Relatório do Projeto Final de Física Computacional

Grupo **D01**

$ist1103730$ – Joana Monteiro Peixoto Martins Pimenta;
$ist1102716$ – Pedro Miguel Pombeiro Curvo;
$ist1102674$ – Rodrigo Farate Laia;
$ist1102474$ – Salvador Baptista Torpes;

Instituto Superior Técnico – Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica 2021/2022

22 de abril de 2022 – 24 de abril 2022

Resumo do Trabalho:

O presente relatório tem como objetivo explicitar e explicar o trabalho desenvolvido pelo nosso grupo no âmbito do projeto final de Física Computacional. Este projeto tem como objetivo estudar um pêndulo degenerado, resolvendo a sua equação de movimento e fazendo a análise de dados de uma experiência com o mesmo. Encontra-se, na figura 1 o esquema que reflete a organização computacional do nosso trabalho:

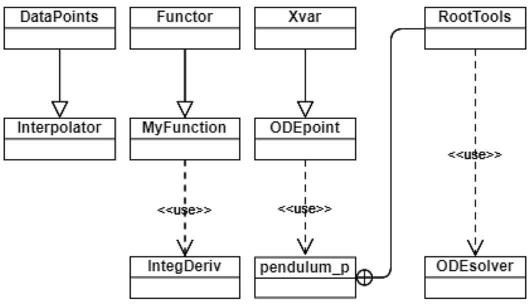

Figura 1: Diagrama de classes

Índice:

Este relatório encontra-se dividido em duas partes principais, estando ambas divididas nas suas respetivas alíneas, tal como podemos verificar na seguinte tabela:

Pergunta 1 – Estudo de um pêndulo gravítico simples com atrito.	Alínea a)
	Alínea b)
	Alínea c)
	Alínea d)
	Alínea e)
Pergunta 2 – Análise de dados de uma experiência de um pêndulo simples com atrito.	Alínea a)
	Alínea b)

Pergunta 1:

Esta pergunta tem como objetivo a resolução da equação diferencial não-linear de segunda ordem que está associada ao movimento do pêndulo degenerado. A equação em questão é a seguinte:

$$ml^2\ddot{\theta} + C\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

O pêndulo é, como já vimos, degenerado, estando por isso sujeito a uma força de atrito que depende de uma constante k_1:

$$Fa = -k_1 v = -k_1 l\dot{\theta} \qquad (2)$$

Ao analisar o diagrama de forças do pêndulo, podemos escrever a equação das forças que sobre ele atuam, equações estas que nos serão úteis mais à frente:

$$\text{em } \vec{e_\theta}\text{: } P\sin\theta - Fa = ml\ddot{\theta} \Leftrightarrow \Leftrightarrow ml^2\ddot{\theta} - k_1 l\dot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \qquad (3.1)$$

$$\text{em } \vec{e_r}\text{: } P\cos\theta - T = -ml\dot{\theta}^2 \qquad (3.2)$$

Aqui encontram-se organizadas as variáveis e as constantes que vamos utilizar ao longo desta pergunta:

l	Comprimento do fio $l = 260\ cm$	m	Massa do pêndulo $m = 500\ gr$
k_f	Coeficiente de amortecimento $k_f = 0.01s^{-1}$	k_1	Constante de atrito
g	Aceleração da gravidade $g = 9.81\ m/s^2$	θ	Ângulo medido em relação à posição de equilíbrio

Pergunta 1 – Alínea a)

Ao dividirmos a equação (1) por ml^2, obtemos a equação pretendida (4), bem como uma expressão para o coeficiente de amortecimento k_f (5.1). Por outro lado, fazendo uma analogia entre as equações (1) e (3.1), concluímos que $C = -k_1 l$. Obtemos assim um segundo resultado para k_f (5.2):

$$\ddot{\theta} + k_f\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \qquad (4)$$

$$k_f = \frac{C}{ml^2} \qquad (5.1) \qquad\qquad k_f = \frac{k_1}{m} \qquad (5.2)$$

Pergunta 1 – Alínea b)

