Questionário 4

Princípios de Comunicação

Autoria	**Matrícula**
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação

Universidade de Brasília

07 de Março de 2021

Questão 1

Determine a resposta impulsional e a resposta em frequência (transformada de Fourier da resposta impulsional) dos seguintes filtros:

(a) (1,00) Passa-altas ideal de frequência de corte B, ganho G e atraso de grupo de t_f;

Resolução:

Podemos pensar primeiro na resposta em frequência em que conhecemos, e como deve ser um filtro do tipo passa-altas pensamos logo que ele deve ser da forma $H(f) = 1 - rect(f)$, porém devemos agora aplicar o ganho G, a frequência de corte N e pensando no atraso de grupo sabemos que este é dado por um atraso do sinal no domínio do tempo, assim, o sinal no domínio da frequência será multiplicado por uma exponencial complexa:

$H(f) = \Big(1 - rect(\dfrac{f}{2B})\Big)Ge^{-j2\pi f t_f}$

$H(f) \rightleftharpoons h(t)$

$h(t) = F\{Ge^{-j2\pi f t_f}\} - F\{Ge^{-j2\pi f t_f} rect(\dfrac{f}{2B})\}$

Pela multiplicação por exponencial no domínio da frequência, e pela transformada inversa de rect:

$h(t) = G\delta(t - t_f) - 2GBsinc(2B(t - t_f))$

(b) (2,00) Rejeita-faixa ideal de frequência central f_1, faixa de passagem B, ganho G e atraso de grupo de t_f.

Resolução:

Aqui podemos pensar que um filtro rejeita-faixas é do tipo do exemplo anterior, porém, com a diferença de que a rect deve estar deslocada da frequência central f_1, outra diferença é que agora devemos ter 2 rect, uma para valores positivos de f e outro para valores negativos de f, logo, o sinal será da forma:

$$H(f) = 1 - rect(f - f_1) - rect(f + f_1)$$

Passamos agora para aplicar o ganho G, a banda de passagem de B, e o atraso de grupo no domínio do tempo t_f, logo, multiplicaremos por uma exponencial complexa no domínio da frequência, e a resposta em frequência será:

$$H(f) = \Big(1 - rect(\frac{f - f_1}{B} - rect(\frac{f + f_1}{B}))\Big)Ge^{-j2\pi f t_f}$$

Aplicando a transformada inversa, lembrando que um deslocamento na frequência resulta em uma multiplicação por exponencial complexa no domínio do tempo:

$$h(t) = G\delta(t - t_f) - GBsinc(B(t - t_f))e^{j2\pi f_1 t} - GBsinc(B(t - t_f))e^{-j2\pi f_1 t}$$
$$h(t) = G\delta(t - t_f) - GBsinc(B(t - t_f))(e^{j2\pi f_1 t} + e^{-j2\pi f_1 t})$$
$$h(t) = G\delta(t - t_f) - 2GBsinc(B(t - t_f))cos(2\pi f_1 t)$$

Questão 2

O sinal $x(t) = 2sinc(40t)$ é transmitido por um sistema linear e invariante ao deslocamento, observando-se em sua saída o sinal $y(t) = -20sinc(40t - 200)$.

(a) (1,00) Determine a função de transferência $H(f)$ do sistema;

Resolução:

Sabemos que $H(f) = Y(f)X(f)$, então, buscaremos Y(f) e X(f) para obter H(f):

$$y(t) = -20sinc(40t - 200) = -20sinc(40(t - 5))$$
$$y(t) \rightleftharpoons Y(f)$$
$$Y(f) = -20 \cdot \frac{1}{40}rect(\frac{f}{40})e^{-j10\pi f}$$
$$x(t) = 2sinc(40t) \rightleftharpoons X(f) = 2 \cdot \frac{1}{40}rect(\frac{f}{40})$$

Voltando para H(f):

$$H(f) = -10e^{-j10\pi f}$$

(b) (2,00) Obtenha a expressão matemática para sua resposta de amplitude e de fase, além de seus respectivos gráficos, considerando $|f| \leq 30Hz$.

