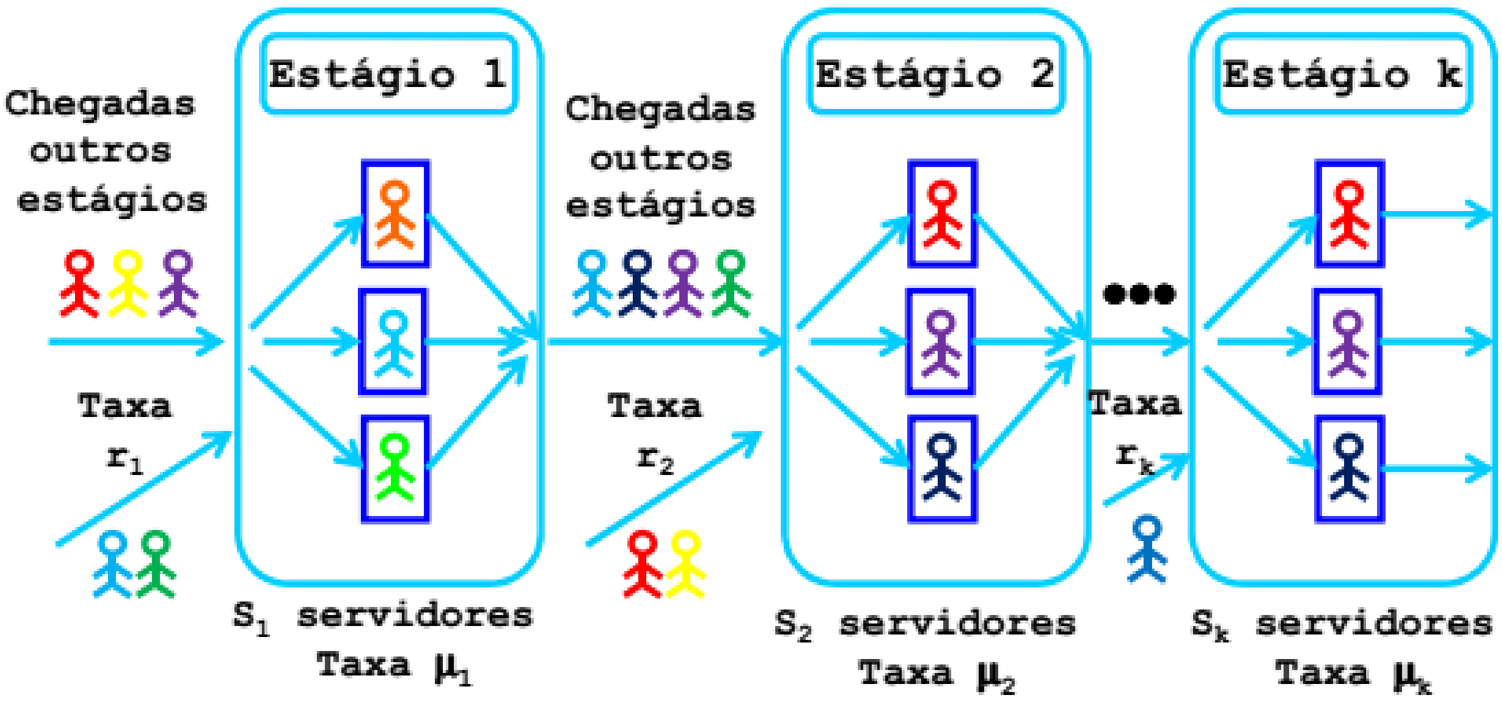
Rede de Filas Abertas

Redes de Filas Abertas

As redes de filas abertas são uma generalização do sistema de filas em série com k estágios. Agora o estágio j considera as chegadas de outros estágios e uma taxa de chegada r_j de fora do sistema de filas.



Redes de Filas Abertas

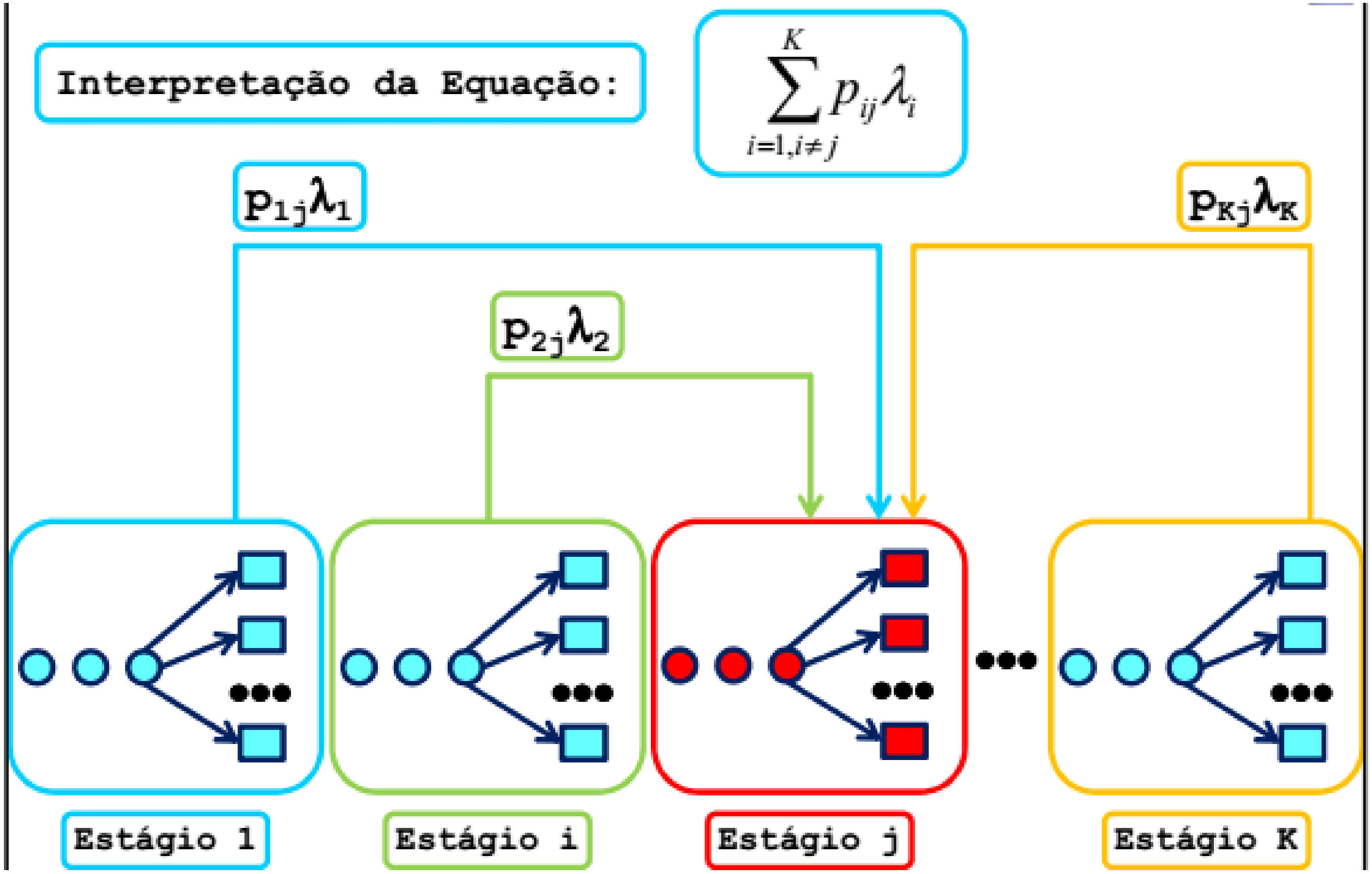
Assim, em redes de filas abertas, o cliente completa o serviço em um estágio i e com probabilidade p_{ij} entra na fila do estágio j. Assim, a fração de clientes que ingressa no estágio j vinda de outros estágios é dada pela seguinte equação:

$$\boxed{\sum_{i=1, i\neq j}^{K} \boxed{p_{ij}}\,\boxed{\lambda_i}}$$

Probabilidade de sair do estágio i e ir p/ j

Taxa de chegada de clientes do estágio i

Redes de Filas Abertas



Redes de Filas Abertas

Definindo λ_j como a taxa de chegada de clientes no estágio j (somando o que vem de fora do sistema e de outros estágios), então, λ_1, λ_2,...,λ_k podem ser encontrados através da solução do seguinte sistema linear:

$$\lambda_j = \boxed{r_j} + \boxed{\sum_{i=1, i \neq j}^{K} p_{ij} \lambda_i} \quad \text{(j=1,2,...,K)}$$

Chegada de clientes no estágio j e que são de <u>fora do sistema</u>

Chegada de clientes no estágio j e que <u>provém de outros estágios</u>

Redes de Filas Abertas

Para encontrar L, ou seja, o número esperado de clientes no sistema basta somar o número esperado de clientes presentes em cada estágio. Para encontrar W, o tempo médio que um cliente gasta no sistema, basta empregar a fórmula $L = \lambda W$ para todo o sistema e usar $\lambda = r_1 + r_2 + ... + r_K$. A justificativa para este procedimento é que dessa forma **λ representa o número médio de clientes por unidade de tempo que chegam ao sistema**.

Redes de Filas Abertas

<u>Exemplo:</u> Considere dois servidores. Em média 8 clientes por hora chegam de fora para o servidor 1 e, em média, 17 clientes por hora chegam de fora para o servidor 2. O servidor 1 pode atender com taxa exponencial 20 clientes por hora e o servidor 2 atende 30 clientes por hora. Após terminar o serviço no servidor 1 metade dos clientes vai embora do sistema e a outra metade vai para o servidor 2. Após terminar o serviço no servidor 2, ¾ dos clientes completa o serviço e ¼ retorna ao servidor 1. Encontrar:

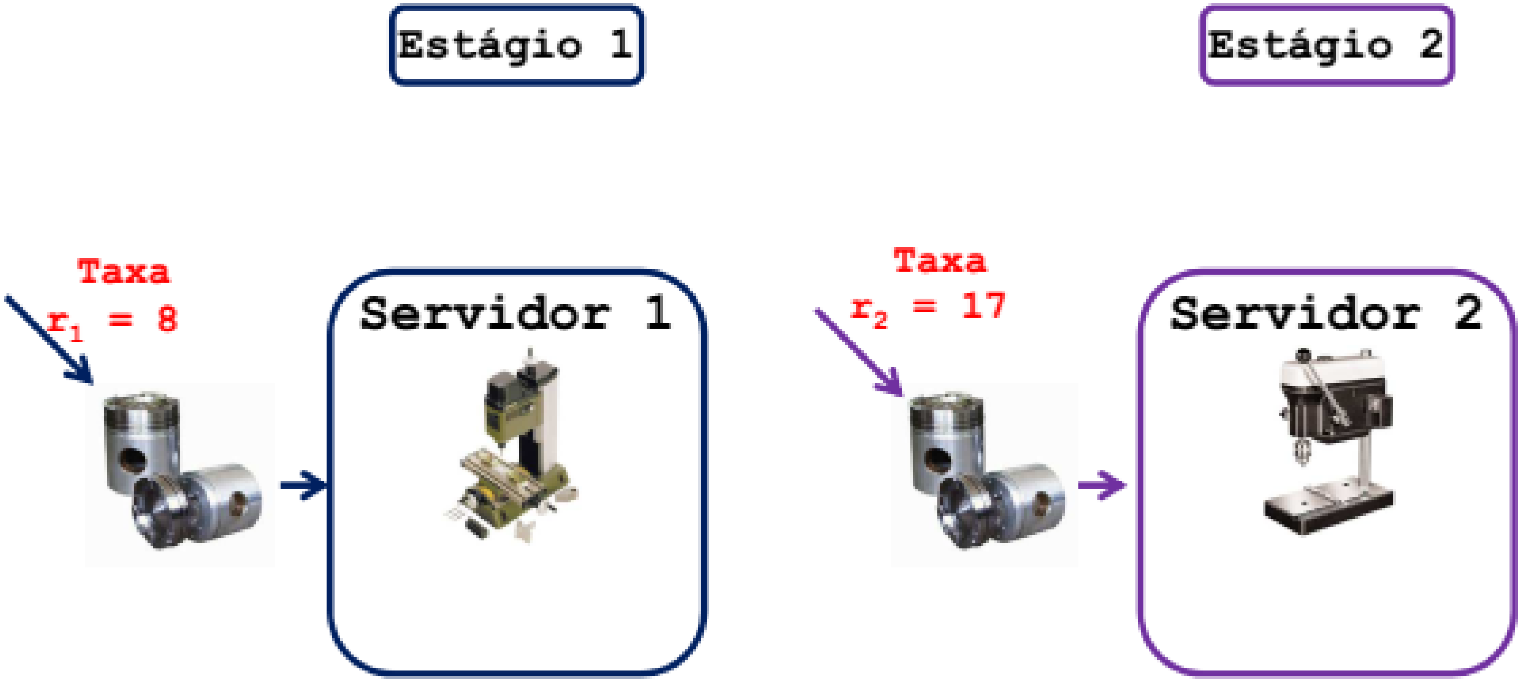
(A) A fração do tempo em que o servidor 1 está ocioso;

