

Resumo Aula 16

≡ Conteúdo	Detecção-ótima	Filtros	Representação-Geométrica
📅 Data	@ September 13, 2021		
≡ Tags	detecção-ótima	m-ária	representação-geométrica

Continuando o conteúdo da aula passada...

Caso FSK:

■ Caso FSK:

$$\phi_{FSK}(t) = \sum_n s_n(t - nT_b)$$

$$s_n(t) = \begin{cases} p(t) = \sqrt{2}p'(t) \cos\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) & \text{bit : 1} \\ q(t) = \sqrt{2}p'(t) \cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) & \text{bit : 0} \end{cases} \Leftarrow p'(t) = \text{Arect}\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

$$s_n(t) = \begin{cases} p(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \times \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) & \text{bit : 1} \\ q(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \times \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) & \text{bit : 0} \end{cases}$$

90

■ Caso FSK:

$$\phi_{FSK}(t) = \sum_n s_n(t - nT_b)$$

$$s_n(t) = \begin{cases} p(t) = \sqrt{2}p'(t) \cos\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) & \text{bit : 1} \\ q(t) = \sqrt{2}p'(t) \cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) & \text{bit : 0} \end{cases}$$

$$E_p = E_q = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} E_{p'} = \int_{-\infty}^{\infty} (p'(t))^2 dt$$

$$= \int_0^{T_b} A^2 dt = A^2 T_b$$

$$P_{\text{erro}} = Q\left(\frac{E_{\text{diff}}}{2}\right) = Q\left(\frac{E_p + E_q - 2 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt}{2N}\right)$$

91

Obs: note que os dois pulsos tem a mesma energia, isto porque o que muda apenas são as frequências, o que não altera na energia dos sinais. O próximo passo é calcular a integral presente na probabilidade de erro.

■ Caso FSK:

$$s_n(t) = \begin{cases} p(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \times \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) & \text{bit : 1} \\ q(t) = \sqrt{2}A \cos\left(\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right) \times \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) & \text{bit : 0} \end{cases}$$

$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt = 2A^2 \int_0^{T_b} \cos\left(\omega_c + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \cos\left(\omega_c - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t dt$$

$$E_{pq} = A^2 \left[\int_0^{T_b} \cos \Delta\omega t dt + \int_0^{T_b} \cos 2\omega_c t dt \right] = A^2 T_b \left[\frac{\sin \Delta\omega T_b}{\Delta\omega T_b} + \frac{\sin 2\omega_c T_b}{2\omega_c T_b} \right]$$

$$E_{pq} = A^2 T_b \left[\text{Sa}(\Delta\omega T_b) + \text{Sa}(2\omega_c T_b) \right]$$

92

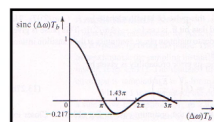
Analisando o comportamento dos samples, temos que em geral $2\omega_c \gg \Delta\omega$, o que distancia muito este segundo sample no eixo x, o que é um valor bem pequeno. Então, podemos aproximar para obtermos a menor probabilidade de erro:

$$\text{Como } 2\omega_c T_b \gg 1, E_{pq} \approx A^2 T_b \text{Sa}(\Delta\omega T_b)$$

Continuando nossa análise, se fizermos $\Delta\omega = 0$, veremos que p(t) e q(t) são iguais, o que irá nos dar a maior p.erro, isto porque só vamos confundir o receptor, logo teremos: $P_{\text{erro}} = Q(0) = \frac{1}{2}$. E esta é a maior probabilidade de erro que um sistema pode nos dar, completamente aleatório.

Sistemas Modulados: ASK, FSK, PSK e DPSK

■ Caso FSK: $E_{pq} = A^2 T_b \text{Sa}(\Delta\omega T_b)$



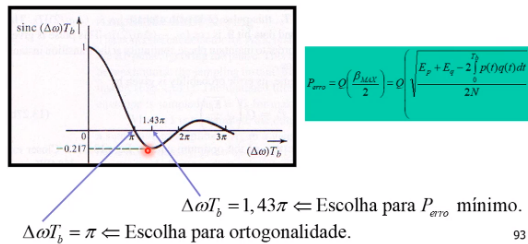
$$P_{\text{erro}} = Q\left(\frac{E_{\text{diff}}}{2}\right) = Q\left(\frac{E_p + E_q - 2 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)q(t)dt}{2N}\right)$$

93

Continuando, podemos observar na foto ao lado que temos escolhas bem interessantes para o argumento do Sample. Vamos focar em dois casos, um em que teremos um argumento que zera o sample e nos dará um FSK Ortogonal, lembre-se que ele ocupa uma banda menor que o FSK ótimo, que ocorre quando o

Sistemas Modulados: ASK, FSK, PSK e DPSK

- Caso FSK: $E_{pq} = A^2 T_b \text{Sa}(\Delta \omega T_b)$



Encontrando a p.erro mínima e então podemos comparar com os outros sistemas que vimos na aula passada:

Resumindo, podemos ver que caso usássemos o caso ortogonal, teríamos o mesmo resultado de um PSK binário. Também podemos ver que o PSK se comporta melhor que o FSK, pois precisa de menos energia para garantir uma mesma probabilidade de erro.

argumento do sample o torna o menor valor possível, maximizando o numerador de Q.

