A Série e a Transformada Discreta de Fourier

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Considere $\{w_k[n]\}_{k=0,1,\ldots,N-1}$, um conjunto de sequências de comprimento N amostras, tal que

$$< w_k[n].w_r[n] > = \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n]w_r[n] = 0 se\ k \neq r.$$

$$< w_k[n].w_k[n] > = \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n]w_k[n] = \sum_{n=0}^{N-1} |w_k[n]|^2 = \|w_k[n]\|^2$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Este conjunto de sequências é dito um conjunto ortogonal de ortogonal de sequências.
- Gostaríamos de aproximar um período de uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ de período N amostras por:

$$\tilde{x}[n] \cong \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, w_k[n]$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- O erro médio quadrático desta aproximação pode ser calculado por meio de

$$\xi = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|\tilde{x}[n] - \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\, w_k[n]\right|^2$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Gostaríamos de achar $\alpha_r, r = 0, 1, \ldots, N-1$ de forma a minimizar o erros médio quadrático entre a sequência original e sua aproximação por meio da série finita.
- Para achar o mínimo da função erro ξ com respeito aos coeficientes da série, precisamos derivar ξ com respeito a todos os coeficientes e igualar a 0(zero).
- Como ξ é um paraboloide com concavidade para cima essa condição já nos indicará a condição de mínimo.

- Assim, é necessário fazer:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_r} = 0, r = 0, 1, \dots, N - 1$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Tomando a derivada parcial com respeito a α_r resulta

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_r} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial \alpha_r}\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left|\tilde{x}[n] - \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k\, w_k[n]\right|^2\right) = 0$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Desenvolvendo a derivada

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha_r} = -\frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} 2\left(\tilde{x}[n] - \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, w_k[n]\right) w_r[n] = 0$$

$$-\sum_{n=0}^{N-1} w_r[n]\tilde{x}[n] + \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, w_k[n] w_r[n] = 0$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Invertendo a ordem dos somatórios no segundo termo da equação, resulta

$$-\sum_{n=0}^{N-1} w_r \tilde{x}[n] + \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \sum_{n=0}^{N-1} w_k[n] w_r = 0$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Face à ortogonalidade

$$-\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]w_r[n] + \alpha_r \sum_{k=0}^{N-1} w_r^2[n] = 0$$

- Isolando α_r podemos escrever:

$$\alpha_r = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]w_r[n]}{\sum_{k=0}^{N-1} w_r^2[n]} = \frac{< \tilde{x}[n].w_r[n] >}{\|w_r[n]\|^2}, r = 0, 1, \dots, N-1$$

Representação de uma sequência genérica pala combinação de sequências ortogonais

- Assim, o coeficiente "ótimo" com respeito ao erro médio quadrático pode ser calculado por meio de

$$\alpha_r = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] w_r[n]}{\sum_{k=0}^{N-1} w_r[n] w_r[n]} = \frac{< \tilde{x}[n]. w_r\,[n] >}{\|w_r[n]\|^2}, r = 0, 1, \dots, N-1$$

- Isso é válido para qualquer conjunto de sequências ortogonais.
- Esse conjunto (ortogonal e completo) também é chamado de base para a representação de um sinal em tempo discreto

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- Considere uma sequência periódica $\tilde{x}[n]$ de período N amostras

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN], k = 1, 2, \ldots$$

- Como $\tilde{x}[n]$ é periódica com período N amostras, a sua frequência fundamental pode ser calculada por meio de

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- As sequências exponenciais complexas são da forma

$$\tilde{e}_k[n] = e^{j\omega_0 kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{e}_k[n + kN], k = 1, 2, \ldots$$

- Observe que $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ corresponde à frequência fundamental e $\omega_0 k = \frac{2\pi}{N}k$ são as componentes (harmônicos) de ordem superior.

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- É fácil mostrar que as exponenciais complexas são ortogonais entre si quando $k \neq r,\ k, r \in \mathbb{Z}$.

$$< e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.\, e^{j\frac{2\pi}{N}rn} > = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = 0\ se\ k \neq r.$$

A Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- Analogamente, é fácil mostrar que a norma quadrática das sequências exponenciais complexas apresentam o mesmo valor para todas as frequências

$$< e^{j\frac{2\pi}{N}kn}.e^{j\frac{2\pi}{N}kn} >$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left|e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right|^2 = \left\|e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\right\|^2 = N$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- A sequência periódica $\tilde{x}[n]$ pode ser escrita como uma combinação linear de sequências exponenciais complexas na forma

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- onde

$$a_k = \frac{< \tilde{x}[n].\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} >}{\left\| e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \right\|^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] \, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- Por convenção faz-se:

$$a_k = \frac{\tilde{X}[k]}{N}$$

- $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ é denominado "coeficiente da série discreta de Fourier".

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- A série discreta de Fourier pode ser postulada como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- Notação para a DFS

$$\tilde{X}[k] = DFS\{\tilde{x}[n]\}$$

$$\tilde{x}[n] = DFS^{-1}\{\tilde{X}[k]\}$$

$$\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

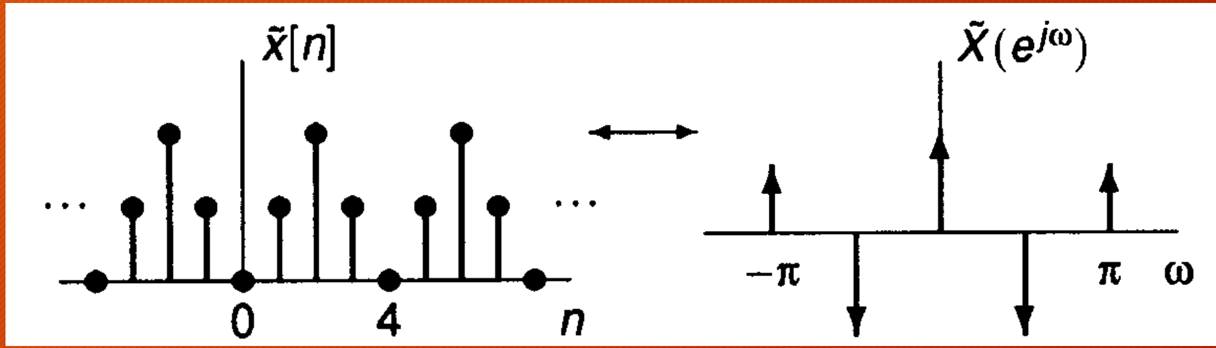
- Vimos que sequências compostas por combinação linear de sequências exponenciais complexas, apresar de não serem absolutamente somáveis, possuem uma transformada de Fourier em tempo discreto (DTFT), na forma:

$$\sum_{k} a_k \, e^{j\omega_k n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k} a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- A Transformada de Fourier em Tempo-Discreto (DTFT) da DFS por ser calculada por meio de

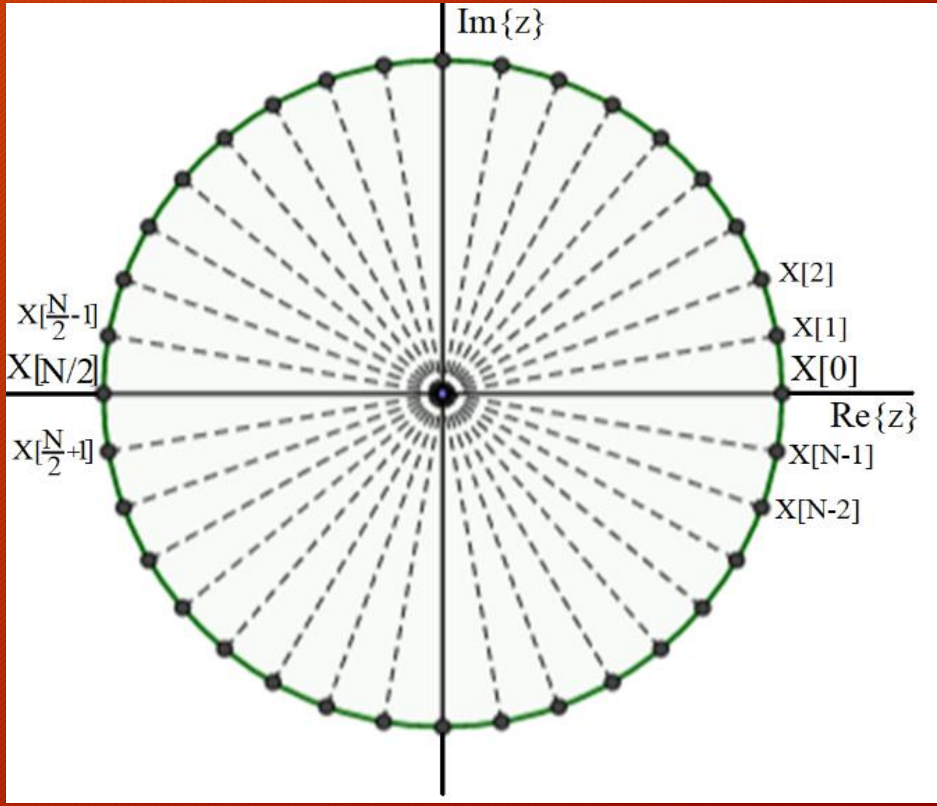
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k}\tilde{X}[k]\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$



A Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- A DTFT $X(e^{j\omega})$ é periódica com respeito a 2π.
- Os coeficientes da DFS $\tilde{X}[k]$ se repetem periodicamente com um período N.
- Para o cálculo da DFS, o círculo unitário é amostrado periodicamente em frequência

$$\omega_0 k = \frac{2\pi}{N} k, \mathrm{k} = 0,1,2, \ldots, \mathrm{N} - 1, \mathrm{N} - 1$$



A Série Discreta de Fourier (DFS - Discrete Fourier Series)

- Observe que $\tilde{X}[0]$ e $\tilde{X}\left[\frac{N}{2}\right]$ são frequências amostradas sobre o eixo real logo, são coeficientes puramente reais.
- Todos os outros são conjugados complexos:

$$\tilde{X}[1] = \tilde{X}^*[N-1]$$
$$\tilde{X}[2] = \tilde{X}^*[N-2]$$
$$\vdots$$
$$\tilde{X}\left[\frac{N}{2}-1\right] = \tilde{X}^*\left[\frac{N}{2}+1\right]$$

Exercício 7.1

- Dada a sequência periódica mostrada na figura a seguir, determine as respectivas DFS e DTFT

Exercício 7.1: solução.

- O período da sequência é N = 10.
- Os coeficientes da série podem ser calculados por meio de:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- e a DFS pode ser escrita como:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Exercício 7.1: solução.

- Cálculo dos coeficientes $\tilde{X}[k]$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{10}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{\pi}{5}kn}$$

Exercício 7.1: solução.

- Expandindo a séria que calcula os coeficientes $\tilde{X}[k]$, resulta

$$\tilde{X}[k] = 1 + e^{-j\frac{\pi}{5}k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}k} + e^{-j\frac{3\pi}{5}k} + e^{-j\frac{4\pi}{5}k}$$

$$= \left\{1 + cos\left(\frac{\pi}{5}k\right) + cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + cos\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + cos\left(\frac{4\pi}{5}k\right)\right\}$$

$$- \mathrm{j}\left\{sen\left(\frac{\pi}{5}k\right) + sen\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + sen\left(\frac{3\pi}{5}k\right) + sen\left(\frac{4\pi}{5}k\right)\right\}$$

Exercício 7.1: solução.

- O coeficiente $\tilde{X}[k]$ pode ser representado na forma polar

$$\tilde{X}[k] = Re\{\tilde{X}[k]\} + \mathrm{jIm}\{\tilde{X}[k]\} = \left|\tilde{X}[k]\right| e^{j\sphericalangle\tilde{X}[k]}$$

$$\left|\tilde{X}[k]\right| = \sqrt{\left(Re\{\tilde{X}[k]\}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\}\right)^2}$$

$$\sphericalangle\tilde{X}[k] = arctan\left(\frac{Re\{\tilde{X}[k]\}}{\mathrm{Im}\{\tilde{X}[k]\}}\right)$$

Exercício 7.1: solução.

- A DFS pode ser escrita como:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \left|\tilde{X}[k]\right| e^{j\sphericalangle\tilde{X}[k]}\, e^{j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} \left|\tilde{X}[k]\right| e^{j\left(\frac{\pi}{5}kn+\sphericalangle\tilde{X}[k]\right)}$$

Exercício 7.1: solução.

- Outra solução analítica para $\tilde{X}[k]$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{9} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - \sum_{n=5}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}k(n+5)}$$

Exercício 7.1: solução.

- Como o índice do somatório apresenta um incremento linear, é possível fazer

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - e^{-j\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \left(1 - e^{-j\pi k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \left(1 - e^{-j\pi k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-j\frac{\pi}{5}k}\right)^n$$

Exercício 7.1: solução.

- O somatório em $\tilde{X}[k]$ converge para um valor conhecido

$$\tilde{X}[k] = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{2}k}} \frac{e^{j\frac{\pi}{10}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k}}$$

$$= \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}} e^{j\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)k}$$

Exercício 7.1: solução.

- Dividindo $\tilde{X}[k]$ no numerador e no demominador por 2j, resulta

$$\tilde{X}[k] = \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)/_{2j}}{\left(e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}\right)/_{2j}} e^{-j\frac{2\pi}{5}k} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

Exercício 7.1: solução.

- Na forma polar $\tilde{X}[k]$ pode ser escrito como:

$$\tilde{X}[k] = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

Magnitude de $\tilde{X}[k]$:

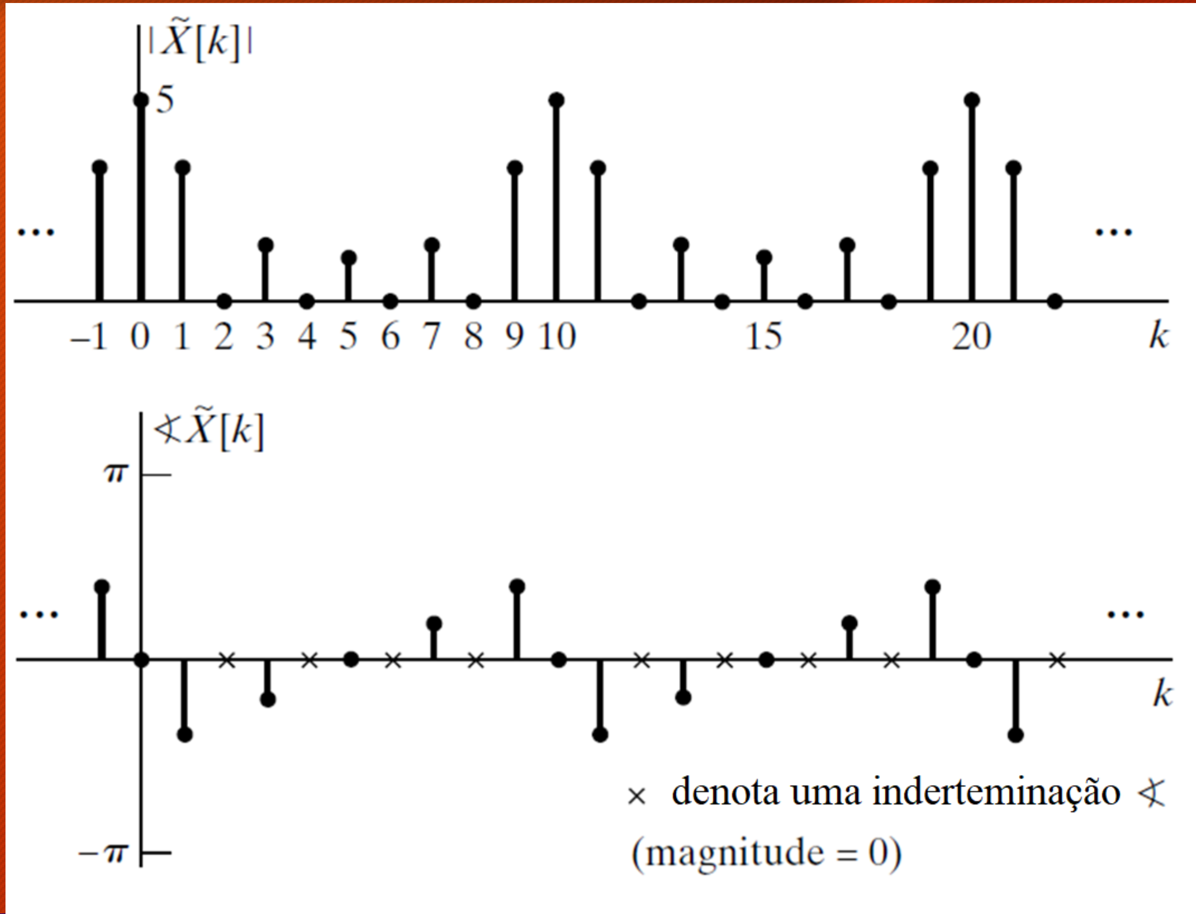
$$\left|\tilde{X}[k]\right| = \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)}\right|$$

Fase de $\tilde{X}[k]$:

$$\measuredangle\tilde{X}[k] = arctan\left(\frac{-sen\left(\frac{2\pi}{5}k\right)}{cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)}\right) = -\frac{2\pi}{5}k$$

Exercício 7.1: solução.

- Espectros de magnitude e de fase dos coeficientes da Série Discreta de Fourier: $\tilde{X}[k]$



Exercício 7.1: solução.