(B) Achar o número esperado de clientes no sistema,

(C) Encontrar o tempo médio que um cliente gasta no sistema,

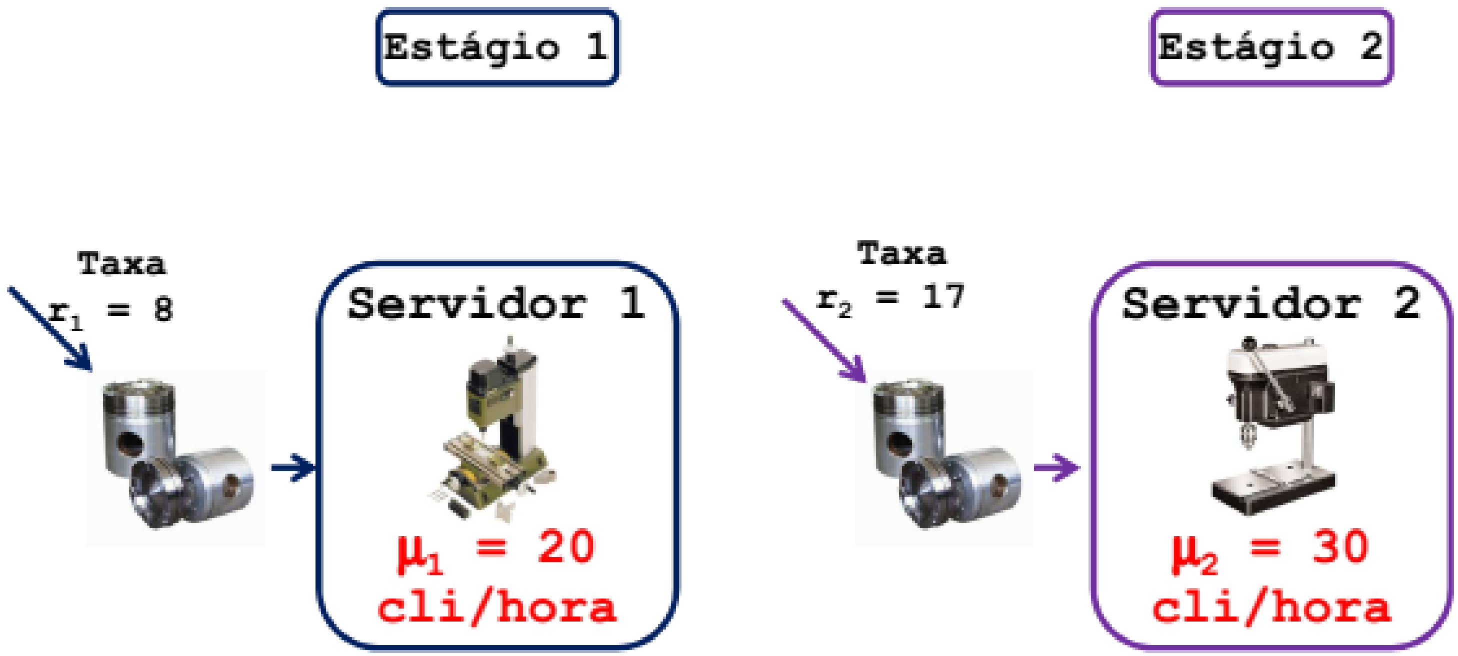
(D) Use (A) e (B): O que ocorre se o servidor 2 só atender 20 c/h

