CAPÍTULO 6

ÁLGEBRA DAS PROPOSIÇÕES

Agora, que já aprendemos muito sobre proposições, estamos preparados para aprender sobre a álgebra das proposições.

Fala Professor

6.1 Propriedades da Conjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples, cujos valores lógicos respectivos são V (verdade) e F (falsidade) (ALENCAR FILHO, 2003). Pois t representa uma tautologia e c representa uma contradição.

Considere as propriedades:

(a) Idempotente : $p \wedge p \Leftrightarrow p$

p	$p \wedge p$	$p \wedge p \leftrightarrow p$
V	V	V
F	F	V

Veja na tabela-verdade que essa equivalência é válida, pois a bicondicional é uma tautologia.

(b) Comutativa : $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Indica que na conjunção a ordem das proposição não altera o resultado.

Outro exemplo: $x > 1 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge x > 1$.

Lembre que a conjunção é um conectivo binário. Quando a proposição composta contém apenas conjunção (como no exemplo dado), é preciso aplicar uma das conjunções em dois literais (proposições simples) e utilizar o resultado obtido para aplicar a outra conjunção no literal que ainda não foi utilizado. Essa propriedade informa que a ordem dos literais não afeta o resultado.

(c) Associativa : (p ∧ q) ∧ r ⇔ p ∧ (q ∧ r)

p	q	r	p∧q (1)	1 ∧ r	q∧r	p∧(q ∧r)	(p∧q)∧r ↔ p∧(q∧r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	F	V
F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

As colunas 5 e 7 são equivalentes, por isso a bicondicional é uma tautologia.

(d) Identidade: p ∧ t ⇔ p e p ∧ c ⇔ c

p	t	c	p∧t	p∧c	p∧t↔p	p∧c↔c
V	**V**	**F**	**V**	**F**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**

t ∧ outro valor = outro valor.
t é elemento neutro.

c ∧ outro valor = c.
c é elemento absorvente.

As colunas equivalentes são 1, 4 e 3, 5.
Estas propriedades exprimem que t é um elemento neutro e que c é um elemento absorvente da conjunção.

6.2 Propriedades da Disjunção

Sejam p, q e r proposições simples quaisquer e sejam t e c proposições também simples cujos valores lógicos respectivos são V (verdade) e F (falsidade) (ALENCAR FILHO, 2003).

Considere as propriedades da disjunção:

(a) Idempotente : p ∨ p ⇔ p

p	p∨p	p∨p↔p
V	**V**	**V**
F	**F**	**V**

(b) Comutativa : p ∨ q ⇔ q ∨ p

p	q	p∨q	q∨p	p∨q↔q∨p
V	**V**	**V**	**V**	**V**
V	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**F**	**F**	**F**	**V**

(c) Associativa : **(p ∨ q) ∨ r ⇔ p ∨ (q ∨ r)**

p	q	r	p∨q	(p∨q)∨r	q∨r	p∨(q∨r)	(p∨q)∨r↔p∨(q∨r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

As colunas 5 e 7 são equivalentes

(d) Identidade: p ∨ t ⇔ t e p ∨ c ⇔ p

p	t	c	p∨t	p∨c	p∨t↔t	p∨c↔p
V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V

t v outro valor = t.
t é elemento absorvente.

c v outro valor = outro valor.
t é elemento neutro.

As colunas equivalentes são 1, 5 e 2, 4.

Estas propriedades exprimem que t é um elemento absorvente e que c é um elemento neutro da disjunção.

6.3 Propriedades da Conjunção e da Disjunção

(a) Distributivas

(i) p ∧ (q ∨ r) ⇔ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

p	q	r	q∨r	p∧(q∨r)	p∧q	p∧r	(p∧q)∨(p∧r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Faça uma analogia desta propriedade lógica com a propriedade distributiva na matemática substituindo a conjunção pela multiplicação e a disjunção pela adição.

As colunas 5 e 8 são equivalentes

Observe que ao aplicar a propriedade distributiva troca-se o conectivo principal da proposição. O conectivo externo do parênteses passa a ser interno e vice-versa.

Assim, a proposição: "Carlos estuda e Jorge ouve música ou lê" é equivalente à proposição: "Carlos estuda e Jorge ouve música ou Carlos estuda e Jorge lê".

(ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

As colunas 5 e 8 são equivalentes

Observe que os valores de q não interferem no resultado da proposição composta. Isso ocorre porque na conjunção:
i) se o valor de p for F, o resultado é F (pois a conjunção só é V se as proposições que a compõem forem ambas V).
ii) se o valor de p for V, o resultado depende da outra proposição. Esta outra proposição como é uma disjunção que contém o literal p (cujo valor é V), tem resultado V. Assim, a proposição final só depende do valor de p, absorvendo o valor de q.

(b) Absorção

(i) $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

As colunas 1 e 4 são equivalentes, por isso a bicondicional é uma tautologia.

(ii) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

p	p	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

As colunas 1 e 4 são equivalentes

(c) Regras de DE MORGAN (1806 – 1871)

Com De Morgan pode-se colocar a negação associada a cada uma das proposições, sejam elas conjunções ou disjunções ou seja (ALENCAR FILHO, 2003):

(i) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ (ex. Não é verdade que a rua está molhada e também suja equivale a dizermos que a rua não está molhada ou não está suja.)

Explicando o exemplo, quando montamos uma conjunção ela é formada por duas proposições que ocorrem ao mesmo tempo. Para que uma conjunção formada por duas proposições seja F, uma das duas proposições falhou.

p	q	p∧q	~(p∧q)	~p	~q	~p∨~q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Outro exemplo:

A negação da proposição

" Pedro é inteligente e estuda."

é a proposição:

"Pedro não é inteligente ou Pedro não estuda."

As colunas 4 e 7 são equivalentes

(ii) ~ (p ∨ q) ⇔ ~ p ∧ ~ q (ex. "Não é verdade que eu tirei mais de 5 na prova ou que eu tirei menos de 3 na prova". Equivale dizer que "eu não tirei mais de 5 na prova e também não tirei menos que 3 na prova".

Explicando o exemplo, quando temos uma disjunção, uma das duas proposições é verdadeira. Para que eu negue uma disjunção, não basta apenas uma ser falsa, as duas devem ser falsas.

p	q	p∨q	~(p∨q)	~p	~q	~p∧~q
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Outro exemplo:

A negação da proposição

"Rafael é médico ou professor."

é a proposição:

"Rafael não é médico e Rafael não é professor".

As colunas 4 e 7 são equivalentes

Conceitos

Regras de De Morgan:

(i) Negar que duas preposições são ao mesmo tempo verdadeiras equivale a afirmar que uma pelo menos é falsa.

(ii) Negar que pelo menos uma de duas preposições é verdadeira equivale a afirmar que ambas são falsas.

As regras de De Morgan mostram como é possível definir a disjunção a partir da conjunção e da negação, ou a conjunção a partir da disjunção e da negação.

6.4 Negação da Condicional

Como $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$ (ex. “Se choveu então a rua está molhada."⇔ "Não choveu ou a rua está molhada.”), temos (ALENCAR FILHO, 2003):

$\sim(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \Leftrightarrow \sim\sim p \wedge \sim q$, ou seja, $\sim(p \rightarrow q)) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$, como se pode ver na tabela-verdade abaixo:

Observe que não tem como fazer a negação da condicional. Primeiro é preciso a exprimir pela proposição equivalente, que é a disjunção de literais. Daí na disjunção, pode-se aplicar a negação através da regra de De Morgan.

p	**q**	**p→q**	**~(p→q)**	**~q**	**p∧~q**
V	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**V**	**F**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**	**V**	**F**

Atenção

A condicional **p → q** não possui as propriedades **idempotente, comutativa e associativa**, pois as tabelas-verdade de **p→p e p, p → q e q → p, (p → q) → r e p → (q → r) não são idênticas.**

Isso significa que na condicional a ordem das proposições altera o resultado final.

6.5 Negação da Bicondicional

Como $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$, temos (ALENCAR FILHO, 2003):

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$, e, portanto:

aplica-se as regras de equivalência da bi-condicional e da condicional

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$

aplica-se a regra de De Morgan na equivalência da bi-condicional

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim\sim q \wedge \sim p)$

aplica-se a regra de De Morgan em cada parênteses.

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

aplica a regra de equivalência da dupla negação.

