A Transformada de Fourier em Tempo Discreto – DTFT (*Discrete Time Fourier Transform*)

Foi mostrado que séries de potência complexa do tipo z^n, $z \in \mathbb{C}$,são auto-sequências dos SLIDs.

- Todas as nossas sequências básicas são auto-sequências dos SLIDs.
- Todas podem ser escritas como uma combinação de séries de potência complexa do tipo tipo z^n, $z \in \mathbb{C}$.

$$u[n] = z^n\Big|_{z=1} u[n]$$

$$a^n u[n] = z^n\Big|_{z=a} u[n]$$

$$\cos[\omega_0 n]u[n] = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right) u[n] = \frac{1}{2} z^n|_{z=e^{j\omega_0}} u[n] + \frac{1}{2} z^n|_{z=e^{-j\omega_0}} u[n]$$

$$a^n\cos[\omega_0 n]u[n] = \frac{1}{2}\left(\left(ae^{j\omega_0}\right)^n + \left(ae^{-j\omega_0}\right)^n\right) u[n] = \frac{1}{2} z^n|_{z=ae^{j\omega_0}} u[n] + \frac{1}{2} z^n|_{z=ae^{-j\omega_0}} u[n]$$

A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

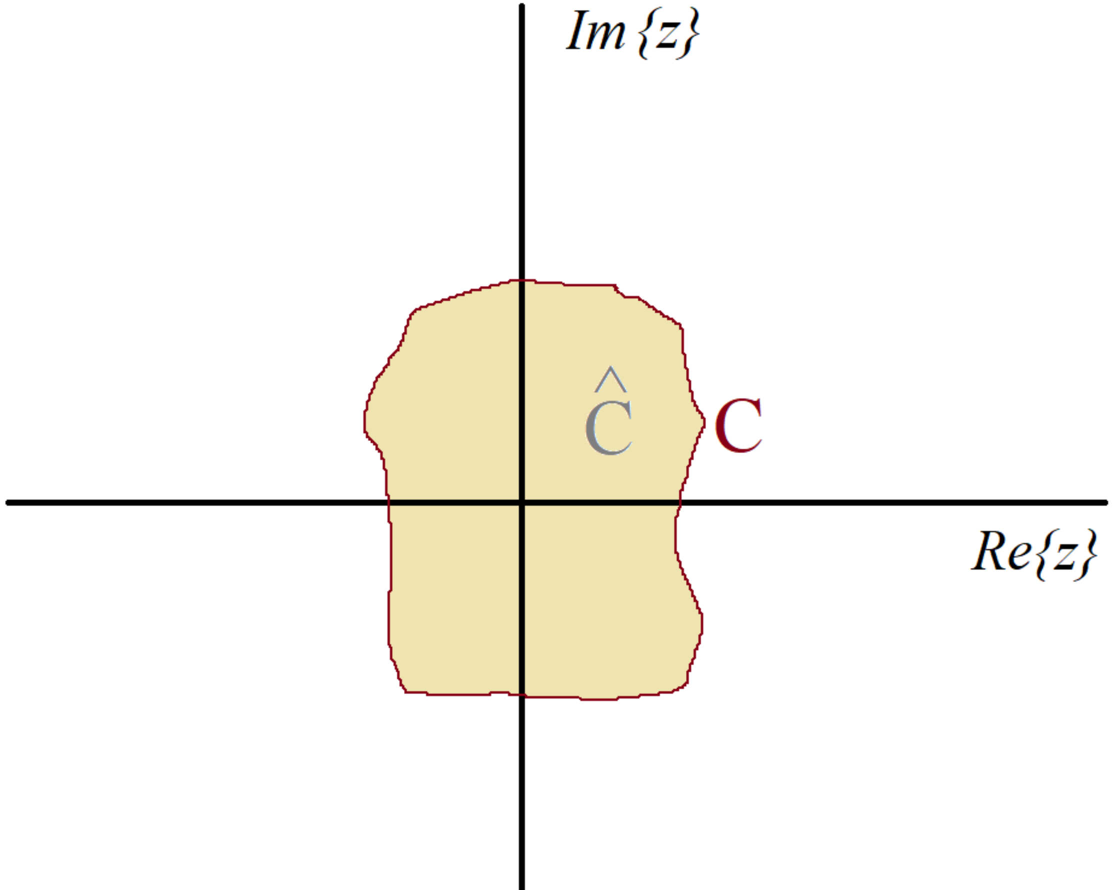
- Vimos que uma sequência genérica $x[n]$ pode ser representada como uma combinação linear de auto-sequência do tipo z^n pro mio da transformada z inversa.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$

- A integral de linha descrita pela transformada z inversa indica que não é necessário incluir na combinação linear todas as sequências z^n para todo $z \in \hat{C}$, onde $\hat{C}$ é a região envolvida pelo contorno C.
- C é qualquer contorno fechado simples no sentido anti-horário que envolve a origem.

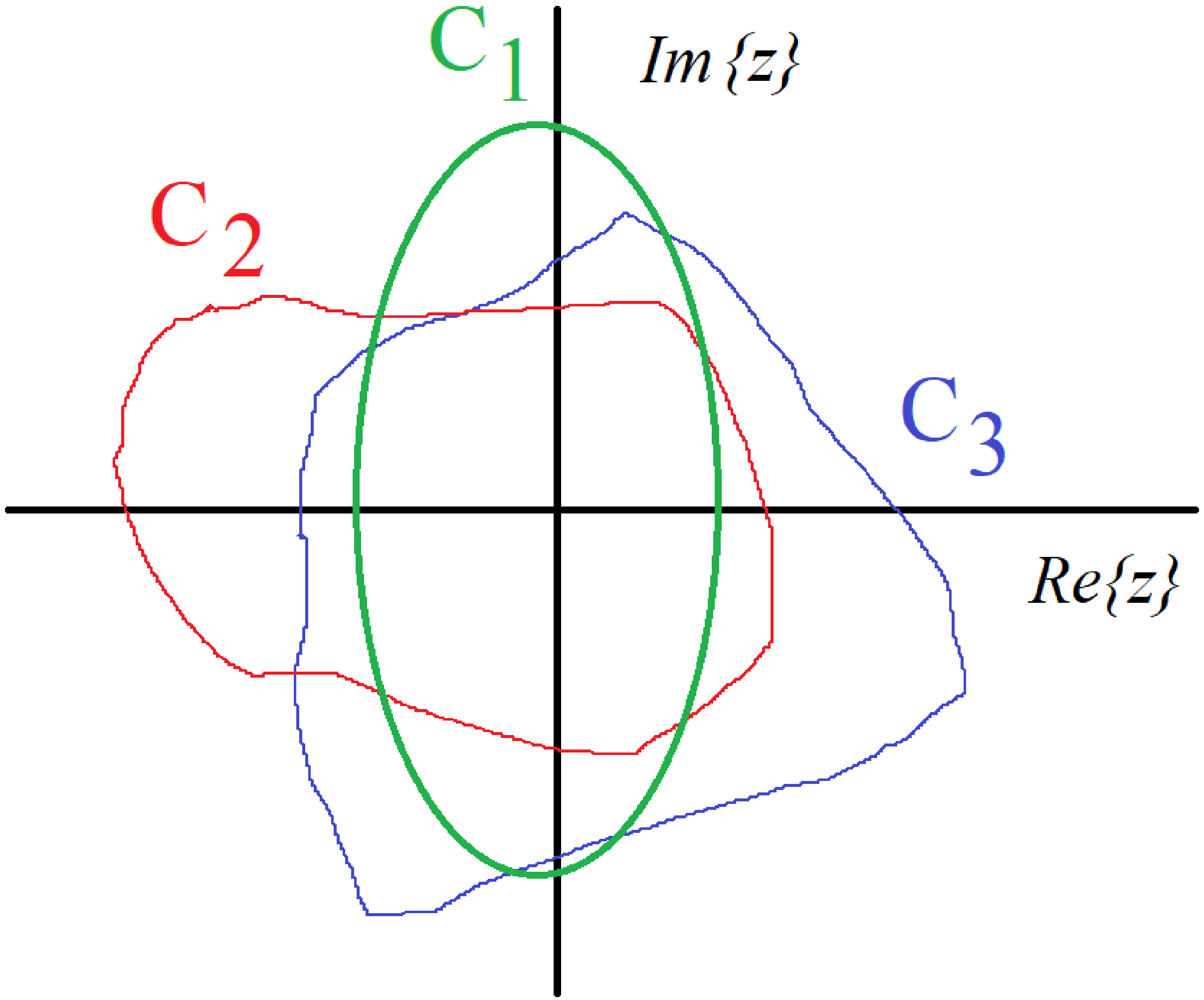
A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- C é um contorno fechado simples no sentido anti-horário que envolve a origem.
- $\hat{C}$ é a região envolvida pelo contorno C.
- Na integral de inversão só é necessário avaliar X(z) sobre o contorno *C*.



A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- Existem infinitos contornos fechados simples que satisfazem a condição.



Sobre a DTDF

- A ferramenta é especializada para a análise de estado permanente.
- Regime senoidal: a entrada é uma sequência senoidal.
- Comumente utilizada para a identificação de SLIDs.

Modos naturais de um SLID.

- Os polos ou singularidades são conhecidos também por “nodos naturais” do SLID.
- Por meio da transformada z, pode-se calcular a resposta de um SLID a uma entrada forçada conhecendo-se os polos de H(z) e os polos da entrada X(z).

$$Y(z) = H(z)X(z) \leftrightarrow y[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\}$$

- A transformada z inversa é obtida por meio de expansão de Y(z) em frações parciais tendo como referência os polos de Y(z), ou seja os polos de H(z) e de X(z).

