INSPER: INSTITUTO DE ENSINO E PESQUISA

Implementação e análise de treliças planas

Marcelo Andrade
Pedro Cunial
Gabriela Almeida

31 de março de 2017

Sumário

1. OBJETIVOS

Os objetivos do projeto são os seguintes:

- Implementar um programa para análise de tração/compressão em treliças planas. O código deverá ser escrito de modo que os dados de entrada possam ser facilmente alterados a partir de um arquivo de texto. O programa deverá gerar um arquivo de saída.
- Aplicar técnicas numéricas e implementar um programa para solução de sistemas de equações.
- Analisar o arquivo de saída com o pós-processamento dos dados disponibilizado.

2. INTRODUÇÃO

Com base nos conceitos desenvolvidos na disciplina de Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos sobre treliças plana, dever-se-ia desenvolver um projeto que cumpriria os objetivos listados na seção 1

Na primeira parte do projeto, era preciso usar os modelos fornecidos de entrada e saída e implementar uma função capaz de executar os procedimentos discutidos em aula, para enfim, analisar a o valor de tração/compressão em treliças planas. Para desenvolver essa etapa do projeto, decidiu-se utilizar a linguagem Python para resolver os sistemas de equações.

Em uma segunda parte, era necessário usar técnicas numéricas discutidas em aula, implementando um solucionador de sistemas de equações para resolver o sistema obtido na parte I do projeto. As técnicas numéricas discutidas em aula foram a de Gauss-Seidel e a de Jacobi. Após implementar ambas as técnicas e comparar os resultados obtidos por cada uma delas, decidiu-se usar a Gauss-Seidel, pois ela apresentou os valores de saída mais condizentes com o projeto.

3. METODOLOGIA

A partir do arquivo de entrada do programa, primeiramente calcula-se os graus de liberdade de cada um dos elementos a partir da matriz de incidências do arquivo de entrada. Sendo N os graus de liberdade de um elemento x, e I a matriz de incidências:

$$N_x = \left[I_{x1} - 1, \quad I_{x1}, \quad I_{x2} - 1, \quad I_{x2} \right]$$

Em seguida, calcula-se as especificações de cada elemento da treliça a partir da matriz de coordenadas C, sendo elas o comprimento do elemento, cosseno e seno do ângulo. Considerando$L$ o comprimento do elemento x, cos o cosseno do ângulo θ de x e sin o seno do ângulo θ de x:

$$L_x = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$sin_x = \frac{y_2 - y_1}{L_x}$$

$$cos_x = \frac{x_2 - x_1}{L_x}$$

Com as especificações de cada elemento obtidas, calcula-se as matriz de rigidez do elemento de barra no sistema global, representada por K_e. Sendo E o módulo de elasticidade do material da barra, A a área da seção transversal da barra, l o comprimento da mesma e c e s respectivamente o cosseno e seno do ângulo θ do elemento:

$$K_e = \frac{E \cdot A}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Já com a matriz de rigidez no sistema global de cada elemento, calculou-se a matriz de rigidez global da treliça, representada por K_g. Para esse cálculo, primeiro tem-se que determinar as matrizes de superposição para cada elemento, a soma dessas matrizes resulta na rigidez global da treliça.

As matrizes de superposição são obtidas através substituição dos índices da matriz K_e pelos seus respectivos graus de liberdade.

A partir da matriz K_g, utilizando o vetor de forças globais e os graus de liberdade dos nós, aplica-se as condições de contorno na matriz K_g.

Com a matriz K_g simplificada para a análise e a usando a matriz de forças P_g, foi-se calculado o vetor de deslocamento dos nós da treliça, representada por U.

$$[K_g] \cdot \{U\} = \{P_g\}$$

Pode-se interpretar a equação matricial acima como um sistema de equações. Utilizou-se o método numérico de Gauss-Seidel, como é explicado em [1]. Usamos como entrada do método um número máximo de 1000 iterações e um erro esperado igual a 0 com precisão de ponto flutuante, resultando nos valores do vetor de deslocamento.

Com o vetor de deslocamento calculado e utilizando a matriz K_g anterior as condições de contorno descritas, aplicamos condições de contorno no vetor U e na matriz K_g e determinou-se as reações de apoio em cada um dos nós da treliça, formando uma matriz R de reações.

$$\{R\} = [K_g]\{U\}$$

Por fim, calculou-se a tensão e deformação de cada um dos elementos, a tensão representado por σ e a deformação representada por ϵ.

$$\sigma = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \frac{1}{l}\begin{bmatrix}-c & -s & c & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\end{bmatrix}$$

Com todos os valores das reações de apoio, tensões e deformações dos elementos, e deslocamentos dos nós, exportou-se todos os dados em um arquivo de saída, como pode ser visto no apêndice A.

4. Resultados e Discussão

5. Conclusões

Referências

[1] Steven Chapra. *Numerical Methods for Engeneers.*

A. Arquivo Saída

```
*DISPLACEMENTS
    1  0.0  0.0
    2  1.577956428087981e-06  -6.041091190959638e-06
    3  -2.8571428571428564e-06  0.0
    4  2.3997541478958825e-22  -1.9019583569978225e-05
    5  0.0  -1.9019583569978225e-05
    6  -1.5779564280879803e-06  -6.041091190959638e-06
    7  2.8571428571428564e-06  0.0
    8  0.0  0.0

*ELEMENT_STRAINS
    1  -1.1157836907179139e-06
    2  -1.4285714285714282e-06
    3  -3.020545595479819e-06
    4  -7.889782140439904e-07
    5  1.4285714285714282e-06
    6  0.0
    7  -4.040610178208841e-06
    8  -7.889782140439903e-07
    9  1.4285714285714282e-06
    10  -4.040610178208841e-06
    11  -3.020545595479819e-06
    12  -1.115783690717914e-06
```

13 −1.4285714285714282e−06

*ELEMENT_STRESSES
1 −234314.57505076192
2 −299999.99999999994
3 −634314.5750507619
4 −165685.424949238
5 299999.99999999994
6 0.0
7 −848528.1374238566
8 −165685.42494923796
9 299999.99999999994
10 −848528.1374238566
11 −634314.5750507619
12 −234314.57505076195
13 −299999.99999999994

*REACTION_FORCES
1 FX = 9313.708498984757
1 FY = 3313.708498984759
3 FY = 24686.291501015236
7 FY = 24686.291501015236
8 FX = −9313.708498984757
8 FY = 3313.70849898476