Questionário 2

Princípios de Comunicação

Autoria	**Matrícula**
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

20 de Fevereiro de 2021

Questão 1

Seja o sinal $g(t)$ periódico, definido dentro de um período como $g(t) = t^2$ para $t \in (-\pi; \pi)$. Responda aos seguintes itens, justificando apropriadamente sua resposta em cada um dos casos:

a. Determine a expansão de $g(t)$ em uma série de Fourier por exponenciais complexas;

Resolução:

Para achar a expansão em frações de *g(t)* é necessário fazer:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{j2\pi n f_0 t}$$

Para isso, é necessário calcular os D_n:

$$D_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\frac{t^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-jnt} dt \text{ , por meio de integração por partes:}$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}(t^2\frac{e^{-jnt}}{-jn}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-jnt}}{-jn}2tdt) \text{ , novamente por integração por partes:}$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}(t^2\frac{e^{-jnt}}{-jn}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{jn}(t\frac{e^{-jnt}}{-jn}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{jn}\int_{-\pi} \pi e^{-jnt}dt))$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}(t^2\frac{e^{-jnt}}{-jn} + \frac{2}{n^2}te^{-jnt} + \frac{2}{n^2}\frac{e^{-jnt}}{jn})\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}(\pi^2\frac{e^{-jn\pi}}{-jn} + \frac{2}{n^2}\pi e^{-jn\pi} + \frac{2}{jn^3}e^{-jn\pi} - (-\pi^2\frac{e^{jn\pi}}{jn} - \frac{2}{n^2}\pi e^{jn\pi} + \frac{2}{jn^3}e^{jn\pi}))$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}(\frac{\pi^2}{jn}(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}) + \frac{2\pi}{n^2}(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}) - \frac{2}{jn^3}(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}))$$

$$D_n = \frac{1}{2\pi}((e^{jn\pi} - e^{-jn\pi})(\frac{\pi^2}{jn} - \frac{2}{jn^3}) + \frac{2\pi}{n^2}(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi}))$$

$$D_n = \frac{n^2\pi^2 - 2}{n^3\pi}\frac{(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi})}{2j} + \frac{1}{n^2}(e^{jn\pi} + e^{-jn\pi})$$

$$D_n = \frac{n^2\pi^2 - 2}{n^3\pi}\sin(n\pi) + \frac{2\cos(n\pi)}{n^2}$$

Note que o $sin(n\pi) = 0$ para todo n, logo, podemos tirá-lo de D_n, logo:

$$D_n = \frac{2\cos(n\pi)}{n^2}$$

Assim, a expansão em série de fourier para $g(t)$ é:

$$g(t) = \frac{\pi^3}{3} + \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{2\cos(n\pi)}{n^2} e^{jnt}$$

b. A partir do resultado do item "a", elabore expressões para os espectros de amplitude e de fase de $g(t)$;

Resolução:

Espectro de amplitude:

$$D_n = \frac{2\cos(n\pi)}{n^2}$$
$$|D_n| = |\frac{2\cos(n\pi)}{n^2}| = \frac{2}{n^2}|\cos(n\pi)| = \frac{2}{n^2}$$

Pois o $|\cos(n\pi)|$ é sempre 1 para todo n.

Espectro de fase:

$$\angle D_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \cos(n\pi) \geq 0 \\ -\pi & \text{se } \cos(n\pi) < 0 \text{ e } n > 0 \\ \pi & \text{se } \cos(n\pi) < 0 \text{ e } n < 0 \end{cases}$$

Pois D_n é um sinal puramente real, logo sua fase estará sempre dentro desses valores.

c. Faça o gráfico dos espectros do item "b" considerando o eixo de frequências de forma a mostrar até o décimo harmônico;

