I. Regra da Adição (AD):

(i) $\dfrac{p}{p \vee q}$ (ii) $\dfrac{p}{q \vee p}$

II. Regra de Simplificação (SIMP):

(i) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ (ii) $\dfrac{p \wedge q}{q}$

III. Regra da Conjunção (CONJ):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l}p\\ q\end{array}}{p \wedge q}$ (ii) $\dfrac{\begin{array}{l}p\\ q\end{array}}{q \wedge p}$

IV. Regra da Absorção (ABS):

$$\dfrac{p \to q}{p \to (p \wedge q)}$$

V. Regra Modus Ponens (MP):

$$\dfrac{\begin{array}{l}p \to q\\ p\end{array}}{q}$$

VI: Regra Modus Tollens (MT):

$$\dfrac{\begin{array}{l}p \to q\\ \sim q\end{array}}{\sim p}$$

VII. Regra do Silogismo Disjuntivo (SD):

(i) $\dfrac{\begin{array}{l}p \vee q\\ \sim p\end{array}}{q}$ (ii) $\dfrac{\begin{array}{l}p \vee q\\ \sim q\end{array}}{p}$

VIII. Regra do Silogismo Hipotético (SH):

$$\dfrac{\begin{array}{l}p \to q\\ q \to r\end{array}}{p \to r}$$

IX. Regra do Dilema construtivo (DC):

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \underline{p \vee r} \\ q \vee s \end{array}$$

X. Regra do Dilema destrutivo (DD):

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \underline{\sim q \vee \sim s} \\ \sim p \vee \sim r \end{array}$$

Com o auxílio dessas dez regras de inferência pode-se demonstrar a validade de um grande número de argumentos mais complexos.

8.7 Exemplos do uso das Regras de Inferência

Damos a seguir exemplos simples do uso de cada uma das regras de inferência na dedução de conclusões a partir de premissas dadas (ALENCAR FILHO, 2003).

1. Regra da Adição - Dada uma proposição p, dela se pode deduzir a sua disjunção com qualquer outra proposição, isto é, deduzir p V q, ou p V r, ou s V p, ou t V p, etc.

Exemplos:

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{lll} (1) & p & P \\ \hline (2) & p \vee \sim q & \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{lll} (1) & \sim p & P \\ \hline (2) & q \vee \sim p & \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{lll} (1) & p \wedge q & P \\ \hline (2) & (p \wedge q) \vee r & \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{lll} (1) & p \vee q & P \\ \hline (2) & (r \wedge s) \vee (p \vee q) & \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{lll} (1) & x \neq 0 & P \\ \hline (2) & x \neq 0 \vee x \neq 1 & \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{lll} (1) & x < 1 & P \\ \hline (2) & x = 2 \vee x < 1 & \end{array}$$

II. Regra da Simplificação — Da conjunção p ∧ q de duas proposições se pode deduzir cada uma das proposições, p ou q.

Exemplos:

$$\text{(a)} \quad \begin{array}{lll} (1) & (p \vee q) \wedge r & P \\ \hline (2) & p \vee q & \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{lll} (1) & p \wedge \sim q & P \\ \hline (2) & \sim q & \end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{array}{lll} (1) & x > 0 \wedge x \neq 1 & P \\ \hline (2) & x \neq 1 & \end{array} \qquad \text{(b)} \quad \begin{array}{lll} (1) & x \in A \wedge x \in B & P \\ \hline (2) & x \in A & \end{array}$$

III. Regra da Conjunção -- Permite deduzir de duas proposições dadas p e q (premissas) a sua conjunção $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ (conclusão).

(a) (1) $p \vee q$ P
(2) $\sim r$ P
(3) $(p \vee q) \wedge \sim r$

(b) (1) $p \vee q$ P
(2) $q \vee r$ P
(3) $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$

(c) (1) $x < 5$ P
(2) $x > 1$ P
(3) $x > 1 \wedge x < 5$

(d) (1) $x \in A$ P
(2) $x \notin B$ P
(3) $x \notin B \wedge x \in A$

IV. Regra da Absorção Esta regra permite, dada uma condicional - como premissa, dela deduzir como conclusão uma outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo consequente é a conjunção $p \wedge q$ das duas proposições que integram a premissa, isto é, $p \rightarrow p \wedge q$.

