CAPÍTULO 5

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Já sabemos avaliar os valores lógicos de uma proposição composta e julgar se ela é uma tautologia, contradição ou contingência. Mas será que dada uma proposição composta conseguimos deduzir alguma coisa a respeito de outra proposição composta?

Fala Professor

5.1 Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição P(p,q,r,...) **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q(p,q,r,...), se Q(p,q,r,...) é verdadeira (V) todas as vezes que P(p,q,r,...) é verdadeira (V).

Conceitos

Em outras palavras, uma proposição P(p,q,r,...) **implica logicamente** uma proposição Q(p,q,r,...), todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições não aparecer V na última coluna de P e F na última coluna de Q, com V e F na mesma linha, ou seja, não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos V e F (ALENCAR FILHO, 2003).

Representação: P(p,q,r,...) => Q(p,q,r,...)

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

5.2 Propriedades da Implicação Lógica

A relação de implicação lógica entre proposições possui as propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), isto é, simbolicamente.

(R)	**P(p,q,r,...) => P(p,q,r,...)**
(T)	**Se P(p,q,r,...) => Q(p,q,r,...) e Q(p,q,r,...) => R(p,q,r,...), então P(p,q,r,...) => R(p,q,r,...)**

Exemplos:

(1) Considere a tabela-verdade para as proposições $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$

p	**q**	**$p \wedge q$**	**$p \vee q$**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Vamos observar $(p \wedge q)$. Esta proposição é verdadeira apenas na 1ª linha. Nesta mesma linha, p, q, $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ são também verdadeiras. Quer dizer, $(p \wedge q)$ implica logicamente em p, por exemplo. Assim, podemos escrever: **$(p \wedge q) \Rightarrow p$.**

Observe que $p \wedge q$ implica logicamente todas as outras proposições da tabela-verdade.

As mesmas tabelas-verdade demonstram importantes regras de inferência:

$p \Rightarrow p \vee q$ e $q \Rightarrow p \vee q$ (Adição)

$p \wedge q \Rightarrow p$ e $p \wedge q \Rightarrow q$ (Simplificação)

Prove por tabela-verdade que: a) $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$

b) $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$

(2) Seja a tabela-verdade da proposição **$(p \vee q) \wedge \sim p$:**

p	**q**	**$p \vee q$**	**$\sim p$**	**$(p \vee q) \wedge \sim p$**
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 3, em que q também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$ e $(p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p$ (Regra do Silogismo Disjuntivo)

(3) Seja a tabela-verdade da proposição **$(p \rightarrow q) \wedge p$:**

p	**q**	**$p \rightarrow q$**	**$(p \rightarrow q) \wedge p$**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 1, em que **q** também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ **(Regra Modus Ponens)**

(4) Sejam as tabelas-verdade das proposições $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ **e** $\sim p$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Ela é verdadeira apenas na linha 4, em que **~p** também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ **(Regra Modus tollens)**

5.3 Tautologias e Implicação Lógica

Conceitos

Teorema: Dizemos que a proposição P(p, q, r, ...) **implica** a proposição Q(p, q, r, ...), ou seja **P(p, q, r, ...) => Q(p, q, r, ...),** se e somente se a condicional **P(p, q, r, ...)→Q(p, q, r, ...)** é tautológica.

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa. Isso acontece porque, como **P => Q,** não ocorre situação onde P é verdadeiro e Q é falso. Desse modo, $P \rightarrow Q$ nunca será falso.

Atenção

Observe que os símbolos → e => são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

Exemplo:

A proposição **(p ↔ q) ^ p** implica a proposição **q**, pois a condicional **(p ↔ q) ^ p → q** é tautológica.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Ou seja: $\mathbf{(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q}$.

Prove que $(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r) \Rightarrow (p\rightarrow r)$ (Regra do Silogismo hipotético).

Princípio da inconsistência: de uma contradição se deduz qualquer proposição. Ex.: $p\wedge\sim p\Rightarrow q$.

Atividades

ATIVIDADE 6 - Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 53):

1. Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de implicação lógica seguintes:

(a) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$

(b) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

(c) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$

(d) $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

2. Mostrar que:

(a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$ (b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

3. Mostrar que $\mathbf{p \leftrightarrow \sim q}$ **não implica** $\mathbf{p \rightarrow q}$.

4. Mostrar $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$.

5.4 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Conceitos

Uma proposição P(p,q,r...) **é logicamente equivalente** a uma proposição Q(p,q,r...), se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Representação: P(p,q,r,...) ⇔ Q(p,q,r,...)

Em particular, se as proposições P e Q são ambas tautológicas ou são ambas contradições, então são equivalentes.

