
Implementação e análise de treliças planas

Marcelo Andrade

Pedro Cunial

Gabriela Almeida

31 de março de 2017

SUMÁRIO

1. Objetivos	3
2. Introdução	3
3. Metodologia	3
4. Resultados e Discussão	5
5. Conclusões	7
Apêndice A. Arquivo Saída	7
Apêndice B. Arquivo Entrada	8

1. OBJETIVOS

Os objetivos do projeto são os seguintes:

- Implementar um programa para análise de tração/compressão em treliças planas. O código deverá ser escrito de modo que os dados de entrada possam ser facilmente alterados a partir de um arquivo de texto. O programa deverá gerar um arquivo de saída.
- Aplicar técnicas numéricas e implementar um programa para solução de sistemas de equações.
- Analisar o arquivo de saída com o pós-processamento dos dados disponibilizado.

2. INTRODUÇÃO

Com base nos conceitos desenvolvidos na disciplina de Transferência de Calor e Mecânica dos Sólidos sobre treliças plana, dever-se-ia desenvolver um projeto que cumpriria os objetivos listados na seção 1

Na primeira parte do projeto, era preciso usar os modelos fornecidos de entrada e saída e implementar uma função capaz de executar os procedimentos discutidos em aula, para enfim, analisar a o valor de tração/compressão em treliças planas. Para desenvolver essa etapa do projeto, decidiu-se utilizar a linguagem Python (Python 3) junto à biblioteca numpy para manipulação otimizada de dados numéricos e estrutura de dados. Para não familiarizados com a linguagem, o grupo recomenda a instalação do Anaconda na versão com Python 3 para lidar não só com Python mas também com as dependências do projeto. O programa pode ser executado com o comando `python exercicio.py`, adicionalmente, o comando pode receber também o nome de um arquivo de entrada seguido do nome desejado do arquivo de saída, por exemplo: `python exercicio.py entrada.fen saida.out`.

Em uma segunda parte, era necessário usar técnicas numéricas discutidas em aula, implementando um solucionador de sistemas de equações para resolver o sistema obtido na parte I do projeto. As técnicas numéricas discutidas em aula foram a de Gauss-Seidel e a de Jacobi. Após implementar ambas as técnicas e comparar os resultados obtidos por cada uma delas, decidiu-se usar a Gauss-Seidel, pois ela apresentou os valores de saída mais condizentes com o projeto.

3. METODOLOGIA

A partir do arquivo de entrada do programa, primeiramente calcula-se os graus de liberdade de cada um dos elementos a partir da matriz de incidências do arquivo de entrada. Sendo N os graus de liberdade de um elemento x , e I a matriz de incidências:

$$N_x = [I_{x1} - 1, \quad I_{x1}, \quad I_{x2} - 1, \quad I_{x2}]$$

Em seguida, calcula-se as especificações de cada elemento da treliça a partir da matriz de coordenadas C , sendo elas o comprimento do elemento, cosseno e seno do ângulo. Considerando L o comprimento do elemento x , \cos o cosseno do ângulo θ de x e \sin o seno do ângulo θ de x :

$$L_x = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sin_x = \frac{y_2 - y_1}{L_x}$$

$$\cos_x = \frac{x_2 - x_1}{L_x}$$

Com as especificações de cada elemento obtidas, calcula-se a matriz de rigidez do elemento de barra no sistema global, representada por K_e . Sendo E o módulo de elasticidade do material da barra, A a área da seção transversal da barra, l o comprimento da mesma e c e s respectivamente o cosseno e seno do ângulo θ do elemento:

$$K_e = \frac{E \cdot A}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Já com a matriz de rigidez no sistema global de cada elemento, calculou-se a matriz de rigidez global da treliça, representada por K_g . Para esse cálculo, primeiro tem-se que determinar as matrizes de superposição para cada elemento, a soma dessas matrizes resulta na rigidez global da treliça.

As matrizes de superposição são obtidas através substituição dos índices da matriz K_e pelos seus respectivos graus de liberdade.

A partir da matriz K_g , utilizando o vetor de forças globais e os graus de liberdade dos nós, aplica-se as condições de contorno na matriz K_g .

Com a matriz K_g simplificada para a análise e usando a matriz de forças P_g , foi-se calculado o vetor de deslocamento dos nós da treliça, representada por U .

$$[K_g] \cdot \{U\} = \{P_g\}$$

Pode-se interpretar a equação matricial acima como um sistema de equações. Utilizou-se o método numérico de Gauss-Seidel, como é explicado em [1]. Usamos como entrada do método um número máximo de 1000 iterações e um erro esperado igual a 0 com precisão de ponto flutuante, resultando nos valores do vetor de deslocamento.

