

Comunicações Móveis

Desempenho dos Sistemas de Comunicações Sem Fio

Prof: Higo Thaian Pereira da Silva¹
higo.silva@unb.br

¹Universidade de Brasília
UnB

20 de outubro de 2025



Universidade de Brasília

Sumário

1. Relação Sinal-Ruído em Canais AWGN
2. Probabilidade de Erro em Canais AWGN
 - Probabilidade de Erro - M -ASK
 - Probabilidade de Erro - M -QAM
 - Simulações das Probabilidades de Erro
3. Desempenho sob Efeito do Canal Multipercurso
 - Propriedades Temporais da SNR
 - Propriedades Estatísticas da SNR
 - Probabilidade de Interrupção
 - Simulação da Probabilidade de Interrupção
 - Probabilidade de Erro de Símbolo
 - Simulação da Probabilidade de Erro de Símbolo



Desempenho dos Sistemas de Comunicações Sem Fio

Relação Sinal-Ruído em Canais AWGN

- Definimos a **relação sinal-ruído** (*signal-to-noise ratio – SNR*) em canais AWGN como a razão da **potência recebida** P_r pela **potência do ruído** na largura de banda do sinal transmitido

Relação Sinal-Ruído

$$\gamma = \frac{P_r}{B_w N_0}, \quad (1)$$

em que $N_0/2$ é a densidade espectral de potência do ruído e B_w é a largura de banda do sinal transmitido

Relação Sinal-Ruído em Canais AWGN

- A SNR também pode ser expressa em termos das **energias médias**:

Relação Sinal-Ruído

$$\gamma = \frac{P_r}{B_w N_0} = \frac{\bar{E}_s}{B_w N_0 T_s} = \frac{\bar{E}_b}{B_w N_0 T_b}, \quad (2)$$

em que T_s é o tempo de símbolo e T_b é tempo de bit. De forma equivalente, em termos das taxas de símbolo e de bit, R_s e R_b , respectivamente, temos que

$$\gamma = \frac{P_r}{N_0 B_w} = \frac{\bar{E}_s R_s}{N_0 B_w} = \frac{\bar{E}_b R_b}{N_0 B_w} \quad (3)$$

As grandezas $\gamma_s = \bar{E}_s/N_0$ e $\gamma_b = \bar{E}_b/N_0$ são conhecidas como SNR por símbolo e SNR por bit, respectivamente

- A razão R_b/B_w é uma medida da **eficiência espectral da modulação**, expressa em bits/s/Hz

Probabilidade de Erro em Canais AWGN

- O cálculo da **probabilidade de erro de símbolo** pode ser feita por meio da probabilidade de decisão correta:

Probabilidade de Decisão Correta

O evento de decisão correta pode ser definido como:

“O símbolo s_i foi decodificado dado que o símbolo s_i foi transmitido.”

Dado que os eventos de decisão correta são disjuntos, a probabilidade total de acerto é dada por

$$P_c = \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\hat{s} = s_i | s_i) \mathbb{P}(s_i), \quad (4)$$

em que $\mathbb{P}(\hat{s} = s_i | s_i)$ é a probabilidade de se decodificar s_i dado que s_i foi transmitido e $\mathbb{P}(s_i)$ é a probabilidade de transmitir o símbolo s_i . Com base nas regiões de decisão, podemos expressar a probabilidade condicional como

$$\mathbb{P}(\hat{s} = s_i | s_i) = \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | s_i) = \int_{\mathcal{R}_i} p_{\mathbf{r}|s_i}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5)$$

Probabilidade de Erro em Canais AWGN

FDP condicional

$$p_{\mathbf{r}|\mathbf{s}_i}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \int_{\mathcal{R}_i} \exp \left[-\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2}{N_0} \right] d\mathbf{r} \quad (6)$$

Probabilidade de Erro

Com base na probabilidade de decisão correta total, pode-se expressar a probabilidade de erro (evento complementar) como:

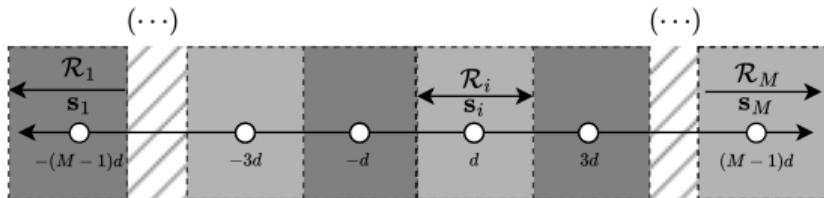
$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c \\ &= 1 - \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_i | \mathbf{s}_i) \mathbb{P}(\mathbf{s}_i) \\ &= 1 - \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | \mathbf{s}_i) \mathbb{P}(\mathbf{s}_i) \end{aligned} \quad (7)$$

Probabilidade de Erro - M -ASK

- Os símbolos M -ASK são: $\mathbf{s}_i = [(2i - 1 - M)d], (N = 1)$

Probabilidade de decisão correta referente ao símbolo \mathbf{s}_1

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_1 | \mathbf{s}_1) &= \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_1 | \mathbf{s}_1) \\
 &= \mathbb{P}(-\infty \leq r_1 \leq -(M-2)d | \mathbf{s}_1) \\
 &= \mathbb{P}(-\infty \leq s_1 + n_1 \leq -(M-2)d) \\
 &= \mathbb{P}(-\infty \leq -(M-1)d + n_1 \leq -(M-2)d) \\
 &= \mathbb{P}(-\infty \leq n_1 \leq d) \\
 &= 1 - Q\left(\sqrt{2d^2/N_0}\right)
 \end{aligned} \tag{8}$$



Probabilidade de Erro - M -ASK

- A região de decisão \mathcal{R}_M é congruente com \mathcal{R}_1 , logo:

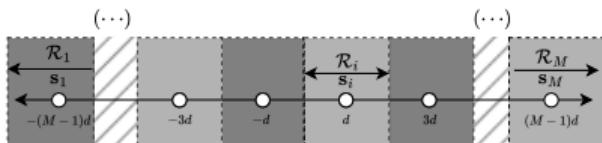
Probabilidade de decisão correta referente ao símbolo s_M

$$\mathbb{P}(\hat{s} = s_M | s_M) = 1 - Q\left(\sqrt{2d^2/N_0}\right) \quad (9)$$

- Devido à simetria da constelação, podemos afirmar que:

Probabilidade de decisão correta referente ao símbolo s_i

$$\mathbb{P}(\hat{s} = s_i | s_i) = \mathbb{P}(-d \leq n_1 \leq d) = 1 - 2Q\left(\sqrt{2d^2/N_0}\right), \forall i \in \{2, \dots, M-1\} \quad (10)$$



Probabilidade de Erro - M -ASK

- Logo, assumindo uma **transmissão equiprovável de símbolos**, a **probabilidade de decisão correta total** é expressa como:

Probabilidade de Decisão Correta - M -ASK

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | \mathbf{s}_i) \\ &= \frac{1}{M} \left\{ 2 \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \right) \right] + (M-2) \left[1 - 2Q \left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \right) \right] \right\} \quad (11) \\ &= 1 - \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Probabilidade de Erro - *M*-ASK

- A probabilidade de erro de símbolo é então calculada por:

Probabilidade de erro de símbolo - *M*-ASK

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_c \\ &= \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

- Sabendo que, para constelação *M*-ASK, $d^2 = 3\bar{E}_s/(M^2 - 1)$, podemos expressar a probabilidade de erro de símbolo como:

Probabilidade de erro de símbolo - *M*-ASK

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \frac{\bar{E}_s}{N_0}}\right) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1} \gamma_s}\right) \tag{13}$$

Probabilidade de Erro - M -ASK

- Também podemos expressar a probabilidade de erro em termos da **SNR por bit**: $\gamma_b = \gamma_s / \log_2(M)$

Probabilidade de erro de símbolo - M -ASK

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2 - 1}} \gamma_b\right) \quad (14)$$