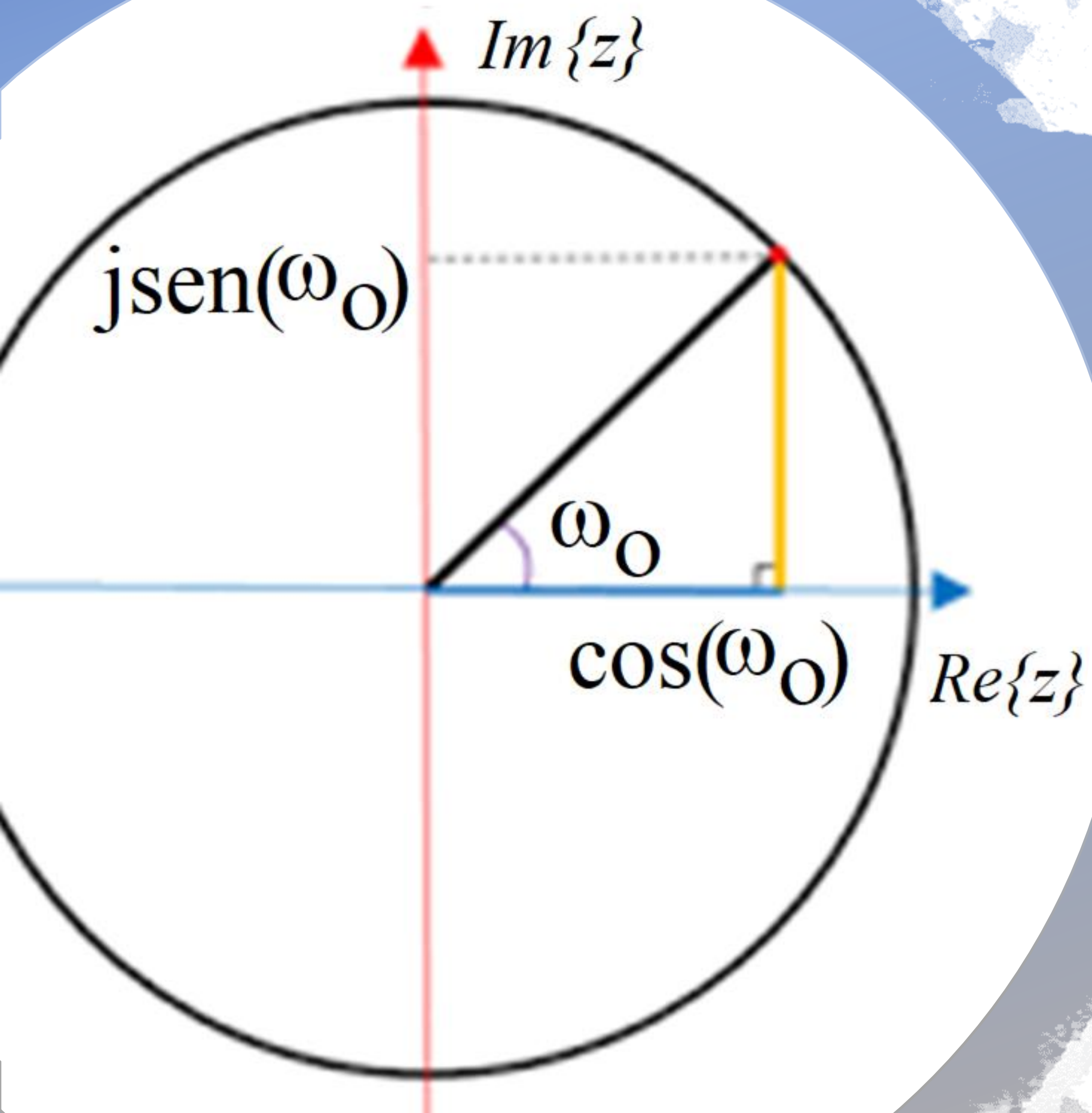
Resposta a regime permanente senoidal.

- Para analisar e resposta para regime senoidal qual seria o melhor escolha do contorno na transformada z inversa?
- Observe que o denominador de uma sequência senoidal é da forma:

$$D(z) = 1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}$$

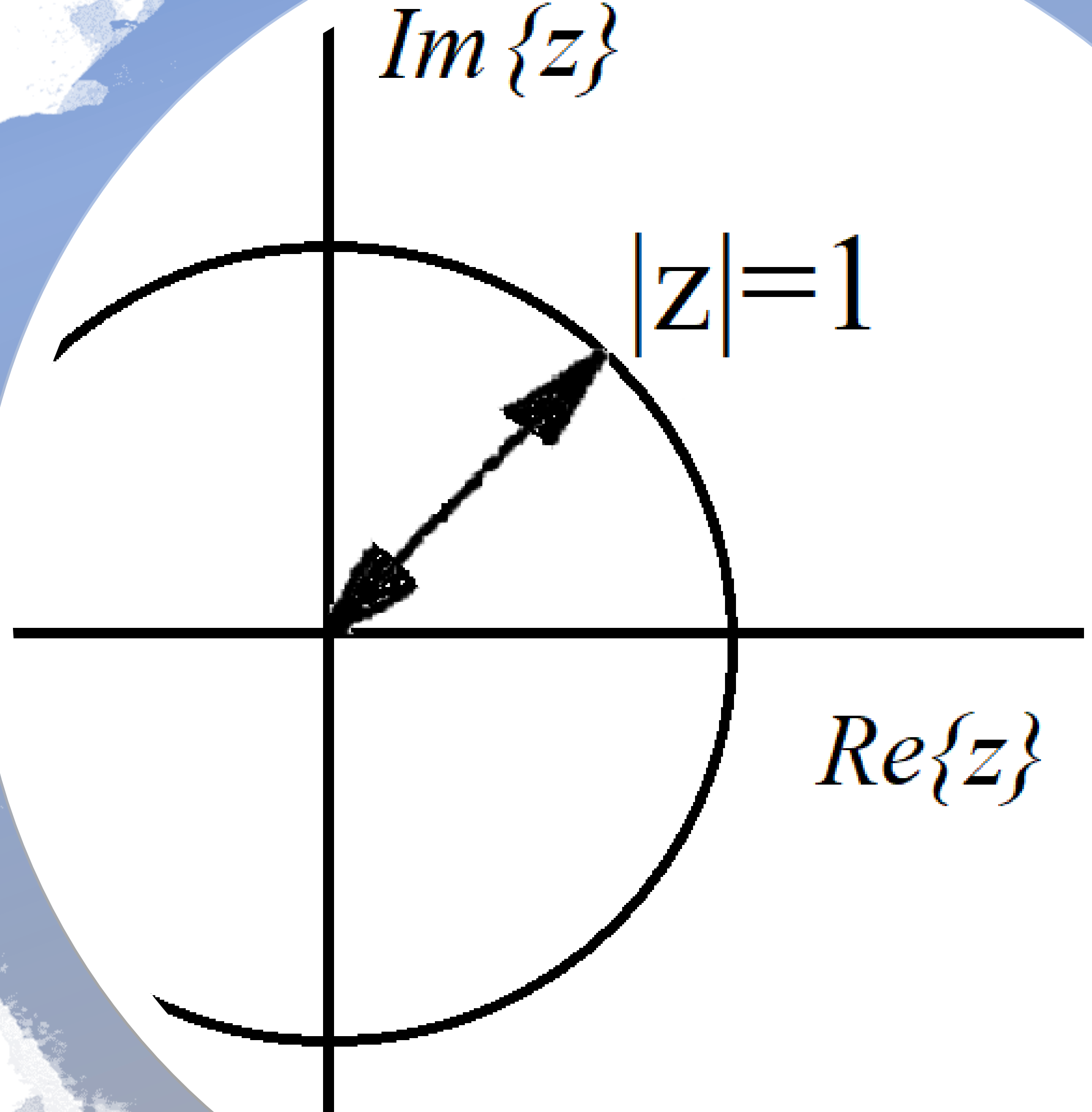
- Os polos de uma sequencia senoidal são dados por:

$$z = \frac{2\cos(\omega_0) \pm \sqrt{\{2\cos(\omega_0)\}^2 - 4}}{2} = \cos(\omega_0) \pm jsen(\omega_0)$$



Localização dos polos de uma senoide no plano z em função da frequência digital ω_0.

Podemos escolher o contorno C como o círculo unitário: $|z|=1$ ou seja $z = e^{j\omega}$



A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- Substituindo $z = e^{j\omega}$ na expressão da transformada z inversa, resulta:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega(n-1)} d(e^{j\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} e^{-j\omega} e^{j\omega} j d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega$$

- A última expressão corresponde a DTFT inversa.

A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- Fazendo $z = e^{j\omega}$ na expressão da transformada z direta, obtém-se:

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

- A expressão acima descreve a DTFT direta.

A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- O par de equações que descreve a DTFT pode ser escrita como:

$$X(e^{j\omega}) \equiv \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega$$

A Transformada de Fourier em Tempo Discreto (Discrete Time Fourier Transform – DTDF)

- Notação:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[\mathrm{n}]\}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}$$

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

Existência da DTFT

- Uma sequência genérica *x*[n] possui DTFT se:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| < \infty$$

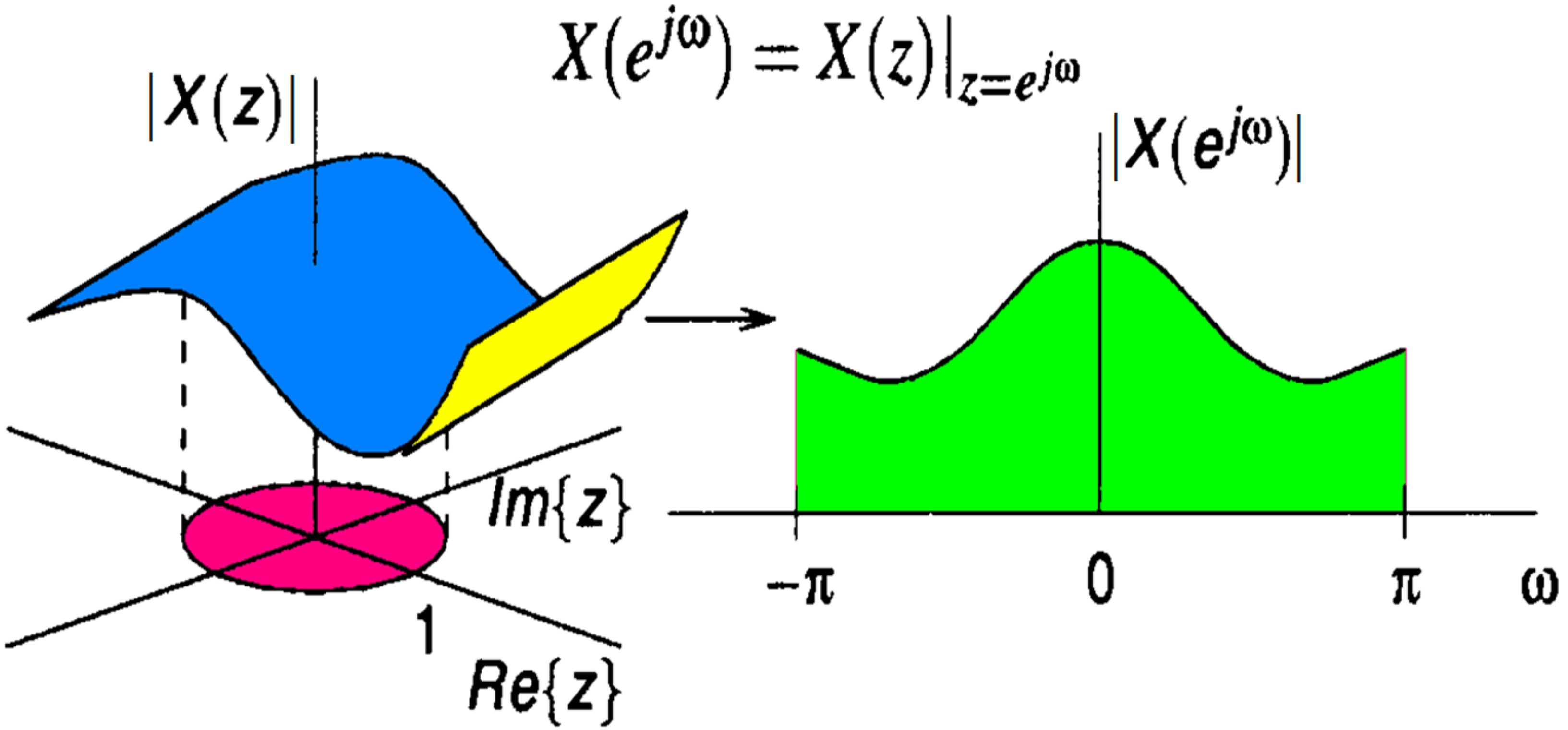
Existência da DTFT

- Majorando a condição de existência da DTFT e forçando a série convergir ($< \infty$) obtem-se

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right| \leq \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} \left|x[n]e^{-j\omega n}\right|$$

$$\leq \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} |x[n]|\left|e^{-j\omega n}\right| = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \; (condição\ suficiente)$$

Interpretação da DTFT



Periodicidade da DTFT

- Embora só seja necessário o conhecimento de $X(e^{j\omega})$ no intervalo $(-\pi, \pi]$, sabe-se que $X(e^{j\omega})$ é periódica com respeito a 2π:

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi)}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\, e^{-j2\pi n} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X(e^{j\omega})$$

Representação de $X(e^{j\omega})$

- $X(e^{j\omega})$ é uma função complexa da variável complexa $e^{j\omega}$ e pode ser escrita como:

$$X(e^{j\omega}) = Re\{X(e^{j\omega})\} + jIm\{X(e^{j\omega})\} = |X(e^{j\omega})|e^{\theta_X(\omega)}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \sqrt{Re\{X(e^{j\omega})\}^2 + Im\{X(e^{j\omega})\}^2}$$

$$\theta_X(\omega) = \sphericalangle X(e^{j\omega}) = arctan\left(\frac{Im\{X(e^{j\omega})\}}{Re\{X(e^{j\omega})\}}\right)$$

Exercício 5.1

- Calcule a DTFT para a sequência $x[n] = a^n u[n]$. Esboce as curvas de $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ e de $\measuredangle X\left(e^{j\omega}\right)$.

