1) BREVE RESUMO INFORMAL DE PROVA POR INDUÇÃO MATEMÁTICA

A prova por Indução Matemática é usada para demonstrar, a partir de uma quantidade finita de observações, que uma determinada propriedade P é válida para todos os elementos de um conjunto discreto (domínio D). Essencialmente, tal demonstração consiste em provar que os seguintes dois passos são verdadeiros:

(a) Passo Base: a propriedade P é válida para os elementos de base do domínio D. Informalmente, os elementos de base são aqueles que correspondem às instâncias mais simples (básicas) do domínio a partir das quais todos os demais elementos podem ser obtidos por meio de sucessivas aplicações de uma função "sucessor" que, a cada aplicação, gera o elemento subseqüente ao elemento corrente.

(b) Passo de Indução: $\forall n \mid n \in D$, a seguinte implicação lógica é verdadeira:

$P(n) \rightarrow P(n + 1)$, onde $n + 1$ representa o elemento de D subseqüente ao elemento n (ou seja, neste caso, o operador " + " está representando a função sucessor citada acima). Saliente-se que tal operador não corresponde, necessariamente, ao operador aritmético de soma, conforme será discutido a seguir. Assim sendo, a prova do passo de indução consiste em demonstrar que o fato de a propriedade P ser verdadeira para o *n-ésimo* elemento de D é CONDIÇÃO SUFICIENTE para garantir que P também é verdadeira para o elemento subseqüente a n (ou seja, para o *(n+1)-ésimo* elemento de D).

A prova de ambos os passos descritos acima garante que a propriedade P é verdadeira para todos os elementos do domínio D. De fato, provando-se o Passo Base, garante-se que P é verdadeira para os elementos de base de D. Conseqüentemente, pela implicação tautológica do Passo de Indução, conclui-se que P também é verdadeira para os elementos de D subseqüentes aos elementos de base. Aplicando-se novamente o Passo de Indução, conclui-se que P é verdadeira para os elementos de D que são subseqüentes aos elementos subseqüentes dos elementos de base. Repetindo-se indutivamente tal raciocínio lógico, por sucessivas aplicações do Passo de Indução, prova-se que a propriedade P é verdadeira para todos os elementos de D.

A prova por Indução Matemática pode ser aplicada a domínios cujos elementos são de dois tipos: *numéricos* ou *estruturais*. Os domínios numéricos se referem aos conjuntos discretos dos números **naturais** ou dos **números inteiros**. Por outro lado, os domínios discretos compostos por elementos *estruturais* são aqueles cujos elementos são estruturas sintáticas de alguma linguagem, tais como **fórmulas da Lógica** ou **expressões aritméticas**.

O Princípio da Indução na Lógica das Proposições (LP):

Várias propriedades da Lógica são demonstradas utilizando o princípio da indução finita. A proposição a seguir estabelece a forma de aplicação deste princípio na demonstração de propriedades de fórmulas da LP. Freqüentemente, este princípio é denominado como indução no comprimento das fórmulas ou indução na construção das fórmulas da LP.

PROPOSIÇÃO: (O princípio da indução na LP). Seja B uma asserção que se refere a uma fórmula da LP. Assim, por exemplo, B[E] representa a aplicação da asserção B a uma fórmula E. Se as duas propriedades a) e b) a seguir são verdadeiras, então, conclui-se que B é verdadeira para qualquer fórmula da LP.

a) Base da indução: B é verdadeira para todo símbolo proposicional;
b) Passo da indução: Sejam G e H duas fórmulas. Se B[G] e B[H] são verdadeiras, então, B[$\neg$H], B[G$\vee$H], B[G$\wedge$H], B[G $\rightarrow$ H], B[G$\leftrightarrow$H] são verdadeiras.

A seguir serão apresentados exemplos de prova por Indução Matemática envolvendo os dois tipos de domínio.