Nesta pergunta temos como objetivo obter a equação de movimento (4) na forma adimensional. As variáveis adimensionais são $\hat{t}$, $\hat{\theta}$ e $\dot{\hat{\theta}}$ e podem obter-se a partir das variáveis dimensionais através dos fatores de escala t_c, θ_c e $\dot{\theta}_c$, de acordo com as seguintes equações (6):

$$t = t_c\hat{t} \qquad \theta = \theta_c\hat{\theta} \qquad \dot{\theta} = \dot{\theta}_c\dot{\hat{\theta}} \qquad (6)$$

Para obter a equação do movimento na forma adimensional (7), substituímos as variáveis t, θ e $\dot{\theta}$ na equação (4) pelas variáveis adimensionais $\hat{t}$, $\hat{\theta}$ e $\dot{\hat{\theta}}$ tendo em vista as equações (6) e, com alguma álgebra, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{l}{g{t_c}^2}\ddot{\hat{\theta}} + \frac{k_f\theta_c l}{gt_c}\dot{\hat{\theta}} + \sin\hat{\theta} = 0 \qquad (7)$$

De modo a simplificar a equação (7), queremos definir t_c de modo a que o coeficiente de $\ddot{\hat{\theta}}$ em (7) seja igual a 1. Por conseguinte, os fatores de escala vão tomar os seguintes valores (8):

$$t_c = \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (8.1) \qquad \theta_c = 1 \qquad (8.2)$$

Necessitamos ainda de descobrir o valor do fator de escala $\dot{\theta}_c$. Para isso, vamos derivar a equação $\theta = \theta_c \hat{\theta}$ de ambos os lados em relação à variável t, concluindo que:

$$\dot{\theta} = \frac{\theta_c}{t_c}\dot{\hat{\theta}} \qquad (9)$$

Por outro lado, fazendo uma analogia entre a equação (9) e a equação $\dot{\theta} = \dot{\theta}_c \dot{\hat{\theta}}$ proveniente de (6), concluímos que:

$$\dot{\theta}_c = \frac{\theta_c}{t_c} = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (8.3)$$

Temos, agora, todos os fatores de escala que nos permitem realizar a mudança de variável que retira as dimensões à equação (7) do movimento do pêndulo. Deste modo, podemos substituir os fatores de escala pelos seus valores na equação (7), obtemos a equação do movimento adimensional final (10):

$$\ddot{\hat{\theta}} + k_f\sqrt{\frac{l}{g}}\dot{\hat{\theta}} + \sin\hat{\theta} = 0 \qquad (10)$$

Pergunta 1 – Alínea c)

Vamos agora proceder à resolução da equação diferencial adimensional de segunda ordem. Queremos, em primeiro lugar, reduzir a equação (10) a um sistema de duas equações diferenciais de primeiro grau. Para tal, vamos fazer a seguinte mudança de variável (11):

$$x_1 = \hat{\theta} \Leftrightarrow \frac{dx_1}{dt} = {x_1}' = \dot{\hat{\theta}} \qquad (11.1) \qquad x_2 = \dot{\hat{\theta}} \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dt} = x_2' = \ddot{\hat{\theta}} \qquad (11.2)$$

Através desta mudança de variável, concluímos que a equação diferencial de segunda ordem (10) pode ser representada pelo seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem (12):

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -Ax_2 - \sin x_1 \end{cases} \qquad (12)$$

No sistema de equações diferenciais (11), temos que:

$$A = k_f\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (13)$$

É, agora, necessário, resolver as equações (12) sabendo as seguintes condições iniciais: $\theta(t=0) = 70° = {}^{7\pi}/_{18}\ rad$ e $\dot{\theta}(t=0) = 0\ rad/s$. Para tal, começamos por obter as condições iniciais adimensionais (14) a partir das equações (6) e dos fatores de escala (8.2) e (8.3):

$$\hat{t} = 0 \qquad \dot{\hat{\theta}}(\hat{t} = 0) = 0 \qquad \hat{\theta}(\hat{t} = 0) = \frac{7\pi}{18} \qquad (14)$$

