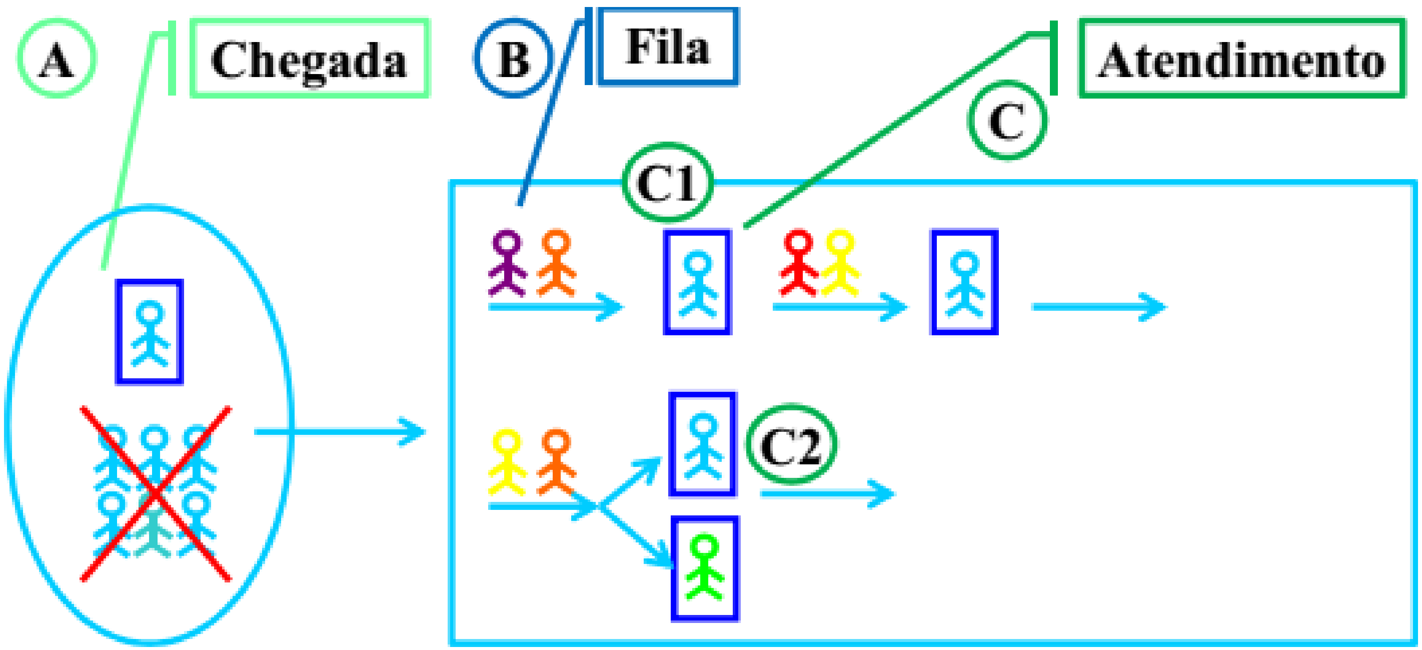
Teoria de Filas

Teoria de Filas



A) Supõe a chegada de apenas um usuário por instante.O tempo para ocorrer uma chegada é função de probabilidade.

B) Organização da fila: primeiro a entrar, primeiro a sair

C) Pode ter servidores em paralelo (C2) ou em série (C1). O tempo de serviço é associado a função de distribuição.

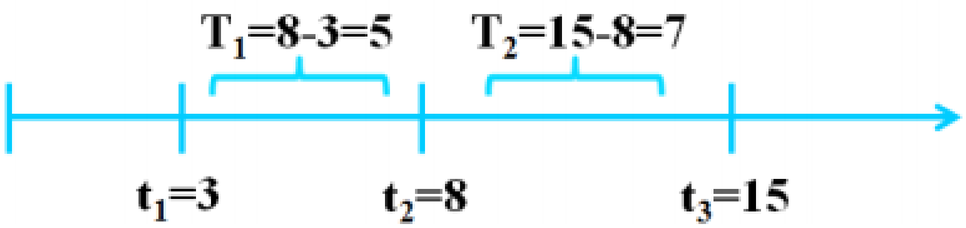
Teoria de Filas

Notação de Kendall-Lee (1)/(2)/(3)/(4)/(5)/(6) em que:

(1) representa a natureza do processo de chegada. Ex.: M – variáveis aleatórias iid como função de distribuição exponencial

Seja t_i o tempo que o i-ésimo cliente chega e

$T_i = t_{i+1} - t_i$ o i-ésimo intervalo entre chegadas tal como abaixo:



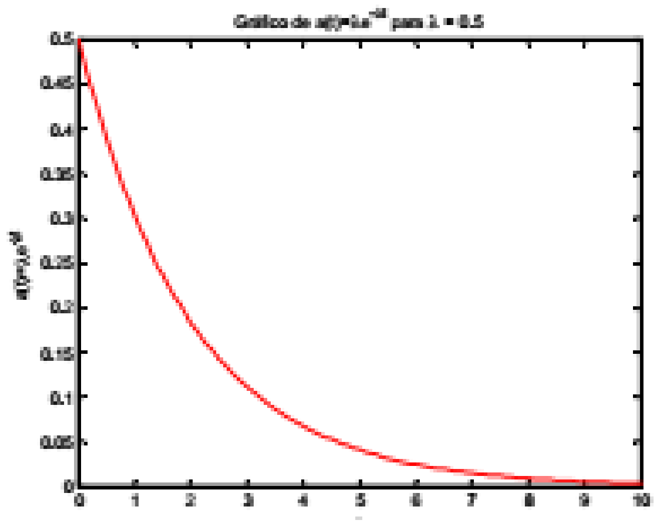
Na modelagem do processo de chegada é suposto que as T_is são variáveis aleatórias contínuas e independentes descritas pela variável aleatória A. A independência diz que o valor de T_2 não afeta o valor de T_3, e assim por diante.

Teoria de Filas

Na maioria das aplicações uma questão importante é escolher A de modo a refletir a realidade, mas ainda ser computacionalmente tratável. A escolha mais comum para A é a função de distribuição exponencial, ou seja:

$$a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

onde: λ- é a taxa de chegada (no. chegadas/hora, p.ex.).



O principal motivo para escolha da exponencial é devido a propriedade de que ela não tem memória. Ou seja:

$$P(A > t + h \mid A \geq t) = P(A > h)$$

Teoria de Filas

Se o tempo entre as chegadas é uma exponencial, a função de distribuição de probabilidade do número de chegadas que ocorrem em qualquer intervalo de tempo de tamanho T pode ser obtido através do seguinte Teorema:

Teorema 1: O tempo entre as chegadas é exponencial com parâmetro λ se e somente se o número de chegadas que ocorrem em um intervalo de tamanho t seguir uma função de distribuição de probabilidade Poisson com parâmetro λt.

Uma variável aleatória discreta N segue a distribuição de Poisson com parâmetro λ se, para n = 0, 1, 2,.

$$P(N = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Teoria de Filas

Se N é uma variável aleatória de Poisson, então, pode ser provado que **E(N) = var(N) = λ**. Definindo que N_t é o número de chegadas que ocorrem durante o intervalo de tamanho t, então, o Teorema 1 diz que:

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \qquad \text{(n = 0, 1, 2, ...)}$$

Se N_t é Poisson com parâmetro λt, então, ocorre uma média de λt chegadas durante o intervalo de tempo de tamanho t e o **valor λ pode ser visto como o número médio de chegadas por unidade de tempo, ou a taxa de chegada**.

Teoria de Filas

Teorema 2: Para que N_t seja uma Poisson com parâmetro λt e o tempo entre as chegadas seja uma exponencial com parâmetro λ, isto é, $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(1) As chegadas definidas em intervalos de tempo que não se sobrepõem são independentes (p.ex. o número de chegadas entre 1 e 10 não fornece nenhuma informação para o intervalo de 30 à 50).

(2) Para Δt pequeno a probabilidade de que ocorra uma chegada entre t e $t+\Delta t$ é dada por:

$\lim_{\Delta t \to 0} O(\Delta t)/\Delta t = 0$

Assim, a probabilidade de que mais de uma chegada ocorra entre t e $t+\Delta t$ é $O(\Delta t)$.

