

# **Comunicações Móveis**

**Introdução aos Sistemas de Comunicações Sem Fio**

**Prof: Higo Thaian Pereira da Silva<sup>1</sup>**  
**[higo.silva@unb.br](mailto:higo.silva@unb.br)**

<sup>1</sup>Universidade de Brasília  
UnB

**Outubro/2025**



Universidade de Brasília

# Sumário

## 1. Introdução aos Sistemas de Comunicações Sem Fio

- Modelo de Sinal Recebido (Desvanecimento)
- Ruído
- Modelo de Sinal Recebido (Desvanecimento + Ruído)
- Modelo de Sinal Recebido (Desvanecimento + Ruído + Perdas de Percurso)

## 2. Sinal Transmitido

- Representação Vetorial de Sinais
- Constelação de Sinais
  - Constelação *Amplitude Shift Keying* (ASK)
  - Constelação *Quadrature Amplitude Modulation* (QAM)

## 3. Receptores para Canais AWGN

- Demodulador e Decodificador



# Introdução aos Sistemas de Comunicações Sem Fio

# Sinal Recebido (Desvanecimento Plano)

- Como apresentado nas aulas anteriores, o canal pode ser modelado como um **sistema linear variante no tempo**
- Logo, o sinal recebido pode ser determinado pela operação da **convolução** entre o **sinal transmitido** e a **resposta ao impulso do sistema**
- Considerando que o sinal modulado  $s(t)$  tem representação em **banda básica (envoltória complexa)** denotada por  $\tilde{s}(t)$ , o **sinal recebido em banda básica**, sob efeito de um canal não seletivo em frequência, é expresso por

## Sinal Recebido sob um Canal Não Seletivo em Frequência

$$\tilde{r}(t) = \tilde{s}(t) \star h(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - \tau) h(t) \delta(\tau - \bar{\tau}) d\tau = h(t) \tilde{s}(t - \bar{\tau}) \quad (1)$$

# Sinal Recebido (Desvanecimento Plano)

- De acordo com (1), o sinal recebido é uma **cópia atrasada do sinal transmitido** ( $\tilde{s}(t - \bar{\tau})$ ) multiplicada pelo **coeficiente do canal** ( $h(t)$ )
- A **envoltória do desvanecimento em pequena escala pode ser estatisticamente caracterizada** (e.g. distribuição Rayleigh, distribuição Rice)
- Dado que  $h(t)$  é um **processo estacionário**, o tempo absoluto não tem importância estatística
- Podemos então **simplificar a notação do sinal recebido** referenciando o tempo no atraso  $\bar{\tau}$

## Sinal Recebido sob um Canal Não Seletivo em Frequência

$$\tilde{r}(t) = h(t)\tilde{s}(t) \tag{2}$$

# Ruído

- Além dos efeitos do desvanecimento promovidos pelo canal multipercurso, um sistema de comunicações sem fio também sofre pelo efeito do **ruído**
- O ruído atua em todo componente eletrônico, como por exemplo, no **receptor de um enlace de comunicações**
- O ruído, em geral, é tratado como um **efeito aditivo**
- Existem diferentes tipos de ruído que podem atuar em um sistema de comunicações:
  - **Ruído branco**
  - **Ruído colorido**
  - **Ruído impulsivo**

# Ruído Térmico

- O ruído térmico é gerado pela agitação térmica de portadores de carga (elétrons) em um condutor elétrico
- Este ruído ocorre mesmo em estado de equilíbrio, ou seja, ele existe mesmo sem uma aplicação de tensão nos terminais do condutor
- O ruído térmico irradia a mesma quantidade de potência (para uma dada largura de banda) em todas as frequências que usualmente se aplica em sistemas de comunicações

## Densidade Espectral de Potência do Ruído Térmico

$$S_n(f) = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}, \quad (3)$$

em que  $h = 6,63 \times 10^{-34}$  J/Hz é a constante de Planck,  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura em Kelvin (K).

# Ruído Térmico

- Para **baixos valores da razão**  $hf/kT$  ( $f < 10^{12}$  Hz), podemos expressar o termo exponencial como  $e^{\frac{hf}{kT}} \approx 1 + hf/kT$  (Serie de Taylor)
- Com isso, temos que a densidade espectral de potência do ruído térmico para  $f < 10^{12}$  Hz é

**Densidade Espectral de Potência do Ruído Térmico ( $f < 10^{12}$  Hz)**

$$S_n(f) \approx \frac{hf}{1 + hf/kT - 1} = kT \quad (4)$$

- Pode-se perceber que, para ( $f < 10^{12}$  Hz), a densidade espectral de potência do ruído térmico é **aproximadamente constante** em  $S_n(f) = kT$
- Este resultado é **independente da frequência**, mas **proporcional à temperatura**
- **Quanto maior for a temperatura  $T$ , maior será a potência do ruído**