- Substituindo os valores de $\tilde{X}[k]$ na DFS, resulta

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{N-1} \left|\tilde{X}[k]\right| e^{j\sphericalangle\tilde{X}[k]}\, e^{j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{N-1} \left|\tilde{X}[k]\right| e^{j\left(\frac{\pi}{5}kn + \sphericalangle\tilde{X}[k]\right)} = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{N-1} \left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)}\right| e^{j\left(\frac{\pi}{5}kn - \frac{2\pi}{5}k\right)}$$

Exercício 7.1: solução.

- A DTFT de $\tilde{x}[n]$ é computada a partir de sua DFS, por meio de

$$\sum_{k} a_k \, e^{j\omega_k n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{k} a_k \delta(\omega - \omega_k)$$

- Substituindo na expressão da DFS

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \, e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \longleftrightarrow \frac{2\pi}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Exercício 7.1: solução.

- Substituindo a forma obtida no cálculo da DFS, resulta

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)}\right| e^{-j\frac{2\pi}{5}kn}\, e^{j\frac{\pi}{5}kn} \leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\pi}{5}\sum_{k=0}^{9}\left|\frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)}\right| e^{-j\frac{2\pi}{5}kn}\,\delta\left(\omega - \frac{\pi}{5}k\right)$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 1. Linearidade: sejam duas sequências $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$ periódicas de período N amostras, tal que

$$\tilde{X}_1[k] = \mathrm{D}FS\{\tilde{x}_1[n]\}$$

- e

$$\tilde{X}_2[k] = \mathrm{D}FS\{\tilde{x}_2[n]\}$$

- então

$$\mathrm{D}FS\{\alpha_1\tilde{x}_1[n] + \alpha_2\tilde{x}_2[n]\} = \alpha_1\tilde{X}_1[k] + \alpha_2\tilde{X}_2[k]$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 2. Deslocamento linear de uma sequência periódica de período N amostras

$$\mathrm{DFS}\{\tilde{x}[n-M]\} = e^{-j\frac{2\pi}{N}M}\tilde{X}[k]$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 3. Dualidade tempo-frequência

- se $\tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k]$

- então $\tilde{X}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} N\tilde{x}[-k]$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 4. Convolução periódica: sejam duas sequências $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$ periódicas de período N amostras. A convolução periódica entre $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$, é definida com

$$\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n] \equiv \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$$

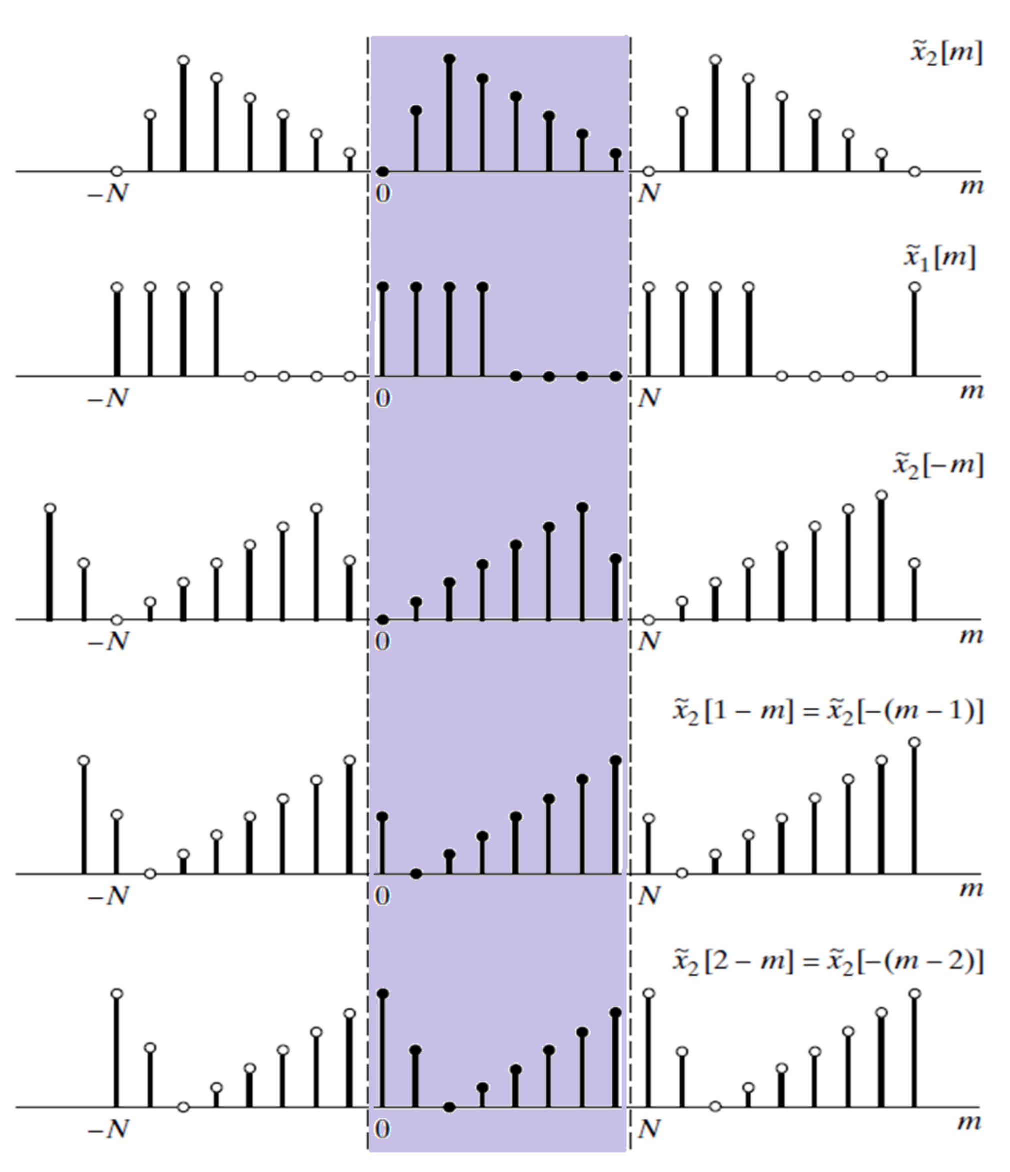
Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- Se $\tilde{X}_1[k] = \mathrm{D}FS\{\tilde{x}_1[n]\}$
- e $\tilde{X}_2[k] = \mathrm{D}FS\{\tilde{x}_2[n]\}$

- Então $DFS\{\tilde{x}_1[n] \circledast \tilde{x}_2[n]\} = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$

- Observe que a convolução periódica de duas sequências de período N amostras, produz como resultado outra sequência periódica e de período N amostras.

Exemplo: convolução periódica de duas sequências $\tilde{x}_1[n]$ e $\tilde{x}_2[n]$



Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 5. DFS do produto de sequências

$$DFS\{\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]\} = \tilde{X}_1[k] \circledast \tilde{X}_2[k] = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1[l]\,\tilde{X}_2[k-l]$$

- A expressão acima é denominada “convolução complexa periódica”.

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 6. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ complexa

$$\tilde{x}^*[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}^*[-k]$$

$$\tilde{x}^*[-n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}^*[k]$$

$$\Re e\{\tilde{x}[n]\} \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}\left(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k]\right)$$

$$\mathrm{j}Im\{\tilde{x}[n]\} \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}\left(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k]\right)$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 6. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ complexa (continuação)

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]\right) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \Re e\{\tilde{X}[k]\}$$

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]\right) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} jIm\{\tilde{X}[k]\}$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 7. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ real

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$$

$$\Re e\{\tilde{X}[k]\} = \Re e\{\tilde{X}[-k]\} \qquad Im\{\tilde{X}[k]\} = -Im\{\tilde{X}[-k]\}$$

$$|\tilde{X}[k]| = |\tilde{X}[-k]| \qquad \sphericalangle\tilde{X}[k] = -\sphericalangle\tilde{X}[-k]$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

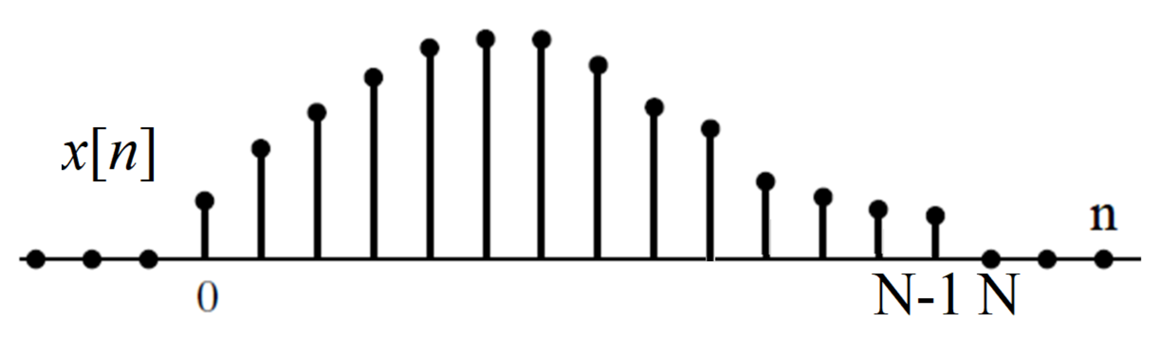
- 7. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ real (continuação)

$$\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \Re e\{\tilde{X}[k]\}$$

$$\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]) \overset{DFS}{\longleftrightarrow} jIm\{\tilde{X}[k]\}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Considere uma sequência finita de comprimento N amostras:



- A DTFT de $x[n]$ pode ser escrita como

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Como a sequência $x[n]$ tem comprimento finito, podemos simplificar a DTFT na forma:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{N-1}} x[n]e^{-j\omega n}$$

- Observe que, apresar de $x[n]$ ser discreta e de comprimento finito em amostras, $X\left(e^{j\omega}\right)$ é função da variável contínua ω e, $e^{j\omega}$ mapeia de forma contínua e uniforme o círculo unitário.

