

IMPLICAÇÃO E EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Já sabemos avaliar os valores lógicos de uma proposição composta e julgar se ela é uma tautologia, contradição ou contingência. Mas será que dada uma proposição composta conseguimos deduzir alguma coisa a respeito de outra proposição composta?

que rissus de
a velit et tellus.
maisa portitor
sectetur magna.

Fala Professor

5.1 Implicação Lógica

Diz-se que uma proposição $P(p,q,r,...)$ **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição $Q(p,q,r,...)$, se $Q(p,q,r,...)$ é verdadeira (V) todas as vezes que $P(p,q,r,...)$ é verdadeira (V).



Conceitos

Em outras palavras, uma proposição $P(p,q,r,...)$ **implica logicamente** uma proposição $Q(p,q,r,...)$, todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas proposições não aparecer V na última coluna de P e F na última coluna de Q, com V e F na mesma linha, ou seja, não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos V e F (ALENCAR FILHO, 2003).

Representação: $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$

Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

5.2 Propriedades da Implicação Lógica

A relação de implicação lógica entre proposições possui as propriedades reflexiva (R) e transitiva (T), isto é, simbolicamente.

(R) $P(p,q,r,...) \Rightarrow P(p,q,r,...)$
 (T) Se $P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$ e
 $Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$, então
 $P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

Exemplos:

(1) Considere a tabela-verdade para as proposições $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Vamos observar $(p \wedge q)$. Esta proposição é verdadeira apenas na 1ª linha. Nesta mesma linha, p, q, $(p \vee q)$ e $(p \leftrightarrow q)$ são também verdadeiras. Quer dizer, $(p \wedge q)$ implica logicamente em p, por exemplo. Assim, podemos escrever: $(p \wedge q) \Rightarrow p$.

Observe que $p \wedge q$ implica logicamente todas as outras proposições da tabela-verdade. As mesmas tabelas-verdade demonstram importantes regras de inferência:

$$p \Rightarrow p \vee q \quad \text{e} \quad q \Rightarrow p \vee q \quad (\text{Adição})$$

$$p \wedge q \Rightarrow p \quad \text{e} \quad p \wedge q \Rightarrow q \quad (\text{Simplificação})$$

Prove por tabela-verdade que: a) $p \leftrightarrow q \Rightarrow p \rightarrow q$

b) $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$

(2) Seja a tabela-verdade da proposição $(p \vee q) \wedge \sim p$:

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 3, em que q também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q \quad \text{e} \quad (p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow p \quad (\text{Regra do Silogismo Disjuntivo})$$

(3) Seja a tabela-verdade da proposição $(p \rightarrow q) \wedge p$:

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

Ela é verdadeira apenas na linha 1, em que **q** também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \quad (\text{Regra Modus Ponens})$$

(4) Sejam as tabelas-verdade das proposições $(p \rightarrow q) \wedge \sim q$ e $\sim p$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Ela é verdadeira apenas na linha 4, em que $\sim p$ também é verdadeira. Logo existe a seguinte implicação lógica:

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \quad (\text{Regra Modus tollens})$$

5.3 Tautologias e Implicação Lógica

Teorema: Dizemos que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ **implica** a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, ou seja $P(p, q, r, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, \dots)$, se e somente se a condicional $P(p, q, r, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica.



Conceitos

Portanto, a toda implicação lógica corresponde uma condicional tautológica e vice-versa. Isso acontece porque, como $P \Rightarrow Q$, não ocorre situação onde P é verdadeiro e Q é falso. Desse modo, $P \rightarrow Q$ nunca será falso.

Observe que os símbolos \rightarrow e \Rightarrow são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.



Atenção

Exemplo:

A proposição $(p \Leftrightarrow q) \wedge p$ implica a proposição q , pois a condicional $(p \Leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ é tautológica.

p	q	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p$	$(p \leftrightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Ou seja: $(p \leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$.

Prove que $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$ (Regra do Silogismo hipotético).

Princípio da inconsistência: de uma contradição se deduz qualquer proposição. Ex.: $p \wedge \sim p \Rightarrow q$.

Atividades



ATIVIDADE 6 - Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 53):

1. Utilizando tabelas-verdade, verifique se existem as relações de implicação lógica seguintes:

- (a) $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$
- (b) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$
- (c) $p \rightarrow q \wedge r \rightarrow \sim q \Rightarrow r \rightarrow \sim p$
- (d) $\sim p \wedge (\sim q \rightarrow p) \Rightarrow \sim(p \wedge \sim q)$

2. Mostrar que:

- (a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$
- (b) $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

3. Mostrar que $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $p \rightarrow q$.

4. Mostrar $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = 0$.

5.4 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

Conceitos



Uma proposição $P(p, q, r, \dots)$ é **logicamente equivalente** a uma proposição $Q(p, q, r, \dots)$, se as tabelas-verdade destas duas proposições são idênticas.

Representação: $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$

Em particular, se as proposições P e Q são ambas tautológicas ou são ambas contradições, então são equivalentes.