Como se pode ver na tabela-verdade abaixo:

p	q	p↔q	~(p↔q)	~q	p∧~q	~p	~p∧q	(p∧~q)∨(~p∧q)
V	V	V	F	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F	F

A tabela verdade das proposições **~(p $\leftrightarrow$ q), p $\leftrightarrow$ ~q, ~p $\leftrightarrow$ q** são idênticas

p	q	p↔q	~(p↔q)	~q	p↔~q	~p	~p↔q
V	V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	V	F	V	F

Portanto, ~(p $\leftrightarrow$ q) $\Leftrightarrow$ p $\leftrightarrow$ ~q $\Leftrightarrow$ ~p $\leftrightarrow$ q

A bicondicional **p $\leftrightarrow$ q** não possui a propriedade **idempotente**, pois as tabelas-verdade de **p $\leftrightarrow$ p e p não são idênticas.**
Mas goza das propriedades comutativa e associativa.

Atenção

6.6 Equivalências Notáveis

Todas essas equivalências são muito importantes para o que iremos aprender.

Nos próximos capítulos, utilizaremos as seguintes equivalências:

1. Idempotência (ID): p ^ p $\Leftrightarrow$ p; p $\vee$ p $\Leftrightarrow$ p

2. Comutação (COM) : p ^ q $\Leftrightarrow$ q ^ p ; p $\vee$ q $\Leftrightarrow$ q $\vee$ p

3. Associação (ASSOC): (p ^ q) ^ r $\Leftrightarrow$ p ^ (q ^ r) ; (p $\vee$ q) $\vee$ r $\Leftrightarrow$ p $\vee$ (q $\vee$ r)

4. Identidade (IDENT): p ^ T $\Leftrightarrow$ p ; p ^ C $\Leftrightarrow$ C; p $\vee$ T $\Leftrightarrow$ T ; p $\vee$ C $\Leftrightarrow$ p obs.: T = Tautologia e c: Contradição

5. Distributiva (DIST): p ^ (q $\vee$ r) $\Leftrightarrow$ (p ^ q) $\vee$ (p ^r); p $\vee$ (q ^ r) $\Leftrightarrow$ (p $\vee$ q) ^ (p $\vee$ r)

6. Absorção (ABS): p ^ (p $\vee$ q) $\Leftrightarrow$ p ; p $\vee$ (p ^ q) $\Leftrightarrow$ p

7. De Morgan (DM): ~(p ^q) $\Leftrightarrow$ ~p $\vee$ ~q; ~(p $\vee$ q) $\Leftrightarrow$ ~p ^ ~q

8. Condicional (COND): p $\rightarrow$ q $\Leftrightarrow$ ~p $\vee$ q

9. Bicondicional (BICOND): p $\leftrightarrow$ q $\Leftrightarrow$ (p $\rightarrow$ q) ^ (q $\rightarrow$ p); p $\leftrightarrow$ q $\Leftrightarrow$ (p ^q) v (~p ^~q)

10. Contraposição (CP): p $\rightarrow$ q $\Leftrightarrow$ ~q $\rightarrow$ ~p

11. Dupla negação (DN): ~~p $\Leftrightarrow$ p

12. Exportação – Importação (EI): p ^ q $\rightarrow$ r $\Leftrightarrow$ p $\rightarrow$ (q $\rightarrow$ r)

Atividades

ATIVIDADE 11 – Para exercitar, vamos realizar algumas das atividades propostas por (PINHO, 1999, p. 75):

1. Demonstrar as propriedades **comutativa** e **associativa** da bicondicional, isto é:

(a) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$

(b) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \Leftrightarrow p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

2. Demonstrar, por tabelas-verdade, as equivalências:

(a) $p \rightarrow q \wedge r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(b) $p \rightarrow q \vee r \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

3. Dar, em linguagem corrente, a negação das seguintes proposições:

(a) O céu é azul e as nuvens são brancas.

(b) É falso que não está frio ou chovendo.

(c) Não é verdade que Maria faz informática, mas não medicina.

4. Demonstrar as seguintes regras de De Morgan:

(a) $\sim(p \wedge q \wedge r) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \vee \sim r$

(b) $\sim(p \vee q \vee r) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q \wedge \sim r$

Indicações

Para maior compreensão, ler o capítulo 7 – Álgebra das Proposições do livro ALENCAR FILHO, Edgard de. Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.