Resolução:

$$|H(f)| = |-10| \cdot |e^{-j10\pi f}|$$
$$|H(f)| = 10$$
$$\angle H(f) = \angle(-10) + \angle(e^{-j10\pi f})$$
$$\angle H(f) = \begin{cases} +\pi - 10\pi f \ , \ f < 0 \\ -\pi - 10\pi f \ , \ f > 0 \end{cases}$$

Com estas expressões conseguimos obter os gráficos para amplitude e fase:

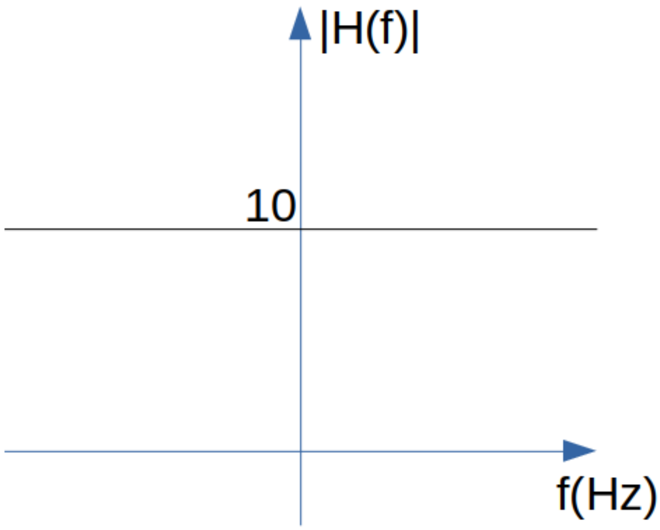

Figura 1: Amplitude

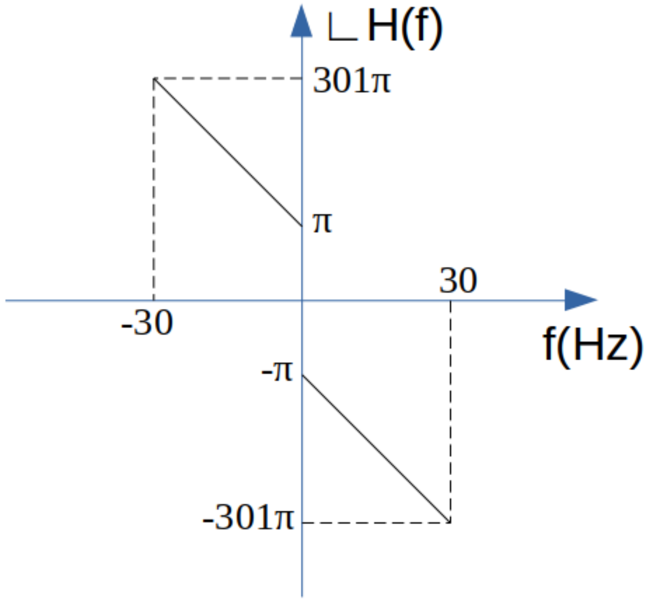

Figura 2: Fase

Questão 3

Considere um sistema cuja função de transferência é:

$$H(f) = \frac{jf}{B + jf} \tag{1}$$

(a) (0,50) Determine o tipo de filtro que essa função de transferência representa, justificando sua resposta;

Para responder este item analisaremos H(f) em termos da sua resposta em fase e amplitude, de forma que:

$$H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$$

Assim, temos:

$$|H(f)| = \left|\frac{jf}{B+jf}\right| = \frac{f}{\sqrt{B^2+f^2}}$$
$$\angle H(f) = \angle(jf) - \angle(B) - \angle(jf) = -\angle(B)$$
Como B é um número puramente real:
$$\angle H(f) = \begin{cases} \pi \ , \ f < 0 \\ -\pi \ , \ f > 0 \end{cases}$$
Voltando para H(f):
$$H(f) = \frac{f}{\sqrt{B^2+f^2}} \cdot \begin{cases} e^{j\pi} \ , \ f < 0 \\ e^{-j\pi} \ , \ f > 0 \end{cases}$$
Em que pela relação de Euler $e^{j\pi} = e^{-j\pi} = -1$:
$$H(f) = -\frac{f}{\sqrt{B^2+f^2}}$$

Dessa maneira, para analisarmos o comportamento do filtro, fazemos:

$$\lim_{f\to 0} H(f) = 0$$
$$\lim_{f\to \infty} H(f) = -1$$
$$\lim_{f\to \infty} H(f) = 1$$

Portanto, pode-se perceber que este é um filtro passa-altas.