Exemplos:

(a) (1) $x = 2 \rightarrow x < 3$ P
(2) $x = 2 \rightarrow x = 2 \wedge x < 3$

(b) (1) $x \in A \rightarrow x \in A \cup B$ P
(2) $x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B$

V. Regra Modus Ponens - Também é chamada Regra de separação e permite deduzir q (conclusão) a partir de $p \rightarrow q$ e p (premissas).

Exemplos:

(a) (1) $\sim p \rightarrow \sim q$ P
(2) $\sim p$ P
(3) $\sim q$

(b) (1) $p \wedge q \rightarrow r$ P
(2) $p \wedge q$ P
(3) r

(b) (1) $p \rightarrow q \wedge r$ P
(2) p P
(3) $q \wedge r$

(c) (1) $\sim p \vee r \rightarrow s \wedge \sim q$ P
(2) $\sim p \vee r$ P
(3) $s \wedge \sim q$

(e) (1) $x \neq 0 \rightarrow x + y > 1$ P
(2) $x \neq 0$ P
(3) $x + y > 1$

(f) (1) $x \in A \cap B \rightarrow x \in A$ P
(2) $x \in A \cap B$ P
(3) $x \in A$

VI. Regra Modus Tollens - Permite, a partir das premissas $p \rightarrow q$ (condicional) o $\sim q$ (negação do consequente), deduzir como conclusão $\sim p$ (negação do antecedente).

Exemplos:

(a) (1) $q \wedge r \rightarrow s$ P
(2) $\sim s$ P
(3) $\sim (q \wedge r)$

(b) (1) $p \rightarrow \sim q$ P
(2) $\sim\sim q$ P
(3) $\sim p$

(c) (1) $p \rightarrow q \wedge r$ P
(2) $\sim(q \wedge r)$ P
(3) $\sim p$

(d) (1) $x \neq 0 \rightarrow x = y$ P
(2) $x \neq y$ P
(3) $x = 0$

VII. Regra do Silogismo Disjuntivo — Permite deduzir da disjunção p V q de duas proposições e da negação ~ p (ou ~ q), de uma delas, a outra proposição q (ou p).
Exemplos:

(a)
$$\begin{array}{lll} (1) & (p \wedge q) \vee r & P \\ (2) & \sim r & \\ \hline (3) & p \wedge q & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \vee \sim q & P \\ (2) & \sim\sim p & \\ \hline (3) & \sim q & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} (1) & x = 0 \vee x = 1 & P \\ (2) & x \neq 1 & P \\ \hline (3) & x = 0 & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lll} (1) & \sim (p \rightarrow q) \vee r & P \\ (2) & \sim\sim (p \rightarrow q) & P \\ \hline (3) & r & \end{array}$$

VIII. Regra do Silogismo Hipotético – Esta regra permite, dadas duas condicionais: p ⟶ q e q ⟶ r (premissas), tais que o consequente da primeira coincida com o antecedente da segunda, deduzir uma terceira condicional p ⟶ r (conclusão), cujos antecedente e consequente sejam, respectivamente, o antecedente da premissa p ⟶ q e o consequente da outra premissa q ⟶ r (transitividade da seta ⟶).

(a)
$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \rightarrow \sim q & P \\ (2) & \sim q \rightarrow \sim r & P \\ \hline (3) & \sim p \rightarrow \sim r & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} (1) & \sim p \rightarrow q \vee r & P \\ (2) & q \vee r \rightarrow \sim s & P \\ \hline (3) & \sim p \rightarrow \sim s & \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lll} (1) & (p \rightarrow q) \rightarrow r & P \\ (2) & r \rightarrow (q \wedge s) & P \\ \hline (3) & (p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge s) & \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{lll} (1) & |x| = 0 \rightarrow x = 0 & P \\ (2) & x = 0 \rightarrow x + 1 = 1 & P \\ \hline (3) & |x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1 & \end{array}$$

IX. Regra do Dilema Construtivo — Nessa regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, e a conclusão é a disjunção dos consequentes dessas condicionais.

