CAPÍTULO 3

TABELAS-VERDADE DE PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Neste capítulo vamos aprender a construir tabelas-verdade para proposições compostas. Desta forma, poderemos identificar os valores de uma proposição para todos os possíveis valores das proposições simples.

Fala Professor

3.1 Construção de Tabelas-Verdade

O primeiro passo para construção de uma tabela-verdade de uma proposição composta é contar o número de proposições simples que a compõem. Agora se deve determinar o número de linhas. Cada linha da tabela corresponde a uma possível combinação dos valores lógicos das proposições componentes. Como são dois os valores lógicos, existem, para **n** componentes, $\mathbf{2^n}$ combinações possíveis. Portanto:

O **número de linhas** de uma tabela verdade de uma proposição composta com **n** proposições simples é $\mathbf{2^n}$, além do cabeçalho.

Conceitos

Por exemplo, para uma proposição composta com 5 proposições simples, teremos uma tabela-verdade com $2^5 = 32$ linhas.

Após termos o número de linhas, vamos criar a tabela inicialmente com uma coluna para cada proposição simples (onde são distribuídos os valores V e F de forma a incluir cada possível combinação). Após isso, vamos criando colunas de acordo com as partes (operações) da proposição composta (onde os valores V e F são obtidos pela definição das operações), até termos a proposição composta completa.

Por fim, vamos preenchendo a tabela-verdade com todos os possíveis valores para as proposições simples. Para determinar unicamente a Tabela Verdade, podemos estabelecer certas convenções para sua construção:

A. Para as colunas:

1. Dispor as proposições componentes em ordem alfabética.
2. Dispor as operações na ordem de precedência (com parênteses, se for o caso).

B. Para as linhas

1. Alternar V e F para a coluna do último componente.
2. Alternar V V e F F para a coluna do penúltimo componente.
3. Alternar V V V V e F F F F para a coluna do antepenúltimo componente.
4. Prosseguir dessa forma, se houver mais componentes, sempre dobrando o numero de V's e F's para cada coluna à esquerda.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2003)

(1) Construir a tabela-verdade da proposição: $P(p,q) = \sim(p \wedge \sim q)$

Resolução:

• Determinar o número de linhas da tabela-verdade. Como temos 2 proposições simples, teremos **$2^2 = 4$ linhas** (criaremos uma adicional para o cabeçalho da tabela).

• Cria-se inicialmente uma coluna para cada proposição simples.

• Em seguida, cria-se uma coluna para **~q.**

• Depois cria-se uma coluna para **p ∧ ~q.**

• A seguir uma nova coluna para a proposição completa: **~(p ∧ ~q).**

• Por fim, preenche-se a tabela-verdade com todos os valores possíveis para **p e q.**

p	q	~q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

(2) Construir a tabela-verdade da proposição: $P(p,q) = \sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$

Resolução:

p	q	$p \wedge q$	$q \leftrightarrow p$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(q \leftrightarrow p)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(q \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

(3) Construir a tabela-verdade da proposição: $P(p,q,r) = p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$

Resolução:

p	q	r	~r	$p \vee \sim r$	$q \wedge \sim r$	$p \vee \sim r \rightarrow q \wedge \sim r$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	F	F

3.2 Valor Lógico de uma Proposição Composta

Já vimos como construir tabelas-verdade para determinar os valores que uma proposição composta pode ter, dando os possíveis valores de suas proposições simples. Desta forma, caso se conheça os valores das proposições simples, podemos sempre determinar o valor lógico (V ou F) da proposição composta.

Exemplos (ALENCAR FILHO, 2003):

(1) Dadas as proposições simples **p** e **q** e sabendo-se que seus valores são, respectivamente, V e F, determinar o valor lógico da proposição composta: $\mathbf{P(p,q) = \sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q}$.

Resolução: $\mathbf{V(P) = \sim(V \vee F)} \leftrightarrow \sim V \wedge \sim F = \mathbf{\sim V \leftrightarrow F \wedge V = F \leftrightarrow F = V}$

(2) Sabendo que V(r) = V, determinar o valor lógico da proposição composta: $\mathbf{p \rightarrow \sim q \vee r}$.

Resolução: Como **r** é verdadeira, $\mathbf{\sim q \vee r}$ é verdadeira. Logo, $\mathbf{p \rightarrow \sim q \vee}$ **r** é verdadeira (V).

