Introdução à Lógica Matemática



Olá Turma,

Neste Capítulo vocês terão um primeiro contato com a Lógica Matemática e com alguns de seus conceitos muito importantes – proposições e conectivos.

O aprendizado da Lógica auxilia no raciocínio, na compreensão de conceitos básicos, na verificação formal de programas e prepara para o entendimento de conceitos mais avançados.

Bons estudos!



Fala Professor

A Lógica é uma ciência matemática fortemente ligada à filosofia. Ela tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento e as formas de aplicar essas leis, corretamente, na investigação da verdade. Ela será o o nosso foco no decorrer de toda a disciplina.

1.1 Raciocínio Lógico e Lógica Formal

Vamos imaginar a seguinte situação (GERSTING, 2004): Você está participando de um júri num processo criminal e o advogado de defesa faz esta argumentação:

Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason Pritchard viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro de, então Jason Pritchard não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia de 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente.

Em sua opinião, o argumento do advogado está correto? Como você iria votar?

Parece tudo muito confuso e difícil de entender. Isso se deve ao fato de a nossa língua (ou qualquer outra linguagem natural) ter muitas ambigüidades e ao fato de as frases longas causarem confusão no nosso cérebro.

Capítulo 1

Tudo isso seria facilitado se reescrevêssemos a frase com a notação da lógica simbólica ou lógica formal, uma vez que tal conhecimento nos permite tirar todo o palavreado que causa confusão e concentrar-nos na argumentação. A lógica formal nos fornece base para pensar de forma organizada e tem aplicação direta na área de informática (GERSTING, 2004).

Atenção



Lógica simbólica ou Lógica Formal – aquela que tem o propósito de simbolizar o raciocínio encontrado não somente na matemática, mas também na vida diária.

Porém, antes de pensarmos na lógica formal, vamos exercitar um pouco o nosso raciocínio lógico.

Atividades



ATIVIDADE 1 – Para exercitar, vamos realizar uma atividade proposta por (PINHO, 1999, p. 6):

- 1. Use o bom senso para tentar resolver os seguintes problemas:
- (a) Se eu não tenho carro, a afirmação "meu carro não é azul" é verdadeira ou falsa?
- (b) Existe o ditado popular que afirma: "toda regra tem exceção". Considerando que essa frase é, por sua vez, também uma regra; podemos garantir que ela é verdadeira? Ou que é falsa?
- (c) Tenho 9 pérolas idênticas, mas sei que uma delas é falsa, e é mais leve que as outras. Como posso identificar a pérola falsa, com apenas duas pesagens em uma balança de dois pratos?
- (d) Tenho 12 pérolas idênticas, mas uma delas é falsa e tem peso um pouco diferente das demais, não sei se mais leve ou mais pesada; como posso identificar a pérola falsa, e se ela é mais leve ou mais pesada, com apenas três pesagens em uma balança de dois pratos?
- (e) Tenho 10 grupos de 10 moedas cada um; cada moeda pesa 10 gramas, exceto as de um grupo cujas moedas pesam 9 gramas cada uma. Como posso identificar o grupo de moedas mais leves, com apenas uma pesagem em uma balança de um prato?

-0:0:0:

(f) Um rei resolveu dar a um prisioneiro a oportunidade de obter a liberdade. Levou-o até uma sala, com duas portas de saída, chamadas A e B, cada uma com um guarda. Disse: "Uma das portas leva à liberdade, enquanto a outra leva à forca; alem disso, um dos guardas fala sempre a verdade, enquanto o outro só fala mentiras. Você pode fazer uma única pergunta a um dos guardas e escolher uma porta para sair". O prisioneiro pensou durante alguns segundos; depois, dirigiu-se a um dos guardas e disse: "Se eu perguntasse a seu companheiro qual a porta que leva à liberdade, o que ele me diria ?". Depois de alguns segundos, o guarda respondeu: "A". "Obrigado", disse o prisioneiro, e passou pela porta B. O prisioneiro obteve a liberdade ou foi para a forca? Como saber?



1.2 Proposição

Por meio da lógica formal podemos representar as afirmações que fazemos no nosso cotidiano. O primeiro passo na construção de uma linguagem simbólica, mais adequada à formulação dos conceitos da Lógica, é a apresentação do que chamamos proposição simples.

Proposição (ou declaração) – conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. É uma sentença que pode ser verdadeira ou falsa.



Exemplos:

- A Terra é quadrada.
- O sol é azul.
- Vitória é capital do Espírito Santo.

Aqui, as duas primeiras proposições são falsas, enquanto a última é verdadeira.

A Lógica da Matemática adota como regras fundamentais do pensamento os seguintes princípios (ou axiomas) (ALENCAR FILHO, 2003):

Conceitos



- (I) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
- (II) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa. Verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Por causa deste princípio, diz-se que a Lógica Matemática é bivalente.