Redes de Filas Abertas



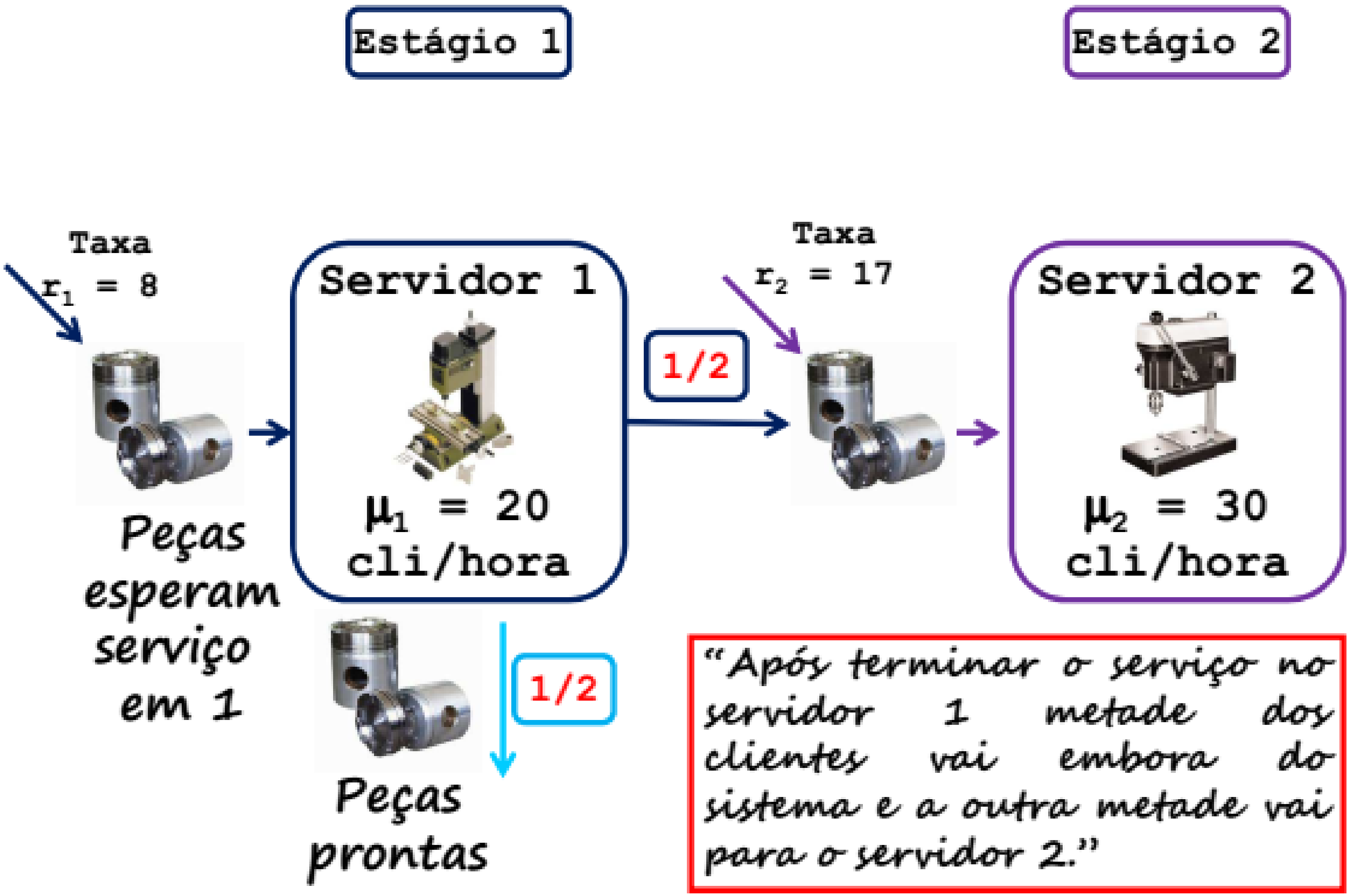
"Em média 8 clientes por hora chegam de fora para o servidor 1 e, em média, 17 clientes por hora chegam de fora para o servidor 2."