# Ruído Térmico

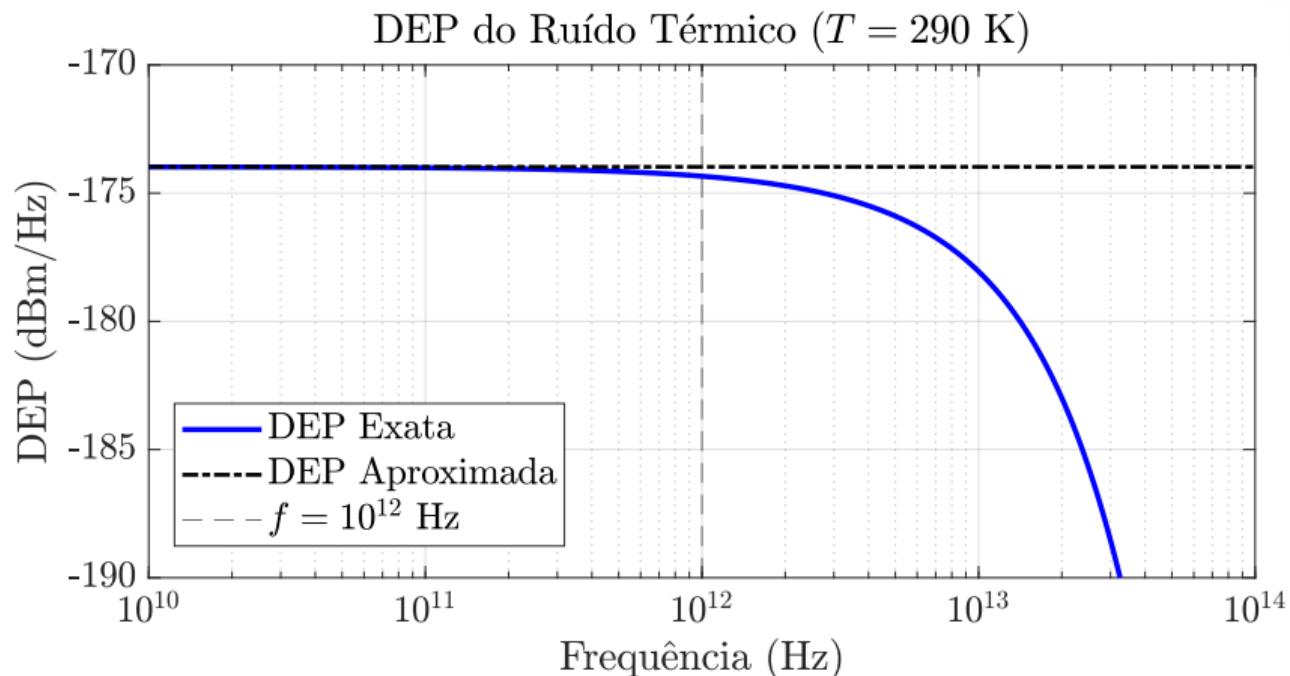


Figura 1: DEP do ruído térmico com temperatura em 290 K.

# Ruído Térmico

- A densidade espectral de potência representa a **distribuição da potência no domínio de frequência**
- Assumindo que o **sinal em banda básica**  $\tilde{s}(t)$  tem largura de banda  $B_w$  e o **sinal transmitido passa-faixa** tem banda  $2B_w$  com **frequência da portadora**  $f_c < 10^{12}$  Hz

## Potência do Ruído Térmico em uma Banda $B_w$

$$P_n = 2 \int_{f_c - B_w}^{f_c + B_w} S_n(f) df = 2 \int_{f_c - B_w}^{f_c + B_w} kT df = 2B_w kT \quad (5)$$

- A potência do ruído é proporcional à **largura de banda do sistema** e a **temperatura**

# Ruído Branco

- Motivado pelas propriedades do ruído térmico, se define o **ruído branco**
- Um ruído branco é um **processo estocástico** que possui densidade **espectral de potência constante em todo domínio espectral**
- O termo “branco” é uma analogia à **cor branca**, que ocupa toda a faixa do espectro visível

## Densidade Espectral de Potência do Ruído Branco

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad (6)$$

## Potência do Ruído Branco na Largura de Banda $B_w$

$$P_n = N_0 B_w \quad (7)$$

# Ruído Gaussiano

- Motivado pelo **teorema central do limite** e pelo ruído térmico, modela-se o ruído como um **processo estocástico Gaussiano**
- Em geral, é válido assumir que o ruído tem **média nula**
- Define-se, então, um modelo simples para caracterizar estatisticamente o ruído que atua em um sistema de comunicações sem fio, o **ruído aditivo Gaussiano branco** (*Additive White Gaussian Noise – AWGN*)
- Propriedades do ruído AWGN:
  - **Branco**: ocupa todas as faixas espectrais de forma constante e com densidade espectral  $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$
  - **Aditivo**: atua no sistema de comunicações de forma aditiva
  - **Gaussiano**: tem distribuição Gaussiana de média nula e potência  $\sigma_n^2 = N_0 B_w$

# Modelo de Sinal Recebido (Desvanecimento + Ruído)

- Considerando **desvanecimento e ruído**, podemos caracterizar o **sinal recebido** como

## Modelo de Sinal Recebido

$$r(t) = h(t)s(t) + n(t), \quad (8)$$

em que  $h(t)$  representa o desvanecimento,  $n(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$  representa o ruído AWGN e  $s(t)$  é o sinal transmitido

# Modelo de Sinal Recebido (Desvanecimento + Ruído + Perdas de Percurso)

- Considerando (**desvanecimento, ruído e perdas de percurso**), podemos caracterizar o **sinal recebido** como

## Modelo de Sinal Recebido

$$r(t) = \sqrt{\Omega_c} h(t) s(t) + n(t), \quad (9)$$

em que  $\Omega_c$  caracteriza os efeitos de perdas de percurso e sombreamento,  $h(t)$  representa o desvanecimento normalizado (potência unitária),  $n(t) \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2)$  representa o ruído AWGN e  $s(t)$  é o sinal transmitido

# Sinal Transmitido

- Até este ponto da disciplina, já compreendemos os efeitos dos seguintes **fenômenos**:
  - Desvanecimento em larga escala (perdas de percurso + sombreamento)
  - Desvanecimento em pequena escala
  - Ruído AWGN
- Para completar nossa compreensão de um **sistema de comunicações**, devemos agora estudar o **sinal transmitido**
- Em um sistema de **comunicações digitais**, uma **sequência binária** é mapeada em um **conjunto de sinais analógicos transmitidos**

# Sinal Transmitido

- Em um **sistema de comunicação digital**, a cada  $T$  segundos são transmitidos  $k$  bits de dados, **conformando uma taxa de transmissão de dados** expressa por:

## Taxa de Transmissão de Dados

$$R = \frac{k}{T}, \quad (10)$$

em que  $k$  é o número de bits por mensagem binária e  $T$  é o tempo de sinalização

- É possível definir um total de  $M = 2^k$  sequências distintas de  $k$  bits, compondo um conjunto de **mensagens binárias**  $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_M\}$
- Estas mensagens binárias são denominadas como **símbolos**

# Sinal Transmitido

- Em um dado **intervalo de sinalização**  $T$ , uma mensagem binária  $m_i$  é mapeada em um sinal analógico  $s_i(t) \in \mathcal{S} = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$  que é transmitida por um **canal**

## Produto Interno entre Sinais

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^T x(t)y(t)dt, \quad (11)$$

em que  $x(t)$  e  $y(t)$  são sinais limitados ao intervalo  $[0, T]$ .

## Energia do Sinal $x(t)$

$$\langle x(t), x(t) \rangle = \int_0^T x^2(t)dt, \quad (12)$$

em que  $x(t)$  é um sinal limitado ao intervalo  $[0, T]$ .