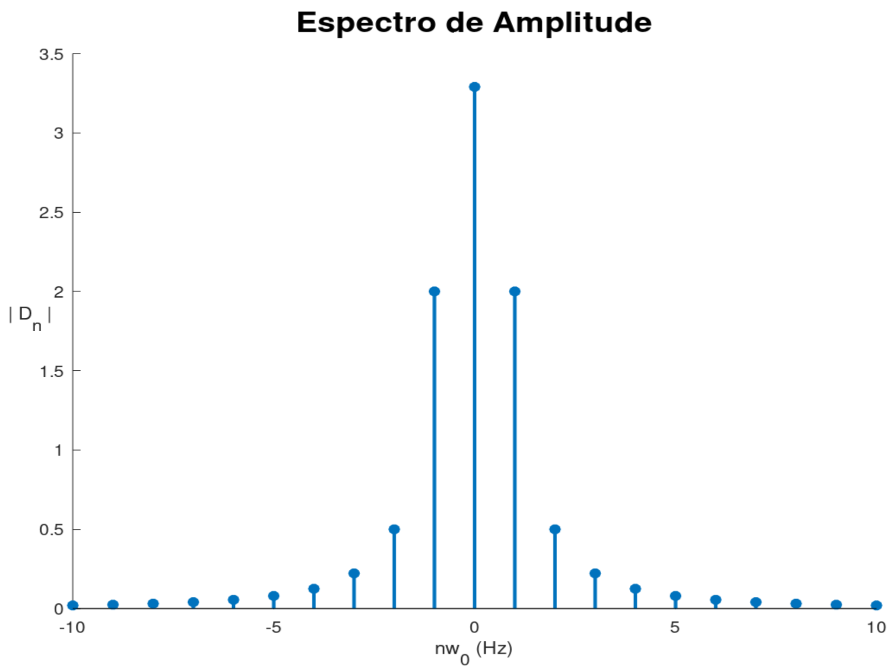

Figura 1: Espectro de Amplitude

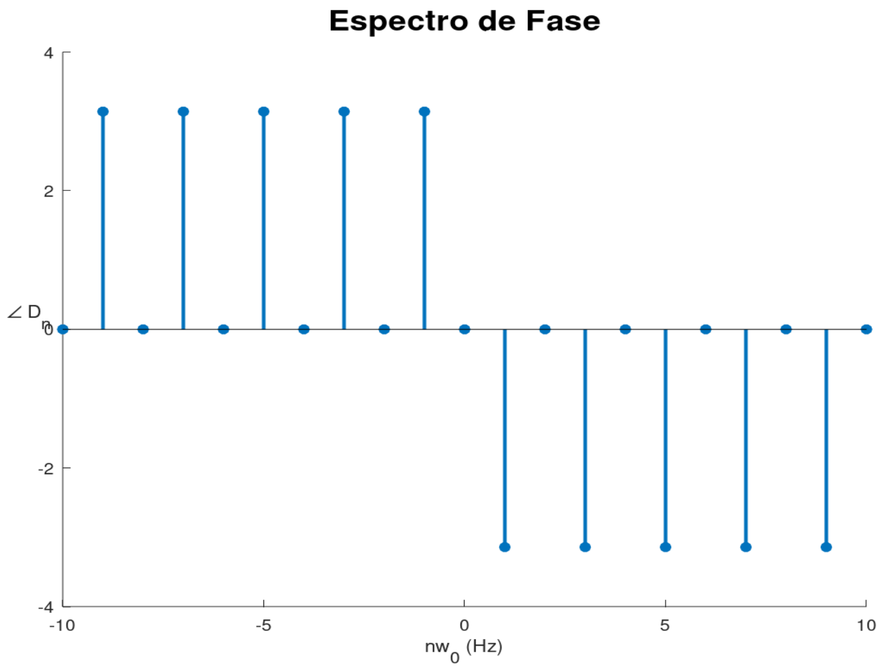

Figura 2: Espectro de Fase

d. A partir do resultado do item "a"e manipulações que julgar convenientes, devidamente apresentadas e justificadas, determine a série trigonométrica de Fourier de $g(t)$;

Resolução:

Vemos que a série de fourier trigonométrica é da forma:

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nw_0 t) + b_n \sin(nw_0 t)$$

E seus coeficientes são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{T_0/2} \int_{T_0} g(t)dt$$
$$a_n = \frac{1}{T_0/2} \int_{T_0} g(t)\cos(nt)dt$$
$$b_n = \frac{1}{T_0/2} \int_{T_0} g(t)\sin(nt)dt$$

Em que $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$.

A primeira observação é que $g(t) = t^2$ é um sinal par, logo, os coeficientes $b_n = 0$ para todo n.

Achando a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \frac{t^3}{3} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Agora, achando os coeficientes a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)dt$$

Utilizando integração por partes e algumas substituições, vou ocultar a resolução desta integral pois ficou muito grande, o resultado é:

$$a_n = \frac{\sin(n\pi)(2\pi^2 n^2 - 4) + 4\pi n \cos(\pi n)}{\pi n^3}$$

Note que o $\sin(n\pi) = 0$ para todo n, logo:

$$a_n = \frac{4cos(n\pi)}{n^2}$$

Assim, conseguimos encontrar a expansão de $g(t)$:

$$g(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(n\pi)}{n^2} \cos(nt)$$

e. Mostre que funções exponenciais complexas do tipo $\varphi_n(t) = e^{j2\pi n f_o t}$, com $n \in Z$, formam uma base ortogonal dentro de um intervalo de comprimento $T_0 = \frac{1}{f_0}$ .Verifique ainda se essa base é ortonormal.

Resolução:

Aqui devemos colocar estas exponenciais contra outra função exponencial:

$$\int_{T_0} e^{j2\pi n f_0 t}(e^{j2\pi m f_0 t})^* dt = \int_{T_0} e^{j(n-m)2\pi f_0 t} dt$$

Neste ponto, temos 2 possíveis casos, para $n = m$ e para $n \neq m$. Tomaremos um período $(\frac{-T_0}{2}, \frac{T_0}{2})$.

Para $n = m$:

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt = T_0$$

Para $n \neq m$:

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{j(n-m)2\pi f_0 t} dt = \left. \frac{e^{j(n-m)2\pi f_0 t}}{j(n-m)2\pi f_0} \right|_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}$$

$$= \frac{e^{j(n-m)2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{-j(n-m)2\pi f_0 \frac{T_0}{2}}}{j(n-m)2\pi f_0} \text{ , note que, } f_0 T_0 = 1$$

$$= \frac{e^{j(n-m)2\pi f_0 \frac{T_0}{2}} - e^{-j(n-m)2\pi f_0 \frac{T_0}{2}}}{j(n-m)2\pi f_0} = \frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{j(n-m)2\pi f_0}$$

$$= \frac{\sin((n-m)\pi)}{2f_0} \text{ , note que como } m \neq n \text{ , m e n pertencem aos inteiros, então:}$$

$$= \frac{\sin((n-m)\pi)}{2f_0} = 0 \text{ para todo } n \neq m.$$

Logo, elas formam uma base ortogonal entre si.

Agora, para que estas bases sejam ortonormais é necessário que $T_0 = 1$, para que a integral quando $m = n$ seja 1:

$$\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} dt = T_0 = 1$$

Somente neste caso as bases serão ortonormais, e para qualquer $T_0 \neq 1$ elas não serão ortonormais.