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- A sequência $x[n]$ possui comprimento finito, assim, podemos expandir o somatório na forma

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{\mathrm{n=0}}^{\mathrm{N-1}} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$= x[0] + x[1]e^{-j\omega} + x[2]e^{-j2\omega} + \cdots + x[n-1]e^{-j(N-1)\omega}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Como temos N amostras em *x*[n] é possível construí um sistema de equações **linearmente independentes** discretizando a frequência ω da seguinte maneira

$$\omega = \omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-2}, \omega_{N-1}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- O sistema de equações fica na forma:

$$X\left(e^{j\omega_0}\right) = x[0] + x[1]e^{-j\omega_0} + x[2]e^{-j2\omega_0} + \cdots + x[n-1]e^{-j(N-1)\omega_0}$$

$$X\left(e^{j\omega_1}\right) = x[0] + x[1]e^{-j\omega_1} + x[2]e^{-j2\omega_1} + \cdots + x[n-1]e^{-j(N-1)\omega_1}$$

$$X\left(e^{j\omega_2}\right) = x[0] + x[1]e^{-j\omega_2} + x[2]e^{-j2\omega_2} + \cdots + x[n-1]e^{-j(N-1)\omega_2}$$

$$\vdots$$

$$X\left(e^{j\omega_{N-1}}\right) = x[0] + x[1]e^{-j\omega_{N-1}} + x[2]e^{-j2\omega_{N-1}} + \cdots + x[n-1]e^{-j(N-1)\omega_{N-1}}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Representado o sistema de equações na forma matricial, resulta em

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(e^{j\omega_0}) \\ X(e^{j\omega_1}) \\ X(e^{j\omega_2}) \\ \vdots \\ X(e^{j\omega_{N-1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\omega_0} & e^{-j2\omega_0} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_0} \\ 1 & e^{-j\omega_1} & e^{-j2\omega_1} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_1} \\ 1 & e^{-j\omega_2} & e^{-j2\omega_2} & & e^{-j(N-1)\omega_2} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\omega_{N-1}} & e^{-j2\omega_{N-1}} & \dots & e^{-j(N-1)\omega_{N-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

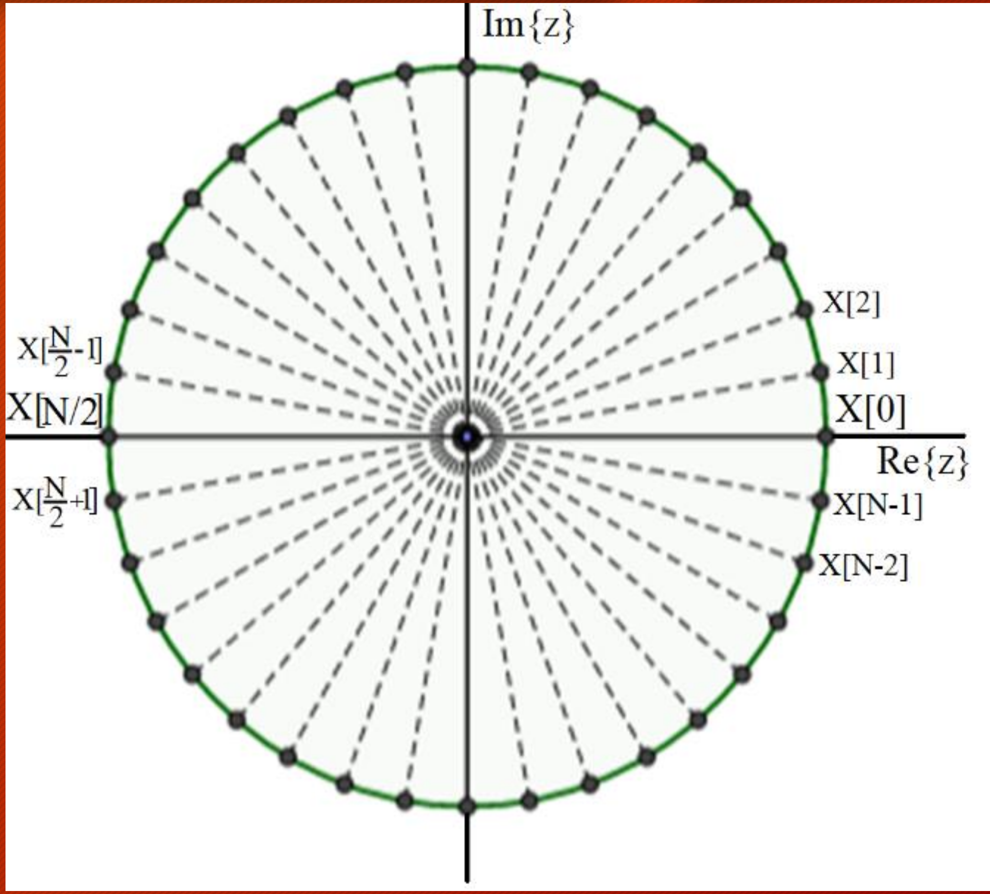
- Na forma compacta fica como $\underline{X} = \underline{W}\ \underline{x}$
- Para obter a transformação inversa, precisamos obter $\underline{x} = \underline{W}^{-1}\underline{X}$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Convenientemente pode-se escolher

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \qquad k = 0, 1, 2, \dots N-1$$

- Isto significa amostrar o círculo unitário de maneira uniforme na frequência digital



A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Esta ecolha da amostragem sobre o círculo unitário produz um conjunto de equações no qual a matrix $\underline{W}$ é **ortogonal**, pois as sequências exponeciais apresentam frequências que são múltiplas inteiras da componente $\frac{2\pi}{N}$ (análogo ao que acontece com a séria discreta de Fourier).
- Assim $\underline{W}^{-1} \propto \left(\underline{W}^{t}\right)^{*}$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Coma a matriz $\underline{W}$ é uma matriz complexa simétrica e ortogonal:

1 – Simetria: A sua transposta é igual a ela mesma.

2 – Os seus elementos linha/coluna a_{ij} são exponenciais complexas, logo para tomar a complexa conjugada basta trocar o sinal do expoente.

- Para se obter a inversa da matriz complexa $\underline{W}$ tem-se o seguinte senário: $\underline{W}^{-1} \propto \left(\underline{W}^{t}\right)^{*} = \frac{1}{N}\underline{W}^{*}$, $\left\| e^{\frac{2\pi}{N}k} \right\|^{2} = N$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- O par de equações de transformação tempo-frequência e frequência-tempo, pode ser resumido por

$$\underline{X} = \underline{W}\,\underline{x} \qquad\qquad \underline{x} = \frac{1}{N}\underline{W}^{*}\underline{X}$$

- $\underline{X}$ corresponde ao vetor coeficientes de Fourier obtidos pela discretização da DTFT: $X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_{\mathrm{k}}=\frac{2\pi}{N}k}$, $\underline{x}$ corresponde ao vetor de N amostras temporais e $\underline{W}$ representa a matriz (NxN) complexa de transformação tempo-freqência.

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Observe que o produto linha-coluna é um produto interno e cada respectivo produto representa um coeficiente de Fourier (na transformação direta) ou uma amostra temporal (na transformação inversa).

$$\underline{X} = \underline{W}\,\underline{x} \qquad\qquad \underline{x} = \frac{1}{N}\underline{W}^*\underline{X}$$

- É possível, então, escrever a lei de transformação direta e inversa para cada elemento tempo-frequência. Assim, é possível escrever um par de equações para cada elemento da transformada direta e inversa.