# Representação Vetorial de Sinais

- Os  $M$  elementos do conjunto de sequências binárias  $\mathcal{M} = \{m_1, \dots, m_M\}$  são **mapeados de forma biunívoca em sinais analógicos** do conjunto  $\mathcal{S} = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$
- Um conjunto de  $M$  sinais reais  $\mathcal{S}$ , definido em um intervalo limitado  $[0, T]$ , pode ser representado como uma combinação linear de  $N \leq M$  **funções de base**,  $\mathcal{B} = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$
- As funções de base devem compor uma **base ortonormal** no espaço de sinais no intervalo  $[0, T]$ :

## Condição de Ortonormalidade

$$\int_0^T \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases} \quad (13)$$

# Representação Vetorial de Sinais

- Cada sinal  $s_i(t) \in \mathcal{S}$  pode ser representado por meio de uma **combinação linear das funções de base**:

## Representação por Funções Base

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{ij} \varphi_j(t), \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

em que,  $s_{ij}$  é a **projeção** do sinal  $s_i(t)$  na função base  $\varphi_j(t)$

- A projeção  $s_{ij}$  é calculada a partir do **produto interno** entre o sinal  $s_i(t)$  e a função base  $\varphi_j(t)$ :

## Projeção de $s_i(t)$ em $\varphi_j(t)$

$$s_{ij} \triangleq \langle s_i(t), \varphi_j(t) \rangle \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt. \quad (15)$$

# Representação Vetorial de Sinais

- Especificando as  $N$  funções de base  $\varphi_i(t) \in \mathcal{B}$ , um sinal  $s_i(t)$  pode ser completamente determinado no intervalo  $[0, T]$  por um **vetor coluna de  $N$  elementos**:

## Representação Vetorial de Sinais

$$\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \\ \vdots \\ s_{iN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^T s_i(t)\varphi_1(t)dt \\ \int_0^T s_i(t)\varphi_2(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^T s_i(t)\varphi_N(t)dt \end{bmatrix}, \quad (16)$$

- Portanto, um sinal  $s_i(t)$  no intervalo  $[0, T]$  corresponde a um vetor  $\mathbf{s}_i$  em um **espaço vetorial de dimensão  $N$**
- O conjunto de sinais  $\mathcal{S}$  pode ser visualizado em um **espaço Euclidiano de dimensão  $N$**  gerado pelos vetores base (funções base)

# Operações no Espaço de Sinais

- Para um conjunto de funções de base fixo, é valido afirmar que o **produto interno entre dois sinais reais**  $s_i(t)$  e  $s_j(t)$  é igual ao **produto interno vetorial** entre os vetores  $\mathbf{s}_i$  e  $\mathbf{s}_j$ :

## Produto Interno entre Sinais Reais

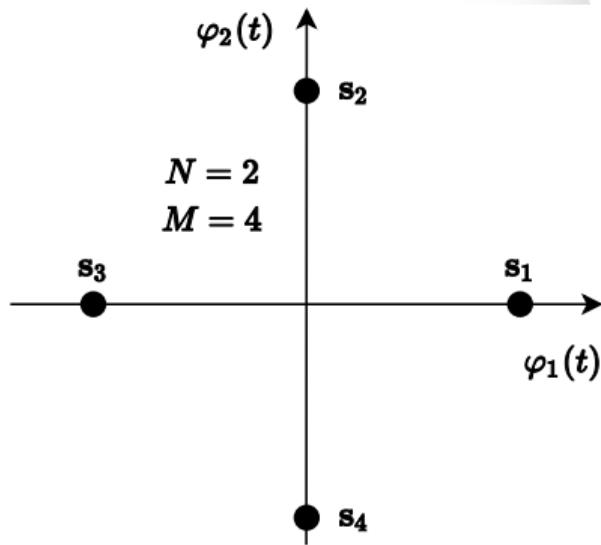
$$\langle s_i(t), s_j(t) \rangle = \int_0^T s_i(t)s_j(t)dt = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j \rangle = \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j = \sum_{m=1}^N s_{im}s_{jm}; \quad (17)$$

## Energia de um Sinal Real

$$E_{s_i} = \int_0^T s_i^2(t)dt = \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i \rangle = \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i = \sum_{m=1}^N s_{im}^2 \triangleq \|\mathbf{s}_i\|^2. \quad (18)$$

# Constelação de Sinais

- Uma **constelação de sinais** pode ser definida como o conjunto de  $M$  vetores  $\mathbf{s}_i = [s_{i1}, \dots, s_{iN}]^T \in \mathbb{R}^N$ , derivados do conjunto de  $M$  sinais  $\mathcal{S} = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$ ;
- Para um dado conjunto de funções base  $\mathcal{B} = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$ , a representação vetorial é única, i.e., existe uma correspondência biunívoca entre um vetor  $\mathbf{s}_i$  e um sinal  $s_i(t)$ .



# Constelação de Sinais

- Para **esquemas lineares de modulação passa-faixa**, as funções de base que compõem o espaço de  $N = 2$  dimensões são:

## Funções Base (Modulações Lineares Passa-faixa)

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t), \quad (19a)$$

$$\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t), \quad (19b)$$

em que  $g(t)$  é o pulso de formatação em banda base com energia  $E_g$

## Condição de Ortogonalidade das Funções Base

$$G(f) \star G(f)|_{f=\pm 2f_c} = 0, \quad (20)$$

em que  $G(f)$  é a transformada de Fourier do pulso  $g(t)$ .

# Constelação Amplitude Shift Keying (ASK)

- Na modulação  $M$ -ASK, a **informação é codificada na amplitude do sinal**;
- O sinal  $M$ -ASK transmitido em um tempo de sinalização é dado por:

## Sinal $M$ -ASK

$$s_i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{A_i \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)}_{\text{Equivalente banda base}} e^{j2\pi f_c t} \right\} = \underbrace{A_i \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{Sinal passa-faixa}}, \quad t \in [0, T], \quad (21)$$

- **Amplitude do Sinal Modulado:**  $A_i = (2i - 1 - M)d$ ;
- **Dimensão do Espaço de Sinais:**  $N = 1$ ;
- **Função Base:**  $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_a}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$ .

# Constelação Amplitude Shift Keying (ASK)

## Energia do Sinal $M$ -ASK

$$\begin{aligned}
 E_{s_i} &= \int_0^T A_i^2 \frac{2}{E_g} g(t)^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \\
 &= A_i^2 \frac{1}{E_g} \int_0^T g(t)^2 dt \dots \\
 &\quad + A_i^2 \frac{1}{E_g} \underbrace{\int_0^T g(t)^2 \cos(4\pi f_c t) dt}_{\approx 0 \text{ (Condição de Ortogonalidade)}} \\
 &= A_i^2;
 \end{aligned} \tag{22}$$