Exercício 5.1: solução

- $X(e^{j\omega})$ pode ser computada na forma:

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[\mathrm{n}]\} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \left|ae^{-j\omega}\right| < 1$$

Exercício 5.1: solução

- $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ pode ser obtido por meio de

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}=\frac{1}{1-\mathrm{acos}(\omega)+jasen(\omega)}=\frac{N\left(e^{j\omega}\right)}{D\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\frac{\left|N\left(e^{j\omega}\right)\right|}{\left|D\left(e^{j\omega}\right)\right|}=\frac{1}{\sqrt{\{1-\mathrm{acos}(\omega)\}^2+\{asen(\omega)\}^2}}$$

Exercício 5.1: solução

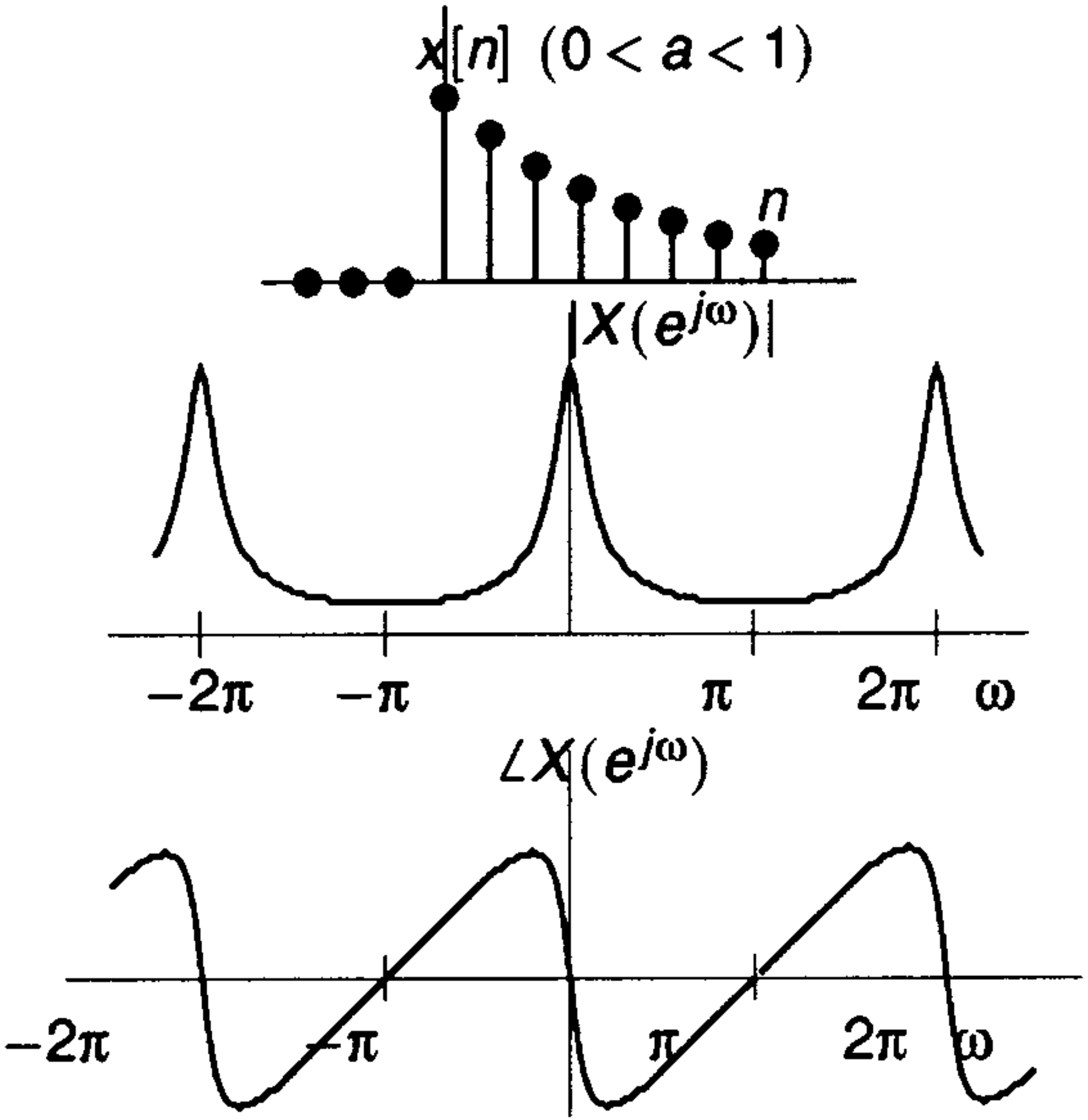
- A fase de $X\left(e^{j\omega}\right)$ pode ser calculada por:

$$\theta_X(\omega) = arctan\left(\frac{Im\{X\left(e^{j\omega}\right)\}}{Re\{X\left(e^{j\omega}\right)\}}\right) = \measuredangle N\left(e^{j\omega}\right) - \measuredangle D\left(e^{j\omega}\right)$$

$$= arctan\left(\frac{Im\{N\left(e^{j\omega}\right)\}}{Re\{N\left(e^{j\omega}\right)\}}\right) - arctan\left(\frac{Im\{D\left(e^{j\omega}\right)\}}{Re\{D\left(e^{j\omega}\right)\}}\right)$$

$$= -arctan\left(\frac{asen(\omega)}{1 - \mathrm{a}\cos(\omega)}\right)$$

Exercício 5.1: solução

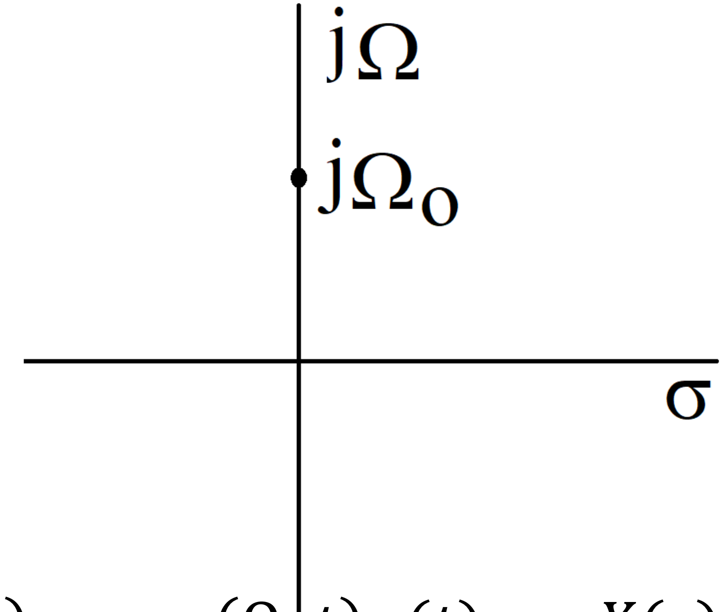


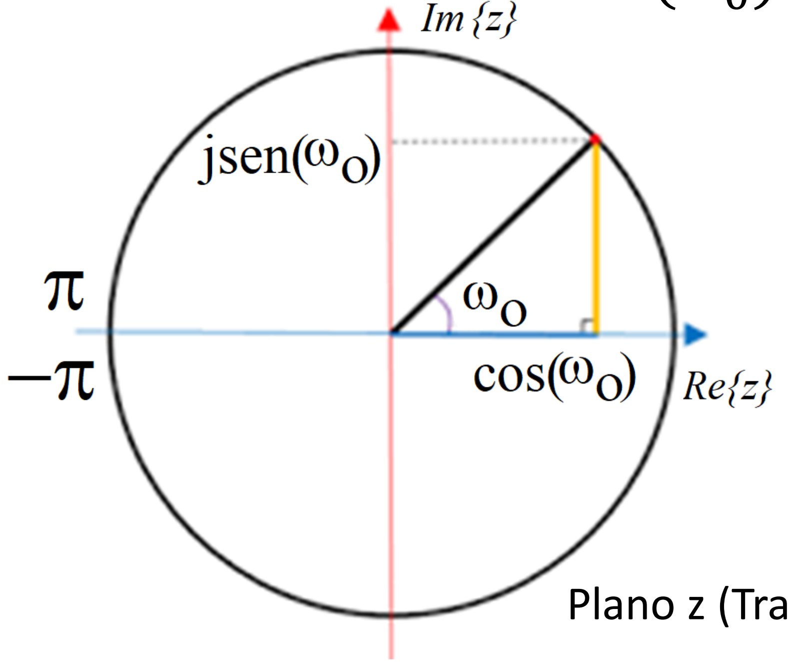
Relação entre frequência analógica e digital

- $\Omega \rightarrow \textit{frequência analógica} \left(\frac{radianos}{segundo}\right); \omega \longrightarrow \textit{frequência digital} \left(\frac{radianos}{amostra}\right).$

Plano s (Transformada de Laplace)

$$x[n]sen[\omega_0]u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{sen(\omega_0)z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0)z^{-1} + z^{-2}}$$





Plano z (Transformada z)

$$x(t) = sen(\Omega_0 t)u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{\Omega_0}{s + \Omega_0^2}$$

Relação entre frequência analógica e digital

- $\Omega \to frequência\ analógica\ \left(\frac{radianos}{segundo}\right)$
- $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$;
- $f \to frequência\ (Hz)$.
- $f_s = \frac{1}{T} \to frequência\ de\ amostragem\ (Hz)$.
- $T = \frac{1}{f_s} \to Taxa\ de\ amostragem (segundos)$.
- $\omega \longrightarrow frequência\ digital\ \left(\frac{radianos}{amostra}\right)$.

$$\omega_0 = \Omega_0 T = \frac{\Omega_0}{f_s} = \frac{2\pi f_0}{f_s}$$

$$\Omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{\omega_0}{T} = \omega_0\ f_s$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi T} = \frac{\omega_0}{2\pi} f_s$$

Exercício 5.2:

- Um sistema de tempo contínuo é digitalizado a uma frequência de amostragem de 8kHz.
- a) Determine a frequência digital correspondente a 3kHz.
- b) Determine a frequência analógica em Hertz correspondente e $\omega_0 = \frac{\pi}{3}$.
- **Solução**:
- a) $f_s = 8kHz \Rightarrow T = \frac{1}{8kHz} = 125\mu s;\ \omega_0 = \Omega_0 T = \frac{2\pi f_0}{f_s} = \frac{2\pi(3000)}{8000} = \frac{3\pi}{4}\ (\frac{radianos}{amostra})$
- b) $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi T} = \frac{\omega_0}{2\pi} f_s = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{3}(8000) = \frac{4}{3}\ kHz$

DTFT de sequências não-absolutamente somáveis.