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- O par de equações para se obter Transformada Discreta de Fourier

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A Transformada Discreta de Fourier (DFT - Discrete Fourier Transform)

- Notação para a DFT

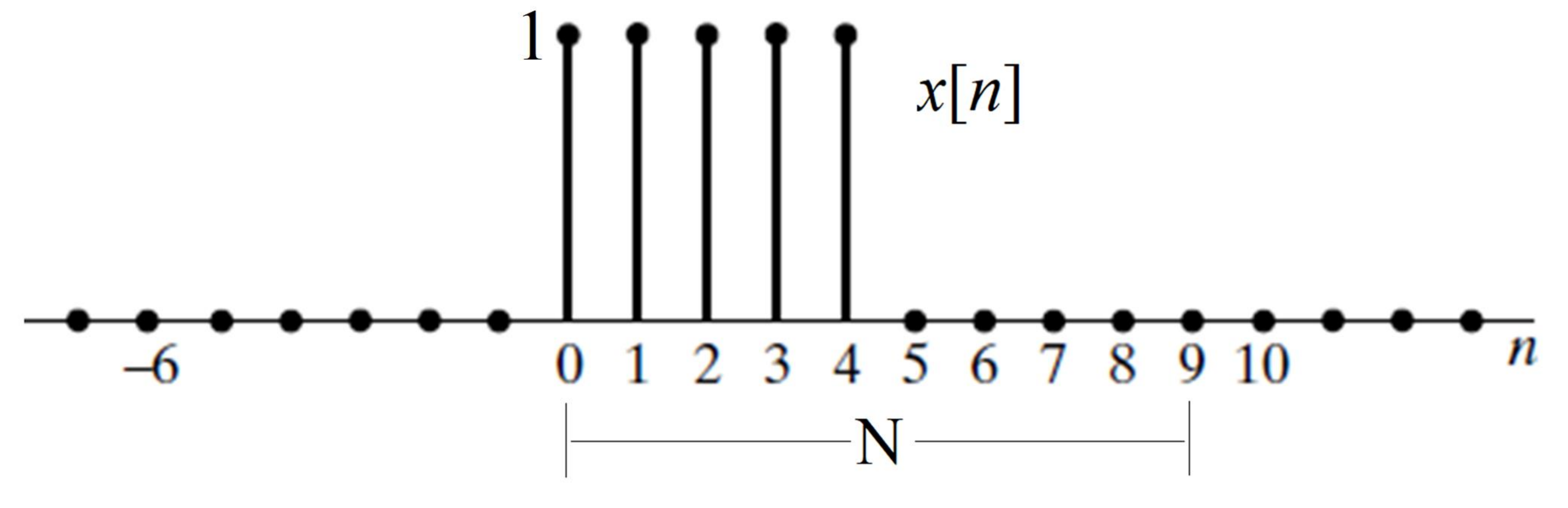
$$X[k] = DFT\{x[n]\}$$

$$x[n] = DFT^{-1}\{X[k]\}$$

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k]$$

Exercício 7.2:

- Determine para a sequência mostrada na figura a seguir: 1) A sua DTFT, 2) A respectiva DFT. Considere N = 10 amostras.



Exercício 7.2: solução.

- 1) Cálculo da DTFT de $x[n]$.
- $x[n]$ pode ser representada como uma combinação linear de sequências degrau unitário

$$x[n] = u[n] - u[n-M], \mathrm{M} = 5$$

- Tomando a transformada z em $x[n]$, resulta

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-M}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-M}}{1-z^{-1}}$$

Exercício 7.2: solução.

- Fazendo $z = e^{j\omega}$ em $X(z)$ obtem-se

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1 - e^{-j\omega M}}{1 - e^{-j\omega}} \frac{e^{j\omega\frac{M}{2}}}{e^{j\omega\frac{M}{2}}} \frac{e^{j\frac{\omega}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}} = \frac{e^{j\omega\frac{M}{2}} - e^{-j\omega\frac{M}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{j\frac{\omega}{2}}} e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}$$

Exercício 7.2: solução.

- Dividindo o numerador e o denominador por 2j

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{e^{j\omega\frac{M}{2}}-e^{-j\omega\frac{M}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}}e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}=\frac{\dfrac{e^{j\omega\frac{M}{2}}-e^{-j\omega\frac{M}{2}}}{2j}}{\dfrac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}}{2j}}e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}$$

Exercício 7.2: solução.

- Finalmente obtém-se

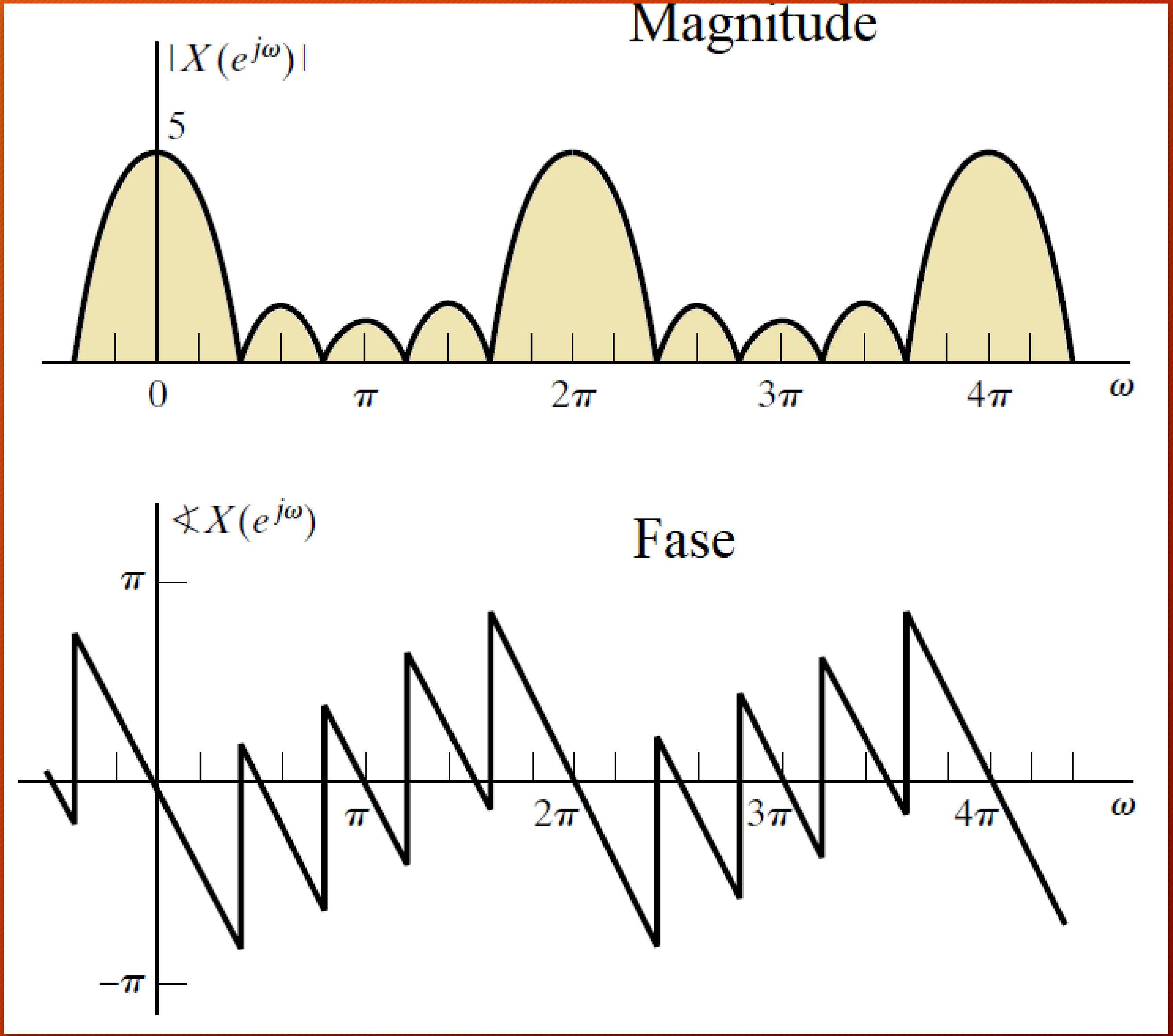
$$X(e^{j\omega}) = \frac{sen\left(\omega\frac{M}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j\omega\frac{M-1}{2}}$$

- Fazendo M = 5

$$X(e^{j\omega}) = \frac{sen\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-j2\omega}$$

Exercício 7.2: solução.

- Representação gráfica para os espectros magnitude e de fase para a DTFT de $x[n]$



Exercício 7.2: solução.

- 2) Cálculo da DFT de *x*[*n*].
- Desenvolvendo de forma análoga ao cálculo da DFS no Exercício 7.1. Podemos desenvolver a DFT como

$$X[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n]\, e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - \sum_{n=5}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}k(n+5)}$$

Exercício 7.2: solução.

- Como o índice do somatório apresenta um incremento linear, é possível fazer

$$X[k] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} - e^{-j\pi k} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn}$$

$$= \left(1 - e^{-j\pi k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{5}kn} = \left(1 - e^{-j\pi k}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-j\frac{\pi}{5}k}\right)^{n}$$

Exercício 7.2: solução.