O que as condições anteriores dizem é que não pode ocorrer chegada em massa.

Teoria de Filas

Exemplo: O número pedido de copos de cerveja por hora no bar do Zé segue uma distribuição de Poisson com média de 30 pedidos por hora.

(A)Encontrar a probabilidade de que exatamente 60 cervejas sejam pedidas entre 22:00 e 24:00.

Teoria de Filas

Exemplo: O número pedido de copos de cerveja por hora no bar do Zé segue uma distribuição de Poisson com média de 30 pedidos por hora.

(A)Encontrar a probabilidade de que exatamente 60 cervejas sejam pedidas entre 22:00 e 24:00.

$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Achar Poisson com parâmetro:
$\lambda * t = 30*2 = 60$

$$P(N_t = 60) = \frac{e^{-60}(60)^{60}}{60!} = 0.051$$

Teoria de Filas

B)Encontrar a média e o desvio padrão do número de pedidos entre 21:00 e 1:00.

Se λ= 30 pedidos por hora e t = 4 horas, então a média é de 120 pedidos. O desvio padrão é:

$(120)^{1/2}$=10.98

(C)Encontrar a probabilidade de que o tempo entre dois pedidos esteja entre 1 e 3 minutos.

Seja X o tempo (em minutos) entre pedidos sucessivos. A média de pedidos por minuto é exponencial com parâmetro 30/60 = 0,5. Assim, a função de probabilidade do tempo entre dois pedidos é:

$0,5e^{-0,5t}$. Então:

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 (0.5e^{-0.5t})dt = e^{-0.5} - e^{-1.5} = 0.38$$

lembrando que: $\int e^{\mathrm{at}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\mathrm{a}} e^{\mathrm{at}} + \mathrm{C}$

Teoria de Filas

Exercício: O número pedido de copos de cerveja por hora no bar do Zé segue uma distribuição de Poisson com média de 30 pedidos por hora.

(A) Encontrar a probabilidade de que exatamente 61 cervejas sejam pedidas entre 22:00 e 24:00.

Teoria de Filas

Exemplo: O número pedido de copos de cerveja por hora no bar do Zé segue uma distribuição de Poisson com média de 30 pedidos por hora.

(A)Encontrar a probabilidade de que exatamente 61 cervejas sejam pedidas entre 22:00 e 24:00.

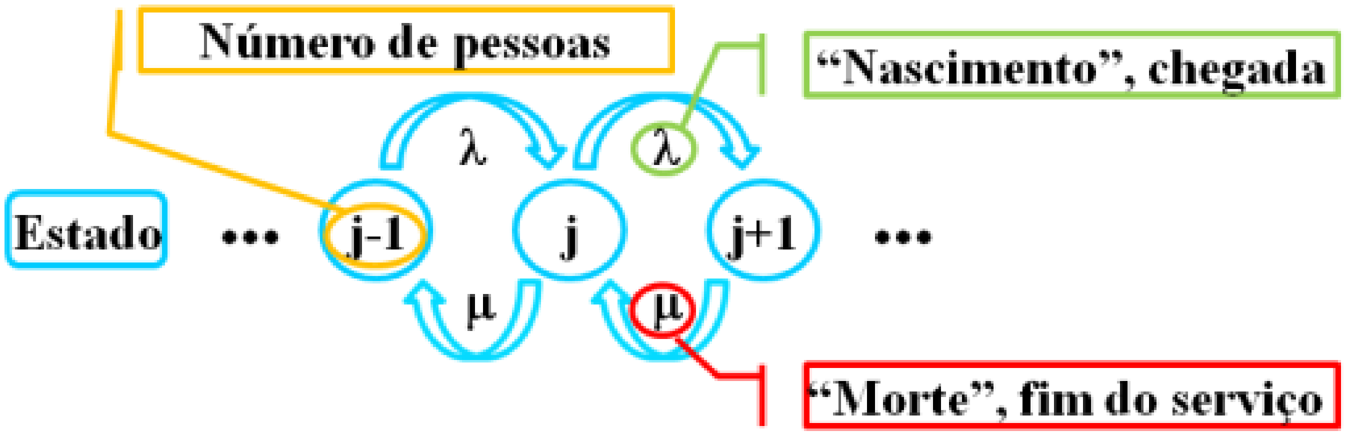
$$P(N_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