- Vimos que a condição suficiente para a existência da transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT) pode ser dada por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- Contudo, existem sequências que não satisfazem a esta equação mas, mesmo assim, possuem DTFT.

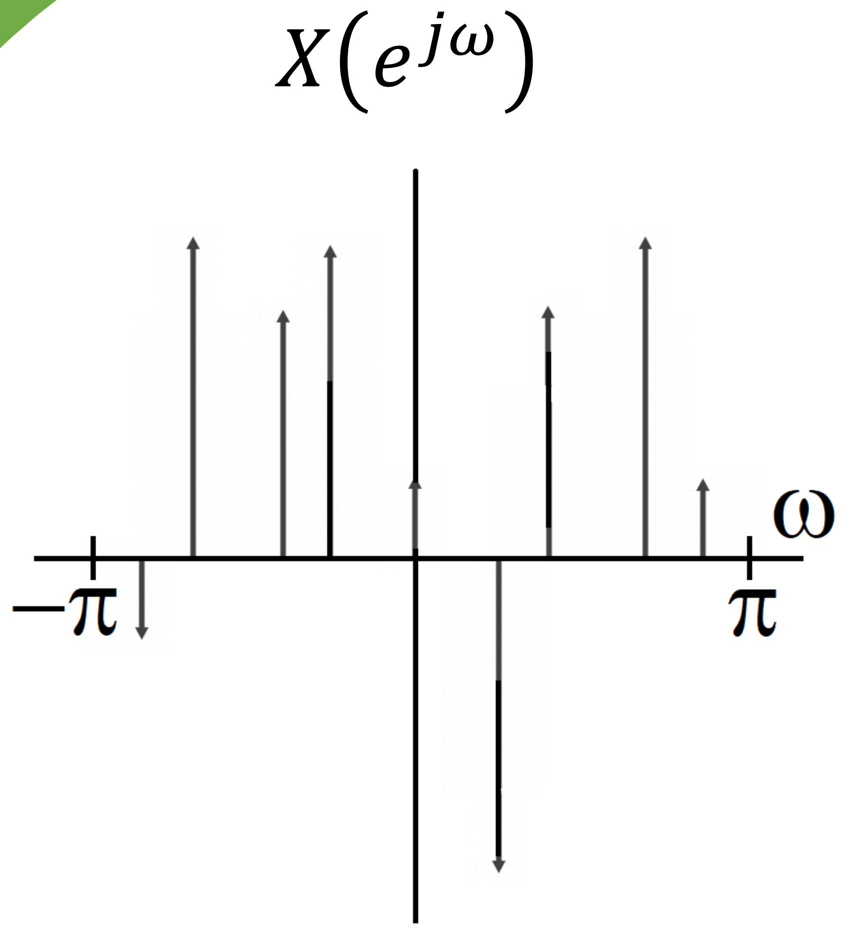
DTFT de sequências não-absolutamente somáveis.

- Hipótese: Considere uma sequência cuja sua DTFT possua **finitas frequências** no intervalo $(-\pi, \pi]$ onde $X(e^{j\omega})$ não convirja. Isso significa dizer que

$$\left|X\left(e^{j\omega_k}\right)\right| = \infty, \omega_k \in (-\pi, \pi].$$

- Considere $X(e^{j\omega})$ como:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)$$



DTFT de sequências não-absolutamente somáveis.

- Tomando a transformada de Fourier inversa em tempo discreto sobre $X(e^{j\omega})$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)\, e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_k a_k \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega - \omega_k)\, e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_k a_k\, e^{j\omega_k n}$$

DTFT de sequências não-absolutamente somáveis.

- Conclusão: Sequências compostas por combinação linear de sequências exponenciais complexas, apresar de não serem absolutamente somáveis, possuem uma transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT).

$$\sum_k a_k\, e^{j\omega_k n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

Exercício 5.3

- Calcule a DTFT para as sequências a seguir:
  - $a)\ x[n] = 1, \forall\, n$
  - $b)\ x[n] = \cos(\omega_0 n)$
  - $c)\ x[n] = sen(\omega_0 n)$

Exercício 5.3: solução

- $a)\ x[n] = 1, \forall\, n$
- $x[n]$ pode ser rescrita como:

$x[n] = e^{j0}$, e sabemos que:

$$\sum_k a_k\, e^{j\omega_k n} \leftrightarrow 2\pi \sum_k a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

- Logo:

$$x[n] = e^{j0} \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi\delta(\omega), \omega \in (-\pi, \pi]$$

Exercício 5.3: solução

- $b)\ x[n] = \cos(\omega_0 n)$

$x[n]$ pode ser escrita com uma combinação de exponencias complexas na forma:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}$$
$$\updownarrow$$
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}, \omega \in (-\pi, \pi]$$

Exercício 5.3: solução

- $c)\ x[n] = \mathrm{sen}(\omega_0 n)$

x[n] também pode ser escrita com uma combinação de exponencias complexas na forma:

$$x[n] = sen(\omega_0 n) = \frac{1}{2j}e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 n}$$

$$\updownarrow$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) = j\pi\{\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\}, \omega \in (-\pi, \pi]$$

Propriedades da DTFT

- 1) Linearidade

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 X_1(e^{j\omega}) + \alpha_2 X_2(e^{j\omega})$$

- 2) Deslocamento linear

$$\mathcal{F}\{x[n - M\} = e^{-j\omega M} X(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- 3) Multiplicação por uma sequência exponencial

$$\mathcal{F}\left\{e^{j\omega_0 n}x[n]\right\} = \mathrm{X}\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- 4) Diferenciação de $X(e^{j\omega})$

$$\mathcal{F}\,\{nx[n]\} = j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

Propriedades da DTFT

5) Convolução linear

$$\mathcal{F}\{x_1[n] * x_2[n]\} = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

6) Produto de sequências: Teorema da convolução complexa

$$\mathcal{F}\{x_1[n]x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\tau})X_2(e^{j(\omega-\tau)})d\tau$$

Propriedades da DTFT

7) Teorema do valor inicial

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$$

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = X(z)\Big|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

Propriedades da DTFT

- 8) Teorema de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right)X_2^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega$$

Propriedades da DTFT

- 9) Propriedades de simetria

$$a)\ x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

$$b)\ x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$$

$$c)\ x^*[-n] \leftrightarrow X^*(e^{j\omega})$$

Propriedades da DTFT

- Propriedades de simetria

(d) $Re\{x[n]\} \longleftrightarrow X_{cs}(e^{j\omega})$

($X_{cs}(e^{j\omega})$: parte conjugada simétrica de $X(e^{j\omega})$)

(e) $jIm\{x[n]\} \longleftrightarrow X_{ca}(e^{j\omega})$

($X_{ca}(e^{j\omega})$: parte conjugada anti-simétrica de $X(e^{j\omega})$)

Propriedades da DTFT

- Propriedades de simetria

(f) $x_{cs}[n] \longleftrightarrow X_R(e^{j\omega})$
($x_{cs}[n]$: parte conjugada simétrica de $x[n]$)
(g) $x_{ca}[n] \longleftrightarrow jX_I(e^{j\omega})$
($x_{ca}[n]$: parte conjugada anti-simétrica de $x[n]$)

Propriedades da DTFT

- Propriedades de simetria

(h) $x[n]$ é real $\Longleftrightarrow$

i. $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

ii. $X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$

$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$

iii. $X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$

$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$

iv. $x_{cs}[n] \longleftrightarrow X_R(e^{j\omega})$

v. $x_{ca}[n] \longleftrightarrow jX_I(e^{j\omega})$

Propriedades da DTFT

- 10) Sequência par e sequência ímpar

$x[n]$ é real e par $\Longleftrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ é real e par

$x[n]$ é real e ímpar $\Longleftrightarrow$ $X(e^{j\omega})$ é imaginária e ímpar

Exercício 5.4

- Calcule a DTFT de $x[n] = \cos(\omega_0 n)\cos(\omega_1 n)$ usando “inspeção+ propriedades” sabendo que:

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 n)\} = \pi\{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\}, \omega \in (-\pi, \pi]$$

Exercício 5.4: solução

- Neste caso, pode-se rescrever $x[n]$ como

$$x[n] = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}\cos(\omega_1 n) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\cos(\omega_1 n)$$

$$\cos(\omega_1 n) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}g[n] + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}g[n], \qquad \mathrm{g}[n] = \cos(\omega_1 n)$$

Exercício 5.4: solução

- Neste caso se usa a propriedade da multiplicação por uma sequência exponencial

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 n}x[n]\} = \mathrm{X}\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

- Podemos escrever a nossa DTFT como

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{G}\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{G}\left(e^{j(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_1 n)\} = G\left(e^{j\omega}\right) = \pi\{\delta(\omega-\omega_1)+\delta(\omega+\omega_1)\}, \omega \in (-\pi,\pi]$$

Exercício 5.4: solução

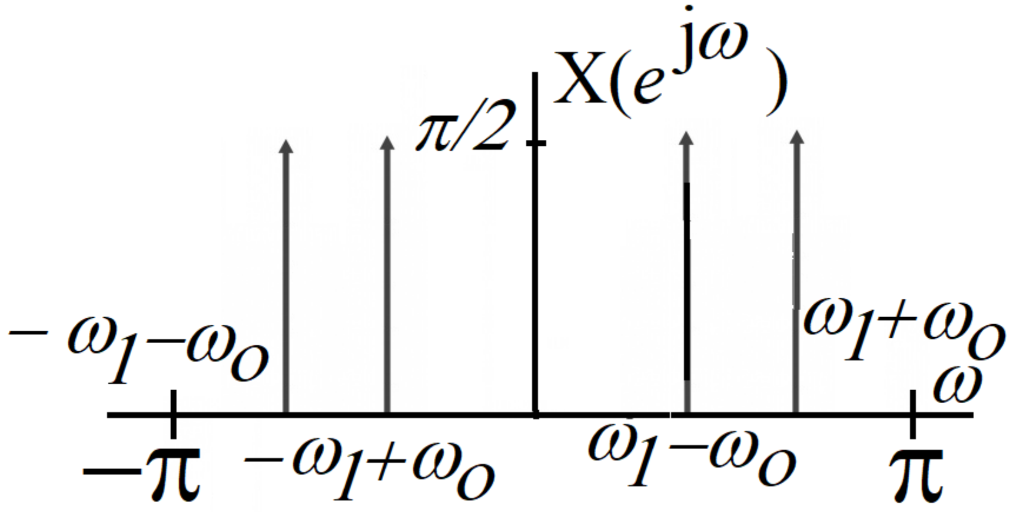
- Usando "inspeção+ propriedades":

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\pi\{\delta(\omega-\omega_1-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_1-\omega_0)\} + \frac{1}{2}\pi\{\delta(\omega-\omega_1+\omega_0)+\delta(\omega+\omega_1+\omega_0)\}$$

Exercício 5.4: solução

- Finalmente

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\pi\{\delta(\omega - \omega_1 - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_1 - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_1 + \omega_0) + \delta(\omega + \omega_1 + \omega_0)\}$$



Resposta em Frequência de um SLID

- Aplicando a DTFT na sequência de descreve a resposta impulsional de um SLID, obtém-se