2) **<u>Exemplos de Prova por Indução Matemática em Domínios numéricos</u>**:

<u>OBSERVAÇÃO:</u> Nos exemplos abaixo, a prova do *Passo de Indução* será efetuada de acordo com a seguinte estratégia: a fim de provar que a implicação lógica ***P(n) → P(n + 1)*** é verdadeira para todo ***n ∈ D***, será mostrado que, sempre que o antecedente da implicação for verdadeiro (HIPÓTESE INDUTIVA), o conseqüente da implicação (explicitado nos exemplos após a expressão " ***Deve-se mostrar que*** ") também o é.

a) Propriedade P a ser provada:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$$

<u>Resposta</u>:
<u>Prova</u> (por indução matemática):

(a) <u>Passo base</u>: Para $n = 1$, $1^2 = 1$ e $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1$. O passo base é verdadeiro.

(b) <u>Passo indutivo</u>: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

b) Propriedade P a ser provada:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, n \geq 1.$$

Resposta:
Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1 = 1^2$. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) &= k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

c) Propriedade P a ser provada:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, n \geq 1.$$

Resposta:
Essa prova pode ser dividida em duas partes: (i) prova do somatório do lado direito e substituição pela fórmula fechada, e (ii) prova do somatório do lado esquerdo. Sabe-se que a soma $1 + 2 + \ldots + n, n \geq 1$, vale $\frac{n(n+1)}{2}$ (esta prova pode ser obtida por indução matemática). Assim, temos que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}, n \geq 1.$$

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$. O passo base é verdadeiro.
(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.
– Hipótese indutiva:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k + 1)^2}{4}, k \geq 1$$

– Deve-se mostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 = \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4}, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k + 1)^3 &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)(k + 1)^2 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + \frac{4(k + 1)(k + 1)^2}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4} \\ &= \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} \end{aligned}$$

d) Propriedade P a ser provada:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $2 \cdot 1 = 2$ e $1^2 + 1 = 2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

- Hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2k &= k^2 + k \\ &= k(k+1), k \geq 1 \end{aligned}$$

- Deve-se mostrar que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \\ &= (k+1)(k+2), k \geq 1 \end{aligned}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k + 2 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

e) Propriedade P a ser provada:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2.$$

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 2$, $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{1} i(i+1) = 1(1+1) = 2$ e $\frac{n(n-1)(n+1)}{2} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3} = 2$. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 2$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

- Hipótese indutiva:

$$\sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) = \frac{k(k-1)(k+1)}{3}$$

- Deve-se mostrar que:

$$\sum_{i=1}^{k} i(i+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} i(i+1) &= \sum_{i=1}^{k-1} i(i+1) + k(k+1) \\
&= \frac{k(k-1)(k+1)}{3} + k(k+1) \\
&= \frac{k(k-1)(k+1) + 3k(k+1)}{3} \\
&= \frac{k(k+1)[(k-1)+3]}{3} \\
&= \frac{k(k+1)(k+2)}{3}
\end{aligned}$$

f) Propriedade P a ser provada:

Ache a fórmula fechada para a soma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$\forall$ inteiros $n \geq 1$ e prove o seu resultado por indução matemática.

Resposta:
Prova (por indução matemática):
Somando os primeiros termos e simplificando temos que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

o que leva a conjectura que para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

(a) Passo base: Para $n=1$, $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, que é o valor da fórmula fechada. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n=k, k\geq 1$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$.

– Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

– Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

3) **Exemplos de Prova por Indução Matemática em domínios cujos elementos são estruturas sintáticas**:

a) Propriedade P a ser provada:

P(E): qualquer que seja a fórmula E da Lógica das Proposições (LP), existe uma fórmula E_1, equivalente a E, que contém apenas os conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de E.

D: linguagem da Lógica das Proposições, ou seja, conjunto discreto formado por todas as fórmulas sintaticamente corretas de tal Lógica.