- O somatório em X[k] converge para um valor conhecido

$$X[k] = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} = \frac{1 - e^{-j\pi k}}{1 - e^{-j\frac{\pi}{5}k}} \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{2}k}} \frac{e^{j\frac{\pi}{10}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k}}$$

$$= \frac{e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}}{e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}} e^{j\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2}\right)k}$$

Exercício 7.2: solução.

- Dividindo X[k] no numerador e no demominador por 2j, resulta

$$X[k] = \frac{\left(e^{j\frac{\pi}{2}k} - e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)\Big/_{2j}}{\left(e^{j\frac{\pi}{10}k} - e^{-j\frac{\pi}{10}k}\right)\Big/_{2j}} e^{-j\frac{2\pi}{5}k} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

Exercício 7.2: solução.

- Na forma polar X[k] pode ser escrito como:

$$X[k] = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

Magnitude de $X[k]$:

$$|X[k]| = \left| \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} \right|$$

Fase de $X[k]$:

$$\measuredangle X[k] = arctan\left(\frac{-sen\left(\frac{2\pi}{5}k\right)}{cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right)} \right) = -\frac{2\pi}{5}k$$

Exercício 7.2: solução.

- Observe a semelhança entre a DTFT e a DFT. Na realidade isso faz sentido, pois, a DFT foi obtida por meio da discretização da DTFT a intervalos constantes em frequência:

$$X[k] = X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=\omega_{\mathrm{k}}=\frac{2\pi}{N}k}$$

- DTFT de $x[n]$:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{sen\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j2\omega}$$

- DFT de $x[n]$:

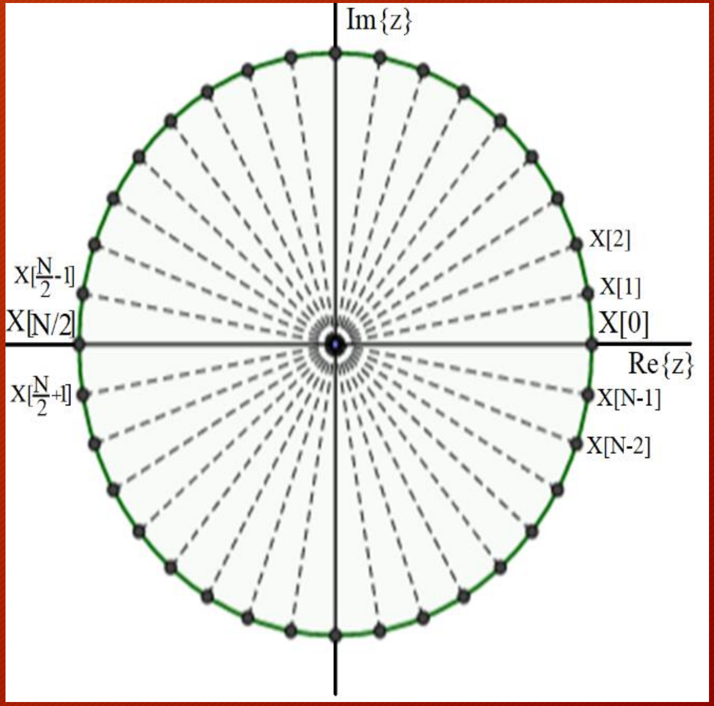
$$X[k] = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k}$$

Exercício 7.2: solução.

- Observe que discretizando a DTFT em frequências equidistantes sobre o círculo unitário, obtem-se a DFT

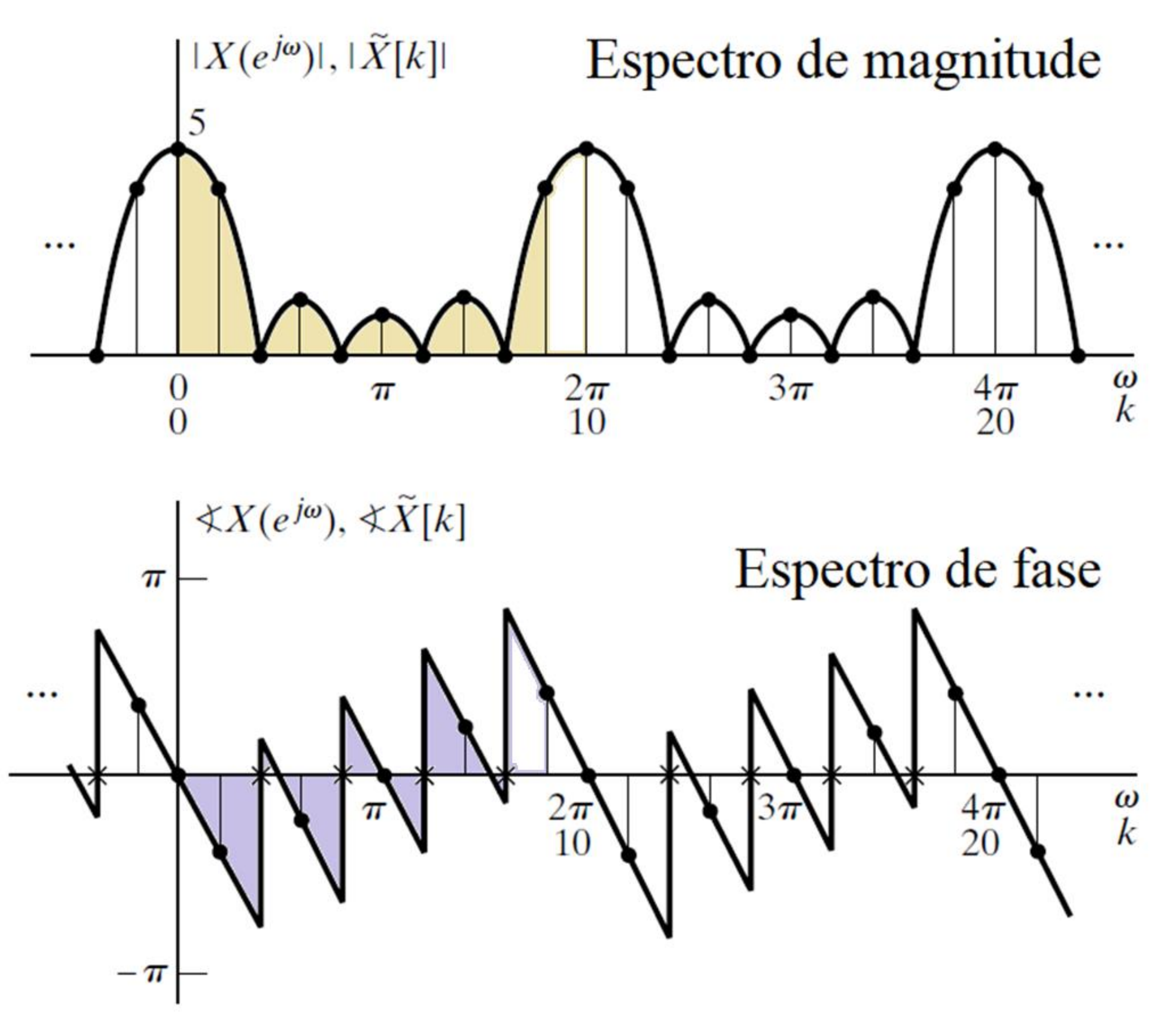
$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_k=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{sen\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{sen\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j2\omega}\Bigg|_{\omega=\omega_k=\frac{2\pi}{N}k=\frac{2\pi}{10}k=\frac{\pi}{5}k}$$

$$= \frac{sen\left(\frac{5}{2}\frac{\pi}{5}k\right)}{sen\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{5}k\right)} e^{-j2\frac{\pi}{5}} = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{sen\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{5}k} = X[k]$$



Exercício 7.2: solução.

- Na figura ao lado estão superpostos os espectros da DTFT (que é contínuo em frequência) com os espectros da DFT (que é discreto em frequência).



Relação entre DFS e DFT

- DFS: sequências periódicas de comprimento infinito.