De seguida, no código, vamos criar um objeto da classe ODEsolver cujo construtor recebe um vetor com ambas as funções diferenciais de primeira ordem presentes no sistema (12) escritas como funções lambda e ainda um ODEpoint com as condições iniciais (14) da equação adimensionalizada. A classe ODEsolver tem implementado o método Runge-Kutta de ordem 4, RungeKutta4, que recebe um intervalo de tempo e um time step e devolve um vetor com ODEpoints que são soluções das equações (12) e estão escritos na forma $(\hat{t}, \hat{\theta}, \dot{\hat{\theta}})$ (variáveis adimensionais). Vamos aplicar este método durante um intervalo de tempo de $200s$ e com um time step de $0.01s$. Obtemos assim um vetor com as soluções da equação diferencial de segunda ordem adimensional. Seguidamente, vamos criar um objeto da classe *pendulum_p* cujo construtor recebe o vetor com as soluções adimensionais devolvido pela função RungeKutta4, o comprimento l do pêndulo, a sua massa m e o seu coeficiente de amortecimento k_f. É importante referir que esta classe tem dois vetores de ODEpoints como objetos privados que são inicializados no seu construtor: o primeiro chama-se *points* e consiste numa copia do vetor de soluções da equação do movimento adimensional recebido pelo construtor; o segundo chama-se *points_dimension* e contém as soluções da equação diferencial de segunda ordem original (4). Os ODEpoints deste último vetor são da forma $(t, \theta, \dot{\theta})$ (variáveis dimensionais) e os seus valores obtém-se através dos valores das variáveis dimensionais que se encontram no vetor *points* e dos fatores de escala (8) através das equações (6).
Com o objetivo de desenhar os gráficos $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)\ vs\ \theta(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ and $\theta(t)$, implementamos na classe *pendulum_p* os métodos DrawTeta, DrawTetaVSTetaPoint e DrawTetaANDTetaPoint, obtendo os seguintes resultados:

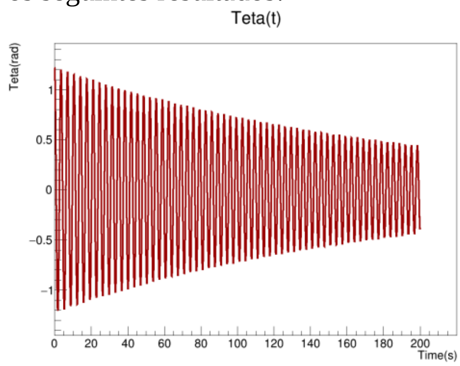

Figura 2: gráfico de $\theta(t)$

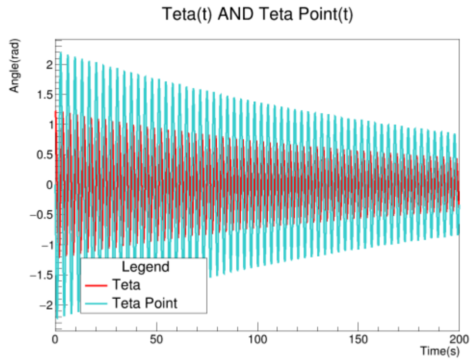

Figura 3: gráfico de $\dot{\theta}(t)$ and $\theta(t)$

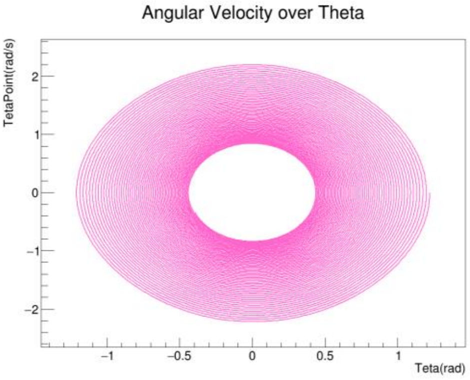

Figura 4: gráfico de $\dot{\theta}(t)$ vs $\theta(t)$

Nas figuras 2 e 3 podemos observar que tanto o ângulo máximo $\theta_{máx}$ estabelecido entre a massa, o ponto de suspensão e a posição de equilíbrio como a velocidade angular máxima $\dot{\theta}_{máx}$ atingidos pelo pêndulo nas suas sucessivas oscilações ao longo do tempo são cada vez menores. Esta observação está de acordo com o previsto e deve-se à presença de uma força dissipativa de atrito que provoca uma diminuição da energia mecânica do pêndulo que se repercute em oscilações de amplitude cada vez menores. Por outro lado, é de notar, na figura 3, que os instantes nos quais a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ atinge um máximo em módulo coincidem com os instantes nos quais o ângulo $\theta(t)$ é nulo. Verifica-se também o contrário, isto é, a velocidade angular $\dot{\theta}(t)$ é nula quando o ângulo atinge um máximo ou um mínimo. Isto acontece porque a velocidade angular máxima em módulo de cada oscilação atinge-se no ponto em que o pêndulo passa pela posição de equilíbrio, tendo o peso e a tensão a mesma direção e sentidos opostos. Por outro lado, a aceleração angular tem sentido oposto ao do movimento a partir do momento em que θ é nulo e, no momento em que atinge um mínimo, a velocidade angular é nula e dá-se a inversão de sentido no movimento do pêndulo, tendo o ângulo θ atingido um extremo.