(b) (0,50) Discuta o significado do parâmetro B, justificando sua resposta;

Quanto maior o parâmetro B mais o filtro irá filtrar frequências menores, ou seja, quando aumenta-se o B aumenta-se também a banda passante do filtro.

Para comprovar, foi plotado o gráfico de H(f) para alguns valores de B(1,5,10):

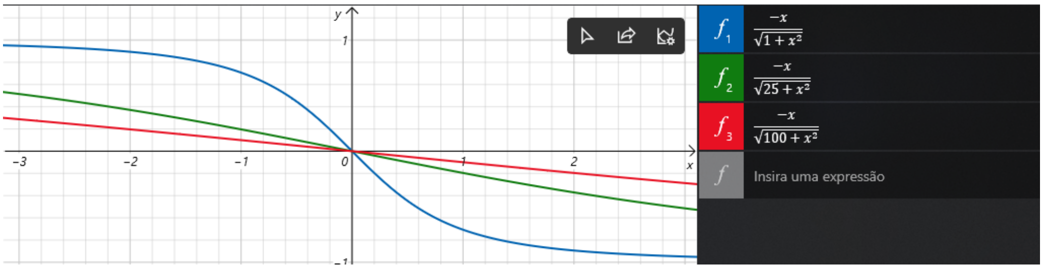

Figura 3: H(f)

(c) (2,00) Considere que o sinal $x(t) = 4cos(2\pi f_0 t) + \frac{4}{9}cos(6\pi f_0 t) + \frac{4}{25}cos(10\pi f_0 t)$ é injetado na entrada do sistema. Determine a saída $y(t)$ do sistema tomando $B = 3f_0$;

Resolução:

Para achar y(t) primeiro temos de achar Y(f). Para isso, iremos achar X(f) utilizando do escalonamento:

$$x(t) \rightleftharpoons X(f)$$
$$X(f) = 2(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) + \frac{2}{27}\Big(\delta(\frac{f - f_0}{3}) + \delta(\frac{f + f_0}{3})\Big) + \frac{2}{125}\Big(\delta(\frac{f - f_0}{5}) + \delta(\frac{f + f_0}{5})\Big)$$

Fazendo agora Y(f)=H(f)X(f), porém, pegaremos somente o primeiro termo para tornar mais fácil o entendimento:

$$G(f) = \frac{jf}{B + jf}2\delta(f - f_0)$$
$$g(t) \rightleftharpoons G(f)$$
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}df$$
$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{jf}{B + jf}2\delta(f - f_0)e^{j2\pi ft}df$$

Note que neste ponto, a integral se resume ao valor do que acompanha o impulso no instante f_0, assim:

$$g(t) = 2\frac{j}{3 + j}e^{j2\pi f_0 t}$$

Portanto, usando essa relação e a propriedade do escalonamento temporal para os casos que precisarem:

$$y(t) = 2\frac{j}{3+j}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) + \frac{2}{9}\cdot\frac{j}{3+j}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}) + \frac{2}{25}\cdot\frac{j}{3+j}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

$$y(t) = (2 + \frac{2}{9} + \frac{2}{25})\frac{j}{3+j}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

$$y(t) = \frac{518}{225}\cdot\frac{j}{3+j}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

(d) (1,00) A partir da análise das características do sinal do item "c", o sistema é distorcivo para o sinal em questão? Justifique. Em caso afirmativo, determine o tipo de distorção introduzida pelo sistema.

Resposta:

É um sistema não distorcivo, pelo fato de que y(t) mantém as características do sinal, pois apenas ele é alterado em amplitude, que não carateriza uma distorção do sinal. Já analisando a fase, ela mostra uma distorção linear, pelo fato das exponenciais complexas, porém, o sinal pode ser recuperado, o que não carateriza uma distorção não linear, assim, o sistema é não distocivo.