- Caso FSK:

- Assumindo 1 e 0 equiprováveis:

$$E_p = E_q = A^2 T_b \Rightarrow E_b = E_p = A^2 T_b$$

- Logo,

$$P_b = Q\left(\frac{\beta_{MAX}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2 T_b + 2 \times 0,217 A^2 T_b}{2N}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1,217 A^2 T_b}{N}}\right)$$

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{1,217 E_b}{N}}\right)$$

95

Para terminar, precisamos voltar a questão da banda do FSK. Note que neste ponto de vista também é mais vantajoso utilizar do sistema PSK ao FSK, visto que a banda ocupada pelo PSK será menor que a utilizada pelo FSK.

- Caso FSK: $E_{pq} = A^2 T_b \text{Sa}(\Delta \omega T_b)$

- Temos ainda que:

$$\Delta \omega T_b = 1,43\pi, \text{ ou seja:}$$

$$\Delta f = \frac{0,715}{T_b} = 0,715 R_b$$

$$B_{FSK} \approx 2 \left(\frac{\Delta f}{2} + E_m \right) \Leftrightarrow B_{ASK} = B_{PSK} = 2 B_m$$

$$B_m = B_{p'} \geq \frac{R_b}{2}$$

97

Comunicação M-ária

Partimos agora para generalizar para os sistemas m-ários as análises que fizemos para o caso binário.

Para seguir, vamos buscar a representação geométrica de sinais para continuar.

Comunicação M-ária

- M símbolos são transmitidos:

$$M = 2^l \leftarrow \text{número de bits por símbolo} \Rightarrow l = \log_2 M$$

- Várias formas de se transmitir:

- Múltiplas amplitudes (M-ASK)
- Múltiplas fases (M-PSK)
 - Ou combinação desses dois (M-QAM)
- Múltiplos tons (M-FSK)

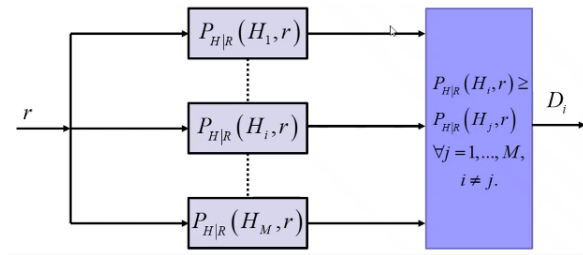
112

Detecção Ótima de Sinais

Em geral, vamos buscar mostrar que o receptor ótimo generalizado é da forma ao lado.

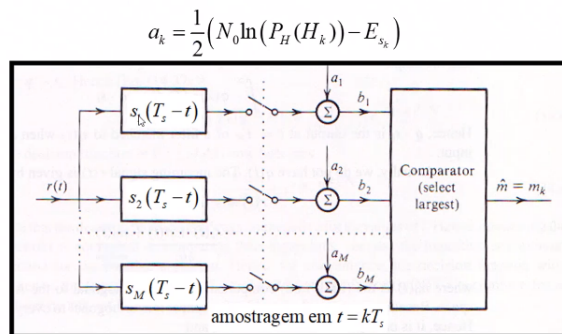
H: hipótese do símbolo 1,...,M

r: dado que recebemos r



Vamos mostrar que esse diagrama acima pode ser representado por um sistema bem conhecido para nós.