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- DFT: sequências finitas e circulares.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Relação entre DFS e DFT

- Observe que, se

$$x[(n)_N] = \begin{cases} \tilde{x}[n], 0 \ \leq n \ \leq N-1 \\ 0, \forall \, outro \; n \end{cases}$$

- então $X[k] = \tilde{X}[k]$.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 1. Linearidade: sejam duas sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$ finitas e de comprimento igual a N amostras, tal que

$$X_1[k] = \mathrm{D}FS\{x_1[n]\}$$

- e

$$X_2[k] = \mathrm{D}FS\{x_2[n]\}$$

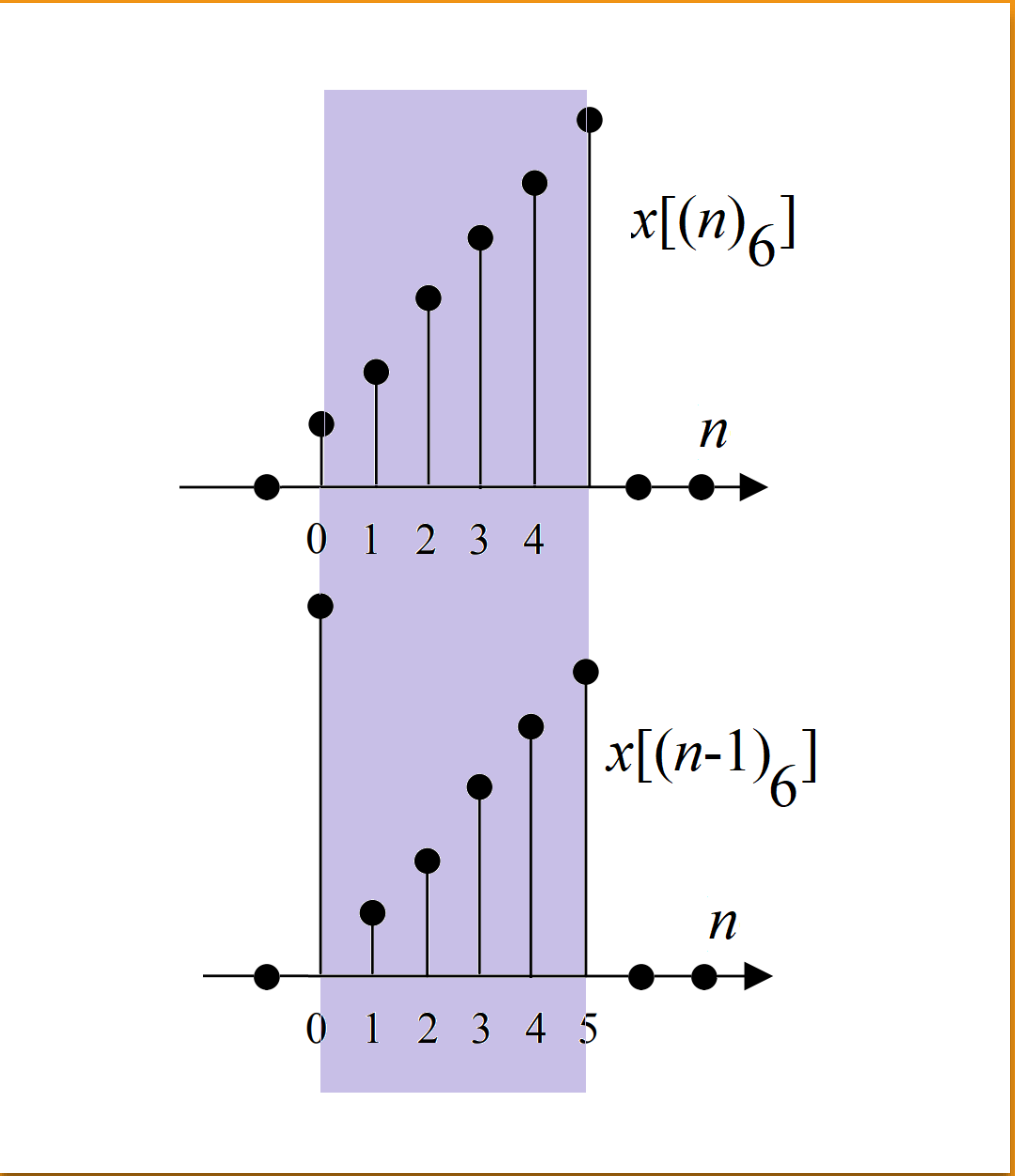
- então

$$\mathrm{D}FT\{\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n]\} = \alpha_1 X_1[k] + \alpha_2 X_2[k]$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 2. Deslocamento circular de uma sequência circular módulo N amostras

$$x\left[(n-M)_N\right] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\frac{2\pi}{N}M} X[k]$$



Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 3. Dualidade tempo-frequência

- se $x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \mathrm{X}[k]$

- então $X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} Nx[-k]$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 4. Convolução circular: sejam $x_1[n]$ e $x_2[n]$ duas sequências circulares módulo N amostras. A convolução circular entre $x_1[n]$ e $x_2[n]$, é definida com

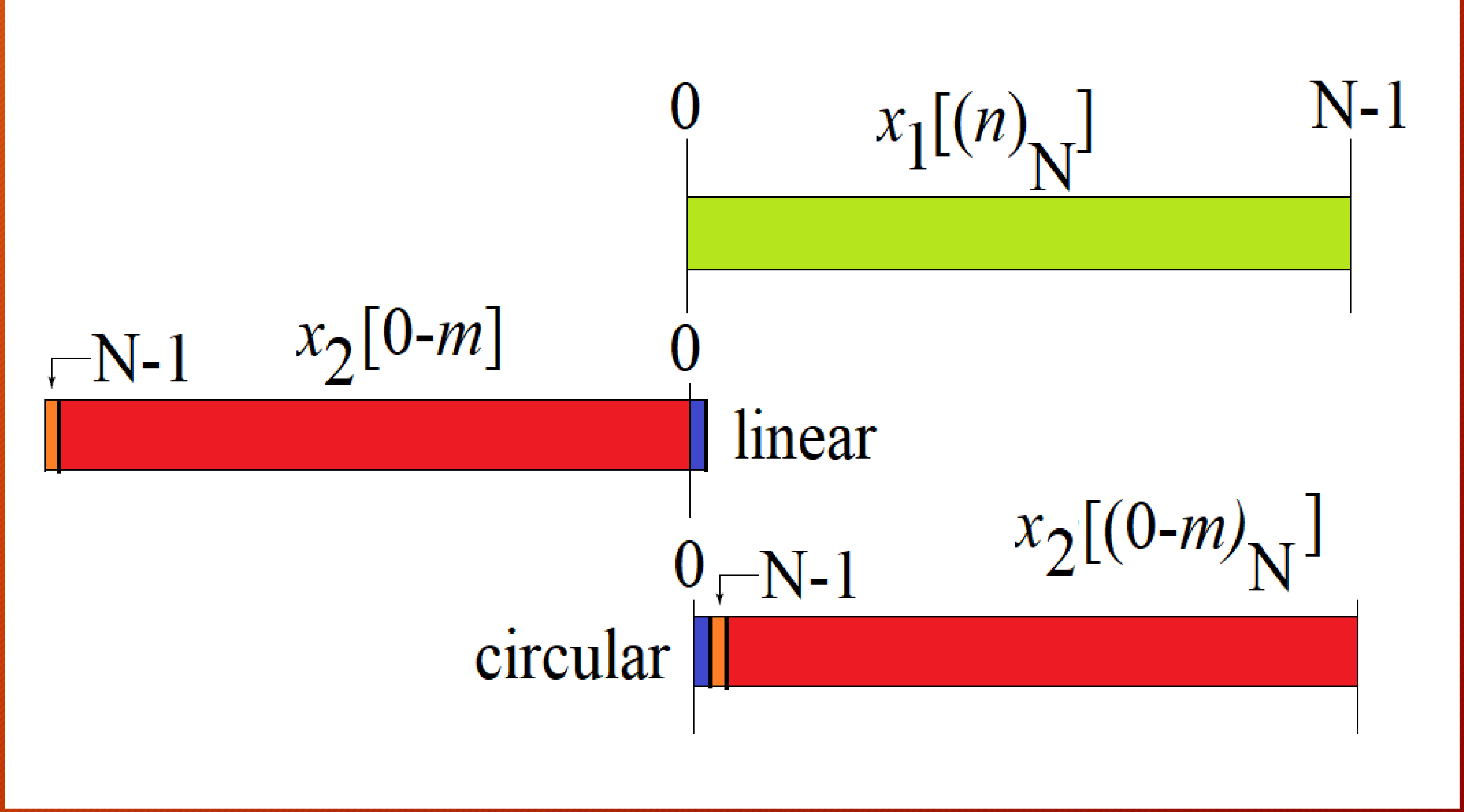
$$x_2[n] \circledN x_1[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x_1[((m))_N]x_2[((n-m))_N], \qquad 0 \leq n \leq N-1.$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- Interpretação gráfica da convolução circular – inversão temporal:

  linear x circular.

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[(m)_N]x_2[(n-m)_N]$$



Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- Se $X_1[k] = \mathrm{D}FT\{x_1[n]\}$
- e $X_2[k] = \mathrm{D}FT\{x_2[n]\}$

- então $DFT\{x_1[n] \circledcirc x_2[n]\} = X_1[k]X_2[k]$
- Observe que a convolução circular de duas sequências de circulares módulo N amostras, produz como resultado outra sequência circular móduço N amostras.

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 5. DFS do produto de sequências circulares módulo N

$$x_1[(n)_N]x_2[(n)_N] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} X_1[(l)_N]\,X_2[(k-l)_N]$$

- A expressão acima é denominada “convolução complexa circular”.