## Energia Média dos Símbolos $M$ -ASK (Símbolos Equiprováveis)

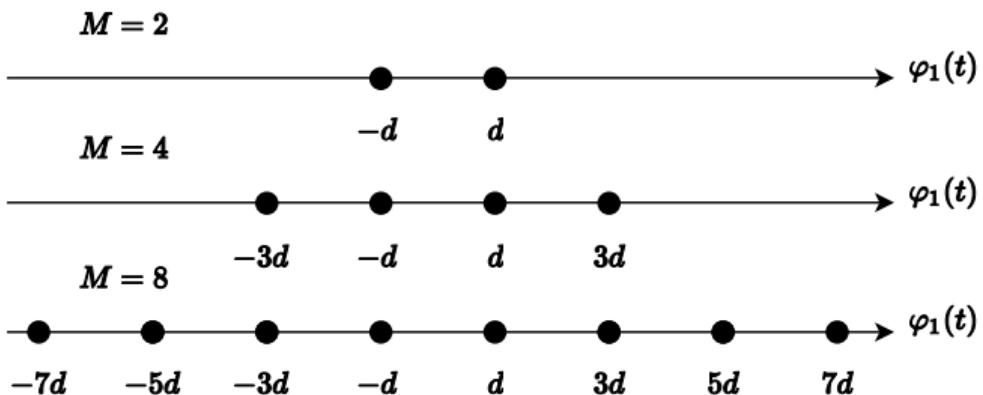
$$\bar{E}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_{s_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M A_i^2 = \frac{M^2 - 1}{3} d^2. \tag{23}$$

# Constelação Amplitude Shift Keying (ASK)

- Sabendo que para uma constelação  $M$ -ária, cada símbolo representa uma sequência de  $k = \log_2(M)$  bits, a **energia média necessária para transmitir um símbolo binário** é:

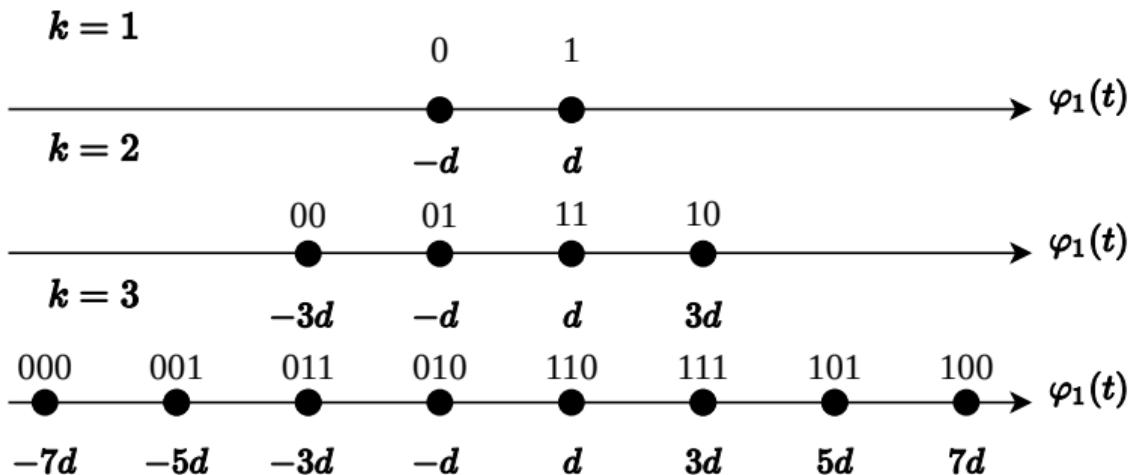
## Energia Média por Bit ( $M$ -ASK)

$$\bar{E}_b = \frac{\bar{E}_s}{\log_2(M)} = \frac{M^2 - 1}{3 \log_2(M)} d^2. \quad (24)$$

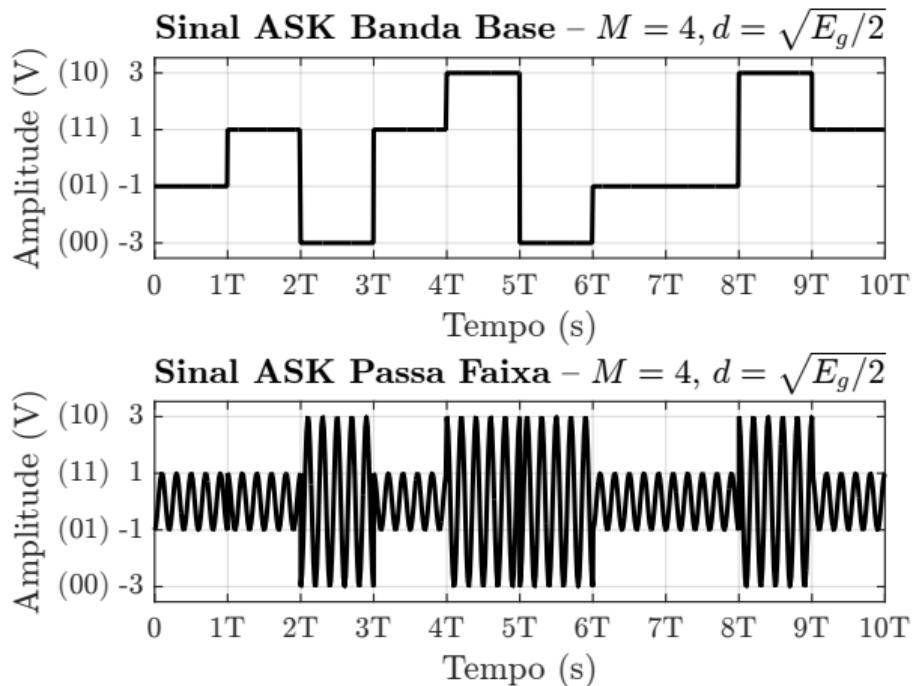


# Constelação Amplitude Shift Keying (ASK)

- O mapeamento da constelação de símbolos em sequências binárias é geralmente feito por meio da **codificação Gray**, em que **sequências binárias associadas à símbolos adjacentes diferem em apenas um bit**.



# Constelação Amplitude Shift Keying (ASK)



**Figura 2:** Sinais ASK.

# Constelação QAM

- Na modulação  $M$ -QAM, os **bits de informação são codificados na amplitude e na fase** do sinal transmitido (dois graus de liberdade);

## Sinal M-QAM

$$s_i(t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{(A_i + jB_i) \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)}_{\text{Equivalente banda base}} e^{j2\pi f_c t} \right\} \quad (25)$$

$$= A_i \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) - B_i \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t), \quad t \in [0, T],$$

- Amplitude do Sinal Modulado:**  $A_i, B_i \in \{(2i - 1 - \sqrt{M})d\}_{i=1}^{\sqrt{M}}$ ;
- Dimensão do Espaço de Sinais:**  $N = 2$ ;
- Função Base:**  $\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_a}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$ ,  $\varphi_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{E_a}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$ .

