CAPÍTULO 12

QUANTIFICADORES

*Na **Lógica de Predicados** precisamos utilizar novos conceitos chamados quantificadores. Eles serão necessários para representar quantidades. Vamos estudar para entendermos a sua importância.*

Fala Professor

Dada uma sentença aberta $p(X)$ em um universo U, pode ocorrer (PINHO, 1999):

- todos os x em U satisfazem P; isto é, $V_P = U$
- alguns x em U satisfazem P, isto é, $V_P \neq \varnothing$
- nenhum x em U satisfaz P, isto é, $V_P = \varnothing$

Considere, por exemplo, o U = { 2, 4, 6, 8 }. Se fizermos $p(X)$ representar "x é par", temos o primeiro caso: todos os elementos satisfazem P, e VP = U. Para $p(X)$ representando "x é múltiplo de 3", temos apenas um elemento que satisfaz P, e VP = { 6 }. Finalmente, se $p(X)$ representar "x é maior que 10", nenhum elemento de U satisfaz P, e, portanto, VP = $\varnothing$.

12.1 Quantificador Universal

Quantificador Universal – A expressão $\forall X\ p(X)$ afirma que $p(X)$ é verdadeiro para cada $x \in U$. Então, se $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, temos que a conjunção $p(u_1) \wedge p(u_2) \wedge ... \wedge p(u_n)$ é verdadeira. Ou seja, qualquer que seja o elemento x de A, $p(X)$ é verdadeira (PINHO, 1999).

Fala Professor

Em $\forall X\ p(X)$ podemos afirmar que:

i) para todo elemento X do universo U, p(X) é verdadeira.

ii) qualquer que seja o elemento X do universo U, p(X) é verdadeira.

Observe agora o seguinte exemplo: $\forall x\ (2x > x)$: qualquer que seja x, seu dobro é maior que ele mesmo. Observe que isso é verdadeiro se o conjunto Universo for N. Porém é falso se for R (considere um número negativo, por exemplo).

12.2 Quantificador Existencial

Consideremos uma sentença aberta P(x) sobre U, para o qual VP $\neq \varnothing$.

Conceitos

Quantificador Existencial – $(\exists\, x \in U)$ p(X) afirma que existe pelo menos um $x \in U$ para o qual p(X) é verdadeiro. então, se $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, temos que a disjunção $P(u_1) \vee P(u_2) \vee ... \vee P(u_n)$ é verdadeira. (PINHO, 1999).

A linguagem textual, possui alguns sinônimos para a expressão "existe um x": "existe pelo menos um x", "algum (ou alguns) x", "para algum x", etc. e todos são representados por $\exists$x.

Exemplos:

(1) Considere a expressão: $(\exists x \in N)\ (x + 4 < 8)$
Ela é verdadeira, pois podemos encontrar valores tais como 1, 2, 3 e outros para x.

(2) Considere a expressão: $(\exists x \in N)\ (x + 5 < 3)$
Ela é falsa, pois o conjunto-verdade é vazio.

12.3 Negação de Proposições com Quantificadores (Pinho, 1999)

Muitas vezes, precisaremos representar, simbolicamente, a negação de uma expressão quantificada. Seja, por exemplo, a expressão "todos são alunos". Se representarmos "x é um aluno" por a(X), temos "todos são alunos" podendo ser escrito $\forall X\ a(X)$.

Claramente, a negação de "todos são alunos" é "nem todos são alunos" (e não "nenhum é aluno", como pode parecer à primeira vista), ou, simbolicamente, $\sim\forall X\ a(X)$.

Mas dizer que "nem todos são alunos" é o mesmo que dizer "existe alguém que não é aluno", ou seja, "existe um x tal que x não é um aluno", ou, simbolicamente, $\exists X \sim a(X)$.

Concluímos então que as expressões $\sim\forall X\ a(X)$ e $\exists X \sim a(X)$ são equivalentes.

Da mesma forma, como podemos afirmar que as expressões "não existem alunos" e "todos não são alunos" descrevem o mesmo fato, podemos concluir que suas representações simbólicas $\sim \exists X\ a(X)$ e $\forall X \sim a(X)$ são equivalentes.

Esses fatos são decorrência imediata das leis de De Morgan:

$\sim \forall x\ A(x) \Leftrightarrow \sim (A(u_1) \wedge A(u_2) \wedge ... \wedge A(u_n)) \Leftrightarrow \sim A(u_1) \vee \sim A(u_2) \vee ... \vee \sim A(u_n) \Leftrightarrow \exists x \sim A(x)$

$\sim \exists x\ Ax \Leftrightarrow \sim (A(u_1) \vee A(u_2) \vee ... \vee A(u_n)) \Leftrightarrow \sim A(u_1) \wedge \sim A(u_2) \wedge ... \wedge \sim A(u_n) \Leftrightarrow \forall x \sim A(x)$

Dessas equivalências, para dizer que uma expressão do tipo $\forall x\ P(x)$ é falsa, basta mostrar que sua negação $\exists x \sim P(x)$ é verdadeira, ou seja, exibir um elemento k tal que P(k) seja falsa.

