Questionário 1

Princípios de Comunicação

Autoria	**Matrícula**
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

14 de Fevereiro de 2021

Questão 1

Considere o sinal $g(t)$ mostrado na Figura 1.

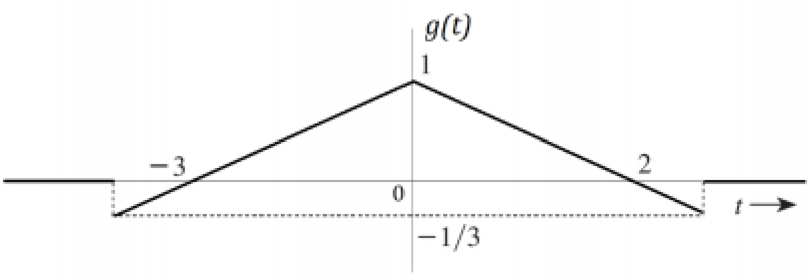

Figura 1: Sinal utilizado para a Questão 1

a. Esboce $y(t) = 5g\left(\frac{2-t}{4}\right)$;

Resolução:

(i) Descobrir a função $g(t)$:

Para $t \leq 0$, montando um sistema com os pontos do gráfico:

$$g(t) = at + b$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ -3a+b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$g(t) = \frac{t}{3} + 1, t \leq 0$$

Para $t \geq 0$:

$$g(t) = at + b$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ 2a+b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$g(t) = -\frac{t}{2} + 1, t \geq 0$$

Então devemos achar em quais instante de tempo $g(t)$ passa a valer 0:

$$g(t) = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{t}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \rightarrow t = -4$$

$$-\frac{t}{2} + 1 = -\frac{1}{3} \rightarrow t = \frac{8}{3}$$

Assim:

$$g(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} + 1 & \text{se } -4 \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{2} + 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{8}{3} \end{cases}$$

(ii) Agora podemos achar os pontos de $y(t)$:
Fazendo uma troca de variáveis:

$$t = \frac{2-\tau}{4} \rightarrow \tau = -4t + 2$$

Agora pegando os pontos de referência do gráfico:

$$t = -4 \rightarrow \tau = 18 \tag{1}$$
$$t = 0 \rightarrow \tau = 2 \tag{2}$$
$$t = \frac{8}{3} \rightarrow \tau = -\frac{26}{3} \tag{3}$$

(iii) Com estes valores de referência é possível descobrir os pontos $(2, 5)$, $(\frac{-26}{3}, -\frac{5}{3})$, $(18, -\frac{5}{3})$ pertencentes a $y(t)$, logo, podemos montar um sistema para descobrir y(t):
Para $-\frac{26}{3} \leq t \leq 2$, montando um sistema com os pontos do gráfico:

$$y(t) = at + b$$
$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ -\dfrac{26}{3}a + b = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{8} \\ b = \dfrac{15}{4} \end{cases}$$
$$y(t) = \frac{5t}{8} + \frac{15}{4}$$

Para $2 \leq t \leq 18$, montando um sistema com os pontos do gráfico:

$$y(t) = at + b$$
$$\begin{cases} 2a + b = 5 \\ 18a + b = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-5}{12} \\ b = \dfrac{35}{6} \end{cases}$$
$$y(t) = -\frac{5t}{12} + \frac{35}{6}$$

(iv) Assim conseguimos plotar o gráfico de $y(t)$:

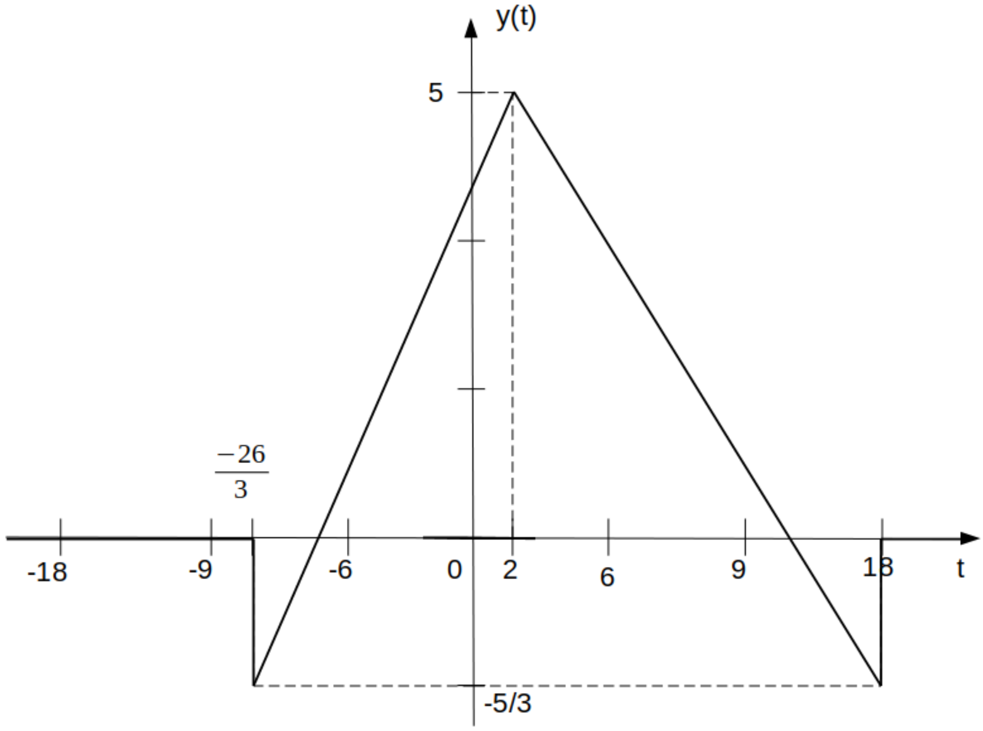

Figura 2: Gráfico $y(t)$

b. Determine E_y, a energia média de $y(t)$;

Resolução:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \left|y(t)\right|^2 dt = \int_{-\frac{26}{3}}^{2} \left(\frac{5t}{8} + \frac{15}{4}\right) dt + \int_{2}^{18} \left(-\frac{5t}{12} + \frac{35}{6}\right) dt$$

$$= \int_{-\frac{26}{3}}^{2} \frac{25}{64}t^2 + \frac{150}{64}t + \frac{225}{16} dt + \int_{2}^{18} \frac{25}{144}t^2 - \frac{350}{144} + \frac{1225}{36} dt$$

$$E_y = 172,83 \text{ J}$$

c. Determine P_y, a potência média de $y(t)$;

Resolução: Como temos um sinal de energia, logo este não pode ser um sinal de potência, também, por sua energia ser finita, como vimos no item acima, sua potência têm de ser nula, logo:

$$P_y = 0 \text{ J}$$

d. Determine o valor de $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(-2t-1)dt$;

Pela definição: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$.
Também pela definição do impulso: $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.
Temos que:

$$\delta(-2t-1) = \delta\Big(-2\big(t+\frac{1}{2}\big)\Big) = \frac{1}{2}\delta\Big(t+\frac{1}{2}\Big)$$

Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(-2t-1)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta\big(t+\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}\cdot g\big(\frac{1}{2}\big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

e. De forma geral, sem se limitar ao sinal da Figura 1, como as operações de deslocamento temporal, escalamento temporal e reversão temporal afetam a energia do sinal transformado com relação ao sinal original (suponho este um sinal de energia)? Justifique sua resposta, quantificando da forma mais geral possível suas conclusões.

Resolução:

Podemos dizer que o deslocamento temporal não altera a energia do sinal, pois não altera as propriedades do sinal, somente há um deslocamento no eixo das abscissas. Da mesma maneira, uma reversão temporal não altera em nada a energia do sinal, somente "espelha"o sinal, não alterando suas propriedades, por consequência, sua energia permanece a mesma do sinal original nos dois casos. Porém, agora pensamos no escalonamento temporal, esta operação altera as propriedades do sinal em questão de que o tempo pode ser comprimido ou expandido, diminuindo ou aumentando, respectivamente, a energia do sinal da mesma maneira.

Para provar, tomemos um sinal $x(t)$ qualquer, de Energia($E_x = C$), logo finita, e fazendo $y(t) = x(at+b)$, assim:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(at+b)|^2 dt$$

Podemos fazer uma substituição de variáveis:

$$at+b = \tau \rightarrow adt = d\tau$$

Alterando os limites:

$$t \rightarrow -\infty \iff \tau \rightarrow -\infty$$

$$t \to \infty \iff \tau \to \infty$$

Voltando para a integral:

$$E_y = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

Note que a integral é exatamente E_x, assim:

$$E_y = \frac{1}{a}E_x = \frac{1}{a}C$$

Assim, conseguimos provar que somente um escalonamento temporal alterará a energia do sinal.