Questionário 3
Princípios de Comunicação

Autoria	**Matrícula**
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

27 de Fevereiro de 2021

Questão 1

Sobre a transformada de Fourier e suas propriedades, responda os seguintes itens, justificando apropriadamente e mostrando os cálculos e/ou manipulações realizadas, simplificando ao máximo as expressões obtidas:

(a) Obtenha a transformada de Fourier de $m(t) = sinc(5t - 2)$ **;**

Resolução:
Note que $m(t) = sinc(5t - 2) = sinc(5(t - \frac{2}{5}))$
Aqui podemos aplicar a propriedade da dualidade para mostrar que:

$$rect(t) \rightleftharpoons sinc(f)$$
$$sinc(t) \rightleftharpoons rect(-f)$$

Porém, $rect$ é uma função par então $rect(-f) = rect(f)$, logo:

$$sinc(t) \rightleftharpoons rect(f)$$

Neste momento utilizando a propriedade da dilatação temporal e depois do deslocamento temporal:

$$sinc(5t) \rightleftharpoons \frac{1}{5}rect(\frac{f}{5})$$
$$sinc(5t - 2) \rightleftharpoons \frac{1}{5}rect(\frac{f}{5})e^{-\frac{j4\pi f}{5}}$$
$$M(f) = \frac{1}{5}rect(\frac{f}{5})e^{-\frac{j4\pi f}{5}}$$

(b) A partir da tabela de transformadas disponível no ambiente Aprender3 e da manipulação das propriedades apropriadas, determine a transformada de Fourier da função $r(t) = e^{-at}cos(2\pi f_c t)u(t)$ **, com** $a > 0$**;**

Resolução:
Usando a relação $cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$, temos:

$$r(t) = \frac{1}{2}e^{-at}(e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t})u(t)$$

Note que há um deslocamento na frequência, dado pelas exponenciais provenientes do cosseno, logo:

$$r(t) \rightleftharpoons R(f)$$
$$R(f) = \frac{1}{2}\left(F\{e^{-at}u(t)e^{j2\pi f_c t}\} + F\{e^{-at}u(t)e^{-j2\pi f_c t}\}\right)$$
$$R(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a + j2\pi(f - f_c)} + \frac{1}{a + j2\pi(f - f_c)}\right)$$

(c) Determine a transformada de Fourier de $x(t)$ mostrado na Figura 1;

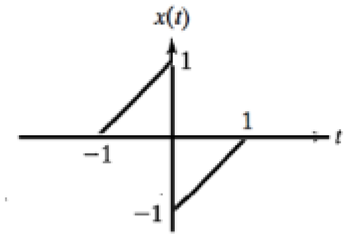

Figura 1. Sinal da Questão 1(c).

Resolução:

Achando o sinal $x(t) = \begin{cases} t+1 \ , & -1 < t < 0 \\ t-1 \ , & 0 < t < 1 \end{cases}$

Calculando a transformada por meio da definição:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt} \text{ , em que: } w = 2\pi f$$
$$X(f) = \int_{-1}^{0} (t+1)e^{-jwt}dt + \int_{0}^{1} (t-1)e^{-jwt}dt$$
$$X(f) = \int_{-1}^{0} te^{-jwt}dt + \int_{-1}^{0} e^{-jwt}dt + \int_{0}^{1} (t)e^{-jwt}dt - \int_{0}^{1} e^{-jwt}dt$$

Usando integração por partes, em que:

$$u = t \ , \ dv = e^{-jwt}dt$$

$$du = dt \ , \ v = -\frac{e^{-jwt}}{jw}$$

Temos então:

$$X(f) = -\frac{te^{-jwt}}{jw}\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{jw}\int_{-1}^{0} e^{-jwt}dt + \frac{e^{-jwt}}{-jw}\Big|_{-1}^{0} +$$
$$+ -\frac{te^{-jwt}}{jw}\Big|_{0}^{1} + \frac{1}{jw}\int_{0}^{1} e^{-jwt}dt + \frac{e^{-jwt}}{jw}\Big|_{0}^{1}$$

Note que aplicando os limites, temos que a exponencial cresce mais rápido que t, logo, o valor de algumas expressões vão para 0, fazendo com que tenhamos:

$$X(f) = 0 - \Big(\frac{e^{jw}}{jw}\Big) + \frac{1}{jw}\cdot\frac{e^{-jwt}}{-jw}\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{jw} - \Big(-\frac{e^{-jw}}{jw}\Big) - \frac{e^{jw}}{jw} - 0 + \frac{1}{jw}\cdot\frac{e^{-jwt}}{-jw}\Big|_{0}^{1} + \frac{e^{-jw}}{jw} - \frac{1}{jw}$$
$$X(f) = \frac{1}{w^2} - \frac{e^{jw}}{w^2} + \frac{e^{-jw}}{w^2} - \frac{1}{w^2} - \frac{2}{jw}$$
$$X(f) = -\frac{e^{jw}}{w^2} + \frac{e^{-jw}}{w^2} - \frac{2}{jw}$$

Neste momento, podemos utilizar da relação de Euler para o seno, também fazendo $w = 2\pi f$, então:

$$X(f) = \frac{-2jsen(2\pi f)}{4\pi^2 f^2} - \frac{1}{j\pi f} = -\frac{j}{\pi f}\cdot\frac{sen(2\pi f)}{2\pi f} - \frac{1}{j\pi f}$$

Note que organizamos de forma que chegamos a um sinc(2f):

$$X(f) = \frac{j}{\pi f}\Big(1 - sinc(2f)\Big)$$

(d) Determine a transformada inversa de Fourier de uma função cuja transforma possui espectro de amplitude dado por $|G(f)| = u(f+W) - u(f-W)$ e espectro de fase definido como $\angle G(f) = -\frac{\pi}{2}sgn(f)$;

Resolução:

(e) Determine a transformada de Fourier de $y(t) = te^{-at}u(t)$;

Resolução:

$$
\begin{aligned}
&y(t) \rightleftharpoons Y(f) \\
&Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-jwt}dt \ , \ w = 2\pi f \\
&Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} te^{-at}u(t)e^{-jwt}dt \\
&Y(f) = \int_{0}^{\infty} te^{-t(a+jw)}dt
\end{aligned}
$$

Usando integração por partes, em que:

$$u = t \ , \ dv = e^{-t(a+jw)}dt$$

$$du = dt \ , \ v = -\frac{e^{-t(a+jw)}}{a+jw}$$

Temos então:

$$Y(f) = -t\frac{e^{-t(a+jw)}}{a+jw}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t(a+jw)}}{a+jw}dt$$

Como a exponencial cresce muito mais rápido que t, logo, quando o limite $t \to \infty$ a expressão vai para 0, então:

$$
\begin{aligned}
&Y(f) = 0 - 0 - \frac{e^{-t(a+jw)}}{(a+jw)^2}\Big|_0^{\infty} \\
&Y(f) = \frac{1}{(a+jw)^2}
\end{aligned}
$$