Probabilidade de Erro - M -ASK

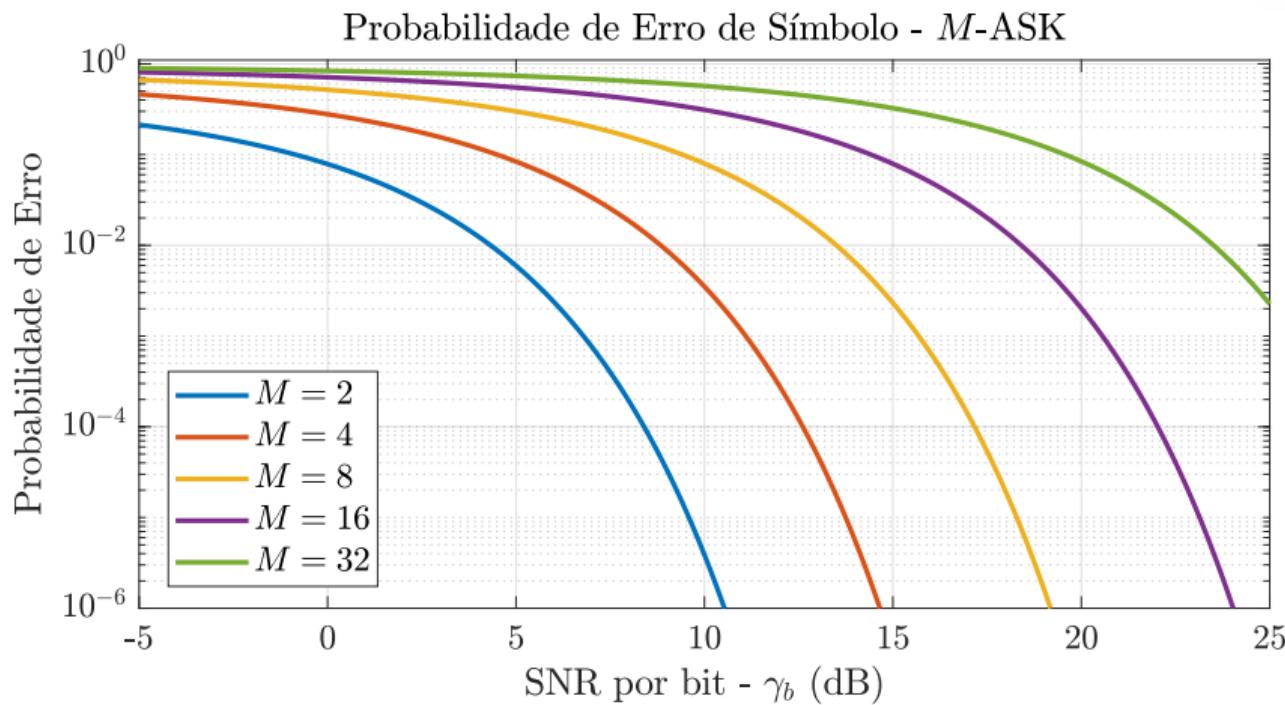


Figura 1: Probabilidade de erro de símbolo da constelação M -ASK sob canal AWGN.

Probabilidade de Erro - M -QAM

- A **constelação de sinais QAM** consiste de M vetores bidimensionais na forma $s_i = [A_i, B_i]^T$
- Supondo que o símbolo s_i foi transmitido, o vetor recebido é expresso por:

Vetor Recebido (M -QAM)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} A_i + n_1 \\ B_i + n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i \\ B_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (15)$$

em que $n_1, n_2 \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$.

Observe que n_1 atua nas componentes em fase e n_2 atua nas componentes em quadratura

- Para exemplificar, vamos demonstrar o caso de **probabilidade de erro da constelação 16-QAM**

Probabilidade de Erro - M -QAM

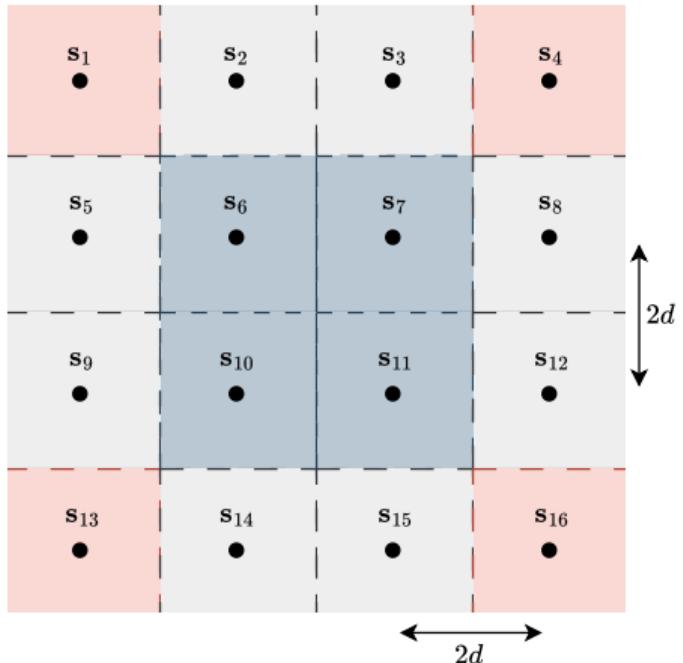


Figura 2: Regiões de decisão para a constelação 16-QAM.

Probabilidade de Erro - M -QAM

Probabilidade de Decisão Correta (16-QAM)

A probabilidade de decisão correta, considerando símbolos equiprováveis, pode ser expressa por

$$\begin{aligned} P_c &= \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | \mathbf{s}_i) \mathbb{P}(\mathbf{s}_i) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{m=1}^M \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | \mathbf{s}_i) \end{aligned} \tag{16}$$

em que $\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_i | \mathbf{s}_i)$ é a probabilidade de decodificar s_i dado que foi transmitido s_i

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Podemos analisar **três casos particulares** devido a simetria das regiões de decisão:
 - **Caso I** - Regiões semi-infinitas $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_4, \mathcal{R}_{13}$ e \mathcal{R}_{16}
 - **Caso II** - Oito regiões semi-infinitas em uma direção e limitadas na outra: $\mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_5, \mathcal{R}_8, \mathcal{R}_9, \mathcal{R}_{12}, \mathcal{R}_{14}$ e \mathcal{R}_{15}
 - **Caso III** - Quatro regiões limitadas: $\mathcal{R}_6, \mathcal{R}_7, \mathcal{R}_{10}$ e \mathcal{R}_{11}
- Para cada caso individual, As **probabilidades de decisão correta** correspondentes aos símbolos são calculadas da mesma forma devido a **simetria da constelação e da distribuição do ruído**

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Vamos analisar o **Caso I** por meio da **probabilidade de decisão correta do símbolo s_1**
- Dado que s_1 foi transmitido, a probabilidade de ser decodificar s_1 pode ser expressa como as **probabilidades das componentes do ruído conjuntamente pertencerem aos intervalos:**
 - $n_1 \in [-\infty, d]$ ou $n_1 < d$
 - $n_2 \in [-d, \infty]$ ou $n_2 > -d$

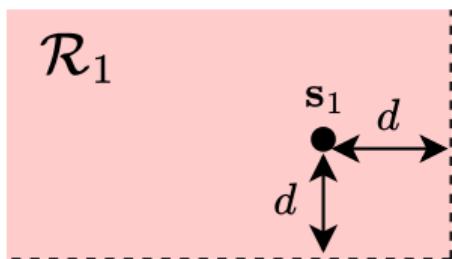


Figura 3: Região de decisão \mathcal{R}_1 .

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Logo, a probabilidade $\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_1 | \mathbf{s}_1)$ é expressa por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_1 | \mathbf{s}_1) &= \mathbb{P}(n_1 < d, n_2 > -d) = \mathbb{P}(n_1 < d)\mathbb{P}(n_2 > -d) \\ &= \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right]^2\end{aligned}\tag{17}$$

- A **probabilidade de decisão correta** correspondente a qualquer um dos símbolos do **Caso I** pode ser formulada como na Eq. (17)

Probabilidade Total de Decisão Correta - Caso I

$$P_{c;\text{C1}} = 4 \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right]^2\tag{18}$$

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Vamos analisar o **Caso II** por meio da **probabilidade de decisão correta do símbolo s_2**
- Dado que s_2 foi transmitido, a probabilidade de ser decodificar s_2 pode ser expressa como as **probabilidades das componentes do ruído conjuntamente pertencerem aos intervalos**:
 - $n_1 \in [-d, d]$ ou $-d < n_1 < d$
 - $n_2 \in [-d, \infty]$ ou $n_2 > -d$

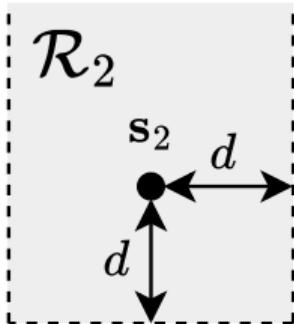


Figura 4: Região de decisão \mathcal{R}_2 .