1.3 Proposições Simples e Proposições Compostas

As proposições podem ser simples (ou atômicas) e compostas (ou moleculares) (ALENCAR FILHO, 2003).

Conceitos



Proposição simples ou proposição atômica – aquela que não contém em si nenhuma outra proposição como parte integrante.

As proposições simples são geralmente representadas através de letras latinas minúsculas p, q, r, s...

Temos a seguir algumas proposições simples:

p : João é estudante.

q : Maria trabalha no centro da cidade.

r: Pato é um animal.

Conceitos



Proposição composta ou proposição molecular – aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições. Também são chamadas de **fórmulas proposicionais** ou apenas **fórmulas**.

As proposições compostas são geralmente representadas por letras latinas maiúsculas P, Q, R, S...

Exemplos de proposições compostas:

P : João é estudante e pato é um animal.

Q : João é estudante ou Maria trabalha no centro da cidade.

S : Se Maria trabalha no centro da cidade então Maria mora perto do centro.

Observe que nesses exemplos as proposições compostas são formadas por duas proposições simples, mas poderiam ser mais. Inclusive, proposições compostas podem ser formadas por outras proposições compostas.

Quando quisermos explicitar que uma proposição composta **P** é formada pela combinação das proposições simples **p**, **q**, **r**..., escreve-se: **P**(**p**, **q**, **r**).

No exemplo dado, temos: P (p, r).

1.4 Conectivos

Conectivos – palavras ou símbolos usados para formar novas proposições a partir de outras.



Exemplos:

P : A lua é quadrada **e** a neve é branca.

Q : O triângulo ABC é retângulo ou isósceles.

R : O dia está ensolarado e sem nuvens se **e somente se não** está chovendo.

S : **Se** Luiz é engenheiro, **então** sabe matemática.

As palavras grifadas acima são conectivos usuais em lógica de matematica: "e", "ou", "não", "se...então", "...se e somente se..."

1.5 Valores Lógicos das Proposições

Como vimos, proposições podem ser verdadeiras ou falsas.

Valor lógico de uma proposição – V(p) – \acute{e} a verdade (**V**) se a proposição \mathbf{p} \acute{e} verdadeira e a falsidade (**F**) se a proposição \mathbf{p} \acute{e} falsa.



Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda proposição tem um, e um só, dos valores V ou F.

Exemplo:

p : Todo número par é múltiplo de dois.

q : O menor planeta existente é o planeta Terra.

O valor lógico da primeira proposição é a verdade, ou seja, V(p) = V e o valor lógico da segunda proposição é a falsidade, ou seja, V(q) = F.

1.6 Tabela Verdade

Como vimos anteriormente, uma proposição simples ou é verdadeira (V) ou é falsa (F) - princípio do terceiro excluído. Porém, como faremos para determinar se uma proposição composta é verdadeira ou falsa? Ou seja, como faremos para determinar o valor lógico de proposições compostas?

Para responder essa pergunta, utilizaremos o conceito de tabelas-verdade.

Tem-se que o valor lógico de qualquer proposição composta depende unicamente dos valores lógicos das proposições simples componentes, ficando por eles univocamente determinado.

Conceitos



Tabela verdade ou tabela da verdade - é uma tabela usada em lógica para determinar se uma expressão é verdadeira ou falsa, de acordo com os possíveis valores lógicos das proposições simples componentes (ALENCAR FILHO, 2003).

Assim, por exemplo, no caso de uma proposição composta formada pelas proposições simples p e q, os valores lógicos possíveis de p e q são mostrados na Tabela 1. No caso de haver uma nova proposição r, os valores são mostrados na Tabela 2:

Tabela 1

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Tabela 2

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F
	V V V V F F F F	V V V V V F F V F V F F F F F F F F F F

Observe, no primeiro caso, que os valores lógicos V e F se alternam de dois em dois para a primeira proposição p e de um em um para a segunda proposição q, e que, além disso, VV, VF, FV, FF são arranjos binários com repetição dos dois elementos V e F.

Da mesma forma, observe, no segundo caso, que os valores lógicos V e F se alternam de quatro em quatro para a primeira proposição p, de dois em dois para a segunda proposição q e de um em um para a terceira proposição r, e que, além disso, VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF são arranjos ternários com repetição dos dois elementos V e F.

Para maior compreensão, ler o capítulo 1 – Proposições e Conectivos do livro de Edgard de Alencar Filho - Iniciação à lógica matemática. São Paulo: Nobel, 2003.



Indicações

ATIVIDADE 2:

- 1. Determinar o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:
- (a) Fernando Henrique é o atual presidente do Brasil.
- (b) Um heptágono é uma figura geométrica de 10 lados.
- (c) O Egito fica na Ásia.
- (d) Todo número divisível por 3 é impar.
- (e) Nova York é capital dos EUA.
- (f) House é uma palavra existente na língua inglesa.



Atividades