

Projeto 3 – 2ª Etapa

Pedro de la Peña e Luigi Noronha

a)

Exercício 2 22/11/16

d) $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ / $y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$

$\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i \rightarrow$ Soma dos erros Quadrados = SEQ

$$SEQ = \sum_{i=1}^m \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

$\frac{dSEQ}{d\hat{\beta}_0} = 0$ (A) $\frac{dSEQ}{d\hat{\beta}_1} = 0$ (B)

(A) $\frac{dSEQ}{d\hat{\beta}_0} = -2 \cdot \sum_{i=1}^m (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)$

$$\frac{dSEQ}{d\hat{\beta}_0} = -2 \left\{ \sum_{i=1}^m y_i - m \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^m X_i \right\} \div m$$
$$= -2m \left\{ \frac{\sum y_i}{m} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \frac{\sum X_i}{m} \right\} = -2m \left\{ \bar{y} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \bar{X} \right\}$$
$$= 0 \rightarrow \hat{\beta}_0 = -\hat{\beta}_1 \bar{X} + \bar{y} \quad (1)$$

(B) $\frac{dSEQ}{d\hat{\beta}_1} = -2 \sum_{i=1}^m X_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$

$$= -2 \left\{ \sum X_i y_i - \hat{\beta}_0 \sum X_i - \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 \right\} = 0 \quad (2)$$

Substituindo 1 em 2:

$$\sum_{i=1}^m X_i y_i + (\hat{\beta}_1 \bar{X} - \bar{y}) \cdot \sum_{i=1}^m X_i - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^m X_i^2 = 0$$
$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{y} \sum X_i - \sum X_i y_i}{\sum X_i - m \bar{y} \bar{X}} = \frac{\sum X_i y_i - m \bar{y} \bar{X}}{\sum X_i^2 - m \bar{X}^2} = \frac{\text{cov}(X, y)}{\text{var}(X)}$$

b) Os erros seguem distribuição Normal, com valor esperado igual a zero e com variância constante. Além disso, os erros são todos independentes entre si. Na prática, todas essas suposições podem ser verificadas através da visualização gráfica das duas variáveis.

c)

$$\hat{\beta}_1 \sim N \quad \begin{cases} H_0: \beta_1 = 0 \\ H_1: \beta_1 \neq 0 \end{cases} \quad y = \beta_0 + \epsilon_i$$

A não rejeição de H_0 implica a ausência de relação entre as duas variáveis, enquanto sua rejeição implica a existência dessa relação.

d) É possível. O modelo para regressão múltipla fica como demonstrado na imagem abaixo e as suposições feitas para regressões simples são todas válidas para ele. Entretanto, se a correlação entre as duas variáveis explicativas for muito forte, as estimativas dos parâmetros do modelo são prejudicadas. O número de testes de hipóteses que devem ser realizados corresponde ao número de variáveis explicativas do modelo, e a interpretação da rejeição ou não de H_0 continua a mesma.

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{i1} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} = \sum_{i=1}^n x_{i1} y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_{i2} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 = \sum_{i=1}^n x_{i2} y_i \end{cases}$$