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Logo, a probabilidade $\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_2 | \mathbf{s}_2)$ é expressa por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_2 | \mathbf{s}_2) &= \mathbb{P}(-d < n_1 < d, n_2 > -d) = \mathbb{P}(-d < n_1 < d)\mathbb{P}(n_2 > -d) \\ &= \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right] \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right]\end{aligned}\tag{19}$$

Probabilidade de Decisão Correta - Caso II

$$P_{c;\text{C2}} = 8 \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right] \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right)\right]\tag{20}$$

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Por fim, vamos analisar o **Caso III** por meio da **probabilidade de decisão correta do símbolo s_6**
- Dado que s_6 foi transmitido, a probabilidade de ser decodificar s_6 pode ser expressa como as **probabilidades das componentes do ruído conjuntamente pertencerem aos intervalos:**
 - $n_1 \in [-d, d]$ ou $-d < n_1 < d$
 - $n_2 \in [-d, d]$ ou $-d < n_2 < d$

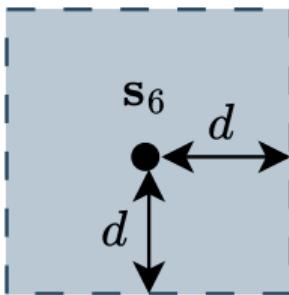


Figura 5: Região de decisão \mathcal{R}_6 .

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Logo, a probabilidade $\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_6 | \mathbf{s}_6)$ é expressa por

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbf{r} \in \mathcal{R}_6 | \mathbf{s}_6) &= \mathbb{P}(-d < n_1 < d, -d < n_2 < d) \\ &= \mathbb{P}(-d < n_1 < d)\mathbb{P}(-d < n_2 < d) \\ &= \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right]^2\end{aligned}\tag{21}$$

Probabilidade de Decisão Correta - Caso III

$$P_{c;\text{C2}} = 4 \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right]^2\tag{22}$$

Probabilidade de Erro - M -QAM

- A **probabilidade de decisão correta** total é expressa por

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{16}(P_{c;c1} + P_{c;c2} + P_{c;c3}) \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right] \left[1 - Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[1 - 2Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[2 - 3Q\left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}}\right) \right]^2 \end{aligned} \tag{23}$$

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Por fim, a **probabilidade de erro de símbolo da constelação 16-QAM** é expressa por:

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - P_c \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \left[2 - 3Q \left(\sqrt{\frac{2d^2}{N_0}} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{24}$$

- Em termos das **SNRs por símbolo e por bit**, temos que:

$$\begin{aligned}
 P_e &= 1 - P_c \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \left[2 - 3Q \left(\sqrt{\frac{3}{M-1} \gamma_s} \right) \right]^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \left[2 - 3Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \gamma_b} \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

Probabilidade de Erro - M -QAM

- Uma **generalização** para o caso M -QAM pode ser feita quando M é da forma $M = 4^n$, com n inteiro, isto é $M = 4, 16, 64, \dots$

Probabilidade de Erro - M -QAM

$$P_e = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \gamma_b}\right) - 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2 Q^2 \left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \gamma_b}\right) \quad (26)$$

- O termo $Q^2(\cdot)$ **decai muito mais rapidamente do que o termo $Q(\cdot)$** . Logo, podemos **aproximar a probabilidade de erro** como:

Probabilidade de Erro - M -QAM

$$P_e \approx 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3 \log_2(M)}{M-1} \gamma_b}\right) \quad (27)$$

Probabilidade de Erro - M -ASK

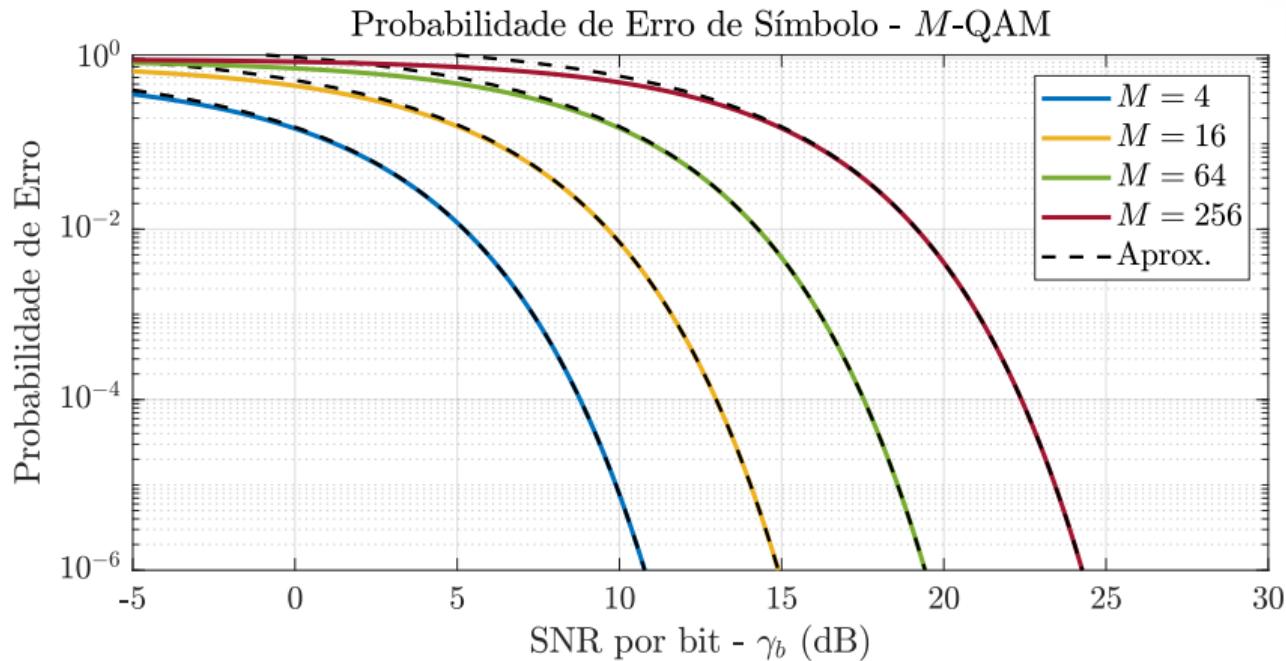


Figura 6: Probabilidade de erro de símbolo da constelação M -QAM sob canal AWGN.

Simulações das Probabilidades de Erro

- O objetivo é simular a **taxa de erro de símbolo** em função da SNR por símbolo $\gamma_s = \bar{E}_s/N_0$
- Termos utilizados:
 - **Probabilidade de erro de símbolo (Symbol Error Probability – SEP):** expressão matemática derivada da análise probabilística
 - **Taxa de erro de símbolo (Symbol Error Rate – SER):** resultado da simulação de Monte Carlo associada à SEP
- Para isso, é necessário **simular a transmissão de uma grande quantidade de símbolos** para garantir uma **convergência numérica adequada**
- Quando o número de símbolos transmitidos (N_t) é suficientemente grande, a SER converge para a SEP ($SER \rightarrow SEP$ se $N_t \rightarrow \infty$)

Simulações das Probabilidades de Erro

- Os valores da **energia média dos símbolos** (\bar{E}_s) e de N_0 devem **satisfazer a relação** γ_s
- Cada **símbolo transmitido pertence ao conjunto** S de uma constelação M -ária (M -ASK ou M -QAM)
- Em cada intervalo de sinalização, o **símbolo recebido sob efeito do ruído** é dado por $r = s + n$
- A **potência do ruído nas dimensões de sinalização** é $\sigma_n^2 = N_0/2$
- Para **satisfazer a especificação da SNR**, pode-se adotar uma das seguintes abordagens:
 - Fixar a energia média \bar{E}_s e variar a potência do ruído σ_n^2
 - Variar a energia média \bar{E}_s mantendo fixa a potência do ruído σ_n^2
- Desde que a razão \bar{E}_s/N_0 **obedeça ao valor especificado** por γ_s , **ambas as abordagens são equivalentes**

Simulações das Probabilidades de Erro

- Adotaremos energia média dos símbolos fixa em $\bar{E}_s = 1$, variando a potência do ruído

Especificações de \bar{E}_s e σ_n^2

Com a energia média dos símbolos fixada em $\bar{E}_s = 1$, obtém-se

$$\gamma_s = \frac{\bar{E}_s}{N_0} = \frac{1}{N_0} = \frac{1}{2\sigma_n^2}, \quad (28)$$

considerando que $\sigma_n^2 = N_0/2$. Portanto, para alcançar a SNR desejada γ_s , a potência do ruído deve ser

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{2\gamma_s}. \quad (29)$$

Desta forma, mantendo $\bar{E}_s = 1$, a potência do ruído é ajustada para atender ao valor requerido de γ_s .