Por esse motivo, de uma proposição do tipo $\forall x\ P(x)$ não decorre a existência de um x para o qual P(x) seja verdadeiro. Por exemplo, se não existem marcianos, então a expressão "Todos os marcianos têm olhos verdes" é verdadeira, pois, para que fosse falsa, seria necessário existir um marciano que não tivesse olhos verdes.

Observe que autor está representando variável com letra minúscula e predicados com letra maiúscula. Mas, as propriedades de variável e predicados aqui apresentadas vale para a representação que usamos nos curso.

12.4 Variáveis Aparentes ou Mudas

Se uma expressão possuir mais de uma variável, pode ocorrer que nem todas estejam quantificadas.

As variáveis quantificadas recebem o nome de variáveis **aparentes** ou **mudas**, enquanto as não quantificadas são chamadas **variáveis livres**. (PINHO, 1999).

Conceitos

Exemplo:

Considere o predicado Pxy = $(\exists x)\ (x + y < 10)$, sobre o universo U = { 3, 5, 7, 9 }. Seu conjunto verdade é formado por todos os valores de U que podem substituir y, e para o qual existe pelo menos um x que satisfaz a desigualdade. Então, VP = { 3, 5 }. A variável x é aparente, enquanto y é livre.

12.5 Quantificação de Sentenças Abertas com mais de uma Variável

Quantificar uma sentença leva, da mesma forma que a instanciação, a um enunciado, a uma frase que pode ser verdadeira ou falsa. Costumamos chamar esses enunciados de proposições gerais, em contraposição às proposições singulares, pois não contêm nomes. Assim, o enunciado "Maria foi à praia" é uma proposição singular, enquanto "Todos foram à praia" é uma proposição geral.

Exemplo:

Considere os conjuntos H = { Carlos, Pedro, Mário } e M = { Claudia, Lilian } e o predicado I(x,y) = "x é irmão de y", onde H é o universo de x, e M o universo de y. Suponha que Carlos e Pedro sejam irmãos de Claudia, e que Mário seja irmão de Lilian. Examine a validade dos seguintes enunciados:

a) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in M)\ (I(x,y))$
b) $(\exists x \in H)\ (\forall y \in M)\ (I(x,y))$
c) $(\forall x \in H)\ (\forall y \in M)\ (I(x,y))$
d) $(\exists x \in H)\ (\exists y \in M)\ (I(x,y))$

Percebemos que o primeiro e o último são verdadeiros, e os demais, falsos.

12.6 Ordem dos Quantificadores

Quando se obtém a forma simbólica de uma expressão, a ordem dos quantificadores pode ser importante; por exemplo, trocando a ordem dos enunciados do exemplo anterior, temos:

a) $(\exists y \in M)\ (\forall x \in H)\ (I(x,y))$
b) $(\forall y \in M)\ (\exists x \in H)\ (I(x,y))$
c) $(\forall y \in M)\ (\forall x \in H)\ (I(x,y))$
d) $(\exists y \in M)\ (\exists x \in H)\ (I(x,y))$

Vemos que agora, o segundo e o quarto enunciados são verdadeiros, enquanto o primeiro e o terceiro são falsos. Observe que apenas os dois primeiros enunciados, nos quais os quantificadores são distintos, trocaram a validade.

Conceitos

Quantificadores de mesma espécie podem ser permutados, ao passo que, em geral, quantificadores de espécies distintas, não podem.

12.7 Negação de Proposições com Quantificadores

A negação de enunciados com mais de um quantificador pode ser obtido pela aplicação sucessiva das leis de De Morgan; por exemplo,

$$\begin{array}{lllll}
\sim \forall x\, \forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x \sim \forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\, \exists y \sim P(x,y) \\
\sim \exists x\, \exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x \sim \exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\, \forall y \sim P(x,y) \\
\sim \forall x\, \exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x \sim \exists y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \exists x\, \forall y \sim P(x,y) \\
\sim \exists x\, \forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x \sim \forall y\, P(x,y) & \Leftrightarrow & \forall x\, \exists y \sim P(x,y)
\end{array}$$

Chama-se escopo de um quantificador a parte da frase sobre a qual ele atua, em geral indicado pelos parênteses que o seguem. Se não houver parênteses, o escopo do quantificador é limitado ao predicado que o segue. Veja os exemplos abaixo:

$\exists x\, (P(x) \vee Q(x))$	escopo de $\exists x$: $P(x) \vee Q(x)$	
$\exists x\, P(x) \vee Q(x)$	escopo de $\exists x$: $P(x)$	
$\exists y\, (P(x,y) \wedge \forall x\, Q(x))$	escopo de $\exists y$: $P(x,y) \wedge \forall x\, Q(x)$	escopo de $\forall x$: $Q(x)$

12.8 Exemplos (Pinho, 1999, p. 47)

A. Expressões com um quantificador e predicados monádicos

(1) Existem sábios (S(x) – x é sábio)
existe um x tal que x é sábio
$\exists x\, S(x)$

(2) Todos são sábios (S(x) – x é sábio)
para todo x, x é sábio
$\forall x\, S(x)$

(3) Não existem marcianos (M(x) – x é marciano)

não existe x tal que x seja um marciano
$\sim \exists x\, M(x)$

ou

para todo x, x não é um marciano
$\forall x\, (\sim M(x))$

(4) Nem todos são sábios (S(x) – x é sábio)

para nem todo x, x é sábio ou existe um x tal que x não é sábio
$\sim \forall x\, S(x)$ $\exists x\, (\sim S(x))$

(5) Os morcegos são mamíferos (C(x) – x é morcego; M(x) – x é um mamífero)

para todo x, se x é um morcego, x é um mamífero

$\forall x\ (C(x) \longrightarrow M(x))$

(6) Existe um mamífero que voa (M(x) – x é mamífero; V(x) – x voa)

existe um x tal que x é mamífero e x voa

$\exists x\ (M(x) \wedge V(x))$

(7) Todo livro deve ser lido (L(x) – x é um livro; D(x) – x deve ser lido)

para todo x, se x é um livro, x deve ser lido

$\forall x\ (L(x) \longrightarrow D(x))$

B. Expressões com mais de um quantificador e predicados monádicos

(1) Se existem marcianos, existem não terráqueos (M(x) – x é marciano; T(x) – x é terráqueo)

se existe x tal que x seja marciano , então existe y tal que y não é terráqueo

$\exists x\ M(x)\ \ \exists \longrightarrow y\ (\sim T(y))$

(2) Alguns são espertos, outros não (E(x) – x é esperto)

existe x tal que x é esperto, e existe y tal que y não é esperto

$\exists x\ E(x) \wedge \exists y\ (\sim E(y))$

(3) Existem políticos honestos e desonestos (P(x) – x é político; H(x) – x é honesto)

existe x tal que x é político e x é honesto, e existe y tal que y é político e y não é honesto

$\exists x\ (P(x) \wedge H(x)) \wedge \exists y\ (P(y) \wedge \sim H(y))$

C. Expressões com relações

(1) João é casado com alguém (C(x,y) – x é casado com y)

existe x tal que João é casado com x

$\exists x\ C\ (\text{João}, x)$

(2) Todos têm pai (P(x,y) – x é pai de y)

para todo x existe y tal que y é pai de x

$\forall x\, \exists y\, P(y,x)$

(3) Todas as pessoas têm pai (P(x) – x é uma pessoa; F(x,y) – x é pai de y)

para todo x, se x é uma pessoa, existe y tal que y é pai de x

$\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y\, F(x,y))$

Atividades

ATIVIDADE 20:

1. Resolver os demais exercícios dos capítulos 16 e 17 do livro de Edgard de Alencar Filho - Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.

2. Sendo R o conjunto dos reais, determinar o valor lógico de:

(a) $(\forall x \in R)\ (|x| = x)$ (b) $(\exists\, x \in R)\ (x + 2 = x)$

3. Dar a negação das proposições do exercício anterior.

4. Sendo A = {2, 3, ..., 8, 9}, dar um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições:

(a) $(\forall\ x \in A)\ (x + 5 < 12)$ (b) $(\forall\ x \in A)$ (x é par)

5. Dar a negação das seguintes proposições

(a) $(\forall x)\ (x + 2 \leq 7) \wedge (\exists\, x)\ (x^2 - 1 = 3)$

(b) $(\exists\, x)\ (x^2 = 9) \vee (\forall x)\ (2x - 5 \neq 7)$

6. Sendo {1, 2, 3) o universo das variáveis x, y, z, e determinar o valor lógico de:

(a) $(\exists\, x)\ (\forall y)\ (\exists\, z)\ (x^2 + y^2 < z^2)$

(b) $(\exists\, x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ (x^2 + y^2 < z^2)$

7. Sendo R o conjunto dos reais, determinar o valor lógico de:

(a) $(\forall y \in R)\ (\exists\, x \in R)\ (x + y = y)$

(b) $(\forall x \in R)\ (\exists\, y \in R)\ (xy = 1)$

8. Dar a negação das proposições do exercício anterior.

Conceitos

Para maior compreensão, ler os capítulos 16 – Quantificadores e 17 - Quantificação de sentenças abertas com mais de uma variável do livro de Edgard de Alencar Filho Iniciação à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2003.