Com o vetor de deslocamento calculado e utilizando a matriz K_g anterior as condições de contorno descritas, aplicamos condições de contorno no vetor U e na matriz K_g e determinou-se as reações de apoio em cada um dos nós da treliça, formando uma matriz R de reações.

$$\{R\} = [K_g] \{U\}$$

Por fim, calculou-se a tensão e deformação de cada um dos elementos, a tensão representado por σ e a deformação representada por ϵ .

$$\sigma = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Com todos os valores das reações de apoio, tensões e deformações dos elementos, e deslocamentos dos nós, formatou-se-os em um arquivo de saída, como pode ser visto no apêndice A.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir da treliça de entrada representada pela figura 1, construiu-se o arquivo de entrada do programa, como visto do apêndice B.

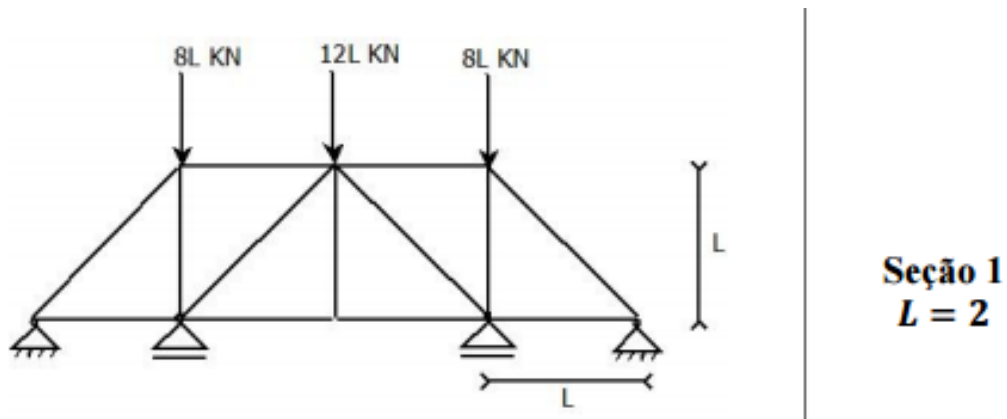


Figura 1: Representação da treliça de entrada do programa

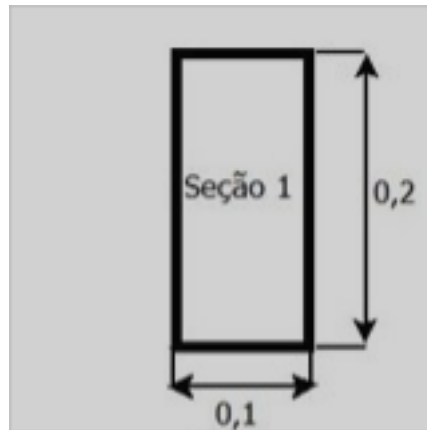


Figura 2: Representação da seção transversal da treliça de entrada

Para validar os resultados obtidos, montou-se a mesma treliça do arquivo de entrada no programa Ftool com intuito de se comparar os valores das reações de apoio.