(a)
$$\begin{array}{lll} (1) & (p \wedge q) \rightarrow \sim r & P \\ (2) & s \rightarrow t & P \\ (3) & (p \wedge q) \vee s & P \\ \hline (4) & \sim r \vee t & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} (1) & x < y \rightarrow x = 3 & P \\ (2) & x < 5 \rightarrow x = 2 & P \\ (3) & x < y \vee x < 5 & P \\ \hline (4) & x = 2 \vee x = 3 & \end{array}$$

X. Regra do Dilema Destrutivo – Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção da negação dos seus consequentes, e a conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais.

(a)
$$\begin{array}{lll} (1) & \sim q \rightarrow r & P \\ (2) & p \rightarrow \sim s & P \\ (3) & \sim r \vee \sim\sim s & P \\ \hline (4) & \sim\sim q \vee \sim p & \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lll} (1) & x + y = 7 \rightarrow x = 2 & P \\ (2) & y - x = 2 \rightarrow x = 3 & P \\ (3) & x \neq 2 \vee x \neq 3 & P \\ \hline (4) & x + y \neq 7 \vee y - x \neq 2 & \end{array}$$

Atividades

ATIVIDADE 13 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 96):

1. Construir a condicional associada aos seguintes argumentos:

(a) $\sim p, \sim q \rightarrow p \vdash q$

(b) $p \rightarrow q \vdash \sim(p \wedge \sim q)$

2. Indicar a regra de inferência que valida os seguintes argumentos:

(a) $p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow q) \vee \sim r$

(b) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vdash q \rightarrow r$

(c) $(q \vee r) \rightarrow \sim p, \sim\sim p \vdash \sim(q \vee r)$

(d) $3 < 5 \vdash 3 < 5 \vee 3 < 2$

3. Usar **Modus Ponnes** para deduzir a conclusão das seguintes premissas:

(a) (1) $x = y \wedge y = z$

(2) $(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

(b) (1) $2 > 1 \rightarrow 3 > 1$

(2) $2 > 1$

4. Usar **Modus Tollens** para deduzir a conclusão das seguintes premissas:

(a) (1) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim(r \wedge s)$

(2) $\sim\sim(r \wedge s)$

(b) (1) $x = z \rightarrow x = 6$

(2) $x \neq 6$

5. Usar o **Silogismo Disjuntivo** para deduzir a conclusão das seguintes premissas:

(a) (1) $s \vee (r \wedge t)$

(2) $\sim s$

6. Usar o **Silogismo Hipotético** para deduzir a conclusão das seguintes premissas:

(a) (1) $p \rightarrow r \vee \sim s$

(2) $r \vee \sim s \rightarrow t$

Atividades

7. Usar o **Dilema Construtivo** para deduzir a conclusão das seguintes premissas:

(a) (1) $p \to r$

(2) $\sim q \to \sim s$

(3) $p \lor \sim q$

8. Verifique a validade dos argumentos utilizando regras de inferência

(a) $r \to p \lor q, r, \sim p \vdash q$

(b) $p \to q, \sim q, p \lor r \vdash r$

(c) $p \lor q, p \to r, \sim r \vdash q \lor s$

(d) $t, t \to \sim q, \sim q \to \sim s \vdash \sim s$

(e) $p \land q, p \lor r \to s \vdash p \land s$

(f) $p \lor q \to (p \to s \land t), p \land r \vdash t \lor u$

Fala Professor

Não esqueça de fazer os demais exercícios que constam no capítulo 9 do livro de Edgard de Alencar Filho - Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.

Indicações

Para maior compreensão, ler o capítulo 9 – Argumento e Métodos de Inferência do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.