Achar Poisson com parâmetro:
λ*t = 2*30 = 60

$$P(N_t = 61) = \frac{e^{-61}(60)^{61}}{61!} = 0.018$$

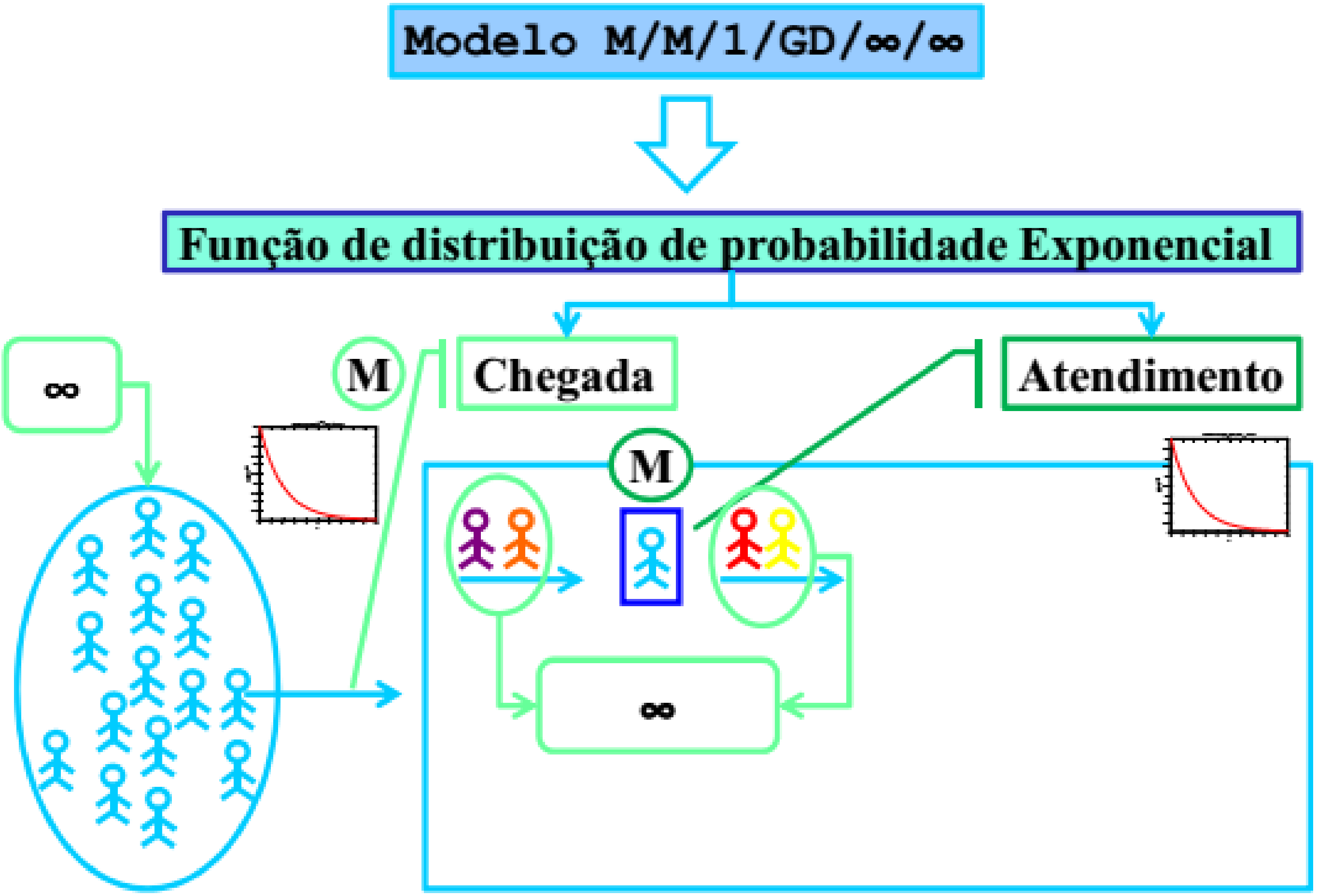
Teoria de Filas: Resumo

A maioria dos sistemas de filas com tempos exponenciais de intervalos de chegadas e tempos de serviço podem ser modelados por um processo de nascimento e morte.