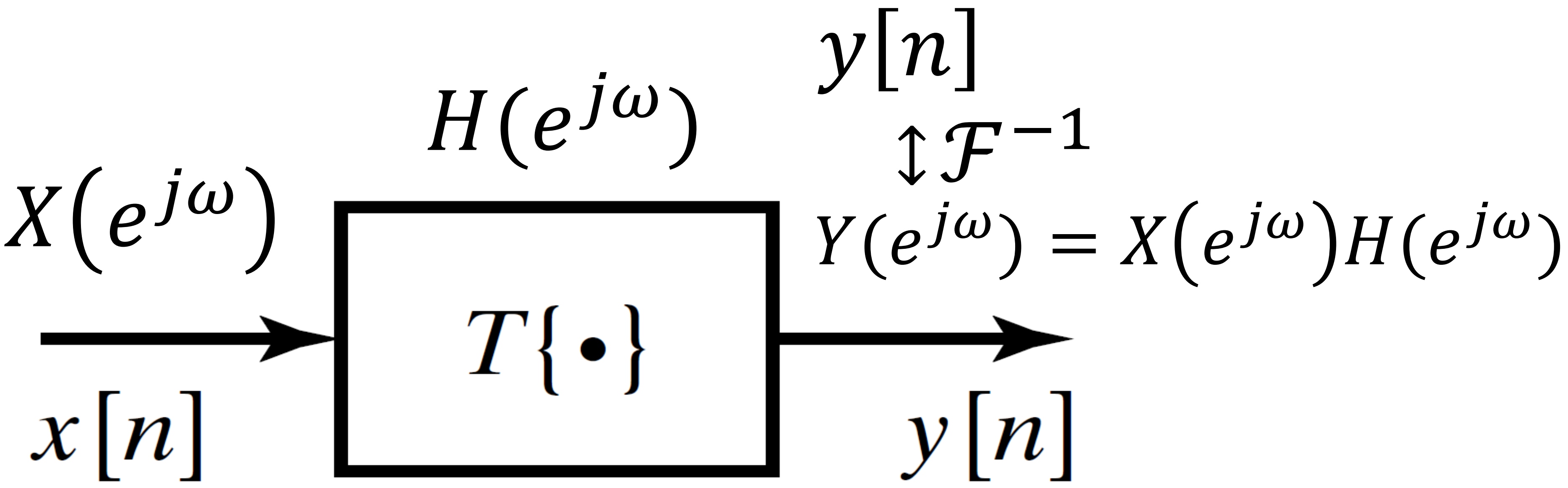
$$H(e^{j\omega}) \equiv \mathcal{F}\{h[\mathrm{n}]\} = \sum_{\mathrm{n}=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- Pela propriedade da convolução linear sabe-se que

$$y[n] = x[n] * h[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Um SLID pode resolvido no domínio da DTFT:



Resposta em Frequência de um SLID

- $H(e^{j\omega})$ é uma função complexa da variável complexa $e^{j\omega}$ e pode ser escrita na forma retangular ou na forma polar como

$$H(e^{j\omega}) = Re\{H(e^{j\omega})\} + jIm\{H(e^{j\omega})\} =$$
$$= |\mathrm{H}(e^{j\omega})|e^{\theta_H(\omega)}$$

Resposta em Frequência de um SLID

- O módulo $\left|H(e^{j\omega})\right|$ que corresponde a resposta de magnitude é calculado por

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{Re\{H(e^{j\omega})\}^2 + Im\{H(e^{j\omega})\}^2}$$

- A resposta de fase $\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right)$ é calculada por meio de

$$\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = \theta_H(\omega) = arctan\left(\frac{Im\{H(e^{j\omega})\}}{Re\{H(e^{j\omega})\}}\right)$$

Resposta em Frequência de um SLID

- A resposta de magnitude $\left|H(e^{j\omega})\right|$ é uma função par:

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|H(e^{-j\omega})\right|$$

- A fase $\sphericalangle H\left(e^{j\omega}\right)$ é uma função ímpar:

$$\sphericalangle H\left(e^{j\omega}\right) = \theta_H(\omega) = -\sphericalangle H\left(e^{-j\omega}\right) = -\theta_H\,(\omega)$$

Resposta de um SLID à uma entrada senoidal em regime permanente

- Considere a sequência de comprimento infinito como entrada do SLID: $x[n] = cos(\omega_0 n)$

$$y[n] = T\{x[n]\} = T\{cos(\omega_0 n)\} = T\left\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}T\{z^n + z^{-n}\}\Big|_{z=e^{j\omega_0}} = \frac{1}{2}T\{z^n\}\Big|_{z=e^{j\omega_0}} + \frac{1}{2}T\{z^n\}\Big|_{z=e^{-j\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{2}H(z)z^n\Big|_{z=e^{j\omega_0}} + \frac{1}{2}H(z)z^n\Big|_{z=e^{-j\omega_0}}$$

Resposta de um SLID à uma entrada senoidal em regime permanente

- Fazendo $z = e^{j\omega_0}$:

$$y[n] = \frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|e^{j\theta_H(\omega_0)}e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2}\left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|e^{-j\theta_H(\omega_0)}e^{-j\omega_0 n} =$$

$$\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\frac{e^{j(\omega_0 n+\theta_H(\omega_0))}+e^{-j(\omega_0 n+\theta_H(\omega_0))}}{2} = \boldsymbol{\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n + \theta_H(\omega_0)\right)}$$

Função de transferência de um SLID

- Observe que $H(e^{j\omega})$ é da forma:

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

$$= \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2\left(e^{-j\omega}\right)^2 + \cdots + b_M\left(e^{-j\omega}\right)^M}{a_0 + a_1 e^{-j\omega} + a_2(e^{-j\omega})^2 \ldots + a_N(e^{-j\omega})^N} = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})}$$

Resposta em Frequência de um SLID

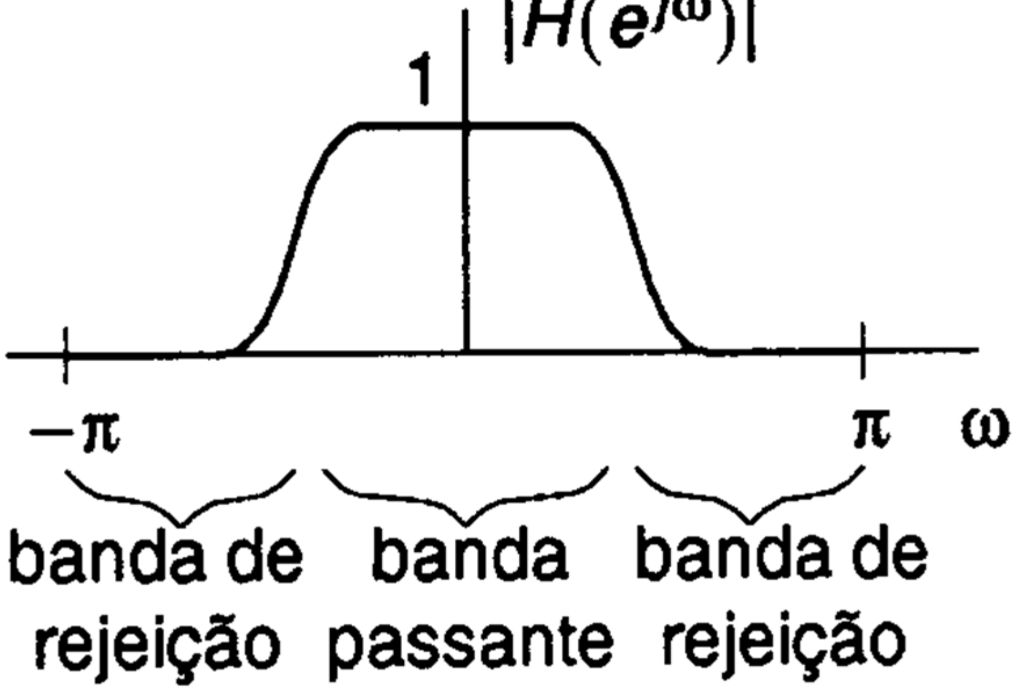
- $H(e^{j\omega})$ ainda pode ser representada como

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \frac{Re\{N(e^{j\omega})\} + jIm\{N(e^{j\omega})\}}{Re\{D(e^{j\omega})\} + jIm\{D(e^{j\omega})\}}$$

$$= \frac{|\mathrm{N}(e^{j\omega})|e^{j\theta_N(\omega)}}{|\mathrm{D}(e^{j\omega})|e^{j\theta_D(\omega)}} = \frac{|\mathrm{N}(e^{j\omega})|}{|\mathrm{D}(e^{j\omega})|} e^{j(\theta_N(\omega) - \theta_D(\omega))}$$

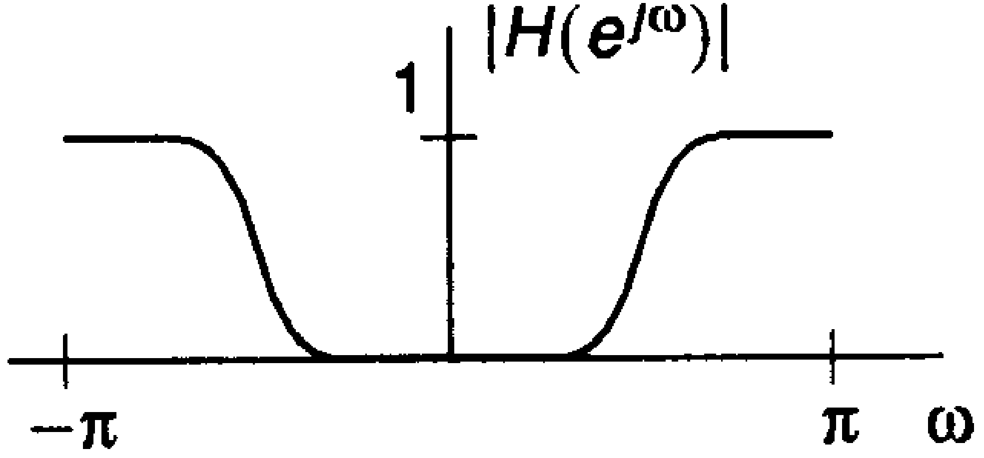
Classificação dos SLIDs de acordo com sua resposta em frequência

Filtro passa-baixas:



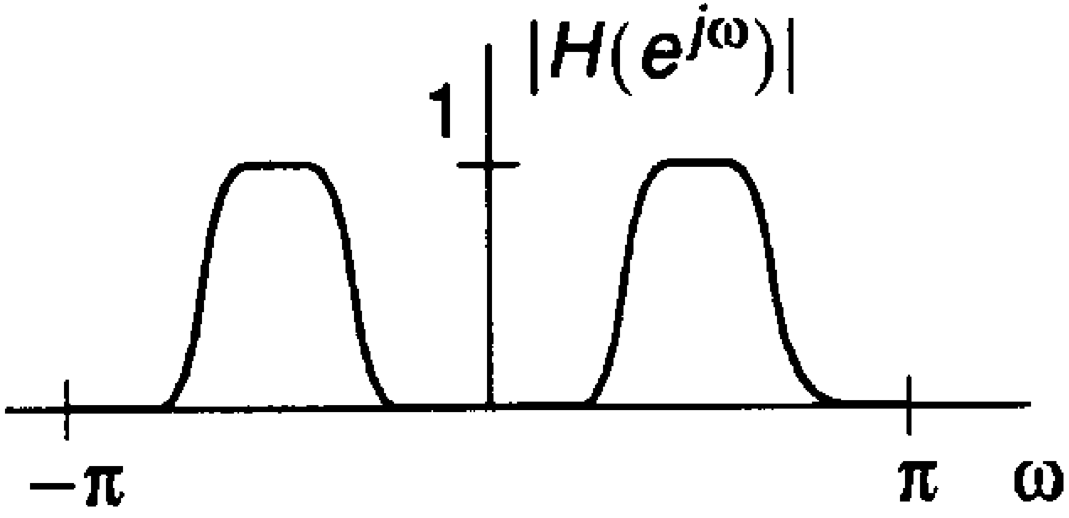
Classificação dos SLIDs de acordo com sua resposta em frequência