# Constelação QAM

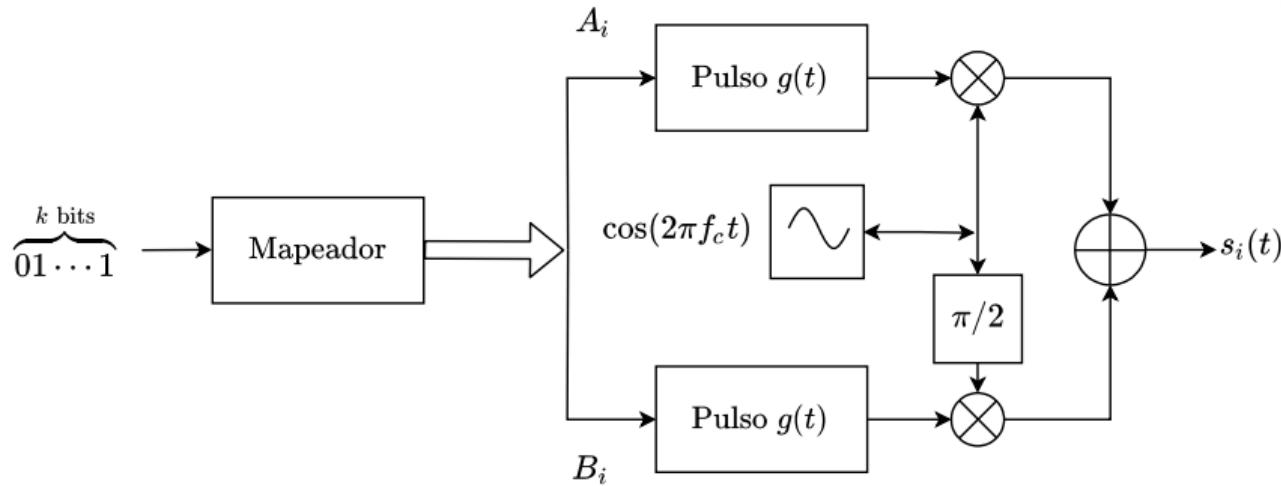
- Alternativamente, os sinais M-QAM podem ser escritos na seguinte forma:

## Sinal M-QAM

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{(V_i e^{j\phi_i}) \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t)}_{\text{Equivalente banda base}} e^{j2\pi f_c t} \right\} \\ &= V_i \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t + \phi_i), t \in [0, T], \end{aligned} \tag{26}$$

- Amplitude do Sinal Modulado:  $V_i = \sqrt{(A_i^2 + B_i^2)}$ ;
- Fase do Sinal Modulado:  $\phi_i = \tan^{-1}(B_i/A_i)$ .

# Constelação QAM



**Figura 3:** Diagrama de blocos da modulação QAM.

# Constelação QAM

## Energia do Sinal $M$ -QAM

$$E_{s_i} = \int_0^T s_i(t)^2 dt = \|\mathbf{s}_i\|^2 = A_i^2 + B_i^2 = V_i^2 \quad (27)$$

## Energia Média dos Símbolos $M$ -QAM (Símbolos Equiprováveis)

$$\bar{E}_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_{s_i} = \frac{4}{M} \sum_{n=1}^{\sqrt{M}/2} \sum_{m=1}^{\sqrt{M}/2} (2n-1)^2 d^2 + (2j-1)^2 d^2 = \frac{2}{3}(M-1)d^2 \quad (28)$$

## Energia Média por Bit ( $M$ -QAM)

$$\bar{E}_b = \frac{2(M-1)d^2}{3 \log_2(M)} \quad (29)$$

# Constelação QAM

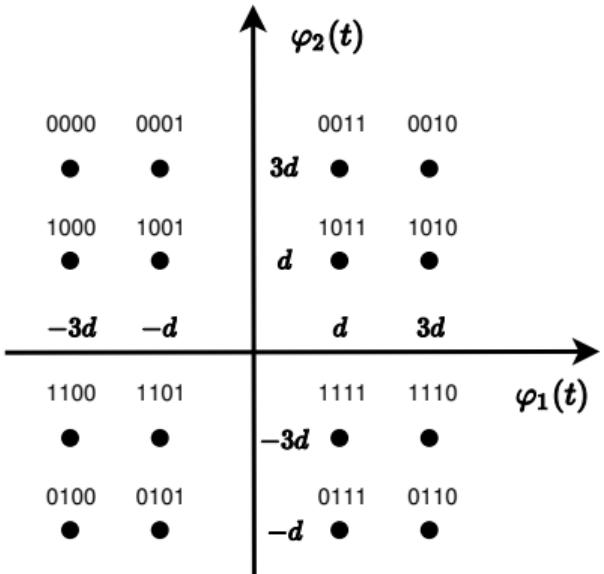
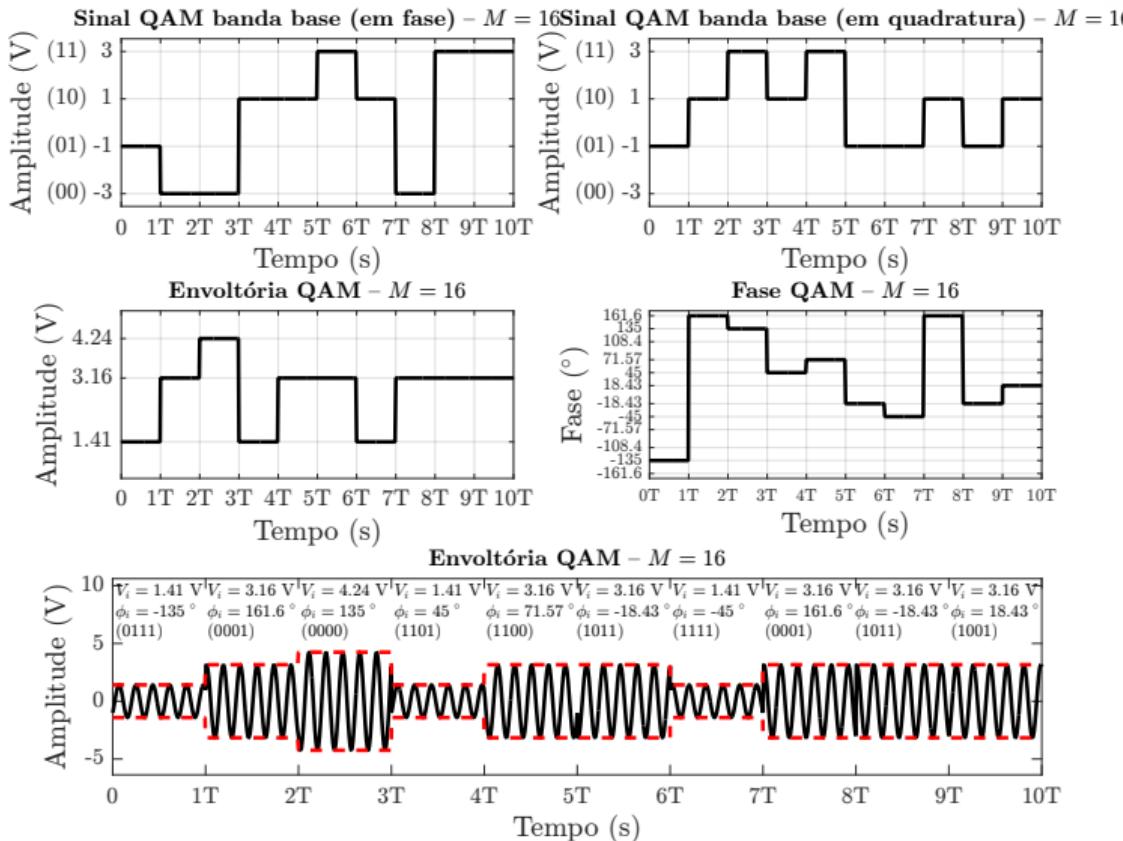