Simulações das Probabilidades de Erro

- Para os N_t símbolos transmitidos, **adiciona-se o ruído e obtém-se o vetor $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$**
- A partir deste vetor, aplica-se o **critério de decisão por mínima distância** relativo à **constelação de referência**

Símbolo recebido

Em cada intervalo de sinalização, o símbolo estimado é determinado por

$$\hat{\mathbf{s}} = \operatorname{argmin}_{\mathbf{s}_i} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2, \quad (30)$$

ou seja, seleciona-se o símbolo da constelação de referência mais próximo ao símbolo recebido.

Simulações das Probabilidades de Erro

- Ao final do processo, obtém-se **duas listas de N_t elementos:**
 - Símbolos transmitidos - \mathcal{S}_t
 - Símbolos decodificados - \mathcal{S}_r
- A SER é calculada mediante **comparação ponto a ponto entre estas listas**
- Desta comparação, obtém-se **o número de símbolos erroneamente decodificados, N_e**
- A SER para um dado γ_s é então calculada como:

Cálculo da SER

$$\text{SER} = \frac{N_e}{N_t}, \quad (31)$$

correspondendo à razão entre símbolos erroneamente decodificados e o total transmitido

Simulações das Probabilidades de Erro

- Para N_t suficientemente grande, a SER converge para a SEP
- Surge então a questão: qual valor é “suficientemente grande”?
- A escolha de N_t deve garantir um número estatisticamente significativo de eventos de erro
- Por exemplo, para $\text{SEP} = 10^{-3}$ em dado γ_t , espera-se em média 1 erro por 1000 símbolos transmitidos
- Como regra prática para boa convergência, recomenda-se $N_t \gg 1/\text{SEP}$
- No exemplo, $N_t = 10^5$ amostras ($100/10^{-3}$) garantiriam convergência adequada entre SER e SEP
- Esta abordagem pressupõe o conhecimento prévio da expressão analítica da SEP

Simulações das Probabilidades de Erro

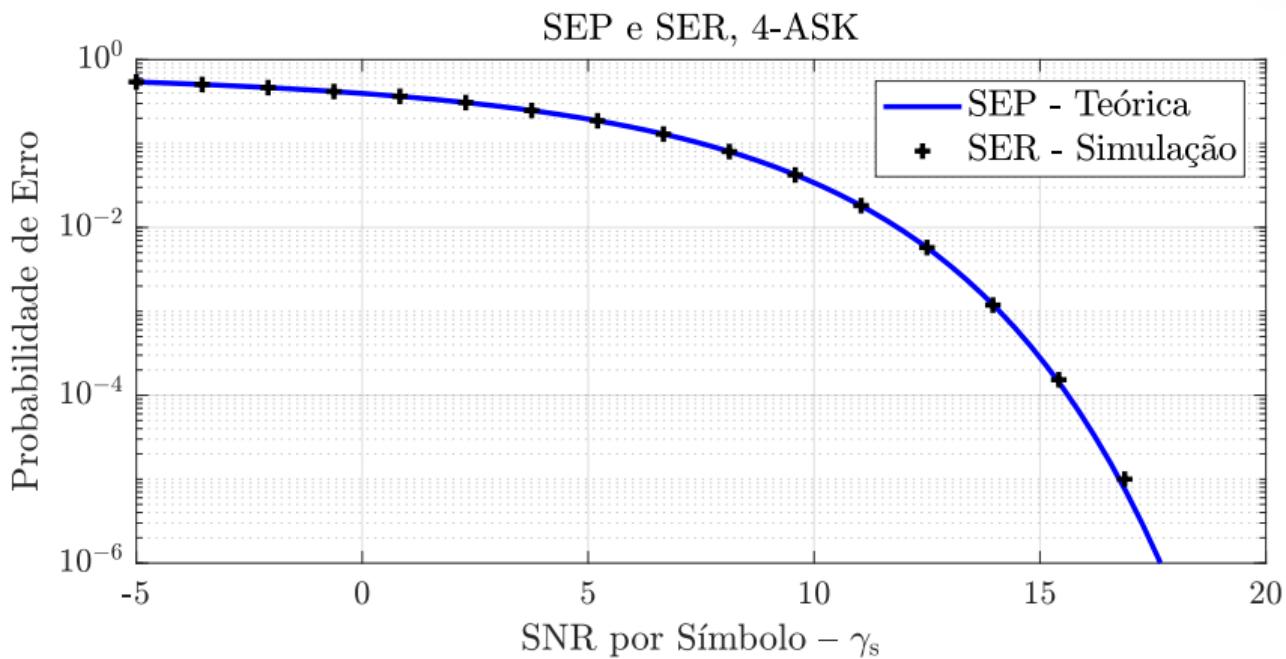


Figura 7: Curva da SEP sobrepostas pelos pontos da SER considerando uma constelação 4-ASK.

Simulações das Probabilidades de Erro

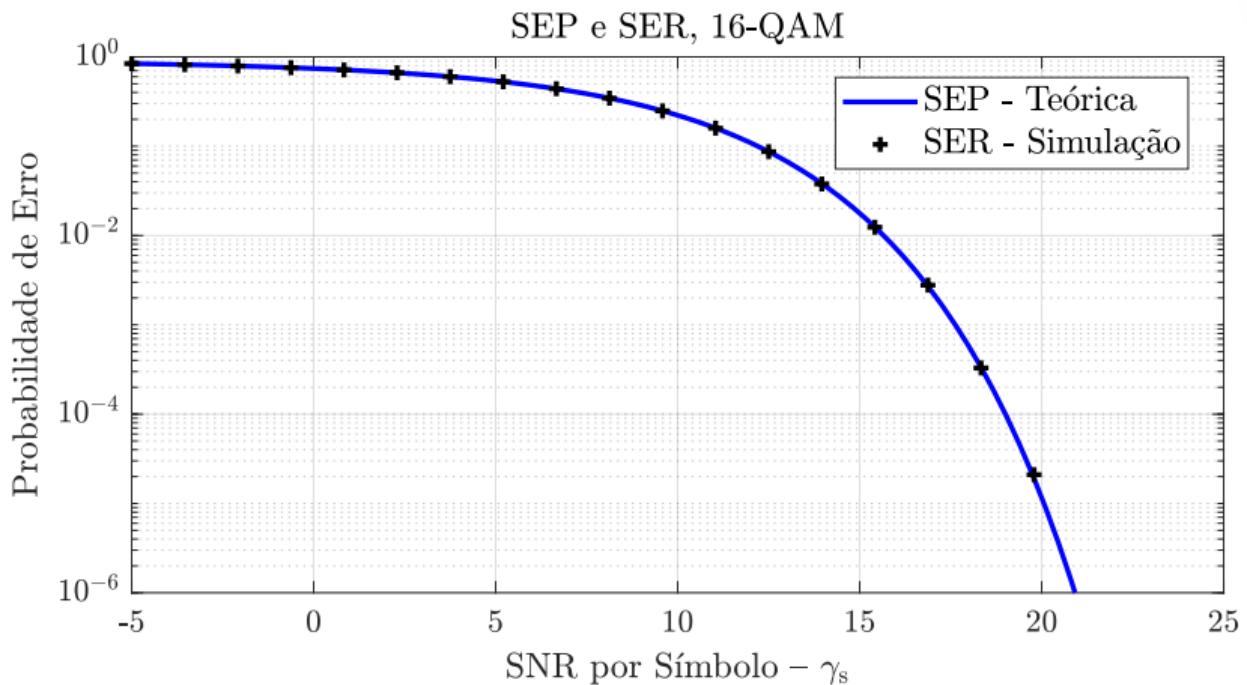


Figura 8: Curva da SEP sobrepostas pelos pontos da SER considerando uma constelação 16-QAM.