O gráfico da figura 4 consiste numa espiral, ou seja, numa curva aberta, uma vez que o hamiltoniano do pêndulo ($H = T + V$) não é constante devido à dissipação de energia. A curva está a aproximar-se do centro, ou seja, do ponto de equilíbrio, sem nunca o atingir.

Em seguida, com o objetivo de desenhar o gráfico da energia total do pêndulo E em função do tempo, implementamos na classe *pendulum_p* o método DrawEnergy e o método Energy que devolve, em cada instante a energia mecânica do pêndulo (15), que é dada por:

$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos\theta) \qquad (15)$$

É importante notar que foi considerado como nível de referência para o calculo da energia potencial gravítica a altura a que se encontra o pêndulo quando este está em equilíbrio. Ao executar a função DrawEnergy, obtivemos o resultado presente na figura 5:

Mais uma vez, o gráfico da figura 5 corrobora o previsto, ou seja, ao longo do tempo há uma diminuição da energia total do pêndulo devido à presença de uma força dissipativa.

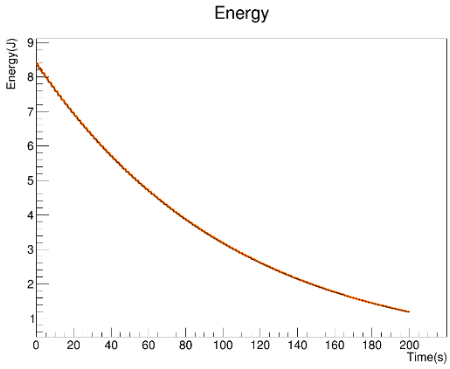

Figura 5: gráfico de $E(t)$

Por último, nesta alínea, implementamos na classe *pendulum_p* o método DrawTension que desenha o gráfico $T(t)$ e o método Tension que devolve, para cada instante, a intensidade da força de tensão exercida no fio. A partir da equação (3.2) podemos facilmente obter uma expressão para a intensidade da tensão (16) exercida no fio:

$$|\overrightarrow{F_T}| = T = mg\cos\theta + ml\dot{\theta}^2 \qquad (16)$$

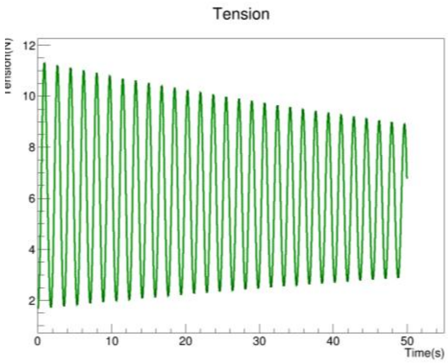

Figura 6: gráfico de $T(t)$

O gráfico da figura 6 evidencia que a tensão máxima de cada oscilação, que se atinge cada vez que o pêndulo passa pela sua posição de equilíbrio, é sucessivamente menor para cada oscilação. Isto acontece porque, tal como podemos ver na equação (16), um dos termos do módulo da tensão depende do quadrado da velocidade angular $\dot{\theta}$. Como já vimos anteriormente a velocidade angular no ponto de equilíbrio é máxima e diminui ao longo do tempo devido à dissipação de energia. Assim, ao longo do tempo o termo $ml\dot{\theta}^2$ tende para 0 e o módulo da tensão tende para o módulo do peso, ou seja, neste caso, $5N$, tal como podemos ver na figura 6.