Figura 4: Constelação 16-QAM.



**Figura 5:** Exemplo de Sinais QAM.



# Receptores para Canais AWGN

- Considere que o **modulador transmite informação digital** através de uma forma de onda escolhida de um conjunto com  $M$  sinais em cada intervalo de sinalização com duração de  $T$  segundos
- O **número de dígitos binários** que podem ser transmitidos em cada período de sinalização é  $k = \log_2(M)$
- Em **cada intervalo de sinalização**, o modulador realiza um **mapeamento de uma sequência binária**  $m_i$  em uma **forma de onda analógica**  $s_i(t)$  que é transmitida pelo canal
- Existe uma **correspondência biunívoca** entre as sequências binárias  $\{m_i\}$  e os sinais analógicos  $\{s_i(t)\}$ , com  $i \in \{1, \dots, M\}$

# Receptores para Canais AWGN

- Para simplificar a análise, vamos assumir inicialmente **somente o efeito do ruído AWGN no sinal recebido**
- Logo, o **sinal recebido** pode ser expresso na forma:

## Sinal na Entrada do Receptor (Canal AWGN)

$$r(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad i \in \{1, \dots, M\} \quad (30)$$

- O projeto do **receptor para canais AWGN** será composto por duas componentes: um **demodulador** e um **decodificador**, como ilustrado na Fig. 6



Figura 6: Esquema do receptor para canais AWGN.

# Demodulador

- Considere a **base ortonormal de funções**  $\mathcal{B} = \{\varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)\}$  que gera o **espaço vetorial de sinais transmitidos**  $\mathcal{S} = \{s_1(t), \dots, s_M(t)\}$
- As **projeções do sinal**  $r(t)$  nas  $N$  funções de base determinam as componentes do vetor  $\mathbf{r} = [r_1, \dots, r_N]^T$ , em que

**Projeção de  $r(t)$  em  $\varphi_j(t)$**

$$\begin{aligned} r_j &= \langle r(t), \varphi_j(t) \rangle = \int_0^T [(s_i(t) + n(t))] \varphi_j(t) dt \\ &= \int_0^T s_i(t) \varphi_j(t) dt + \int_0^T n(t) \varphi_j(t) dt \\ &= s_{ij} + n_j, \end{aligned} \tag{31}$$

para  $j \in \{1, \dots, N\}$

- Cada componente  $r_j$  é a soma da **projeção do sinal** ( $s_{ij}$ ) com um **termo de ruído**  $n_j$

# Demodulador

- Perceba que podemos expressar o **sinal demodulado na forma vetorial** por:

## Sinal Demodulado (Forma Vetorial)

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{i1} + n_1 \\ s_{i2} + n_2 \\ \vdots \\ s_{iN} + n_N \end{bmatrix} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}, \quad (32)$$

em que  $\mathbf{s}_i$  é o vetor do símbolo transmitido e  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$  é o vetor de ruído

- Esta operação **converte um sinal contínuo**  $r(t) = s_i(t) + n(t)$  em um modelo de **sinal discreto**  $\mathbf{r} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}$

# Demodulador

- Para compreender as propriedades do sistema, devemos **caracterizar o termo**  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$
- O ruído branco  $n(t)$  é um **processo estocástico Gaussiano**
- Um **processo estocástico Gaussiano ao passar por uma transformação linear se mantém Gaussiano**
- Logo, os termos  $n_j = \langle n(t), \varphi_j(t) \rangle$  são **variáveis aleatórias Gaussianas**

# Demodulador

- Assumindo que o ruído AWGN  $n(t)$  tem média nula e Densidade Espectral de Potência constante igual a  $N_0$ , pode-se demonstrar que

**Média da componente  $n_j$**

$$\mathbf{E}[n_j] = 0 \quad (33)$$

**Variância de  $n_j$**

$$\text{Var}[n_j] = \mathbf{E}[n_j^2] - (\mathbf{E}[n_j])^2 = \frac{N_0}{2} \quad (34)$$

- Logo,  $n_j, \forall j \in \{1, \dots, N\}$  têm distribuição  $n_j \sim \mathcal{N}(0, N_0/2)$
- Além disso, também pode-se demonstrar que as componentes  $n_j$  e  $n_{j'}$  são **descorrelacionadas** para todo  $j \neq j'$ , isto é,  $\mathbf{E}[n_j n_{j'}'] = 0, j \neq j'$

# Demodulador

- Em um tempo de sinalização, o vetor demodulado  $r$  é igual ao **símbolo transmitido**  $s_i$  somado a um **vetor de ruído**  $n$
- Logo, a **constelação de símbolos demodulada** é igual a **constelação transmitida + termo de ruído**
- O **aumento na potência do ruído** ou a **diminuição da energia da constelação** provoca uma maior probabilidade de que o **símbolo recebido esteja muito distante do símbolo transmitido**