Desempenho sob Efeito do Canal Multipercurso

- Vamos agora analisar o desempenho dos sistemas de comunicação sem fio considerando os **efeitos do canal multipercurso**
- Considerando **desvanecimento, ruído e perdas de percurso**, podemos caracterizar o **sinal recebido** como

Modelo de Sinal Recebido

$$r(t) = \sqrt{P_t \Omega_c} \beta(t) e^{j\phi(t)} s(t) + n(t), \quad (32)$$

onde P_t é a potência transmitida, Ω_c caracteriza os efeitos de perdas de percurso e sombreamento, $\beta(t)$ representa a envoltória normalizada do desvanecimento, $\phi(t)$ corresponde à fase do desvanecimento, $n(t)$ representa o ruído AWGN e $s(t)$ é o sinal transmitido

Desempenho sob Efeito do Canal Multipercurso

- Considerando o **efeito multiplicativo do desvanecimento**, a SNR do sistema torna-se **variável no tempo**
- A partir da definição de SNR como razão entre potência do sinal recebido e potência do ruído, obtém-se:

Relação Sinal-Ruído (Canal Multipercurso)

$$\gamma(t) \triangleq \frac{P_r}{B_w N_0} = \frac{P_t \Omega_c \beta^2(t) \bar{E}_s R_s}{N_0 B_w} = \left(\frac{P_t \Omega_c \beta^2(t) \bar{E}_s}{N_0} \right) \left(\frac{R_s}{B_w} \right) = \gamma_s(t) \left(\frac{R_s}{B_w} \right) \quad (33)$$

onde $\gamma_s(t) = (P_t \Omega_c \beta^2(t) \bar{E}_s)/N_0$ representa a SNR instantânea por símbolo, e $\gamma_b(t) = (P_t \Omega_c \beta^2(t) \bar{E}_b)/N_0$ corresponde à SNR instantânea por bit

- Nota-se que a SNR é **variante no tempo** e **aleatória** devido ao desvanecimento

Propriedades Temporais da SNR

- Primeiramente, observamos que a **dependência temporal da SNR** ocorre devido ao **termo de envoltória** $\beta(t)$
- A taxa de variação de $\beta(t)$ está diretamente relacionada ao **tempo de coerência** T_c ou, equivalentemente, à **dispersão Doppler** σ_ν
- É razoável assumir que $T_c > T_s$ (**tempo de coerência maior que o tempo de sinalização**)
- O caso $T_c \approx T_s$ ou $T_c < T_s$ é bastante **restritivo**, pois exigiria **dispersão Doppler comparável à largura de banda do sinal** ($\sigma_\nu \approx B_w$)
- Portanto, assumiremos **desvanecimento lento** ($T_c > T_s$)
- Com esta consideração, podemos considerar a **envoltória do canal aproximadamente constante durante um intervalo de sinalização**

Propriedades Estatísticas da SNR

- As **propriedades estatísticas da SNR** derivam diretamente das **características da envoltória** $\beta(t)$
- Conforme visto, $\beta(t)$ é um **processo estocástico estacionário com distribuição Rayleigh ou Rice**
- Consideremos inicialmente o **caso Rayleigh**:

Distribuição Rayleigh da Envoltória do Canal

Sendo a envoltória do canal $\beta(t) = |h(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$, com $x(t), y(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ i.i.d., a distribuição de $\beta = \beta(t)$ em qualquer instante t é:

$$p_\beta(\beta) = \frac{\beta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right), \quad \beta \geq 0 \quad (34)$$

Propriedades Estatísticas da SNR

- Caracterizemos a distribuição de $c\beta^2(t)$ quando $\beta(t)$ segue Rayleigh e c é uma constante qualquer

Transformação de FDP

$$p_y(y) = \sum_k \frac{p_x(x)}{\left| \frac{dy}{dx} \right|} \Bigg|_{x=x_k}, \quad (35)$$

com x_k sendo as raízes de $f(x) = y$. Definindo $\tilde{\gamma} = c\beta^2$, onde β é Rayleigh normalizado ($2\sigma^2 = 1$), temos para $\beta > 0$, $\tilde{\gamma} > 0$:

- Única solução real: $\beta = \sqrt{\tilde{\gamma}/c}$
- Derivada: $|d\tilde{\gamma}/d\beta| = 2c\beta$

Portanto:

$$p_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma}) = \frac{p_\beta(\sqrt{\tilde{\gamma}/c})}{2c\sqrt{\tilde{\gamma}/c}} = \frac{1}{c} e^{-\frac{\tilde{\gamma}}{c}}. \quad (36)$$

Conclui-se que a SNR tem distribuição exponencial quando a envoltória é Rayleigh

Propriedades Estatísticas da SNR

- Usando o resultado para a distribuição $c\beta^2$, temos que as FDPs das SNRs por símbolo e por bit são:

FDP de $\gamma_s(t)$ (Envoltória Rayleigh)

Dado que $\gamma_s(t) = (P_t \Omega_c \bar{E}_s / N_0) \beta^2(t)$

$$p_{\gamma_s}(\gamma_s) = \frac{1}{\bar{\gamma}_s} e^{-\frac{\gamma_s}{\bar{\gamma}_s}}, \quad (37)$$

em que $\bar{\gamma}_s = \mathbf{E}[\gamma_s] = (P_t \Omega_c \bar{E}_s / N_0)$ é a SNR por símbolo média do sistema

FDP de $\gamma_b(t)$ (Envoltória Rayleigh)

Dado que $\gamma_b(t) = (P_t \Omega_c \bar{E}_b / N_0) \beta^2(t)$

$$p_{\gamma_b}(\gamma_b) = \frac{1}{\bar{\gamma}_b} e^{-\frac{\gamma_b}{\bar{\gamma}_b}}, \quad (38)$$

em que $\bar{\gamma}_b = \mathbf{E}[\gamma_b] = (P_t \Omega_c \bar{E}_b / N_0)$ é a SNR por bit média do sistema

Propriedades Estatísticas da SNR

- Observe que as **SNRs médias** $\bar{\gamma}_s$ e $\bar{\gamma}_b$ dependem de:
 - **Potência transmitida** - P_t
 - **Perdas de percurso e sombreamento** - Ω_c
 - **Energia média do símbolo ou do bit** - \bar{E}_s e \bar{E}_b
 - **Densidade espectral de potência do ruído** - N_0

Propriedades Estatísticas da SNR

- É importante ressaltar que a **distribuição exponencial da SNR** é uma consequência direta da **envoltória do canal ter distribuição Rayleigh**
- No caso de **envoltória Rice**, demonstra-se que a **SNR segue uma distribuição Chi-quadrado não central**:

FDP de $\gamma_s(t)$ (Envoltória Rice)

$$p_{\gamma_s}(\gamma_s) = \frac{(K_R + 1)}{\bar{\gamma}_s} \exp \left[-K_R - \frac{K_R + 1}{\bar{\gamma}_s} \gamma_s \right] I_0 \left(2 \sqrt{\frac{K_R(K_R + 1)\gamma_s}{\bar{\gamma}_s}} \right), \quad (39)$$

em que $\bar{\gamma}_s = P_t \Omega_c \bar{E}_s / N_0$ representa a SNR média, com definição idêntica à do caso anterior.

Observação: Como os efeitos de larga e pequena escala foram isolados, a envoltória Rice possui potência unitária ($E[\beta^2] = \bar{\mu}^2 + 2\sigma^2 = 1$), sendo $\bar{\mu}^2$ a potência da componente de visada direta e $2\sigma^2$ a potência das componentes dispersas.