Filtro passa-altas:



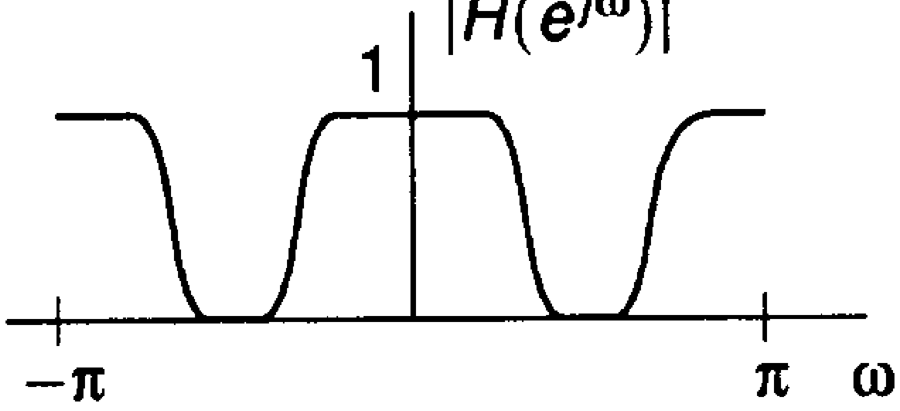
Classificação dos SLIDs de acordo com sua resposta em frequência

Filtro passa-faixa:



Classificação dos SLIDs de acordo com sua resposta em frequência

Filtro rejeita-faixa:



Resposta em Frequência de um SLID

- $N(e^{j\omega})$ pode ser escrito na forma fatorada como:

$$N(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow \left(1 - z_1 e^{-j\omega}\right)\left(1 - z_2 e^{-j\omega}\right) \ldots \left(1 - z_M e^{-j\omega}\right)$$

$$z_r, \qquad r = 1,2,\ldots,M \; são \; os \; zeros \; de \; H(z).$$

- Analogamente, $D(e^{j\omega})$ pode ser escrito como:

$$D(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow \left(1 - p_1 e^{-j\omega}\right)\left(1 - p_2 e^{-j\omega}\right) \ldots \left(1 - p_N e^{-j\omega}\right)$$

$$z_k, \qquad k = 1,2,\ldots,N \; são \; os \; polos \; de \; H(z).$$

Resposta em Frequência de um SLID

- $H(e^{j\omega})$ pode ser representada também na forma compacta

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{r=1}^{M}(1 - z_r e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})}$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Podemos rescrever $H(e^{j\omega})$ multiplicando no numerador e no denominador por $e^{j\omega N}$ e por $e^{j\omega M}$.

$$H(e^{j\omega}) = \frac{N(e^{j\omega})}{D(e^{j\omega})} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{r=1}^{M}(1 - z_r e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - p_k e^{-j\omega})} \frac{e^{j\omega N}}{e^{j\omega N}} \frac{e^{j\omega M}}{e^{j\omega M}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{b_0}{a_0} e^{j\omega(N-M)} \frac{\prod_{r=1}^{M}(e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega} - p_k)}$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Resposta de magnitude na forma fatorada pode ser postulada na forma

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{\left|N\left(e^{j\omega}\right)\right|}{\left|D\left(e^{j\omega}\right)\right|} = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{r=1}^{M}\left|e^{j\omega} - z_r\right|}{\prod_{k=1}^{N}\left|e^{j\omega} - p_k\right|}$$

- A resposta de fase também pode ser obtida a partir da forma fatorada

$$\measuredangle H\left(e^{j\omega}\right) = \measuredangle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \omega(N - M) + \sum_{r=1}^{M} \measuredangle\left(e^{j\omega} - z_r\right) - \sum_{k=1}^{N} \measuredangle\left(e^{j\omega} - p_k\right)$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Desenvolvendo um termo do denominador de $H\left(e^{j\omega}\right)$ para o polo p_k

$$e^{j\omega} - p_k = \cos(\omega) - jsen(\omega) - (Re\{p_k\} + jIm\{p_k\}) =$$
$$= \cos(\omega) - Re\{p_k\} - j\{sen(\omega) - Im\{p_k\}\}$$

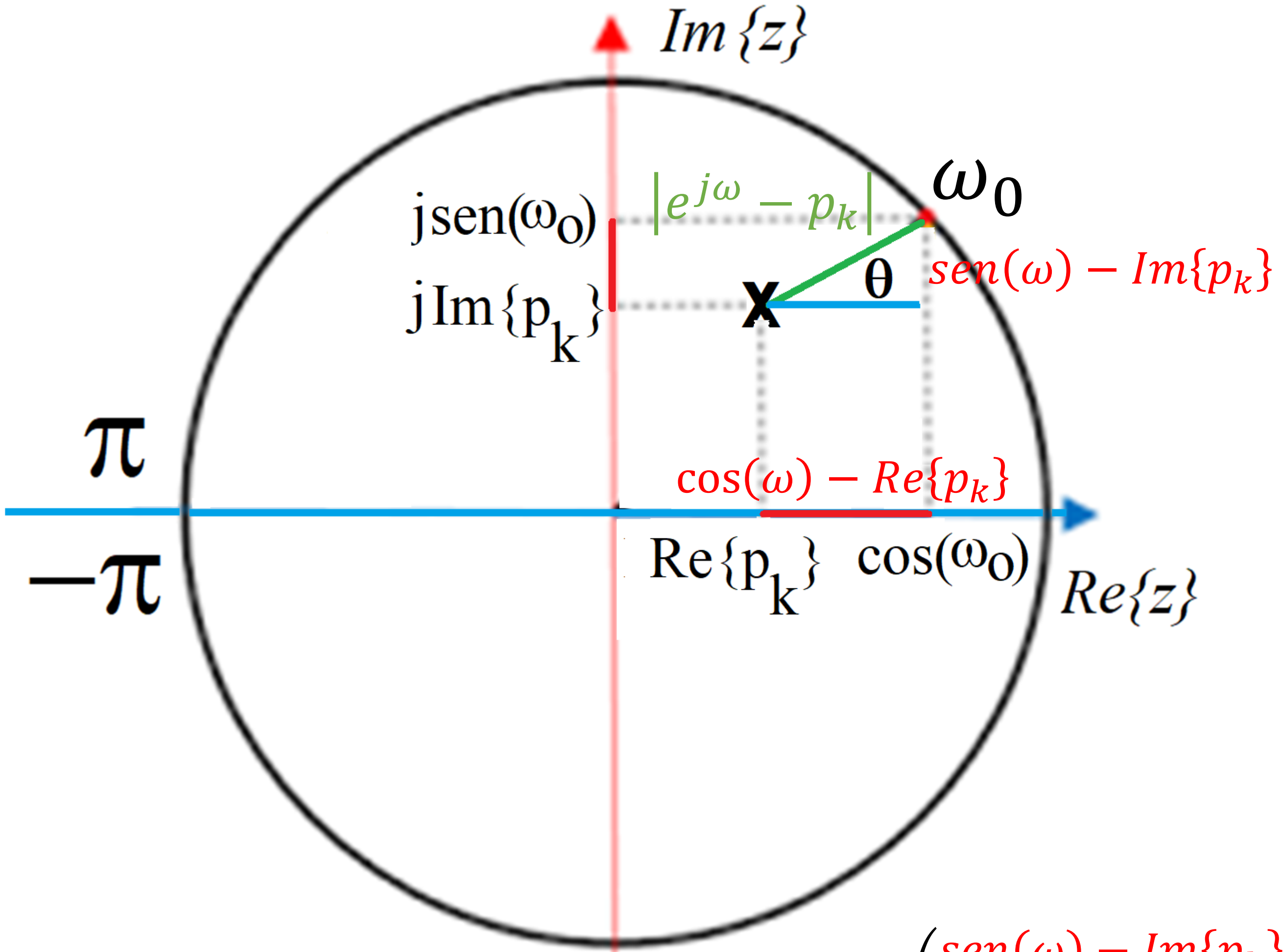
- Calculando o módulo e a fase do termo

$$\left|e^{j\omega} - p_k\right| = \sqrt{(\cos(\omega) - Re\{p_k\})^2 + (sen(\omega) - Im\{p_k\})^2}$$
$$\measuredangle\left(e^{j\omega} - p_k\right) = arctan\left(\frac{sen(\omega) - Im\{p_k\}}{\cos(\omega) - Re\{p_k\}}\right)$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Interpretação gráfica.

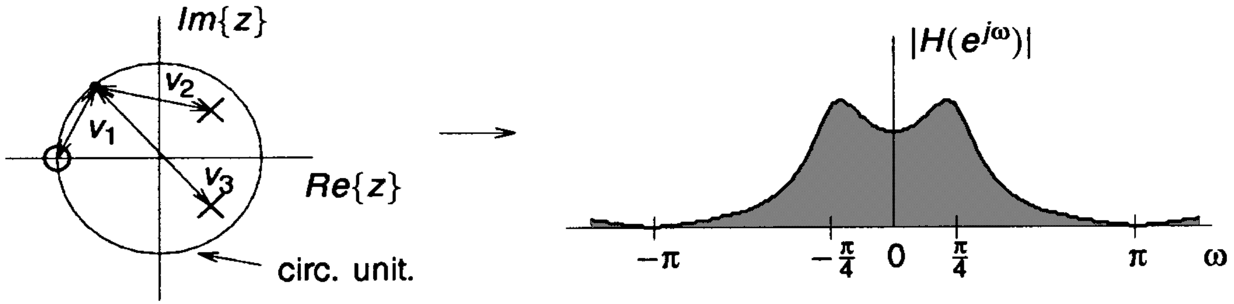
$$\left|e^{j\omega} - p_k\right| = \sqrt{(\cos(\omega) - Re\{p_k\})^2 + (sen(\omega) - Im\{p_k\})^2}$$



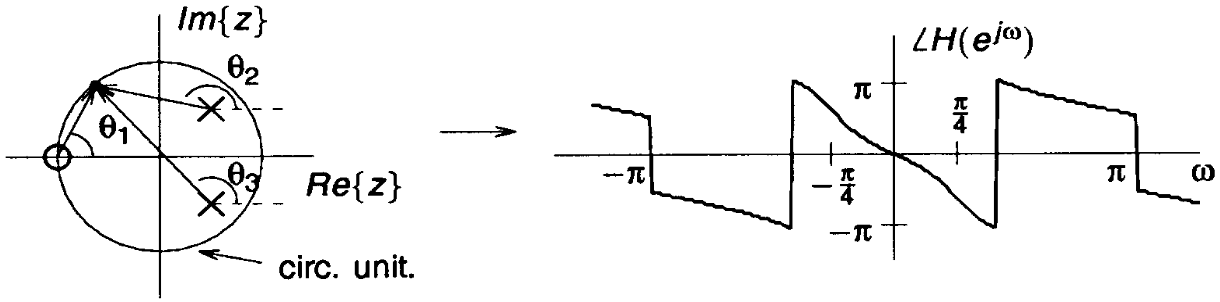
$$\theta = \sphericalangle\left(e^{j\omega} - p_k\right) = arctan\left(\frac{sen(\omega) - Im\{p_k\}}{\cos(\omega) - Re\{p_k\}}\right)$$

Resposta em Frequência de um SLID

- Resposta em frequência a partir de diagrama de polos e zeros



$$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{|v_1|}{|v_2||v_3|}$$



$$|H(e^{j\omega})| = \angle\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \omega + \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$$