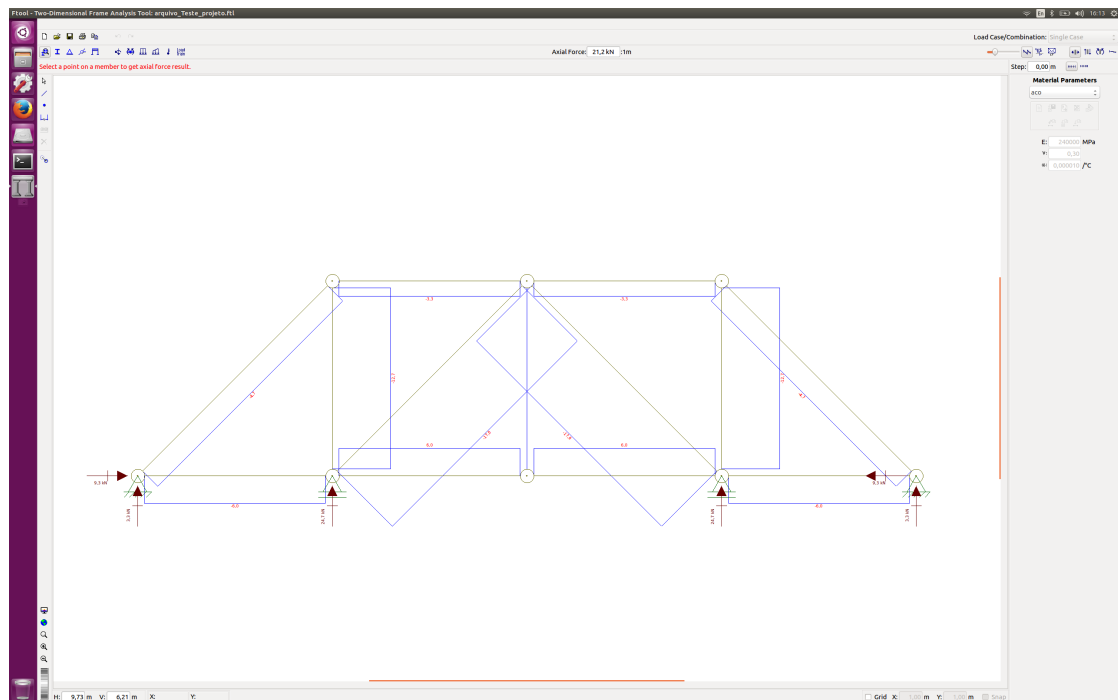


Figura 3: Implementação da entrada do programa no Ftool

Como pode ser observado na figura 3, os valores encontrados a partir do Ftool condizem com os valores computados pelo programa feito pelo grupo. Há uma pequena diferença entre os resultados, que pode ser principalmente associada à utilização do método numérico de Gauss-Seidel para a resolução dos sistemas lineares. O método usado pelo Ftool não é o

mesmo usado pelo programa, causando uma diferença no resultado final.

5. CONCLUSÕES

Softwares de simulação física são muito comuns nos dias de hoje. Após o projeto, podemos concluir que a elaboração de um software do mesmo tipo, ainda que menos profissional do que os utilizados pela indústria, pode não só ser uma tarefa consideravelmente simples, mas também uma ótima oportunidade de aprendizado.

Além disso, o conhecimento de métodos numéricos para manipulação de dados é extremamente importante na formação de um engenheiro (principalmente de computação), pois além de agregar um conhecimento técnico de como utilizá-los, sua compreensão permite entender as limitações da computação numérica atualmente, adicionando um enorme conhecimento ao ferramental de um desenvolvedor em termos não só de performance como também de escalabilidade de projetos.

REFERÊNCIAS

- [1] Steven Chapra. *Numerical Methods for Engineers*.

A. ARQUIVO SAÍDA

```
*DISPLACEMENTS
1 0.0 0.0
2 1.577956428087981e-06 -6.041091190959638e-06
3 -2.8571428571428564e-06 0.0
4 2.3997541478958825e-22 -1.9019583569978225e-05
5 0.0 -1.9019583569978225e-05
6 -1.5779564280879803e-06 -6.041091190959638e-06
7 2.8571428571428564e-06 0.0
8 0.0 0.0

*ELEMENT_STRAINS
1 -1.1157836907179139e-06
2 -1.4285714285714282e-06
3 -3.020545595479819e-06
4 -7.889782140439904e-07
5 1.4285714285714282e-06
6 0.0
7 -4.040610178208841e-06
8 -7.889782140439903e-07
9 1.4285714285714282e-06
10 -4.040610178208841e-06
11 -3.020545595479819e-06
12 -1.115783690717914e-06
13 -1.4285714285714282e-06

*ELEMENT_STRESSES
```

```

1 -234314.57505076192
2 -299999.99999999994
3 -634314.5750507619
4 -165685.424949238
5 299999.99999999994
6 0.0
7 -848528.1374238566
8 -165685.42494923796
9 299999.99999999994
10 -848528.1374238566
11 -634314.5750507619
12 -234314.57505076195
13 -299999.99999999994

*REACTION_FORCES
1 FX = 9313.708498984757
1 FY = 3313.708498984759
3 FY = 24686.291501015236
7 FY = 24686.291501015236
8 FX = -9313.708498984757
8 FY = 3313.70849898476

```

B. ARQUIVO ENTRADA

```

*COORDINATES
8
1 0 0
2 2 2
3 2 0
4 4 2
5 4 0
6 6 2
7 6 0
8 8 0

*ELEMENT_GROUPS
13
1 1 BAR
2 1 BAR
3 1 BAR
4 1 BAR
5 1 BAR
6 1 BAR
7 1 BAR
8 1 BAR
9 1 BAR
10 1 BAR
11 1 BAR
12 1 BAR
13 1 BAR

```

```

*INCIDENCES
1 1 2

```


2 1 3
3 2 3
4 2 4
5 3 5
6 4 5
7 3 4
8 4 6
9 5 7
10 4 7
11 6 7
12 6 8
13 7 8

*MATERIALS

13
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6
210E9 1570E6 1570E6

*GEOMETRIC_PROPERTIES

13
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2
2E-2

*BCNODES

6
1 1
1 2
3 2
7 2
8 1
8 2

```
*LOADS
3
2 2 -16E3
4 2 -24E3
6 2 -16E3
```