Redes de Filas Abertas

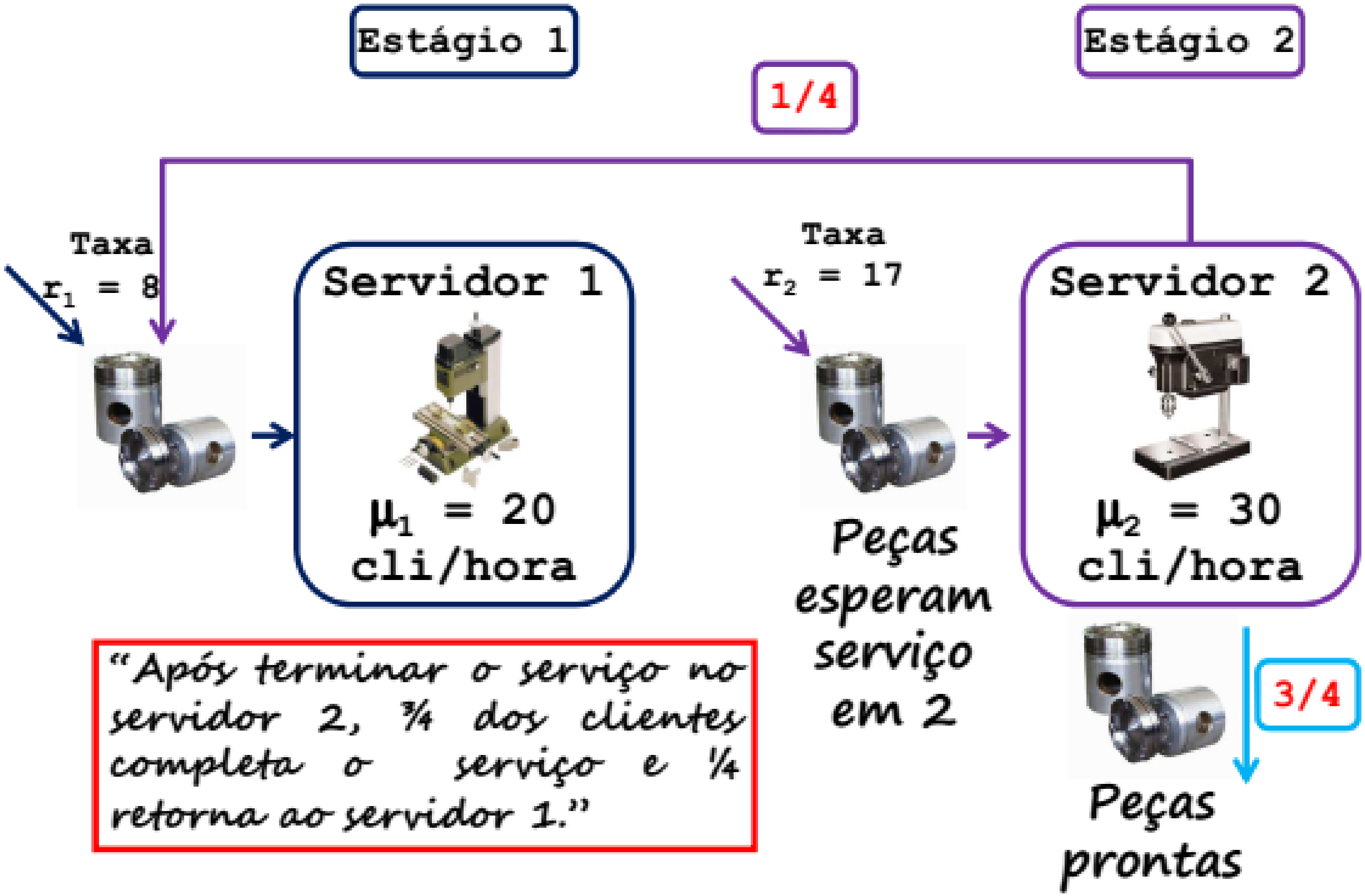


"O servidor 1 pode atender com taxa exponencial 20 clientes por hora e o servidor 2 atende 30 clientes por hora."