Probabilidade de Interrupção

- Para o **correto funcionamento de sistemas de comunicação sem fio**, deve-se garantir um **valor mínimo de SNR**
- Quando esta **condição não é satisfeita**, o **sistema interpreta o sinal recebido como ruído**
- Nessas situações, ocorre **interrupção das comunicações devido à degradação do enlace**
- A caracterização estatística da SNR permite quantificar a **probabilidade de ocorrência desses eventos de interrupção**
- A **probabilidade de interrupção** (*Outage Probability* - OP) constitui uma das **principais métricas de desempenho do sistema**
- **Valores elevados de OP** indicam **desempenho inadequado do sistema frente aos efeitos do canal**

Probabilidade de Interrupção

- Para um sistema qualquer, os requisitos de SNR podem ser expressos equivalentemente nas três formas (γ , γ_s e γ_b), pois diferem apenas por fatores constantes
- Consideremos que o sistema exige uma **SNR por símbolo** acima do limiar γ_{th} para um **desempenho aceitável**
- A OP é então definida como:

Probabilidade de Outage

$$P_{\text{out}}(\gamma_{\text{th}}) = \mathbb{P}(\gamma_s < \gamma_{\text{th}}), \quad (40)$$

correspondendo à probabilidade da SNR por símbolo ficar abaixo do limiar γ_{th} . Matematicamente, a OP equivale à função de distribuição acumulada (FDA) de γ_s em γ_{th} :

$$P_{\text{out}}(\gamma_{\text{th}}) = F_{\gamma_s}(\gamma_{\text{th}}). \quad (41)$$

Probabilidade de Interrupção

- Para o caso em que a **envoltória do canal é Rayleigh**, com **SNR distribuída exponencialmente**, a OP é descrita como:

Probabilidade de *Outage* (Envoltória Rayleigh)

$$P_{\text{out}}(\gamma_{\text{th}}) = F_{\gamma_s}(\gamma_{\text{th}}) = \int_0^{\gamma_{\text{th}}} p_{\gamma_s}(\gamma_s) d\gamma_s = 1 - e^{-\frac{\gamma_{\text{th}}}{\bar{\gamma}_s}}. \quad (42)$$

Probabilidade de Interrupção

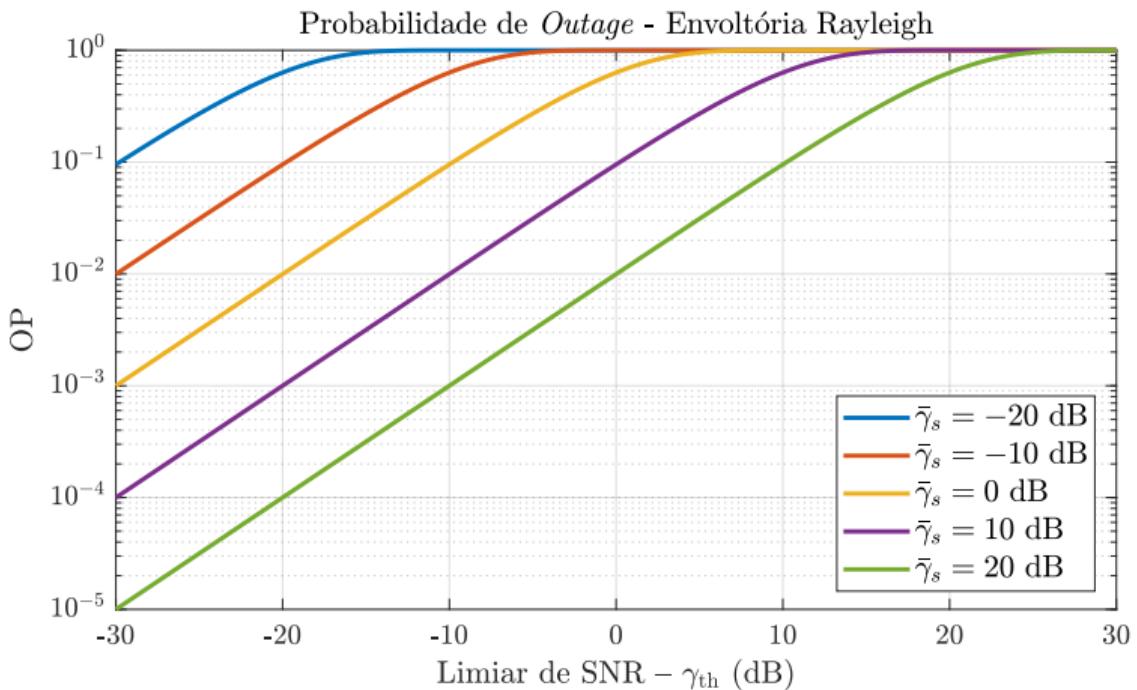


Figura 9: Probabilidade de interrupção em função do limiar γ_{th} para diferentes valores de SNR média $\bar{\gamma}_s$, considerando canal com desvanecimento Rayleigh.

Probabilidade de Interrupção

- Para o caso em que a **envoltória do canal é Rice**, com **SNR distribuída como uma variável chi-quadrado não central**, a OP é descrita como:

Probabilidade de *Outage* (Envoltória Rice)

$$P_{\text{out}}(\gamma_{\text{th}}) = F_{\gamma_s}(\gamma_{\text{th}}) = 1 - Q_1 \left(\sqrt{2K_R}, \sqrt{2 \frac{(K_R + 1)}{\bar{\gamma}_s} \gamma_s} \right), \quad (43)$$

em que $Q_1(\cdot, \cdot)$ é a função Marcum Q de ordem 1.

Simulação da Probabilidade de Interrupção

- A OP quantifica a **probabilidade da SNR instantânea ficar abaixo do limiar** γ_{th}
- Matematicamente expressa por $P_{\text{out}}(\gamma_{\text{th}}) = \mathbb{P}(\gamma_s < \gamma_{\text{th}})$
- A **SNR instantânea por símbolo** é dada por $\gamma_s = \bar{\gamma}_s \beta^2$, onde:
 - β : envoltória do canal (potência média normalizada $E[\beta^2] = 1$)
 - $\bar{\gamma}_s$: SNR média do sistema
- O **procedimento de simulação** consiste em:
 - Gerar amostras de β com distribuição Rayleigh/Rice ($E[\beta^2] = 1$)
 - Calcular β^2 para cada amostra
 - Obter $\gamma_s = \bar{\gamma}_s \beta^2$

Simulação da Probabilidade de Interrupção

- Dado um vetor de N_t amostras de SNR instantânea geradas
- Para estimar a **probabilidade** $\mathbb{P}(\gamma_s \leq \gamma_{th})$ via **simulação**:
 - Contar o número de amostras N_s que satisfazem $\gamma_s \leq \gamma_{th}$
 - Calcular a razão N_s/N_t
 - Para N_t suficientemente grande, vale a convergência:

$$\frac{N_s}{N_t} \rightarrow P_{out}(\gamma_{th}) \quad \text{quando} \quad N_t \rightarrow \infty \quad (44)$$

garantindo que a estimativa simulada aproxime o valor analítico da OP

Simulação da Probabilidade de Interrupção

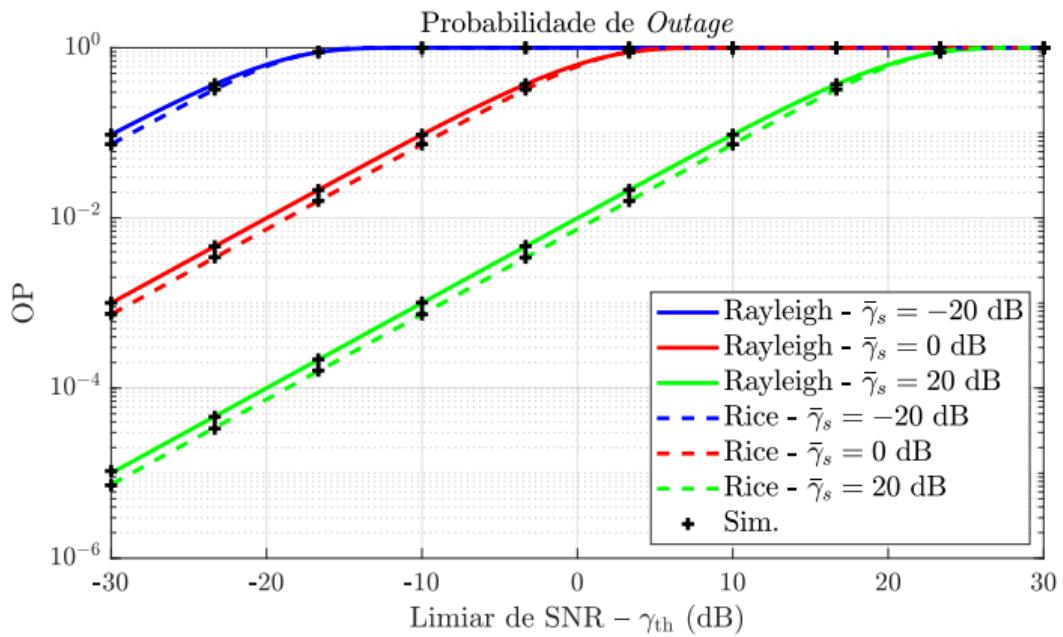


Figura 10: Probabilidade de interrupção em função do limiar γ_{th} para diferentes valores de SNR média $\bar{\gamma}_s$, considerando canal com desvanecimento Rayleigh e Rice ($K_R = 1$).

