Questionário 5

Principíos de Comunicação

Autoria	Matrícula
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

14 de Março de 2021

Questão 1

Para o sinal $x(t) = ate^{-at}u(t)$, considere a solução dos seguintes itens.

(a) (3,00) Obtenha uma expressão para a função de autocorrelação temporal de $x(t)$;

Resolução: Sabemos que a função de autocorrelação é dada por:

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt$$

Então:

$$\psi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} ate^{-at}u(t)a(t+\tau)e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau)dt$$
$$\psi_x(\tau) = a^2e^{-a\tau}\Big(\int_0^{\infty} t^2e^{-2at}dt + \tau\int_0^{\infty} te^{-2at}dt\Big)$$

Utilizando de integração por partes, vamos resolver separadamente as integrais:

$$\int_0^{\infty} te^{-2at}dt = -\frac{te^{-2at}}{2a}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{2a}\int_0^{\infty} e^{-2at}dt$$

Como a exponencial cresce muito mais rápido que t, e usando que $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} te^{-2at}dt = -\frac{e^{-2at}}{4a^2}\Big|_0^{\infty}$$
$$\int_0^{\infty} te^{-2at}dt = \frac{1}{4a^2} \tag{1}$$

Para a outra integral:

$$\int_0^{\infty} t^2e^{-2at}dt = -\frac{t^2e^{-2at}}{2a}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{\infty} te^{-2at}dt$$

Utilizando que a exponencial cresce muito mais rápido que t^2, a integral anterior e que $a > 0$:

$$\int_0^{\infty} t^2e^{-2at}dt = \frac{1}{4a^3} \tag{2}$$

Voltando para $\psi_x(\tau)$:

$$\psi_x(\tau) = a^2e^{-a\tau}\Big(\frac{1}{4a^3} + \frac{\tau}{4a^2}\Big)$$
$$\psi_x(\tau) = \Big(\tau + \frac{1}{a}\Big)\frac{e^{-a\tau}}{4}$$

(b) (1,50) Determine a energia do sinal $x(t)$;

Resolução: Para determinar a energia do sinal usaremos a integral no domínio do tempo:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |ate^{-at}u(t)|^2 dt$$

Aplicando o módulo, o fator quadrático e u(t) nos limites de integração:

$$E_x = a^2 \int_{0}^{\infty} t^2 e^{-2at} dt$$

Podemos usar a relação encontrada na equação (2) para descobrir e que $a > 0$:

$$E_x = a^2 \frac{1}{4a^3} = \frac{1}{4a}$$

(c) (1,50) Forneça uma expressão, devidamente simplificada, para a densidade espectral de energia de $x(t)$;

Resolução:

Sabemos que a relação para densidade espectral de energia pode ser dada por:

$$\Psi_x(f) = |X(f)|^2$$

Em que:

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$

Assim, descobrindo $X(f)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} ate^{-at}u(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$X(f) = a \int_{0}^{\infty} te^{-t(a+j2\pi f)} dt$$

Utilizando integração por partes:

$$X(f) = a\Big(- \frac{te^{-t(a+j2\pi f)}}{a+j2\pi f}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{a+j2\pi f}\int_0^{\infty} e^{-t(a+j2\pi f)} dt\Big)$$

Sabendo que a exponencial cresce muito mais rápido que t, e levando que $a > 0$, para que a integral acima possa convergir:

$$X(f) = \frac{a}{(a+j2\pi f)^2} \text{ , para } a > 0$$

Voltando para a densidade espectral de energia de $x(t)$:

$$\Psi_x(f) = \frac{a^2}{(a^2 + 4\pi^2 f^2)^2}$$

(d) (2,00) Calcule a largura de banda essencial de $x(t)$ que contém 95% de sua energia. Para a solução desse item, considere $a = 10^4$;

Resolução:

(e) (2,00) Suponha que o sinal $x(t)$ é transmitido por um sistema linear causal cuja resposta ao impulso é dada por h(t)=u(t)-u(t-T), produzindo a saída $y(t)$. Determine uma expressão, devidamente justificada e simplificada, para a densidade espectral de energia de $y(t)$.

Resolução:
Podemos ver que:

$$y(t) \rightleftharpoons Y(f)$$
$$h(t) \rightleftharpoons H(f)$$
$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Tirando o módulo e elevando os dois lados ao quadrado:

$$|Y(f)|^2 = |H(f)|^2|X(f)|^2$$

Pode-se ver que:

$$\Psi_y(f) = |H(f)|^2\Psi_x(f)$$

Então para obter a densidade espectral de y(t) basta encontrar $|H(f)|^2$ e multiplicar pelo resultado do item (c) para $\Psi_x(f)$. Encontrando $|H(f)|^2$:

$$h(t) = u(t) - u(t-T) = rect\Big(\frac{t-1/2}{T}\Big)$$

Pela tabela de transformadas e deslocamento no tempo:

$$H(f) = F\{rect\Big(\frac{t-1/2}{T}\Big)\}$$
$$H(f) = e^{-j\pi\frac{f}{T}}F\{rect\Big(\frac{t}{T}\Big)\} = e^{-j\pi\frac{f}{T}}Tsinc(fT)$$
$$|H(f)|^2 = T^2sinc^2(fT)$$

Então, a densidade espectral de energia para $y(t)$ pode ser dada por:

$$\Psi_y(f) = T^2sinc^2(fT)\frac{a^2}{(a^2+4\pi^2f^2)^2}$$