Pergunta 1 – Alínea d)

Queremos, agora, determinar a variação do período do pêndulo ao longo do tempo. Para a resolução desta alínea, consideramos que dentro de cada oscilação existe conservação da energia mecânica, sendo que ocorre dissipação desta entre oscilações. Igualando a energia mecânica $E(\theta_0)$ num ponto θ_0 tal que $\dot{\theta}_0 \approx 0$, à energia de um ponto genérico do pêndulo durante o período $E(\theta)$ e integrando a equação no intervalo $[0; 2\pi]$, obtemos a seguinte fórmula para o período $\tilde{T}$ do pêndulo em função da amplitude de oscilação (17):

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 u}}du \qquad (17)$$

A fórmula está escrita em função de uma variável u e de uma constante k que se definem da seguinte forma:

$$k = \sin\frac{\theta_0}{2} \quad (18.1) \qquad u = \arcsin\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{k}\right) \quad (18.2)$$

Computacionalmente, utilizamos o método do trapezoide presente na classe *IntegDeriv* para calcular o valor do integral presente na equação (17).

Por outro lado, podemos obter o período T para cada instante diretamente a partir das soluções da equação diferencial (4) representadas na figura 2, calculando o intervalo de tempo entre dois pontos de vales sucessivos da função $\theta(t)$ que se encontrem no mesmo estado de oscilação, considerando a perda de energia:

$$T = t_f - t_i \qquad (19)$$

A nível de código, implementamos, na classe *pendulum_p*, as funções DrawPeriod, Period_Time e Period_Amp para calcular e desenhar os períodos T e $\tilde{T}$.

O gráfico que representa simultaneamente $\tilde{T}(t)$ (17) e $T(t)$ (19) encontra-se na figura 7.

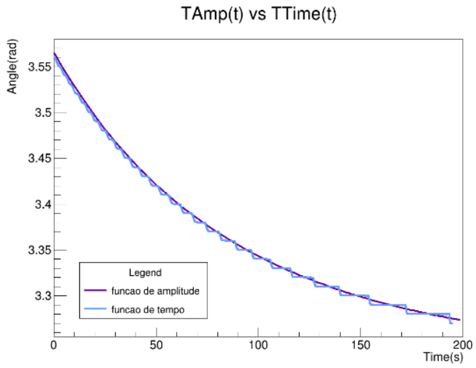

Figura 7: gráfico de $\tilde{T}(t)$ (roxo) e de $T(t)$ (azul)

O gráfico da figura 7 evidencia que a variação do período ao longo do tempo é muito semelhante quando calculada por ambos os métodos, diminuindo ao longo do tempo devido à dissipação de energia. O gráfico de $T(t)$ apresenta descidas mais pontuais e acentuadas dado que foi considerado que o pêndulo apenas dissipa energia nos pontos em que se atinge um máximo de θ, havendo conservação de energia no restante. No entanto, o gráfico de $\tilde{T}(t)$ não oscila uma vez que a equação (17) avalia apenas os pontos para os quais se tem $\dot{\theta}_0 \approx 0$.

Pergunta 1 – Alínea e)

Nesta alínea queremos calcular a energia dissipada pela força de atrito ao longo de $50s$. Sabemos que a potência associada a uma determinada força é dada por:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (20)$$

Juntando à equação (20) a equação (2) e sabendo que $k_1 = 0.5k_f$, obtemos:

$$P_{dissipada} = \overrightarrow{Fa} \cdot l\dot{\theta} = -0.5k_f l^2 \dot{\theta}^2 \qquad (21)$$

O módulo do trabalho da força de atrito vai ser igual à energia por ela dissipada. Assim sendo, para calcular a energia, temos de integrar a equação (21) de ambos os lados:

$$E_{dissipada} = \int_0^{50} P_{dissipada} = \int_0^{50} -0.5k_f l^2 \dot{\theta}^2 \qquad (22)$$

Em termos de código, com o objetivo de calcular o integral (22), aplicámos a regra do trapezoide, obtendo um valor de $E_{dissipada} = 3.21877\,J$.

Pergunta 2:

Nesta pergunta vamos simular medições de um ângulo θ_m que tem em conta os erros existentes na medição e depende dos valores do ângulo θ calculados na alínea c) da pergunta 1. Definimos θ_m recorrendo ao ROOT para gerar números aleatórios G segundo uma função Gaussiana cujos parâmetros escolhemos:

$$\theta_m = \theta(t) + G(\mu = 0, \sigma = 0.05 \cdot \theta(t)) \qquad (23)$$

Pergunta 2 – Alínea a)

Esta alínea tem como objetivo criar o conjunto de valores de ângulo θ_m que estejam sujeitos a um erro de medição aleatório.