A propriedade de ausência de memória da exponencial garante que a probabilidade de ocorrer uma chegada no intervalo [t, t+Δt] não depende de há quanto tempo o sistema está no estado j e só depende da taxa λ. Idem p/ serviço.

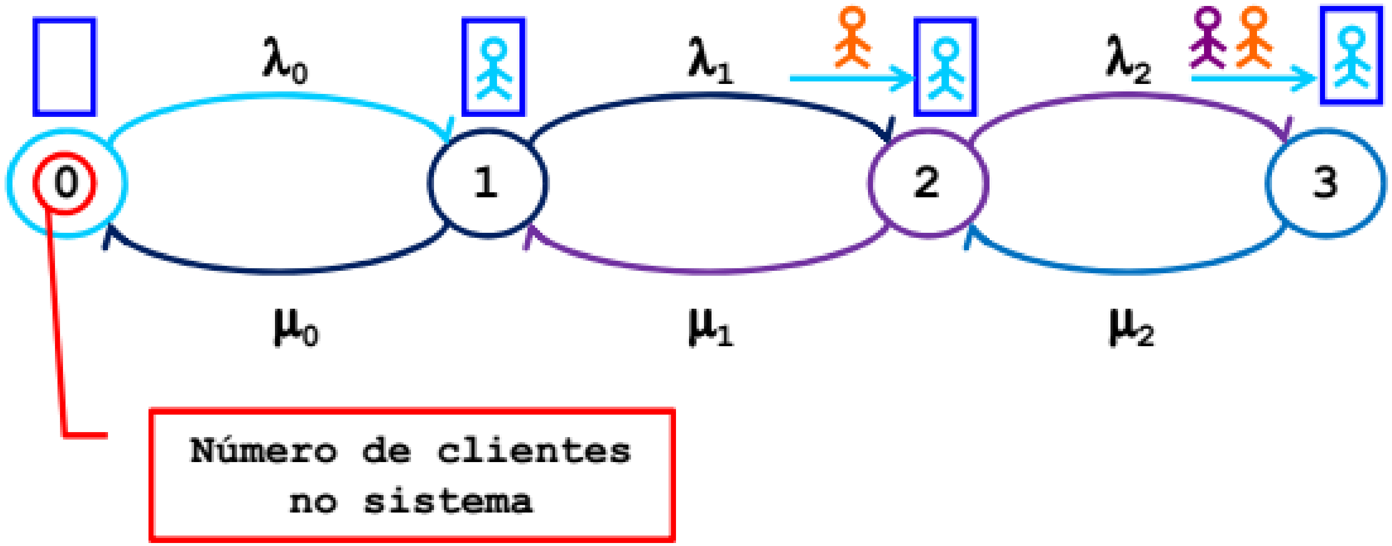
Teoria de Filas



Teoria de Filas

Modelo de Fila M/M/1/GD/∞/∞:

A metodologia de nascimento-morte pode ser empregada para analisar as propriedades de um modelo de fila com intervalo exponencial entre as chegadas (taxa λ) e um único servidor com tempo de atendimento exponencial (taxa μ). Assim:



Teoria de Filas

Modelo de Fila M/M/1/GD/∞/∞:

A metodologia de nascimento-morte pode ser empregada para analisar as propriedades de um modelo de fila com intervalo exponencial entre as chegadas (taxa λ) e um único servidor com tempo de atendimento exponencial (taxa μ). Assim:

$\boxed{\lambda_j = \lambda, (j=0,1,2,...)}$

$\boxed{\pi_i = \pi_{i-1}\lambda_{i-1}/\mu_i}$

$\boxed{\mu_0 = 0}$ $\boxed{\mu_j = \mu, (j=0,1,2,...)}$

Então, se:

$\boxed{\pi_1 = \lambda_0\pi_0/\mu_1} \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \lambda\pi_0/\mu}$

$\boxed{\pi_2 = \lambda_1\pi_1/\mu_2} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \lambda\pi_1/\mu} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \lambda^2\pi_0/\mu^2}$

Teoria de Filas

Logo:

$\pi_j = \lambda^j \pi_0 / \mu^j$ (7)

Lembrar:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$ (3)

Definindo que a intensidade de tráfego do sistema de filas é dada por: ρ= λ/μ. Então, aplicando (7) em (3):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 (1 + \rho + \rho^2 + ...) = 1$$ (8)

Assumindo que $0 \leq \rho < 1$. Então, calcula-se a soma S:

S :

$S = 1 + \rho + \rho^2 + ...$

$\rho S = \rho + \rho^2 + \rho^3 + ...$

$S - \rho S = 1 \Rightarrow S = 1/(1 - \rho)$ (9)

Teoria de Filas

Aplicando (9) em (8):

$\pi_0 (1 + \rho + \rho^2 + ...) = 1$ $\Rightarrow$ $\pi_0 / (1 - \rho) = 1$

$\pi_0 = (1 - \rho)$ (10)

Aplicando (10) em (7):

$\pi_j = \lambda^j \pi_0 / \mu^j$ $\Rightarrow$ $\pi_j = \lambda^j (1 - \rho) / \mu^j$ $\Rightarrow$

$\pi_j = \rho^j (1 - \rho)$ (11)

É importante observar que **se $\rho \geq 1$**, a soma dada em (8) irá crescer tanto quanto se queira e **não há estado estacionário**. Assim, se a taxa de chegada é maior ou igual que a taxa de atendimento ($\lambda \geq \mu$) não existe estado estacionário.

Teoria de Filas

A afirmação anterior pode ser verificada para um exemplo simples. Imagine que chegam $\lambda = 6$ clientes por hora e que $\mu = 4$ clientes são atendidos por hora. Mesmo que todos os servidores trabalhem o tempo todo ainda assim o número de clientes irá, em média, aumentar $6 - 4 = 2$ clientes por hora. Ou seja, o número de clientes “explode” e não existe estado estacionário.

Teoria de Filas

Derivação de L: Empregando a distribuição de estado estacionário dada por (11) é possível obter, por exemplo, a média do número de clientes presentes no modelo de filas (L):

$$L = \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j (1-\rho) = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j$$

Tendo que:

$$S' = \sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j = \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots \quad \text{e} \quad \rho S' = \rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \ldots$$

Então:

$$S' - \rho S' = \rho + \rho^2 + \ldots = \rho/(1-\rho)$$

$$S' = 1/(1-\rho)^2$$

Teoria de Filas

Derivação de L: Empregando a distribuição de estado estacionário dada por (11) é possível obter, por exemplo, a média do número de clientes presentes no modelo de filas (L):

$$L = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^{j} = (1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^{2}} = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (12)$$

Teoria de Filas

Derivação de Lq: Para calcular o número esperado de clientes esperando atendimento (ou na fila) (Lq) é necessário observar que se o sistema tem 0 ou 1 clientes, então, não existe fila. Se existirem j (j ≥1) clientes, então, j-1 clientes estarão esperando atendimento. Assim:

$$Lq = \sum_{j=1}^{\infty}(j-1)\pi_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} j\pi_j}_{\text{Usando (12): L}} - \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\pi_j}_{\text{Usando (8): }(1-\pi_0)} \qquad \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j = 1$$

$$Lq = L - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (13)$$

Teoria de Filas

Derivação de Ls: Para calcular o número esperado de clientes em atendimento (Ls) em um modelo de filas M/M/1/GD/∞/∞ usa-se:

$$Ls = 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + \ldots) = 1 - \pi_0$$

Usando (8)

Assim:

$$Ls = 1 - (1 - \rho) = \rho \qquad (14)$$

Teoria de Filas

A fórmula de Little para Filas: Para calcular o tempo total que um cliente gasta no sistema, define-se **W** como o tempo esperado gasto pelo cliente no sistema, incluindo o tempo na fila mais o tempo de atendimento. O tempo gasto na fila é **Wq**. **Tanto W como Wq assumem que o estado estacionário foi atingido**. A fórmula de Little relaciona **W** e **Wq** como **L** e **Lq**, respectivamente:

$$L = \lambda W \quad (15)$$

$$Lq = \lambda Wq \quad (16)$$

$$Ls = \lambda Ws \quad (17)$$