5.5 Propriedades da Equivalência Lógica

Vamos relacionar algumas propriedades:

- **Reflexiva** (a proposição é equivalente a ela mesma): **P(p,q,r..) ⇔ P(p,q,r..)**
- **Simétrica** (se uma proposição equivale a uma outra, esta outra equivale à primeira):
  Se P(p,q,r..) ⇔ Q(p,q,r..) então **Q(p,q,r..) ⇔ P(p,q,r..)**
- **Transitiva** (se uma proposição equivale a uma segunda, e a segunda proposição é equivalente à uma terceira, a primeira equivale à terceira):
  Se P(p,q,r..) ⇔ R(p,q,r..) e **R(p,q,r..) ⇔ Q(p,q,r..) então P(p,q,r..)⇔Q(p,q,r..)**

5.6 Exemplos

(1) Regra da dupla negação

As proposições **~~p e p** são equivalentes, ou seja, **~~p ⇔ p:**

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

(2) Regra de CLAVIUS

As proposições **~p → p** e **p** são equivalentes, ou seja, **~p → p ⇔ p**:

p	~p	~p → p
V	F	V
F	V	F

(3) Regra de absorção

As proposições $\mathbf{p \rightarrow p \wedge q}$ e $\mathbf{p \rightarrow q}$ são equivalentes:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

A condicional $p \rightarrow q$ e a disjunção $\sim p \vee q$ são equivalentes. Prove através da tabela-verdade.
A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ também são equivalentes. Prove através da tabela-verdade.

5.7 Tautologias e Equivalência Lógica

Conceitos

Teorema: Dizemos que a proposição P(p, q, r, ...) **é equivalente** a proposição Q(p, q, r, ...), ou seja **P(p, q, r, ...)** $\Leftrightarrow$ **Q(p, q, r, ...)**, se e somente se a bicondicional **P(p,q,r,...)** $\leftrightarrow$ **Q(p, q, r, ...)** é tautológica (ALENCAR FILHO, 2003).

Portanto, toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa. Isso acontece, porque, se duas proposições P $\Leftrightarrow$ Q, então não ocorre o caso em que P e Q apresentam valores lógicos diferentes. Desse modo P $\leftrightarrow$ Q é uma tautologia.

Atenção

Observe que os símbolos $\leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

Exemplo:

A bicondicional $\mathbf{(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)}$, onde <u>**c** é uma proposição com valor lógico **F**</u>, é tautológica, pois a última coluna da tabela-verdade tem apenas a letra **V**. Portanto, as proposições $\mathbf{p \wedge \sim q \rightarrow c}$ e $\mathbf{p \rightarrow q}$ são equivalentes, ou seja, $\mathbf{(p \wedge \sim q \rightarrow c) \Leftrightarrow (p \rightarrow q)}$.

Nesta equivalência consiste o **método de demonstração por absurdo.**

ATIVIDADE 7:

Atividades

1. Construa a tabela-verdade do exemplo acima.

Prove que a bicondicional $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ é tautológica.
Esta equivalência lógica é denominada Regra de Exportação-Importação.

5.8 Proposições Associadas a uma Condicional

Dada a condicional $\mathbf{p \rightarrow q}$, temos as seguintes proposições associadas:

- **Proposição recíproca de $p \rightarrow q$: $q \rightarrow p$**
- **Proposição contrária de $p \rightarrow q$: $\sim p \rightarrow \sim q$**
- **Proposição contrapositiva de $p \rightarrow q$: $\sim q \rightarrow \sim p$**

ATIVIDADE 8:

Atividades

1. Construa as tabelas-verdade das proposições acima.

Observe que:
(i) a condicional e sua contrapositiva são equivalentes: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.
(ii) a recíproca e a contrária da condicional são equivalentes: $q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$.
Observe também que a condicional e sua recíproca ou sua contrária não são equivalentes.
A contrapositiva da condicional é contrária à recíproca da condiconal.

5.9 Negação Conjunta de Duas Proposições

Conceitos

Negação conjunta – de duas proposições **p** e **q** é a proposição **não p** e **não q**, ou seja, $\mathbf{\sim p \wedge \sim q}$. Também indicada pela notação: $\mathbf{p \downarrow q}$.

Portanto temos: $\mathbf{p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$

ATIVIDADE 9:

Atividades

1. Construa a tabela-verdade da proposição anterior.

5.10 Negação Disjunta de Duas Proposições

Conceitos

Negação disjunta – de duas proposições **p** e **q** é a proposição **não p ou não q**, ou seja, **~p** $\vee$ **~q**. Também indicada pela notação: **p** $\uparrow$ **q**.

Portanto temos: **p** $\uparrow$ **q** $\Leftrightarrow$ **~p** $\vee$ **~q**

Os conectivos ↓ e ↑ são chamados conectivos de SCHEFFER.

Atividades

ATIVIDADE 10 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 63):

1. Construa a tabela-verdade da proposição acima.

2. Mostrar que as proposições **p** e **q** são equivalentes (**p** $\Leftrightarrow$ **q**) nos seguintes casos:

(a) p: 1 + 3 = 4; q: $(1 + 3)^2 = 16$

(b) p: $\text{sen}^0 = 1$; q: $\cos^0 = 0$

(c) p: x é par; q: x + 1 é impar ($x \in \mathbf{Z}$)

3. Exprimir a bicondicional p $\leftrightarrow$ q em função dos conectivos: $\wedge$, $\vee$ e ~.

4. Demonstrar, por tabelas-verdade, as seguinte equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$ (b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$

5. Demonstrar através de tabelas-verdade, que os conectivos $\vee$ e ~ exprimem-se em função do conectivo $\uparrow$, do seguinte modo:

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$ (b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$

6. Sabendo que o valor lógico das proposições **q** e **p** são verdadeiras e de **r** é **falsa**, determine o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$ (b) $(\sim p \uparrow \sim q) \leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$

Indicações

Para maior compreensão, ler os capítulos 5 – Implicação Lógica e 6 – Equivalência Lógica do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.