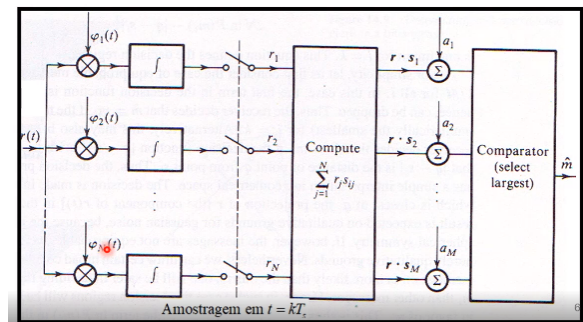
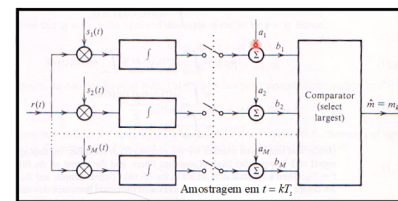
Receptor Ótimo – Filtro Casado



Neste momento é importante notar que caso tenhamos por exemplo 1024 símbolos, possível precisaremos de 1024 correlatores, filtros casados, o que não nos será bom em termos de circuitaria. Portanto, neste momento entra a representação geométrica de sinais, e o nosso sistema ficará parecido com a figura ao lado, em que o nosso sistema ficará econômico, em cada φ representa um base de funções que nos será possível ter vários símbolos.

Também iremos associar assim como as análises anteriores, este diagrama de bloco em forma de um diagrama de blocos de correlatores, utilizando medidas de correlação do sinais...

Receptor Ótimo - Correlator



Representação Geométrica de Sinais

Podemos definir que:

- n sinais $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ são linearmente independentes se nenhum deles puder ser escrito como combinação linear dos outros sinais. Ou seja, é impossível escrever:

$$a_1\varphi_1(t) + a_2\varphi_2(t) + \dots + a_n\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k\varphi_k(t) = 0$$

Continuando as definições:

- Suponha que um sinal $x(t)$ possa ser escrito como combinação linear dos sinais $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$:

$$x(t) = x_1\varphi_1(t) + x_2\varphi_2(t) + \dots + x_n\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n x_k\varphi_k(t)$$

- então, pode-se associar esse sinal a um vetor:
 \gg As coordenadas do vetor são dadas pelos coeficientes da decomposição do sinal: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

■ O conjunto de sinais (base) $\{\phi_k(t)\}$ será ortogonal se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ k & j = k \end{cases} \leftarrow \text{sinais reais}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ k & j = k \end{cases} \leftarrow \text{sinais complexos}$$

Para o caso ortonormal, temos algumas vantagens

□ O conjunto de sinais (base) $\{\phi_k(t)\}$ será ortonormal se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \leftarrow \text{sinais reais}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_j(t) \phi_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases} \leftarrow \text{sinais complexos}$$

■ Nesse caso,

$$x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) \Rightarrow \begin{cases} x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_k(t) dt \leftarrow \text{sinais reais} \\ x_k = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \phi_k^*(t) dt \leftarrow \text{sinais complexos} \end{cases}$$

12

Não precisamos que nossa base seja ortogonal ou ortonormal, somente precisamos que seja uma base linearmente independente!!! Porém nós vamos trabalhar com bases ortonormais, pelas vantagens que temos nos facilitarão várias análises.

Neste momento, é importante nos questionarmos se é possível definir o produto escalar de dois sinais... Para isto, vamos analisar a seguinte integral para a representação geométrica de sinais:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt ?$$

Vamos associar os nossos sinais a um vetor, e depois vamos manipular a nossa integral afim de obter algum resultado interessante.

Manipulando, podemos obter como abaixo:

$$x(t) = \sum_i x_i \phi_i(t) \Rightarrow \text{vetor } x$$

$$y(t) = \sum_j y_j \phi_j(t) \Rightarrow \text{vetor } y$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_i x_i \phi_i(t) \right] \left[\sum_j y_j \phi_j(t) \right] dt & x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ & & y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt &= \sum_i \sum_j \left(x_i y_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(t) \phi_j(t) dt \right) = \sum_i x_i y_i = x \cdot y \end{aligned}$$

Note que do resultado que encontramos, é possível resumir a integral a um produto escalar dos vetores x e y . E escolhendo a base ortonormal adequada temos uma equivalência entre as operações no tempo(integral) e operações vetoriais associadas.

Uma propriedade interessante é que se os sinais $x(t)$ e $y(t)$ forem ortogonais é possível ver ao lado:

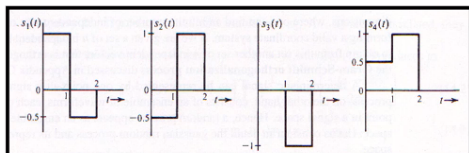
A partir também da relação que encontramos é possível medir a energia de um sinal analisando o comprimento do vetor associado, da seguinte maneira:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) dt = \sum_k x_k y_k = 0 \Rightarrow x(t) \text{ e } y(t) \text{ são ditos ortogonais}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2(t) dt = x \cdot x = |x|^2$$

Exemplo:

□ Exemplo: Um espaço de sinais é composto pelos quatro sinais a seguir:

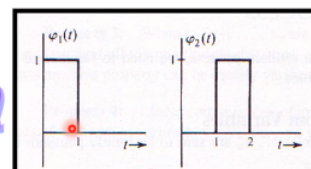


■ Determine uma base de funções para esse espaço e a sua dimensão.