5.5 Propriedades da Equivalência Lógica

Vamos relacionar algumas propriedades:

- **Reflexiva** (a proposição é equivalente a ela mesma): $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$
- **Simétrica** (se uma proposição equivale a uma outra, esta outra equivale à primeira):
Se $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ então $Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$
- **Transitiva** (se uma proposição equivale a uma segunda, e a segunda proposição é equivalente à uma terceira, a primeira equivale à terceira):
Se $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots)$ e $R(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$ então $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$

5.6 Exemplos

(1) Regra da dupla negação

As proposições $\sim\sim p$ e p são equivalentes, ou seja, $\sim\sim p \Leftrightarrow p$:

p	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F

(2) Regra de CLAVIUS

As proposições $\sim p \rightarrow p$ e p são equivalentes, ou seja, $\sim p \rightarrow p \Leftrightarrow p$:

p	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F

(3) Regra de absorção

As proposições $p \rightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes:

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

A condicional $p \rightarrow q$ e a disjunção $\sim p \vee q$ são equivalentes. Prove através da tabela-verdade.

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ também são equivalentes. Prove através da tabela-verdade.

5.7 Tautologias e Equivalência Lógica**Conceitos**

Teorema: Dizemos que a proposição $P(p, q, r, \dots)$ é **equivalente** a proposição $Q(p, q, r, \dots)$, ou seja $P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$, se e somente se a bicondicional $P(p, q, r, \dots) \leftrightarrow Q(p, q, r, \dots)$ é tautológica (ALENCAR FILHO, 2003).

Portanto, toda equivalência lógica corresponde a uma bicondicional tautológica e vice-versa. Isso acontece, porque, se duas proposições $P \leftrightarrow Q$, então não ocorre o caso em que P e Q apresentam valores lógicos diferentes. Desse modo $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia.

Atenção

Observe que os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são diferentes. O primeiro é de operação lógica e o segundo é de relação.

Exemplo:

A bicondicional $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, onde c é uma proposição com valor lógico F, é tautológica, pois a última coluna da tabela-verdade tem apenas a letra V. Portanto, as proposições $p \wedge \sim q \rightarrow c$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$.

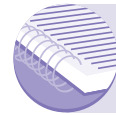
Nesta equivalência consiste o **método de demonstração por absurdo**.

ATIVIDADE 7:

1. Construa a tabela-verdade do exemplo acima.

Prove que a bicondicional $(p \wedge q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ é tautológica.

Esta equivalência lógica é denominada Regra de Exportação-Importação.

**Atividades****5.8 Proposições Associadas a uma Condicional**

Dada a condicional $p \rightarrow q$, temos as seguintes proposições associadas:

- **Proposição recíproca de $p \rightarrow q$:** $q \rightarrow p$
- **Proposição contrária de $p \rightarrow q$:** $\sim p \rightarrow \sim q$
- **Proposição contrapositiva de $p \rightarrow q$:** $\sim q \rightarrow \sim p$

ATIVIDADE 8:

1. Construa as tabelas-verdade das proposições acima.

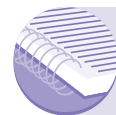
Observe que:

(i) a condicional e sua contrapositiva são equivalentes: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

(ii) a recíproca e a contrária da condicional são equivalentes: $q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$.

Observe também que a condicional e sua recíproca ou sua contrária não são equivalentes.

A contrapositiva da condicional é contrária à recíproca da condicional.

**Atividades****5.9 Negação Conjunta de Duas Proposições**

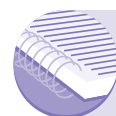
Negação conjunta – de duas proposições p e q é a proposição **não p e não q** , ou seja, $\sim p \wedge \sim q$. Também indicada pela notação: $p \downarrow q$.

**Conceitos**

Portanto temos: $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

ATIVIDADE 9:

1. Construa a tabela-verdade da proposição anterior.

**Atividades**

5.10 Negação Disjunta de Duas Proposições

Conceitos



Negação disjunta – de duas proposições p e q é a proposição **não p ou não q** , ou seja, $\sim p \vee \sim q$. Também indicada pela notação: $p \uparrow q$.

Portanto temos: $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Os conectivos \downarrow e \uparrow são chamados conectivos de SCHEFFER.

Atividades



ATIVIDADE 10 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 63):

1. Construa a tabela-verdade da proposição acima.
2. Mostrar que as proposições p e q são equivalentes ($p \Leftrightarrow q$) nos seguintes casos:

(a) $p: 1 + 3 = 4$;	$q: (1 + 3)^2 = 16$
(b) $p: \sin^0 = 1$;	$q: \cos^0 = 0$
(c) $p: x$ é par;	$q: x + 1$ é ímpar ($x \in \mathbb{Z}$)
3. Expressar a bicondicional $p \Leftrightarrow q$ em função dos conectivos: \wedge , \vee e \sim .
4. Demonstrar, por tabelas-verdade, as seguinte equivalências:

(a) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	(b) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$
---	---
5. Demonstrar através de tabelas-verdade, que os conectivos \vee e \sim exprimem-se em função do conectivo \uparrow , do seguinte modo:

(a) $\sim p \Leftrightarrow p \uparrow p$	(b) $p \vee q \Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$
---	---
6. Sabendo que o valor lógico das proposições q e p são verdadeiras e de r é falsa, determine o valor lógico das seguintes proposições:

(a) $((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow \sim r))$	(b) $(\sim p \uparrow \sim q) \Leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$
---	--

Indicações



Para maior compreensão, ler os capítulos 5 – Implicação Lógica e 6 – Equivalência Lógica do livro Alencar Filho, Edgard de. Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.