# Demodulador

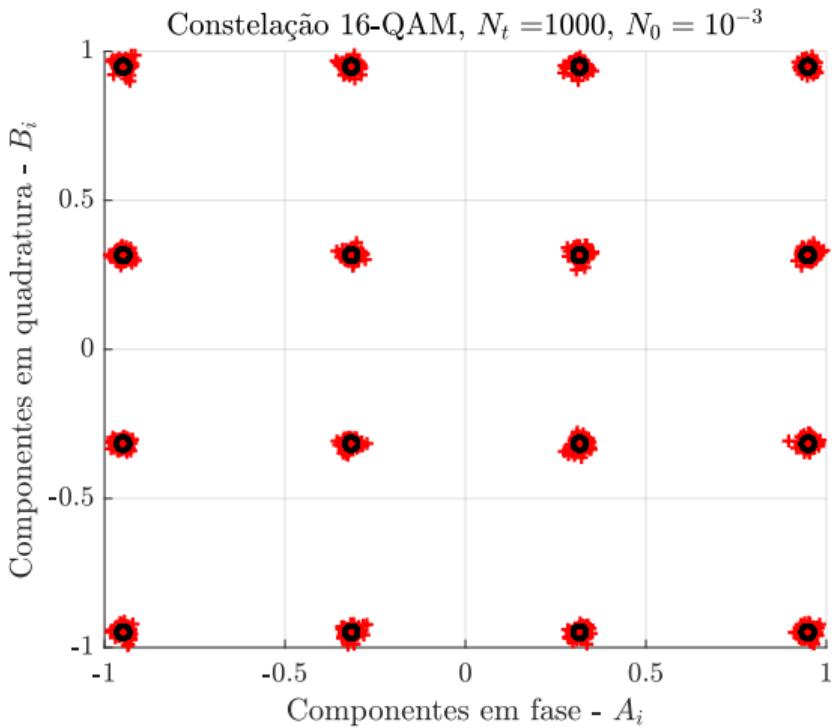


Figura 7: Símbolos 16-QAM demodulados sob efeito do ruído, com  $N_0 = 10^{-3}$ .

# Demodulador

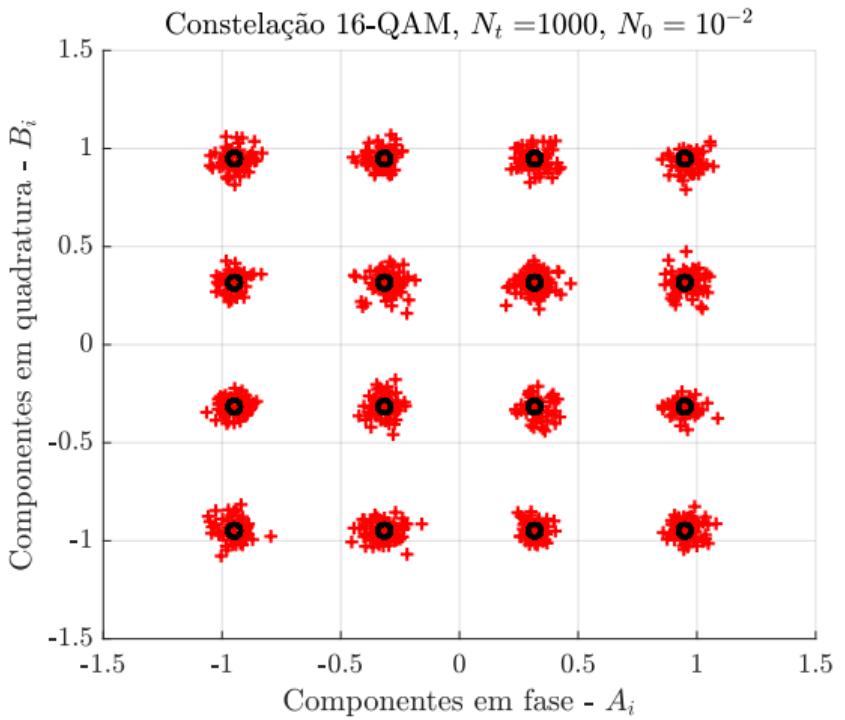


Figura 8: Símbolos 16-QAM demodulados sob efeito do ruído, com  $N_0 = 10^{-2}$ .

# Demodulador

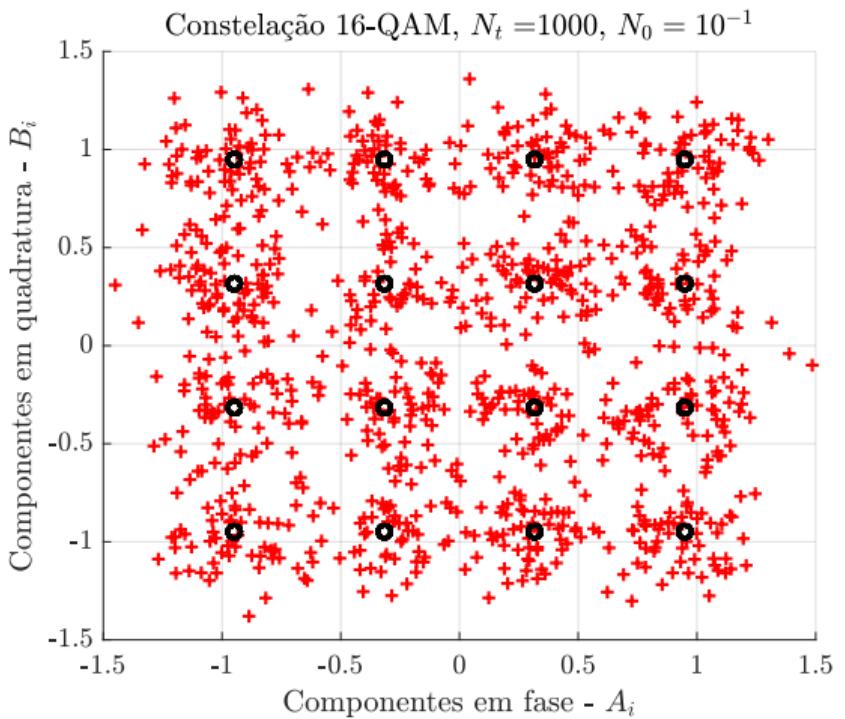


Figura 9: Símbolos 16-QAM demodulados sob efeito do ruído, com  $N_0 = 10^{-1}$ .

# Decodificador

- A cada intervalo de sinalização, o **decodificador determina qual símbolo da constelação**  $s_i$  foi recebido, dado o **vetor observado**  $r$
- De forma equivalente, o **decodificador determina a sequência binária**  $m_i$  com base no símbolo recebido  $r$

## Regra da Máxima Probabilidade a Posteriori (MAP)

A regra da Máxima Probabilidade a Posteriori (MAP) para o receptor é: dado um vetor recebido  $r$ , o decodificador baseado na regra MAP escolhe o símbolo  $s_i$  que maximiza a função densidade de probabilidade condicional  $p_{r|s_i}(r)$ .