Resposta em frequência em deciBeis

- A resposta de magnitude em frequência em deciBeis (Hendrik Wade Bode: 1905 – 1982) é definida como

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|H(e^{j\omega})\right|$$
$$= 20\log_{10}\left|N\left(e^{j\omega}\right)\right| - 20\log_{10}\left|D(e^{j\omega})\right|$$

Resposta em frequência em deciBeis

- Aplicando a definição de decibéis em $H\left(e^{j\omega}\right)$ na forma fatorada resulta:

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{dB}$$
$$= 20\left\{\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{r=1}^{M}\log_{10}\left|e^{j\omega} - z_r\right| - \sum_{k=1}^{N}\log_{10}\left|e^{j\omega} - p_k\right|\right\}$$

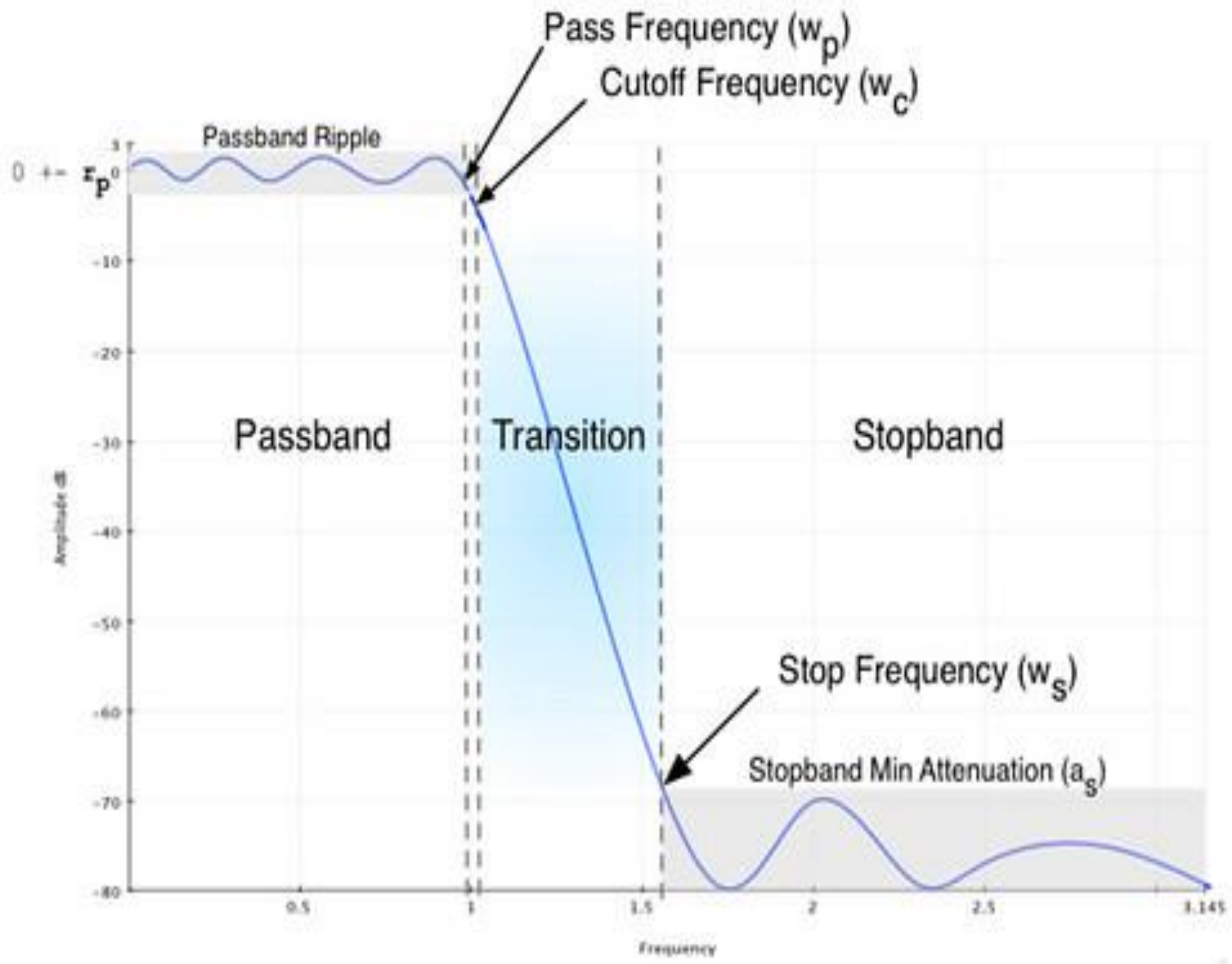
Resposta em frequência em deciBeis

- $\left|H(e^{j\omega})\right|_{dB}$ pode ser representada como:

$$\left|H(e^{j\omega})\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + 20\sum_{r=1}^{M}\log_{10}\sqrt{(\cos(\omega) - Re\{z_r\})^2 + (sen(\omega) - Im\{z_r\})^2} - 20\sum_{k=1}^{N}\log_{10}\sqrt{(\cos(\omega) - Re\{p_k\})^2 + (sen(\omega) - Im\{p_k\})^2}$$

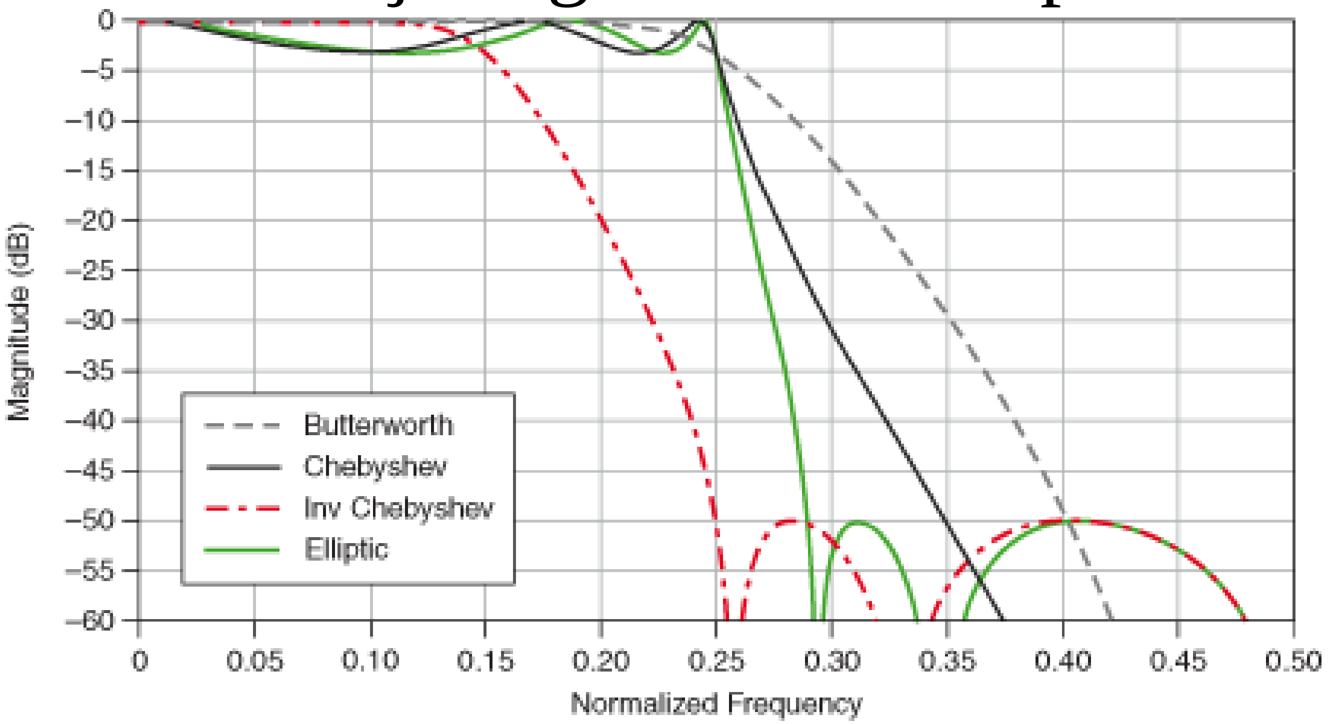
Resposta em frequência em deciBeis

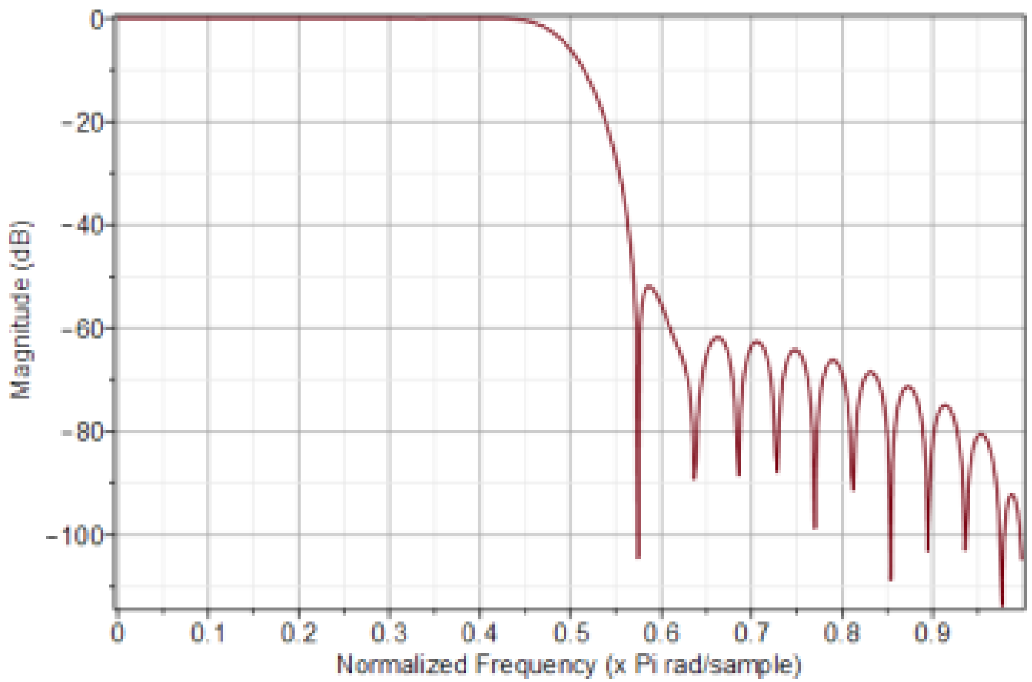
- Filtro digital



Resposta em frequência em deciBeis

- Ilustrações gráficas de resposta em frequência de filtros digitais





Exercício 5.5

- Determinar a resposta em frequência para a média móvel para N = 5. Determine o diagrama de polos e zeros

$$Média\ móvel: y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$$

Exercício 5.5: solução

- Tomando a transformada z da média móvel e obtendo a função de transferência, resulta:

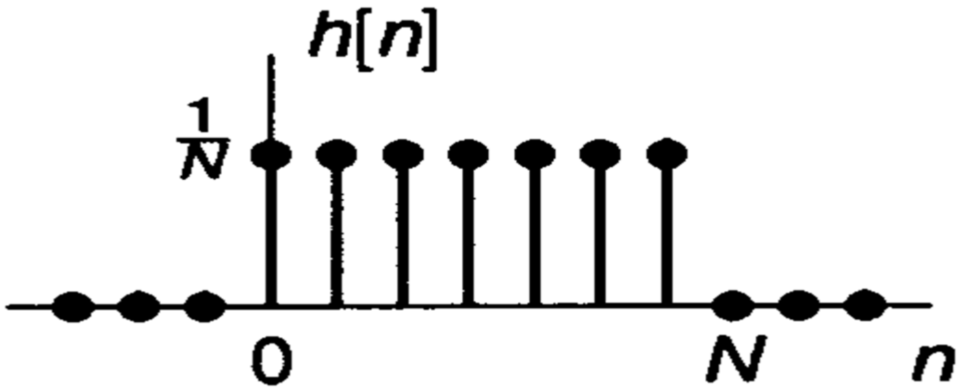
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{N}\left(1 + z^{-1} + \cdots + z^{-N+1}\right)$$