3.3 Ordem de Precedência das Operações

A construção de expressões mais complexas, na forma simbólica, apresenta alguns problemas. Por exemplo, considere a expressão (PINHO, 1999):

"Se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa"

Sua transcrição em termos lógicos, $p \wedge q \rightarrow r$, onde

p - Mário foi ao cinema
q - João foi ao teatro
r - Marcelo ficou em casa

pode indicar duas expressões distintas:

"se Mário foi ao cinema e João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa" ou "Mário foi ao cinema, e, se João foi ao teatro, então Marcelo ficou em casa"

Para decidir qual proposição está sendo indicada, é necessário saber qual o conectivo que atua primeiro (neste caso, se é o conectivo da conjunção ou da condicional). Por esse motivo, é necessário estabelecer uma ordem de operação dos conectivos:
Ordem de Precedência:

1. ~
2. $\wedge$, $\vee$
3. $\rightarrow$
4. $\leftrightarrow$

- Para tornar o processo mais determinado, com uma única ordenação, podemos convencionar o seguinte algoritmo, para obter a ordem de execução das operações:
- Percorra a expressão da esquerda para a direita, executando as operações de negação, na ordem em que aparecerem.
- Percorra novamente a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de conjunção e disjunção, na ordem em que aparecerem.
- Percorra outra vez a expressão, da esquerda para a direita, executando desta vez as operações de condicionamento, na ordem em que aparecerem.
- Percorra uma última vez a expressão, da esquerda para a direita, executando as operações de bicondicionamento, na ordem em que aparecerem.

Dessa forma, as operações da expressão $p \wedge \sim q \rightarrow r \vee s$ serão executadas na seguinte ordem:

$$\begin{array}{ccccccc} p & \wedge & \sim & q & \rightarrow & r \vee & s \\ & 2 & 1 & & 4 & 3 & \end{array}$$

3.4 Uso de Parênteses

A utilização dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ pode causar ambigüidade até mesmo em linguagem natural. Por exemplo a expressão

"Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia"

representada por $p \wedge q \vee s$, não deixa claro seu significado; tanto pode significar "Mário foi ao cinema e Marcelo ficou em casa", ou então "Maria foi à praia", representada por $(p \wedge q) \vee s$, como pode significar "Mário foi ao cinema" e "ou Marcelo ficou em casa ou Maria foi à praia", representada por $p \wedge (q \vee s)$, que são claramente afirmações distintas.

Assim como na matemática, o uso de parênteses é extremante necessário para agrupar expressões e evitar ambigüidades. Assim, por exemplo, colando parênteses na proposição $\mathbf{p \wedge q \vee r}$, temos:

(i) $\mathbf{(p \wedge q) \vee r}$, em que o conectivo principal é o $\vee$.

(ii) $\mathbf{p \wedge (q \vee r)}$, em que o conectivo principal é o $\wedge$.

Porém, os parênteses podem ser suprimidos em alguns casos.

No primeiro caso, é devido a ordem de precedência dos conectivos:

(1) $\sim$ **(2)** $\wedge$ **e** $\vee$ **(3)** $\rightarrow$ **(4)** $\leftrightarrow$

Em que o conectivo mais fraco é o "$\sim$" e o mais forte é o "$\leftrightarrow$".

Exemplo: $\mathbf{p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r}$ é uma bicondicional. Se quiséssemos que fosse uma condicional, teríamos que adicionar parênteses: $\mathbf{p \rightarrow (q \leftrightarrow s \wedge r)}$.

O segundo caso em que podemos suprimir parênteses é quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente. Basta fazermos associação da esquerda para a direita.

Exemplo: $\mathbf{(((p \vee \sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p))}$ pode ser reescrito como: $\mathbf{(p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p}$.

Atividades

ATIVIDADE 4 - Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 39):

1. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições:

(a) $\sim(p \vee \sim q)$ (b) $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

(c) $q \leftrightarrow \sim q \wedge p$ (d) $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow q \rightarrow p$

(e) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$ (f) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$

2. Determinar **P(VFV)** nos seguintes casos:

(a) $P(p, q, r) = \sim p \wedge (q \vee \sim r)$

(b) $P(p, q, r) = (r \wedge (p \vee \sim q)) \wedge \sim(\sim r \vee (p \wedge q))$

3. Sabendo que **p** e **q** são verdadeiras e **r** e **s** são falsas, determinar o valor lógico de:

(a) $r \vee s \rightarrow q$ (b) $p \rightarrow \sim(r \wedge s)$

(c) $q \leftrightarrow p \wedge s$ (d) $(q \vee r) \wedge (p \vee s)$

(e) $\sim((r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q))$ (f) $r \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow r)$

4. Sendo $\mathbf{p \rightarrow q}$ verdadeira (V), qual o valor lógico das condicionais:

(a) $p \vee r \rightarrow q \vee r$ (b) $p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

5. Suprimir o maior número de parênteses:

(a) $((q \leftrightarrow (r \vee q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim(\sim q))))$

Indicações

Para maior compreensão, ler o capítulo 3 – Construção de Tabelas-Verdade do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.