(a) **Passo Base**: Neste exercício, o elemento de base é qualquer símbolo proposicional (fórmula atômica). Obviamente, P[E] é verdadeira para todo símbolo proposicional (no caso, E_1 é a própria fórmula E);

(b) **Passo Indutivo**: este passo será desmembrado nos passos *(1)* e (2) abaixo:

(1) Sendo G uma fórmula qualquer da LP, pergunta-se: a implicação $P[G] \rightarrow P[\neg G]$ é verdadeira, isto é, a implicação:

(*Existe G_1 equivalente a G tal que G_1 contenha apenas conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G*) $\rightarrow$ (*Existe M_1 equivalente a $\neg G$ tal que M_1 contenha apenas conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G*)

É verdadeira?

Para fazer tal análise, suponha, a título de simplificação de notação, que o antecedente da implicação acima seja representado por ***A*** e seu conseqüente por ***R***. Assim sendo, deseja-se provar que a implicação ***A*** $\rightarrow$ ***R*** é verdadeira.

- **Hipótese Indutiva**: A é verdade.

- **Deve-se mostrar que**: R é verdade.

Por hipótese, tem-se que $G_1 \equiv G$. Como $G_1 \equiv G$, então, $\neg G_1 \equiv \neg G$. Ainda por hipótese, G_1 contém apenas conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G. Logo, de fato existe uma fórmula M_1 equivalente a $\neg G$ e que contenha apenas os conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G. Tal M_1 é a fórmula $\neg G_1$. Logo, R é verdadeiro. Como conclusão, a implicação analisada também o é.

(2) Sendo G e H fórmulas quaisquer da LP e ***c*** um conectivo qualquer extraído do conjunto $\{\neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow \}$, pergunta-se: a implicação *P[G]* $\wedge$ *P[H]* $\rightarrow$ *P[G c H]* é verdadeira, isto é, a implicação:

(*Existe G_1 equivalente a G tal que G_1 contenha apenas conectivos $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G)* $\wedge$ *(Existe H_1 equivalente a H tal que H_1 contenha apenas conectivos $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais de H*) $\rightarrow$ (*Existe M_1 equivalente a G c H tal que M_1 contenha apenas conectivos $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G c H*)

É verdadeira?

Para fazer tal análise, assuma, a título de simplificação de notação, que as proposições *(Existe G_1 equivalente a G tal que G_1 contenha apenas conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G)* e *(Existe H_1 equivalente a H tal que H_1 contenha apenas conectivos $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de H)* que compõem o antecedente da implicação acima sejam representadas, respectivamente, por ***A*** e ***D***. Assuma, também, que seu conseqüente seja representado por ***E***. Assim sendo, deseja-se provar que a implicação $\boldsymbol{A \wedge D \rightarrow E}$ é verdadeira.

- Hipótese Indutiva: $\boldsymbol{A \wedge D}$ é verdade.

- **Deve-se mostrar que**: ***E*** é verdade.

Por hipótese, tem-se que $G_1 \equiv G$ e $H_1 \equiv H$. Logo, $G_1\ c\ H_1 \equiv G\ c\ H$. Ainda por hipótese, G_1 e H_1 contém apenas conectivos de $\{\neg , \vee\}$ e os símbolos proposicionais de G e H, respectivamente. Então, a análise da implicação acima tem que ser feita considerando-se três casos: 1°) o conectivo ***c*** é “ $\wedge$ ” ; 2°) o conectivo c é “ $\rightarrow$ ” ; 3°) o conectivo c é

" $\leftrightarrow$ " . A seguir, será feita a análise para o primeiro caso. Os dois demais casos seguem raciocínio análogo ao primeiro e ficam propostos como exercício.

1°) Considere que o conectivo ***c*** seja " $\wedge$ " . Neste caso, $G_1 \wedge H_1 \equiv \neg(\neg G_1 \vee \neg H_1) \equiv G \wedge H$. Logo, de fato *Existe M_1 equivalente a $G \wedge H$ tal que M_1 contenha apenas conectivos $\{\neg, \vee\}$ e os símbolos proposicionais de $G \wedge H$* . Tal M_1 é a fórmula $\neg(\neg G_1 \vee \neg H_1)$. Logo a proposição E é verdadeira e, conseqüentemente, a implicação analisada também o é.