17

Vamos determinar a base de funções por inspeção, não vamos aprofundar em bases complexas. E para o sistema ao lado temos uma base:

Dimensão 2



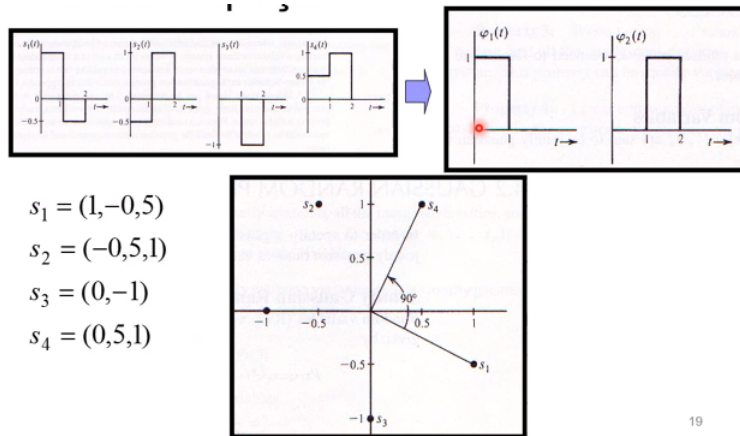
Note que é uma base ortonormal pois a energia de cada uma das funções é unitária. São ortogonais. Para que seja uma base, todos os sinais acima tem de ser formados por estas funções, e podemos encontrar de fato:

$$\begin{aligned}s_1 &= (1, -0, 5) \\ s_2 &= (-0, 5, 1) \\ s_3 &= (0, -1) \\ s_4 &= (0, 5, 1)\end{aligned}$$

Notar que :

$$s_1 \cdot s_4 = 0,5 - 0,5 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_4(t) dt = 0$$



Neste momento, vamos então tentar analisar um sistema M-ASK:

É importante perceber que o A_m é o que diferencia os símbolos do sistema.

$$\varphi_{M-ASK}(t) = \sum_n s_n(t) \leftarrow s_n(t) \in \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_M(t)\}$$

$$s_m(t) = A_m \sqrt{\frac{2E_0}{E_{g_{T_s}}}} g_{T_s}(t) \cos(\omega_c t) \begin{cases} 0 \leq t \leq T_s; \\ m = 1, 2, \dots, M; \\ A_m = (2m-1-M); \\ M = 2^l; T_s = lT_b \end{cases}$$

$$E_{s_m} = \frac{1}{2} A_m^2 \left(\sqrt{\frac{2E_0}{E_{g_{T_s}}}} \right)^2 \int_0^{T_s} g_{T_s}^2(t) dt = \frac{1}{2} A_m^2 \left(\sqrt{\frac{2E_0}{E_{g_{T_s}}}} \right)^2 E_{g_{T_s}} = A_m^2 E_0$$

$$E_s = \sum_{m=1}^M P_s(s_m) A_m^2 E_0 \Rightarrow E_b = \frac{E_s}{l}$$

Analisando a energia dos pulsos (E_{s_m}) e também a energia média de símbolo (E_s) e depois partir para a energia média de bit (E_b)

Vamos descobrir uma base ortonormal por inspeção para o sistema, em seguida, vamos ter todas as informações sobre o sistema.

□ Sistemas M-ASK: $s_m(t) = A_m \sqrt{\frac{2E_0}{E_{g_{T_s}}}} g_{T_s}(t) \cos(\omega_c t)$

$$s_m(t) = A_m \sqrt{\frac{2E_0}{E_{g_{T_s}}}} g_{T_s}(t) \cos(\omega_c t) = s_m \psi(t) \begin{cases} 0 \leq t \leq T_s; \\ m = 1, 2, \dots, M \end{cases} \leftarrow n=1$$

$$\psi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_{g_{T_s}}}} g_{T_s}(t) \cos(\omega_c t) \quad s_m = A_m \sqrt{E_0} \begin{cases} m = 1, 2, \dots, M; \\ A_m = (2m-1-M) \end{cases}$$

□ Sistemas M-ASK: $\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{\frac{2}{E_{g_{T_s}}}} g_{T_s}(t) \cos(\omega_c t) \\ s_m(t) = s_m \psi(t) \end{cases} \begin{cases} s_m = (2m-1-M) \sqrt{E_0} \\ m = 1, 2, \dots, M; \end{cases}$