Simulação da Probabilidade de Interrupção

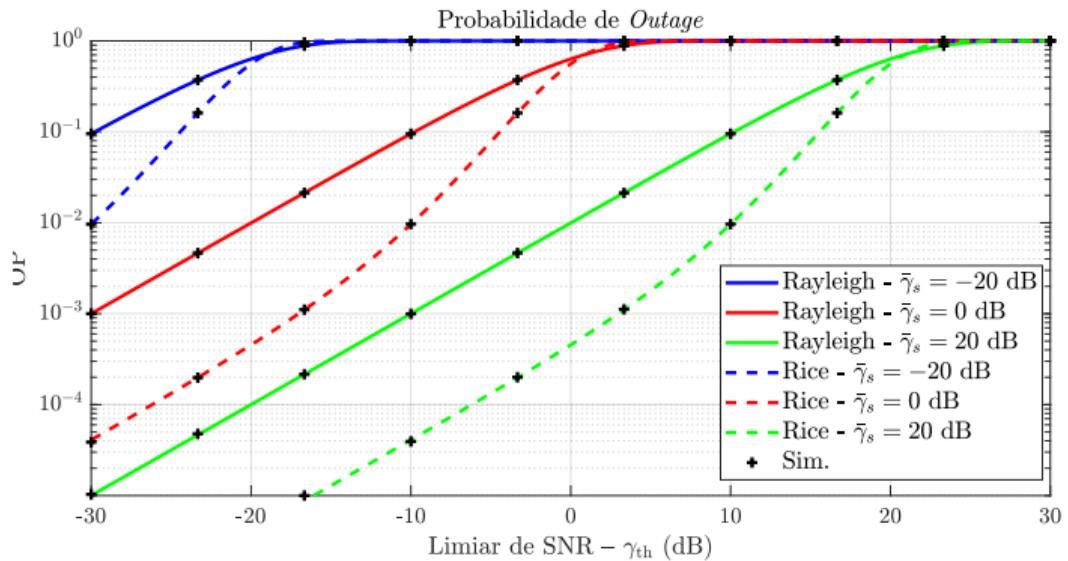


Figura 11: Probabilidade de interrupção em função do limiar γ_{th} para diferentes valores de SNR média $\bar{\gamma}_s$, considerando canal com desvanecimento Rayleigh e Rice ($K_R = 5$).

Probabilidade de Erro de Símbolo

- A análise anterior de probabilidade de erro considerou **apenas o efeito do ruído (canal AWGN)**
- No caso AWGN, a SNR do sistema é uma **grandeza determinística e constante**
- Ao incorporar os efeitos do **canal multipercorso**, a SNR torna-se **aleatória e variante no tempo**
- Considerando **desvanecimento suficientemente lento**, a envoltória do canal permanece **aproximadamente constante durante um intervalo de sinalização**
- Assim, em **cada intervalo de sinalização**, a SNR instantânea pode ser tratada como uma **variável aleatória** ($\gamma_s(t) \approx \gamma_s$)

Probabilidade de Erro de Símbolo

- No regime de desvanecimento lento, define-se a **probabilidade de erro de símbolo média**
- Esta métrica é calculada pela **média da probabilidade de erro AWGN ponderada pela distribuição da SNR aleatória**:

Probabilidade de Erro Média (Canal com Desvanecimento)

$$\bar{P}_e = \mathbf{E}[P_e(\gamma_s)] = \int_0^{\infty} P_e(\gamma_s) p_{\gamma_s}(\gamma_s) d\gamma_s, \quad (45)$$

onde:

- $P_e(\gamma_s)$: Probabilidade de erro para canal AWGN
- $p_{\gamma_s}(\gamma_s)$: FDP da SNR instantânea

Observação: Este resultado decorre diretamente do teorema fundamental do valor esperado.

Probabilidade de Erro de Símbolo

- As probabilidades de erro de símbolo para modulações M -ASK e M -QAM em **canal AWGN** são dadas por:

Probabilidade de Erro - M -ASK (AWGN)

$$P_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}} \gamma_s\right) \quad (46)$$

Probabilidade de Erro - M -QAM (AWGN)

$$P_e \approx 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3}{M-1}} \gamma_s\right) \quad (47)$$

Probabilidade de Erro de Símbolo

- As probabilidades de erro podem ser **expressas genericamente** como:

Probabilidade de Erro de Símbolo (Canal AWGN)

$$P_e = a_M Q\left(\sqrt{b_M \gamma_s}\right), \quad (48)$$

onde a_M e b_M são constantes que dependem da constelação, conforme tabela:

Constelação	a_M	b_M
M -ASK	$\frac{2(M-1)}{M}$	$\frac{6}{M^2-1}$
M -QAM	$4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)$	$\frac{3}{M-1}$

Tabela 1

Probabilidade de Erro de Símbolo

- Para calcular a probabilidade de erro sob desvanecimento para constelações M -ASK e M -QAM, resolvemos:

Probabilidade de Erro Média (Canal Multipercurso)

$$\bar{P}_e = a_M \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{b_M \gamma_s}\right) p_{\gamma_s}(\gamma_s) d\gamma_s, \quad (49)$$

onde:

- $Q(x)$ é a função Q definida por:

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du \quad (50)$$

- Forma alternativa (Craig):

$$Q(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp\left(\frac{-x^2}{2 \sin^2 \theta}\right) d\theta, \quad (51)$$

Probabilidade de Erro de Símbolo

- Assumindo que a **envoltória do canal é Rayleigh**, logo, a distribuição da SNR é exponencial:

Probabilidade de Erro de Símbolo Média (Envoltória Rayleigh)

$$\begin{aligned}\bar{P}_e &= \mathbf{E}[P_e(\gamma_s)] = \int_0^{\infty} P_e(\gamma_s) p_{\gamma_s}(\gamma_s) d\gamma_s \\ &= \frac{a_M}{\bar{\gamma}_s} \int_0^{\infty} Q\left(\sqrt{b_M \gamma_s}\right) e^{-\gamma_s/\bar{\gamma}_s} d\gamma_s \\ &= \frac{a_M}{\bar{\gamma}_s} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi/2} \exp\left[-\frac{b_M \gamma_s}{2 \sin^2(\theta)}\right] e^{-\gamma_s/\bar{\gamma}_s} d\theta d\gamma_s \\ &= \frac{a_M}{2} \left[1 - \sqrt{\frac{b_M \bar{\gamma}_s / 2}{1 + b_M \bar{\gamma}_s / 2}} \right]\end{aligned}\tag{52}$$