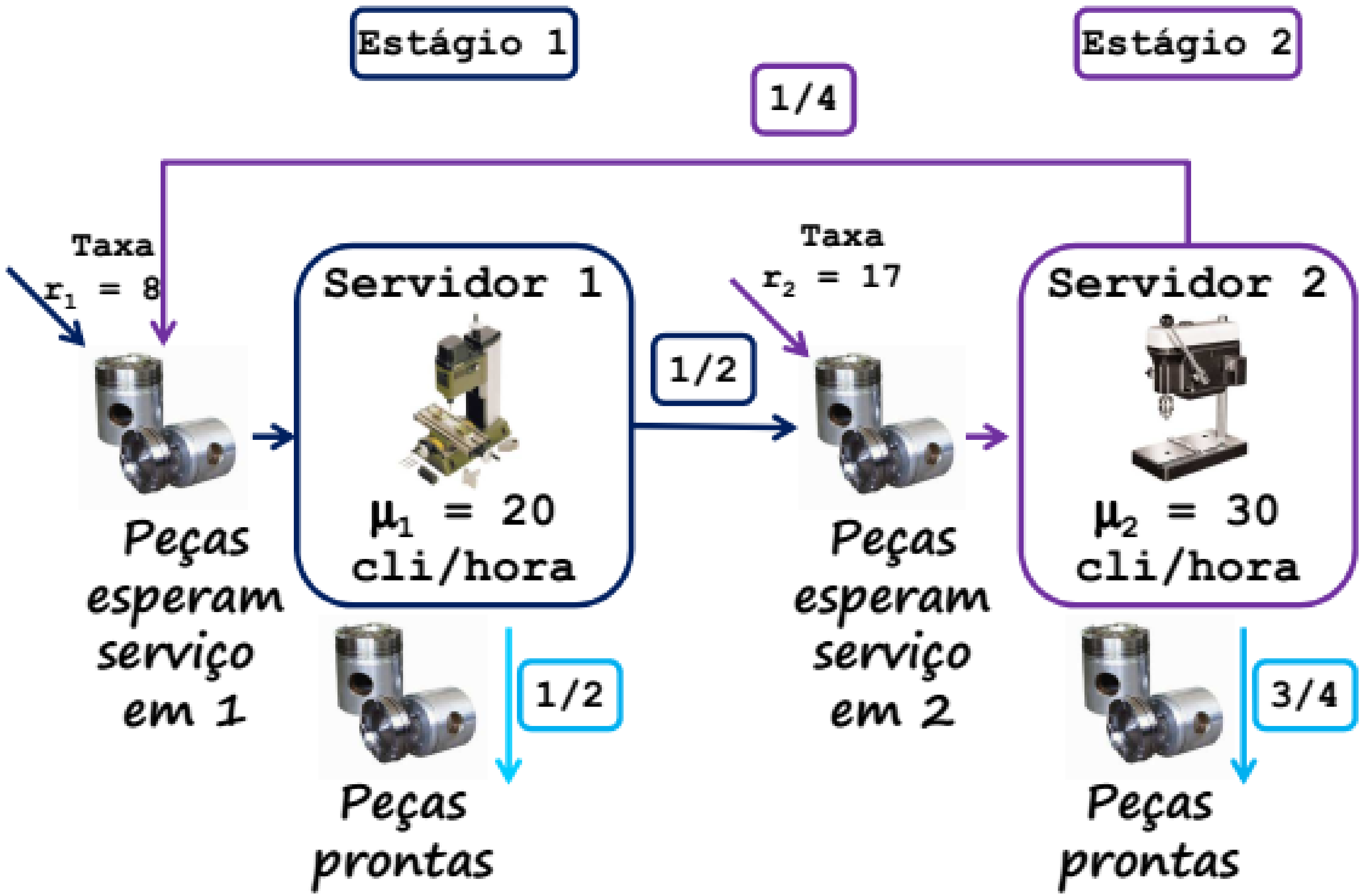
Redes de Filas Abertas



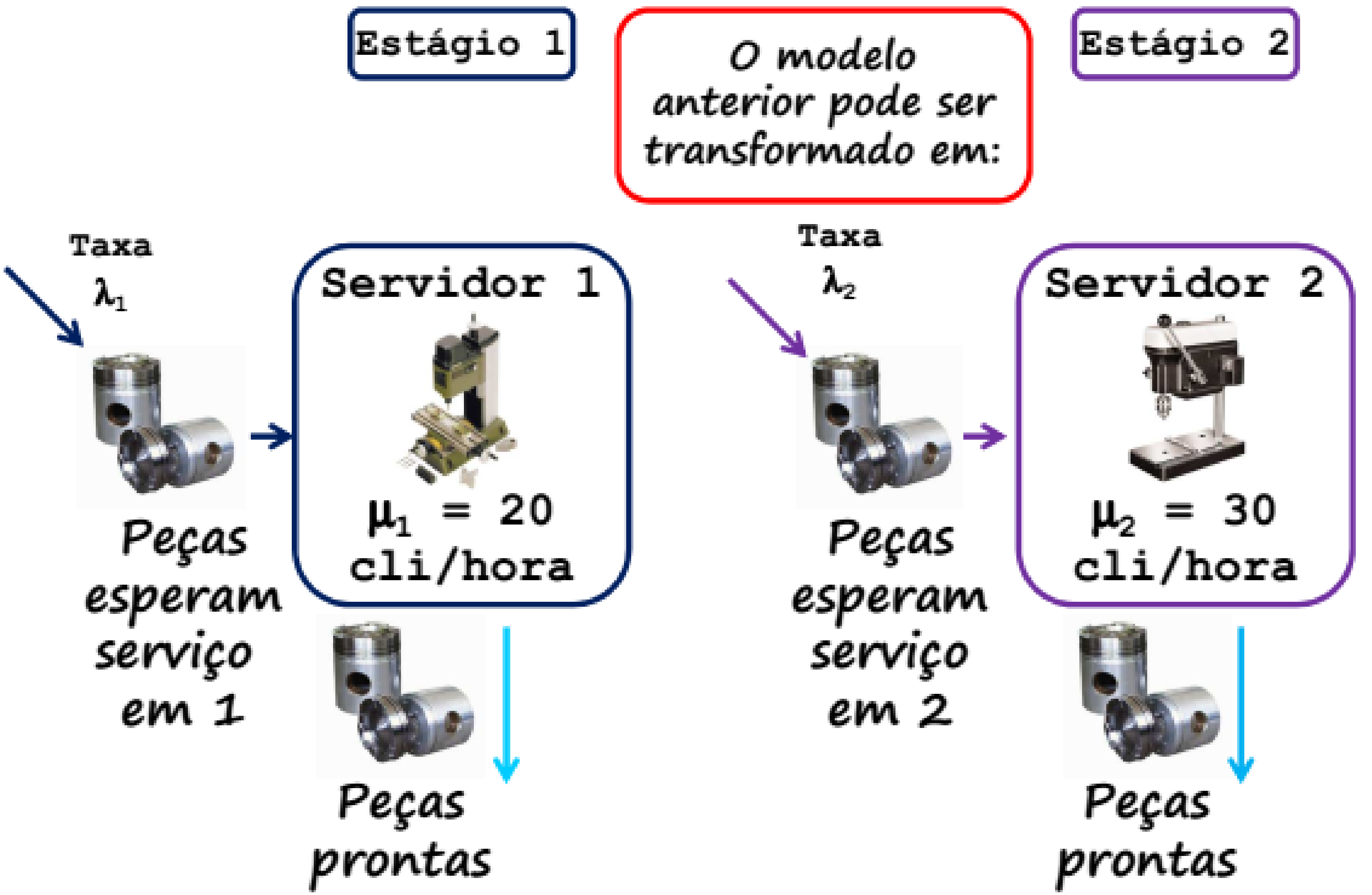
Redes de Filas Abertas



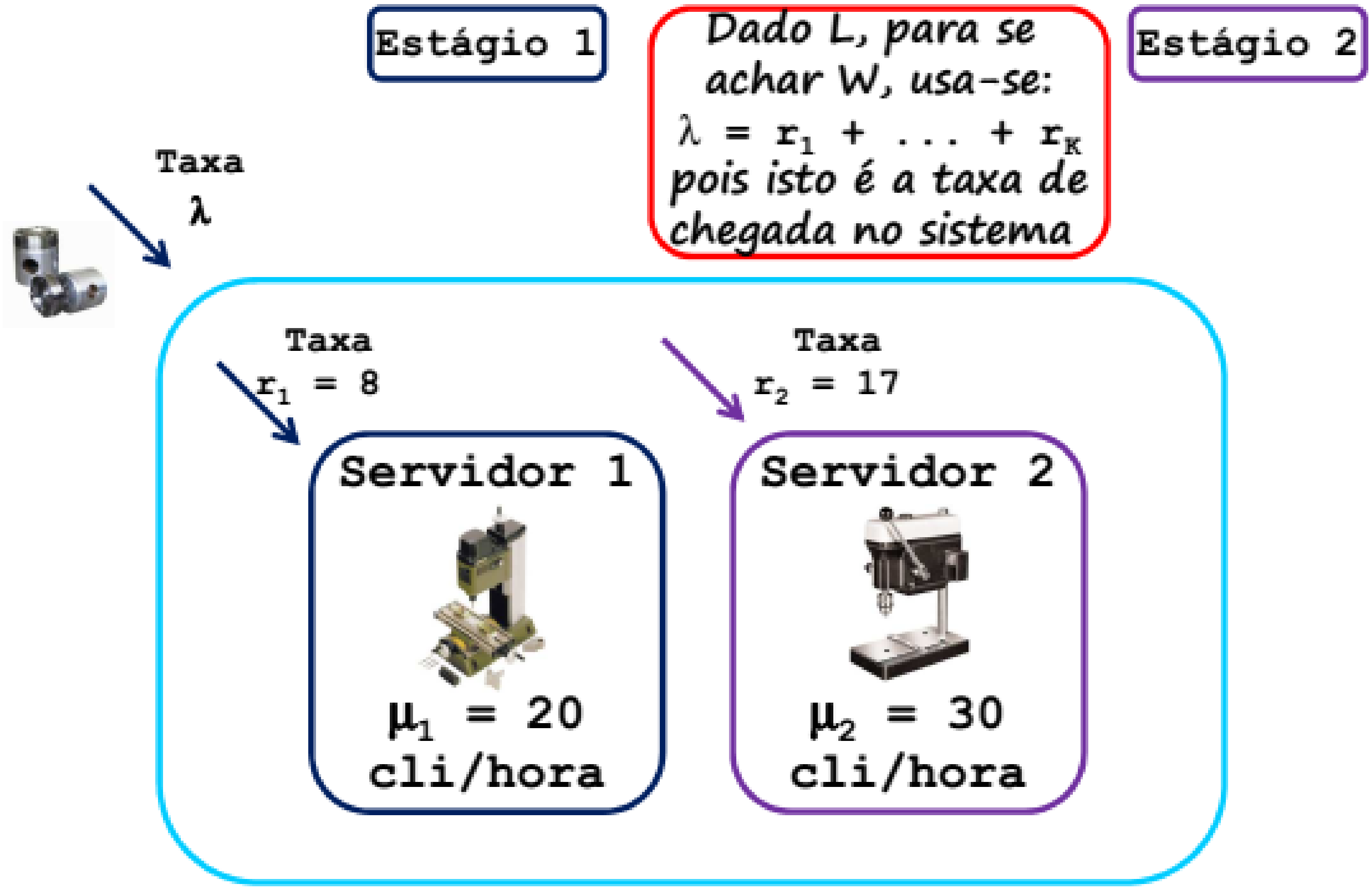
Redes de Filas Abertas



Redes de Filas Abertas



Redes de Filas Abertas



Redes de Filas Abertas

- <u>Qual é a fração do tempo em que o servidor 1 está ocioso?</u> Primeiro observa-se que tem-se uma rede de filas abertas com r_1 = 8 clientes por hora e r_2 = 17 clientes por hora. Além disso, p_{12} = 0,5; p_{21} = 0,25; p_{11} = p_{22} = 0. Para encontrar λ_1 e λ_2 basta resolver o sistema de equações dado pela seguinte equação:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{K} p_{ij} \lambda_i \quad \texttt{(j=1,2,...,K)}$$

$$\boxed{\lambda_1 = r_1 + p_{21}\lambda_2} \quad \boxed{\lambda_2 = r_2 + p_{12}\lambda_1} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 8 + 0{,}25\lambda_2} \quad \boxed{\lambda_2 = 17 + 0{,}5\lambda_1} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 14\,\textbf{cli/h}} \quad \boxed{\lambda_2 = 24\,\textbf{cli/h}}$$

Redes de Filas Abertas

- <u>Qual é a fração do tempo o servidor 1 está ocioso?</u>