Para a resolução desta pergunta, criamos um vetor de que contém pares do tipo (t, θ_m) para t até $50s$ e com um timestep de $0.05s$. De seguida, para os mesmos $50s$, calculámos a dispersão relativa DR (24) em função do tempo, através da seguinte fórmula:

$$DR(t) = \frac{\theta_m(t) - \theta(t)}{\theta(t)} \qquad (24)$$

Por fim, desenhamos os gráficos $\theta_m(t)$ e $DR(t)$, obtendo os seguintes resultados:

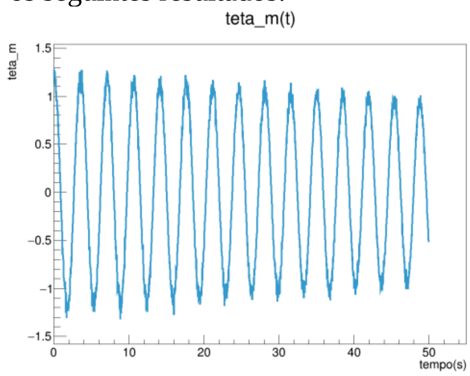

Figura 8: gráfico de $\theta_m(t)$

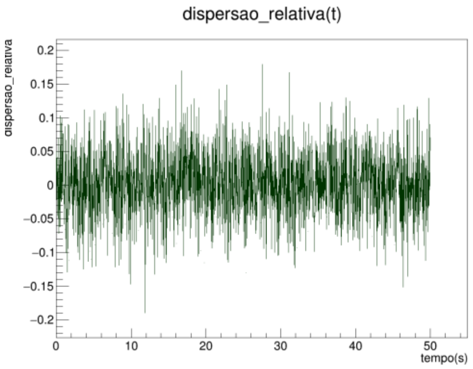

Figura 9: gráfico de DR(t)

Na figura 8 podemos observar, comparando com a função $\theta(t)$ presente na figura 2, que o gráfico de $\theta_m(t)$ possui mais ruido, devido à inserção do erro. Seguidamente, sabemos que a dispersão relativa mede o grau de afastamento de cada valor de θ_m em relação ao valor correspondente (para o mesmo t) de θ. Logo, o gráfico 9, dada a sua aleatoriedade, confirma que no cálculo de θ_m foi introduzida uma componente responsável pelo erro de medição. Por outro lado, vemos que grande parte dos valores possui uma dispersão relativa próxima de 0, havendo cada vez menos pontos à medida que dos afastamos deste ponto. Há também mais pontos situados na faixa entre 0.05 e -0.05 tal como era expectável para uma distribuição Gaussiana de média igual a 0 e σ igual a 0.05.

Pergunta 2 – Alínea b)

Nesta alínea temos como objetivo calcular a melhor aproximação dos parâmetros (constantes) a, b, c, d, e que determinam a função f que é solução da equação diferencial de segunda ordem (4) associada ao movimento do pêndulo estudado na pergunta 1, sabendo os valores da função $\theta_m(t)$ calculados na alínea a). A função f que escolhemos para aproximar a solução da equação do movimento do pêndulo depende de 5 parâmetros e define-se da seguinte forma:

$$f(t; a, b, c, d, e) = ae^{(-bt+e)} \cos(dt + e) \qquad (25)$$

Para descobrirmos os cinco parâmetros da equação (25), vamos recorrer ao método simulated annealing: De um modo geral, este método calcula vários conjuntos de parâmetros a, b, c, d, e aleatórios e determina o erro associado a esse conjunto de parâmetros até encontrar o conjunto de parâmetros que o minimizam, ou seja, que fazem com que f se aproxime o mais possível da função $\theta(t)$. Deste modo, o método que implementamos vai seguir os passos:

1. Definir aleatoriamente os parâmetros (a, b, c, d, e) da função f recorrendo à função Gaussiana do ROOT;
2. Gerar novos parâmetros (a', b', c', d', e') e calcular a variação da função de custo/ de energia entre f com os parâmetros (a, b, c, d, e) e f com os parâmetros (a', b', c', d', e'):

$$E(a, b, c, d, e) = \sum_i [(\theta_m)_i - f(t_i; a, b, c, d, e)]^2 \qquad (26)$$

$$\Delta E = E(a', b', c', d', e') - E(a, b, c, d, e) \qquad (27)$$

3. Aplicar o critério de Metropolis: se $\Delta E < 0$, tomamos os parâmetros calculados em 2. como os novos parâmetros das função. Se $\Delta E > 0$, temos de calcular a probabilidade dada por:

$$P = e^{-\frac{\Delta E}{T}} \qquad (28)$$

   Onde T simboliza a temperatura do sistema.
   Em seguida, geramos um número aleatório entre 0 e 1: se $P >$ nº aleatório, os novos parâmetros do sistema são os calculados em 2.. Caso contrário, mantemos os parâmetros calculados (a, b, c, d, e).
4. NOTA: sempre que admitimos, ou não, os novos parâmetros calculados, transferimos o sistema para um novo equilíbrio através da diminuição logarítmica da temperatura.
5. Repetir os passos $2. - 4.$ 100000 vezes de modo a encontrar o conjunto de parâmetros que minimizam a variação da função de custo.

Após implementar o método acima descrito, concluímos que os valores dos parâmetros (a, b, c, d, e) que minimizam a função de custo são:

$$\begin{matrix} a = 1.22 & \\ b = 0.005 & d = 1.798 \\ c = 0 & e = 0.039 \end{matrix} \qquad (29)$$

É de notar que os valores destes parâmetros podem alterar-se ligeiramente cada vez que corremos o código uma vez que se obtém através de números gerados aleatoriamente.

Agora que determinamos os parâmetros da função $f(t; a, b, c, d, e)$, vamos determinar a variação do período desta função ao longo do tempo da experiência ($200s$) recorrendo à fórmula (17) semelhante ao que fizemos anteriormente mas utilizando os valores obtidos a partir da função f (determinamos o valor do período para pontos em que $\dot{f} = 0$). Obtivemos o seguinte gráfico:

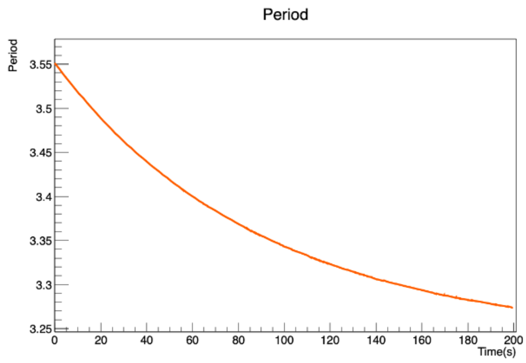

Figura 10: gráfico de $T(t)$ para f com os parâmetros calculados

Por fim, desenhamos o gráfico que sobrepõe a função $\theta(t)$ obtida na alínea c) da primeira pergunta e a função $f(t; a, b, c, d, e)$ avaliada agora com os valores dos parâmetros calculados (29). Obtemos o seguinte gráfico:

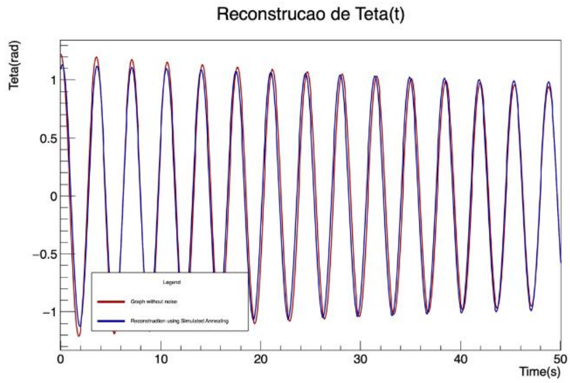

Figura 11: gráfico de $\theta(t)$ e de $f(t; a, b, c, d, e)$

Este último gráfico da figura 11 ilustra que a função f que calculámos e a função $\theta(t)$ são muito semelhantes, sendo por isso a expressão de $f(t; a, b, c, d, e)$ uma boa aproximação à solução da equação do movimento do pêndulo estudado no exercício 1.