Probabilidade de Erro de Símbolo

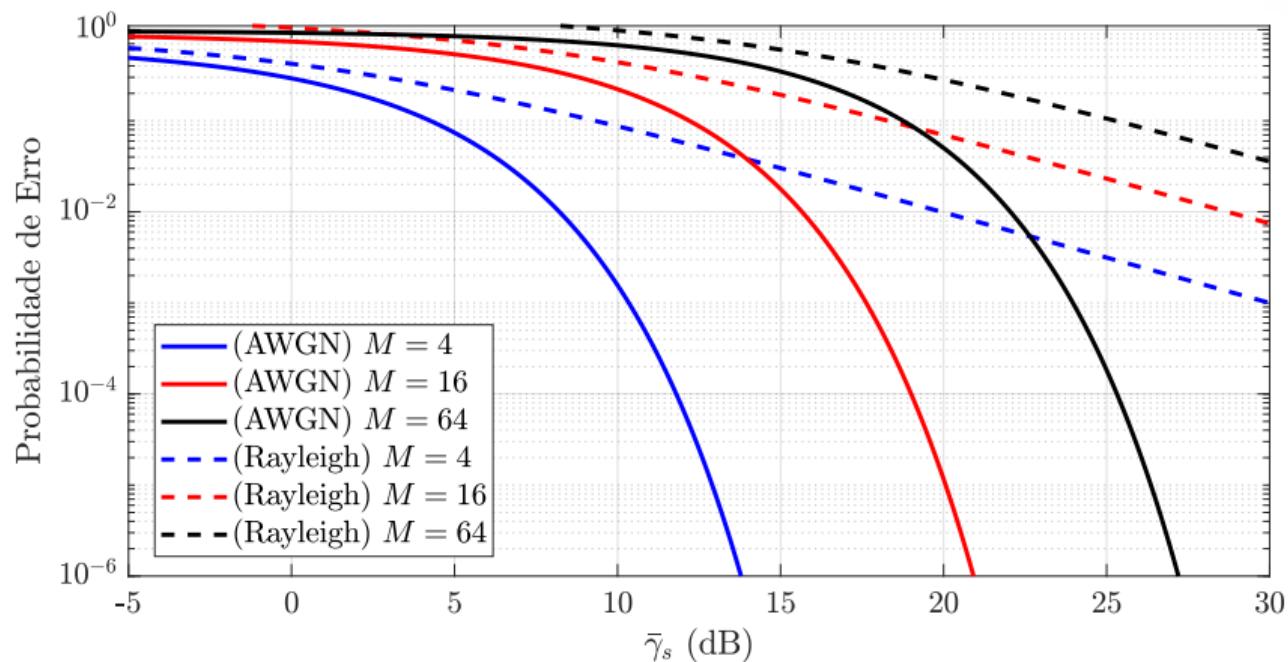


Figura 12: Probabilidade de erro de símbolo em função da SNR média considerando canais AWGN e Rayleigh.

Probabilidade de Erro de Símbolo

- Na derivação da **SEP da constelação QAM sob desvanecimento Rayleigh**, utilizamos a **aproximação** $P_e(\gamma_s) \approx a_M Q(\sqrt{b_M \gamma_s})$ nos cálculos
- Entretanto, essa aproximação **só é válida em regime de alta SNR**
- A **derivação exata** deve considerar o termo $Q^2(\cdot)$ da SEP em AWGN
- Aplicando a **expressão exata da SEP em AWGN da constelação QAM** na Eq. (49), obtém-se a **SEP exata da constelação QAM no caso Rayleigh**:

Probabilidade de Erro de Símbolo Média Exata (Envoltória Rayleigh e QAM)

$$\bar{P}_e = 2 \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right) (1 - C_M(\gamma_s)) - \left(\frac{\sqrt{M} - 1}{\sqrt{M}} \right)^2 \left[1 - \frac{4}{\pi} C_M(\gamma_s) \arctan \left(\frac{1}{C_M(\gamma_s)} \right) \right] \quad (53)$$

em que $C_M(\gamma_s) = \sqrt{\frac{1.5\bar{\gamma}_s}{M-1+1.5\bar{\gamma}_s}}$.

Simulações das Probabilidades de Erro

- O objetivo é simular a **taxa de erro de símbolo** em função da SNR média por símbolo $\bar{\gamma}$
- A simulação da **SER com desvanecimento** é muito semelhante ao caso AWGN, entretanto, devemos considerar **alguns pontos**
- Para simplificar, vamos **desconsiderar os efeitos de larga escala**
- Neste caso, o **vetor de símbolo recebido em cada intervalo de sinalização** é expresso por (**Demodulação Coerente**):

$$\mathbf{r} = \beta \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (54)$$

em que β é o termo de **envoltória do canal**

Simulações das Probabilidades de Erro

- Em uma recepção sob efeito do canal multipercuso, o receptor deve possuir algum **nível de informação sobre o coeficiente do canal** $h = \beta e^{j\varphi}$
- Esta informação é conhecida como **informação do estado do canal** (*Channel State Information – CSI*)
- A CSI é usada no **processo de demodulação e decodificação** e é uma medida do conhecimento que o receptor possui sobre o canal

Simulações das Probabilidades de Erro

- Existem diferentes tipos e níveis de CSI:
 - **CSI Perfeita**: caso hipotético que o receptor conhece perfeitamente o coeficiente do canal
 - **CSI Imperfeita**: caso em que o receptor tem uma estimativa do coeficiente do canal ou conhece sua distribuição
 -
- Na prática, o nível da CSI depende de uma **fase de estimativa de canal**
- Aqui, vamos assumir o caso mais simples, a **CSI perfeita**
- Neste caso, o receptor hipoteticamente conhece o **coeficiente de canal** e o aplica na **demodulação e decodificação**

Simulações das Probabilidades de Erro

- Baseado na CSI perfeita, o decodificador aplica o critério de decisão por mínima distância considerando o coeficiente de canal conhecido (Equalização):

Símbolo recebido

Em cada intervalo de sinalização, o símbolo estimado é determinado por

$$\hat{s} = \operatorname{argmin}_{s_i} \|r - \beta s_i\|^2, \quad (55)$$

ou seja, seleciona-se o símbolo da constelação de referência mais próximo ao símbolo recebido. Perceba que no caso de decodificação com desvanecimento, deve-se equalizar a constelação de referência na etapa de decodificação

Simulações das Probabilidades de Erro

- Em resumo, as **simulações de SER considerando desvanecimento** diferem do caso AWGN em dois pontos:
 - Deve-se multiplicar a envoltória do canal no símbolo recebido
 - Deve-se equalizar a constelação de referência considerando a envoltória do canal

Probabilidade de Erro de Símbolo

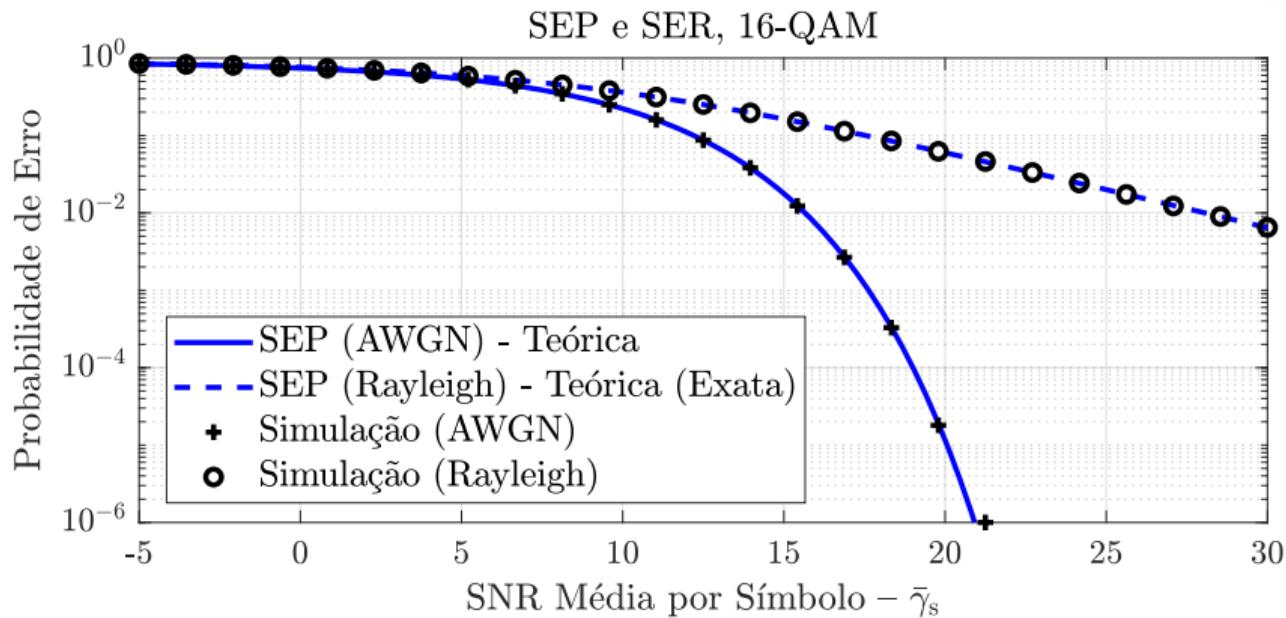


Figura 13: Probabilidade de erro de símbolo em função da SNR média considerando canais AWGN e Rayleigh.

Comunicações Móveis

Desempenho dos Sistemas de Comunicações Sem Fio

Prof: Higo Thaian Pereira da Silva¹
higo.silva@unb.br

¹Universidade de Brasília
UnB

20 de outubro de 2025



Universidade de Brasília