Agora o primeiro servidor pode ser tratado como um modelo M/M/1/GD/∞/∞com $\lambda_1 = 14$ clientes por hora e $\mu = 20$ clientes por hora. Se $\rho = \lambda_1/\mu = 14/20 = 7/10 = 0{,}7$, então:

$$\pi_0 = (1 - \rho) = (1 - 0{,}7) = 0{,}3$$

Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - Achar o número esperado de clientes no servidor 1.

Se o primeiro servidor pode ser tratado como um modelo M/M/1/GD/∞/∞ com $\lambda_1 = 14$ clientes por hora e $\mu = 20$ clientes por hora. Se $\rho = \lambda_1/\mu = 14/20 = 7/10 = 0,7$, então:

$$L1=\rho/(1-\rho)=0,7/(1-0,7)=7/3$$

Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - Achar o número esperado de clientes no servidor 2.
  - Para o segundo servidor pode-se usar o modelo M/M/1/GD/∞/∞ com λ_2 = 24 clientes por hora e μ= 30 clientes por hora. Se $\rho = \lambda_2/\mu =$ 24/30 = 0,8, então:

$$L1=\rho/(1-\rho)=0,8/(1-0,8)=4$$

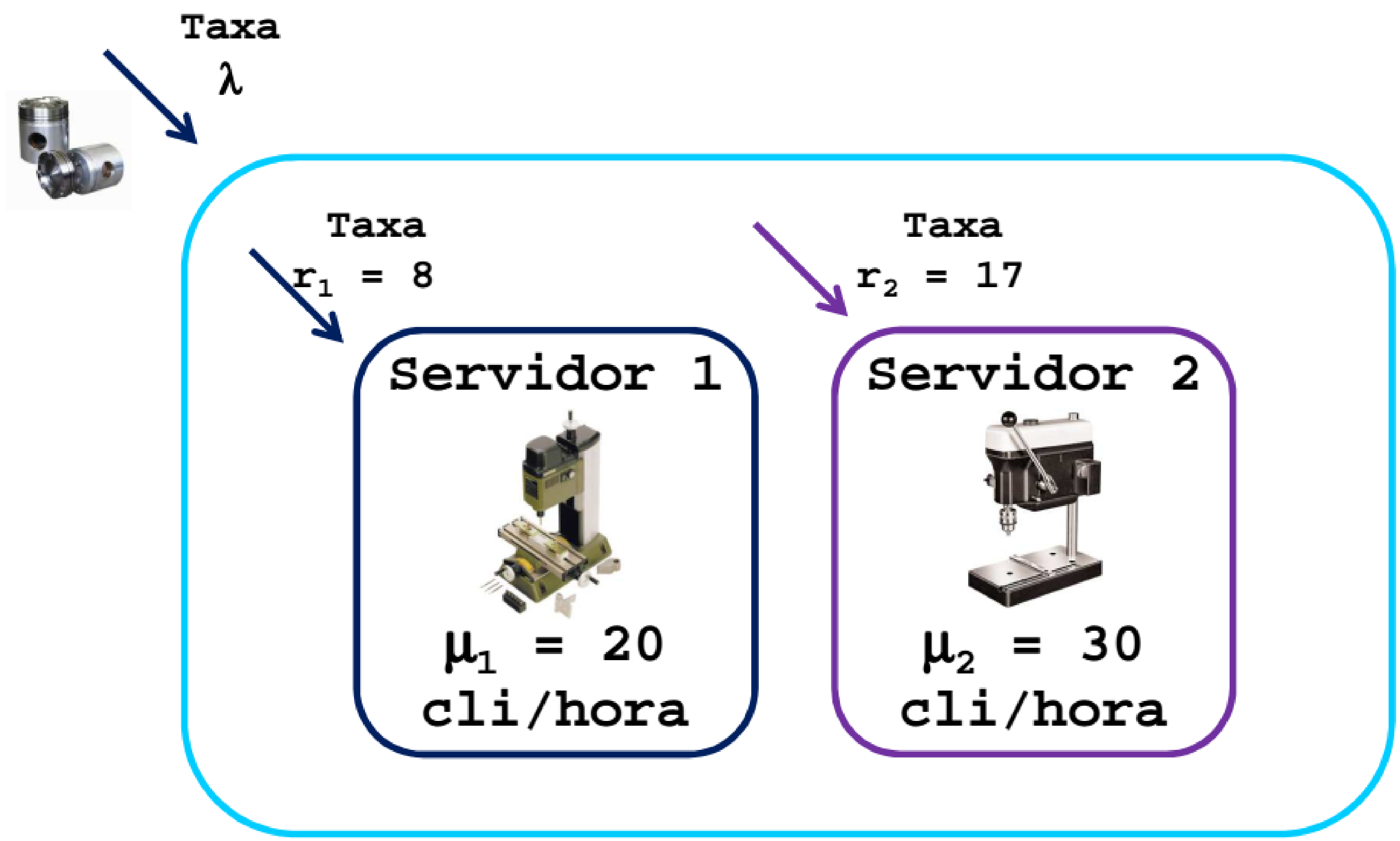
Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - O número médio de clientes no sistema é a soma do número médio de clientes em cada servidor, isto é:

  7/3 + 4 = 19/3 clientes em média estarão presentes no sistema.

Redes de Filas Abertas

- Encontrar o tempo médio que um cliente gasta no sistema



Redes de Filas Abertas

- Encontrar o tempo médio que um cliente gasta no sistema:
  - Para calcular o tempo médio gasto no sistema com L = 19/3 e:

$\lambda = r_1 + r_2 + ... + r_K = 8 + 17 = 25$ clientes/hora

$W = L/\lambda$ horas

$W = (19/3)/25 = 19/75$ horas

Redes de Filas Abertas

- O que ocorre se o servidor 2 só atender 20 c/h?

Do item (A) tem-se que:

λ_2 = 24 cli/h

Do modelo M/M/1/GD/∞/∞ sabe-se que só existe estado estacionário se $\lambda < s_j \mu_j$, mas neste caso:

$\lambda = 24 > 1*20$ e, assim, não existe estado estacionário

Redes de Filas Abertas

Exercício: Considere o problema do Exemplo anterior. O que ocorreria caso ½ dos clientes que termina o serviço no servidor 2 fossem para o servidor 1 e este atendesse agora em média 24 clientes?

(A) Qual fração do tempo o servidor 1 está ocioso.

(B) Achar o número esperado de clientes no sistema.

(C) Encontrar o tempo médio que um cliente gasta no sistema.

Redes de Filas Abertas

Exercício: Considere o problema do Exemplo anterior. O que ocorreria caso ½ dos clientes que termina o serviço no servidor 2 fossem para o servidor 1 e este atendesse agora em média 24 clientes?

- Equações:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{K} p_{ij} \lambda_j \qquad (j=1,2,...,K)$$

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad \pi_0 = (1 - \rho) \qquad W = \frac{L}{\lambda}$$

$$\lambda = r_1 + r_2 + ... + r_K$$

Redes de Filas Abertas

- Qual fração do tempo o servidor 1 está ocioso?

Primeiro observa-se que tem-se uma rede de filas abertas com r_1 = 8 clientes por hora e r_2 = 17 clientes por hora. Além disso, p_{12} = 0,5 p_{21} = 0,5, p_{11} = p_{22} = 0. Para encontrar λ1 e λ2 basta resolver o seguinte sistema:

$$\lambda_j = r_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{K} p_{ij}\lambda_i \quad \texttt{(j=1,2,...,K)}$$

$$\lambda_1 = r_1 + p_{21}\lambda_2$$
$$\lambda_2 = r_2 + p_{12}\lambda_1$$

$$\lambda_1 = 8 + 0{,}5\lambda_2$$
$$\lambda_2 = 17 + 0{,}5\lambda_1$$

$$\lambda_1 = 22\,\texttt{cli/h}$$
$$\lambda_2 = 28\,\texttt{cli/h}$$

Redes de Filas Abertas

- Qual fração do tempo o servidor 1 está ocioso?
- Agora o primeiro servidor pode ser tratado como um modelo M/M/1/GD/∞/∞com $\lambda 1$ = 22 clientes por hora e μ= 24 clientes por hora. Se $\rho = \lambda 1/\mu = 22/24 = 11/12$, então:

$$\pi_0 = (1 - \rho) = (1 - 11/12) = 1/12$$

Ou seja, 8,33% do tempo o servidor 1 estará ocioso

Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - Achar o número esperado de clientes no servidor 1.
  - Se o primeiro servidor pode ser tratado como um modelo M/M/1/GD/∞/∞com λ_1 = 22 clientes por hora e μ= 24 clientes por hora. Se $\rho = \lambda_1/\mu = 22/24 = 11/12$, então:

$$L = \rho/(1-\rho) = 11/12/(1-11/12) = 11$$

Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - Achar o número esperado de clientes no servidor 2.
  - Para o segundo servidor pode-se usar o modelo M/M/1/GD/∞/∞ com λ_2 = 28 clientes por hora e μ= 30 clientes por hora. Se ρ= λ_2/μ= 28/30 = 0,93, então:

$$L= \rho/(1-\rho)= 0,93/(1-0,93)=0,93/0,07=93/7$$

Redes de Filas Abertas

- Achar o número esperado de clientes no sistema.
  - O número médio de clientes no sistema é a soma do número médio de clientes em cada estágio, isto é: 11 + 14 = 25 clientes em média estarão presentes no sistema.

Redes de Filas Abertas

- Encontrar o tempo médio que um cliente gasta no sistema.

  Para calcular o tempo médio gasto no sistema usa-se que:

  $\lambda = r_1 + r_2 + ... + r_K = 8 + 17 = 25$ clientes/hora

  $W = L/\lambda = 25/25 = 1$ hora