- O vetor  $r$  contém **informação suficiente para a estimação do símbolo?**

# Decodificador

- O vetor  $r$  **não é uma representação completa do sinal  $r(t)$ :**

## Relação entre $r(t)$ e $r$

$$r(t) \neq \sum_{j=1}^N r_j \varphi_j(t), \quad (35)$$

pois o processo estocástico do ruído branco  $n(t)$  não pode ser completamente reconstruído em termos das funções de base, isto é,

$$n(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^N n_j \varphi_j(t)}_{\text{Projeções na base}} + \underbrace{n_r(t)}_{\text{Parcela ortogonal à base}}, \quad (36)$$

em que  $n_r(t)$  é a parcela do ruído ortogonal à base de sinais. De fato, a representação exata do ruído  $n(t)$  requer infinitas funções de base (expansão de Karhunen–Loève)

# Decodificador

- Pode-se demonstrar que a **decisão sobre o símbolo recebido** pode ser feita **completamente com base no vetor  $r$**
- Em outras palavras, o vetor  $r$  é uma **estatística suficiente** para a estimação do símbolo recebido
- Uma **estatística suficiente contém toda a informação relevante** fornecida por um vetor de observação para um sistema decisório
- Neste caso, **nenhuma informação relevante para o sistema decisório** pode ser extraída do conhecimento de  $n_r(t)$
- Ou seja,  $n_r(t)$  é **estatisticamente irrelevante** para o decodificador

# Decodificador

- Pode-se demonstrar que, se os **símbolos transmitidos forem equiprováveis**, a regra MAP implementada pelo decodificador pode ser reduzida ao decodificador de distância mínima:

## Decodificador de distância mínima

Dado o vetor recebido  $r$ , o decodificador escolhe o símbolo  $s_i$  que minimiza a distância euclidiana, isto é,

$$\hat{s} = \operatorname{argmin}_{s_i} \|r - s_i\|^2, \quad (37)$$

em que  $\hat{s}$  é o símbolo decodificado.

- Logo, o decodificador de distância mínima decodifica o vetor recebido  $r$  **como o símbolo mais próximo na constelação original**

# Decodificador

- A partir da regra de distância mínima, podemos demarcar as regiões de decisão do decodificador:

## Regiões de decisão

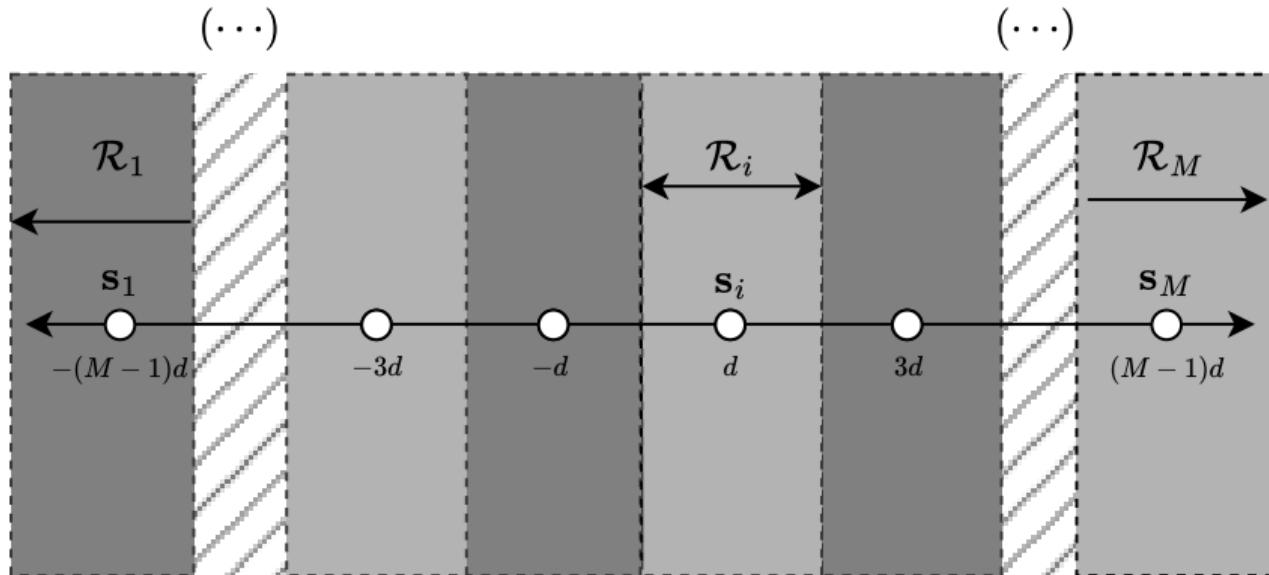
A  $i$ -ésima região de decisão é definida como:

$$\mathcal{R}_i = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N \mid \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 < \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_j\|^2, \forall j \neq i\}. \quad (38)$$

Caso o vetor recebido esteja contido na  $i$ -ésima região de decisão, decide-se pelo símbolo  $\mathbf{s}_i$  como estimativa do símbolo transmitido, isto é:

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_i, \text{ se } \mathbf{r} \in \mathcal{R}_i. \quad (39)$$

# Decodificador



**Figura 10:** Regiões de decisão para a constelação  $M$ -ASK.

# Decodificador

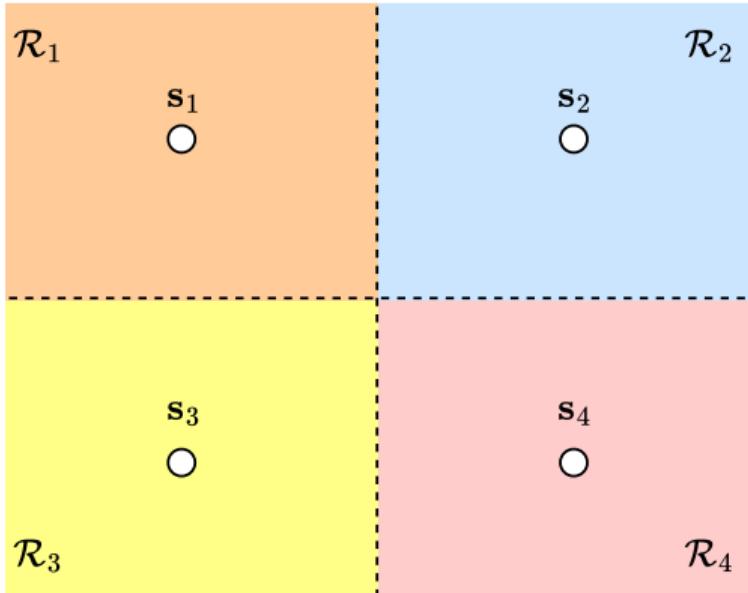


Figura 11: Regiões de decisão para a constelação 4-QAM.

# Comunicações Móveis

Introdução aos Sistemas de Comunicações Sem Fio

Prof: Higo Thaian Pereira da Silva<sup>1</sup>  
[higo.silva@unb.br](mailto:higo.silva@unb.br)

<sup>1</sup>Universidade de Brasília  
UnB

Outubro/2025



Universidade de Brasília