Exercício 5.5: solução

- Fazendo $H(z)|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})$ obtem-se

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\left(1 + e^{-j\omega} + \cdots + e^{-j\omega(N+1)}\right)$$

Exercício 5.5: solução



- Existe outras solução no qual se implementa a média móvel de forma recursiva.
- Observe que $h[n]$ pode ser escrita como uma combinação linear de degraus unitários, na forma:

$$h[n] = \frac{1}{N}(u[n] - u[n-N+1]) \leftrightarrow H(z) = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}\right)$$

Exercício 5.5: solução

- A DTFT de $H(e^{j\omega})$ pode ser obtida fazendo $H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z=e^{j\omega}} \leftrightarrow H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}$$

Exercício 5.5: solução

- Multiplicando $H\left(e^{j\omega}\right)$ no numerador e no denominador por $e^{j\omega\frac{N}{2}}$ e por $e^{j\frac{1}{2}\omega}$, resulta

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}}\frac{e^{j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\omega\frac{N}{2}}}\frac{e^{j\frac{1}{2}\omega}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}} = \frac{1}{N}\frac{e^{j\omega\frac{N}{2}}-e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\frac{1}{2}\omega}-e^{-j\frac{1}{2}\omega}}\frac{e^{j\frac{1}{2}\omega}}{e^{j\omega\frac{N}{2}}}$$

Exercício 5.5: solução

- $H(e^{j\omega})$ pode ser expressa como:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N}\frac{\left(e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}\right)/2j}{\left(e^{j\frac{1}{2}\omega} - e^{-j\frac{1}{2}\omega}\right)/2j}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{sen\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\omega\right)}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}$$

Exercício 5.5: solução

- A resposta de magnitude pode ser escrita como

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{sen\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right|$$

Exercício 5.5: solução

- A resposta de fase é dada por

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \theta_H(\omega) = arctan\left\{\frac{-sen\left(\omega\frac{N-1}{2}\right)}{cos\left(\omega\frac{N-1}{2}\right)}\right\}$$

$$= -arctan\left\{tan\left(\omega\frac{N-1}{2}\right)\right\}$$

$$= -\omega\frac{N-1}{2}\ (fase\ estritamente\ linear)$$

Exercício 5.5: solução

- Atraso de grupo, definição:

$$Tg(\omega) \equiv -\frac{\partial \theta_H(\omega)}{\partial \omega}$$

- Calculando o atraso de grupo para o exemplo dado

$$Tg(\omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega}\left\{-\omega\frac{N-1}{2}\right\} = \frac{N-1}{2}\ amostras$$

Exercício 5.5: solução

- Zeros de $H\left(e^{j\omega}\right)$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{1}{N}\left|\frac{sen\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\omega\right)}\right| = 0, então \left|sen\left(\frac{N}{2}\omega\right)\right| = 0$$

- Tem-se a condição de contorno

$$\omega\frac{N}{2} = k\pi \Longrightarrow \omega = k\frac{2\pi}{N} \rightarrow frequencia\ dos\ zeros\ de\ H\left(e^{j\omega}\right)$$

Exercício 5.5: solução

- Observe que

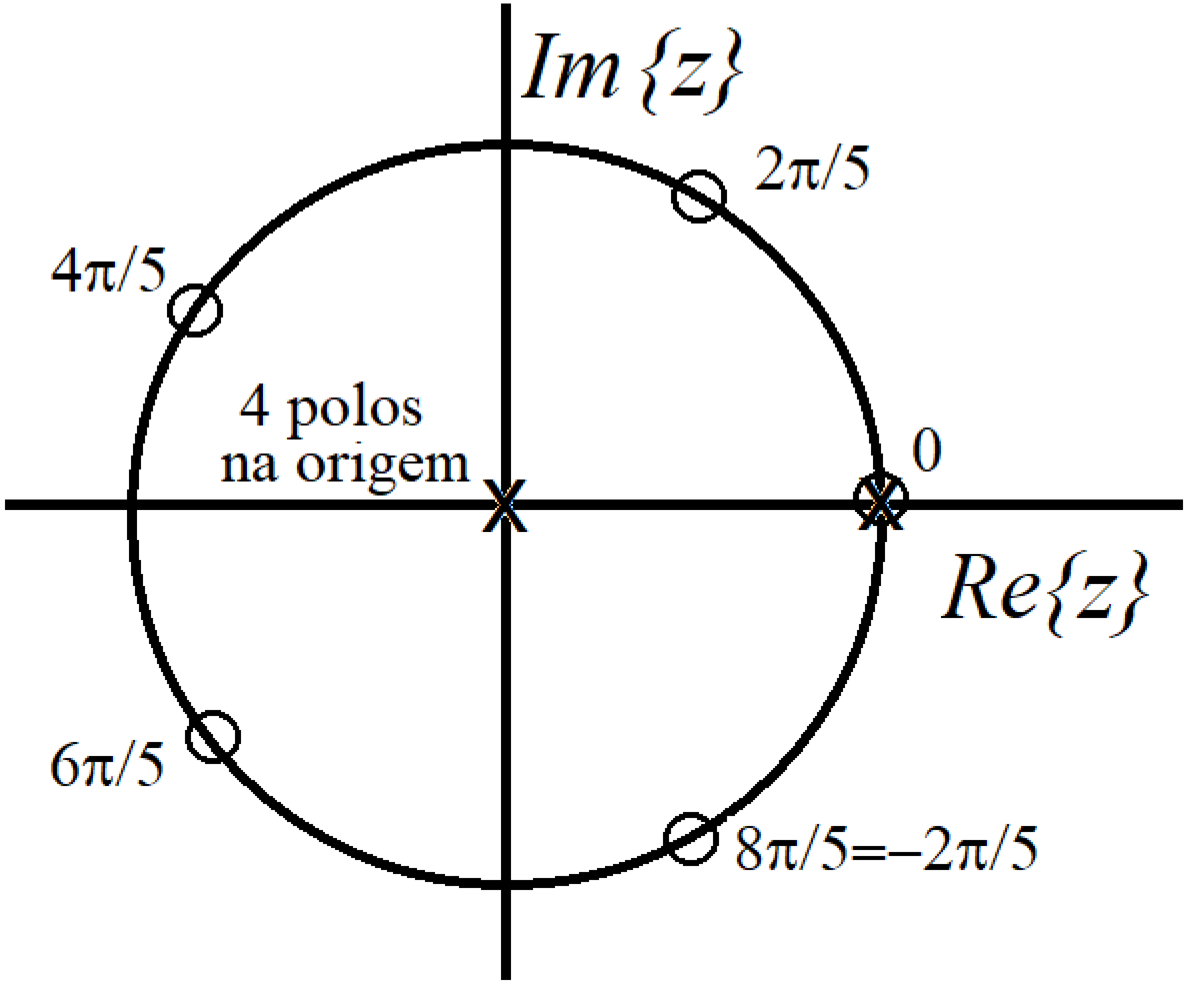
$$H(z) = \frac{1}{N}\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}\frac{z^N}{z^N} = \frac{1}{N}\frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

- Fazendo N = 5, obtemos

$$H(z) = \frac{1}{5}\frac{z^5 - 1}{z^4(z-1)} \qquad \omega = k\frac{2\pi}{5} \rightarrow zeros\ de\ H\left(e^{j\omega}\right)$$

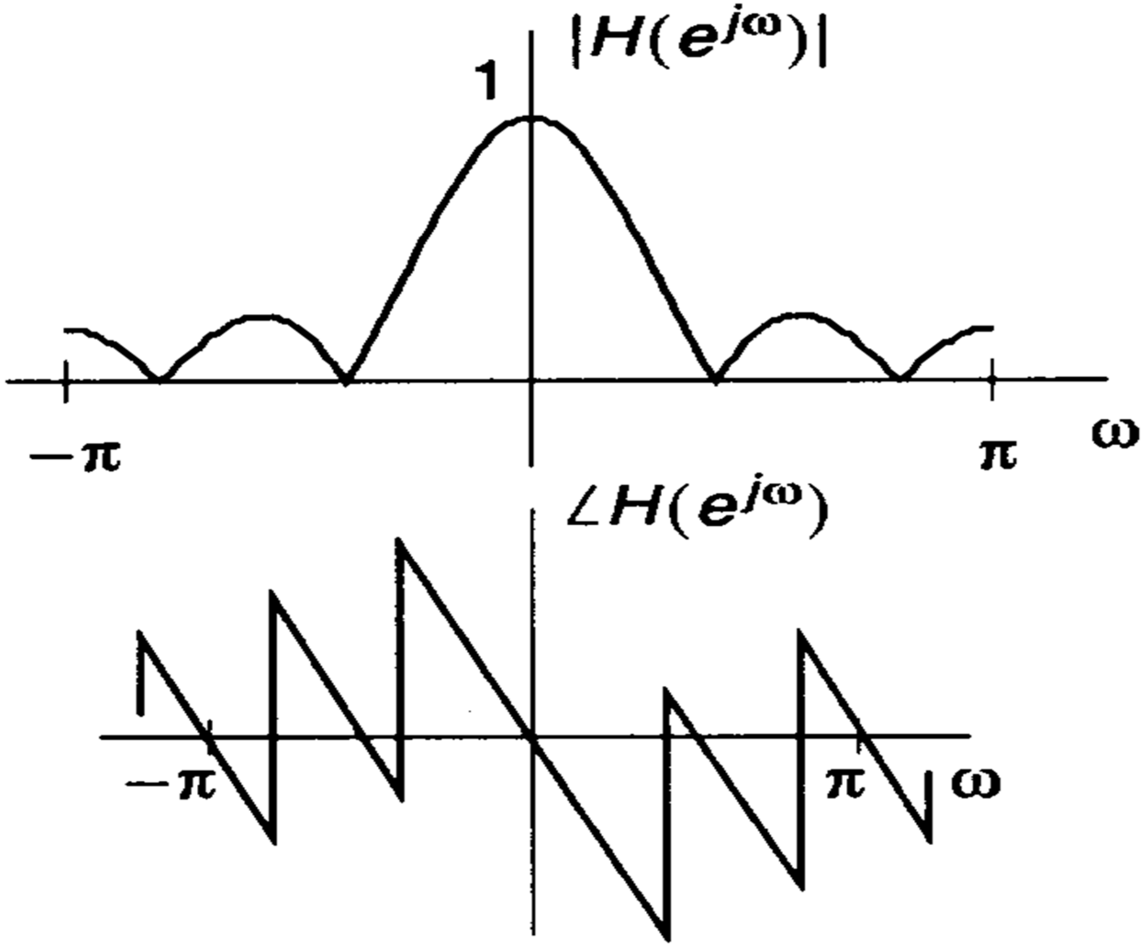
Exercício 5.5: solução

- Configuração de polos e zeros para a média móvel com N = 5.



Exercício 5.5: solução

- A resposta de Magnitude e de fase da média móvel com N = 5 pode ser postada como ilustrado a seguir



Exercício 5.6

Fim do Módulo 5