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 6. Propriedades de simetria para $x[n]$ complexa módulo N

$$x^*[(n)_N] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X^*[(-k)_N]$$

$$\tilde{x}^*[(-n)_N] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X^*[(k)_N]$$

$$\Re e\{x[(n)_N]\} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_e[(k)_N] = \frac{1}{2}(X[(k)_N] + X^*[(-k)_N])$$

$$\mathrm{j}Im\{x[(n)_N]\} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X_o[(k)_N] = \frac{1}{2}(X[(k)_N] - X^*[(-k)_N])$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

- 6. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ complexa (continuação)

$$\tilde{x}_e[(n)_N] = \frac{1}{2}(x[(n)_N] + x^*[(-n)_N]) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \Re e\{X[(k)_N]\}$$

$$\tilde{x}_o[(n)_N] = \frac{1}{2}(x[(n)_N] - x^*[(-n)_N]) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} jIm\{X[(k)_N]\}$$

Propriedades da Série Discreta de Fourier (DFS – Discrete Fourier Series)

- 7. Propriedades de simetria para $\tilde{x}[n]$ real módulo N

$$X[(k)_N] = X^*[(-k)_N]$$

$$\Re e\{X[(k)_N]\} = \Re e\{X[(-k)_N]\} \quad Im\{X[(k)_N]\} = -Im\{X[(-k)_N]\}$$

$$|X[(k)_N]| = |X[(-k)_N]| \qquad \sphericalangle X[(k)_N] = -\sphericalangle X[(-k)_N]$$

Propriedades da Transformada Discreta de Fourier (DFT – Discrete Fourier Transform)

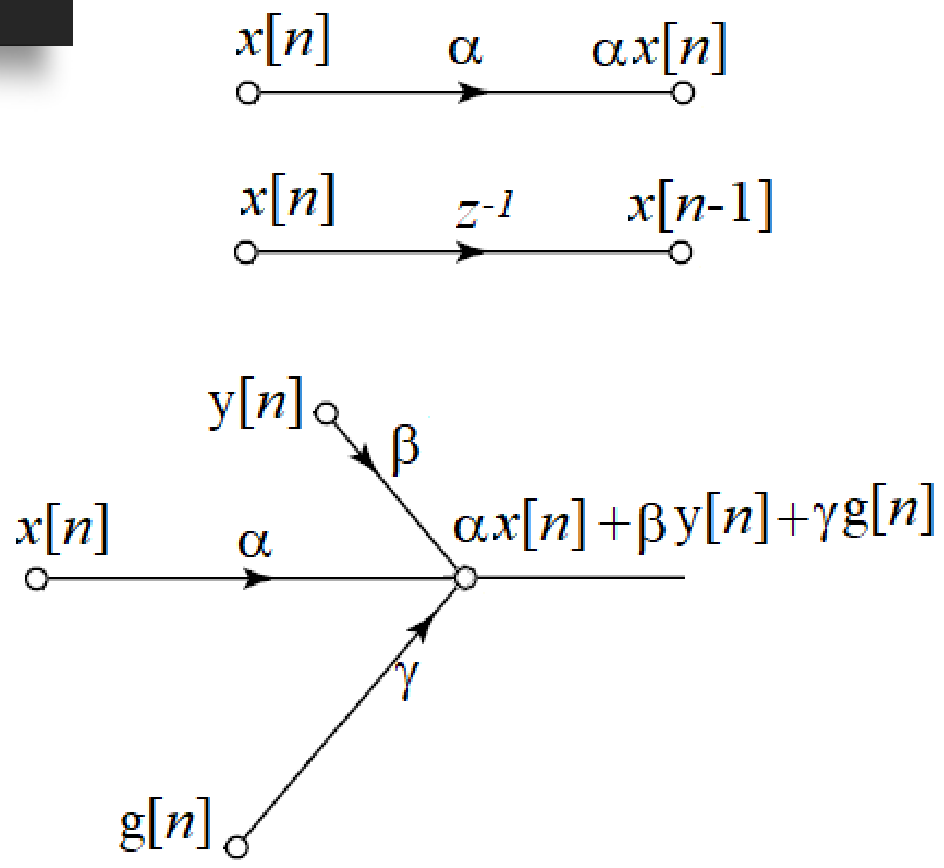
- 7. Propriedades de simetria para $x[n]$ real módulo N (continuação)

$$x_e[(n)_N] = \frac{1}{2}(x[(n)_N] + x^*[(-n)_N]) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} \Re e\{X[(k)_N]\}$$

$$x_o[(n)_N] = \frac{1}{2}(x[(n)_N] - x^*[(-n)_N]) \overset{DFT}{\longleftrightarrow} jIm\{X[(k)_N]\}$$

Grafo de fluxo orientado

- Fluxo orientado pela seta com respectivo ganho (pode ser complexo).
- Um círculo indica a terminação do fluxo orientado e realiza a adição (somador) das diversas entradas.



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- A DFT é implementada na forma

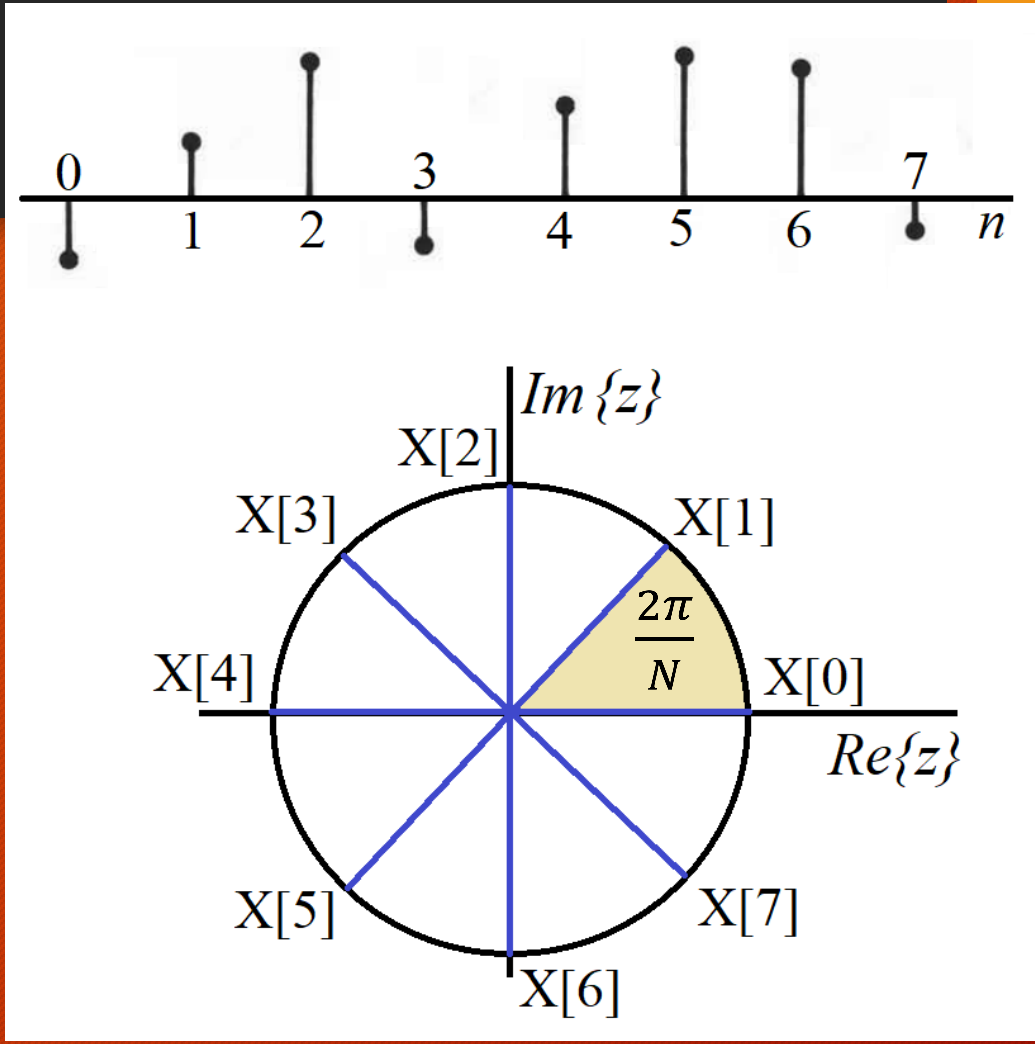
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Na forma original a DFT apresenta complexidade computacional: $\mathcal{O}(N^2)$ operações complexas.
- Para cada $X[k]$ são necessárias N operações complexas. Para todos os N coeficientes significa N^2 operações complexas.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- O algoritmo rápido para cálculo rápido da FFT se utiliza da periodicidade e da simetria das sequências exponenciais que constituem a base de Fourier para obter melhor eficiência do ponto de vista de complexidade computacional.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**



- Considere a figura à direita

$$X[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{8}kn},$$

$$k = 0,1,\ldots,7$$

- Para cálculo da DFT são necessárias $N^2 = 64$ operações complexas.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

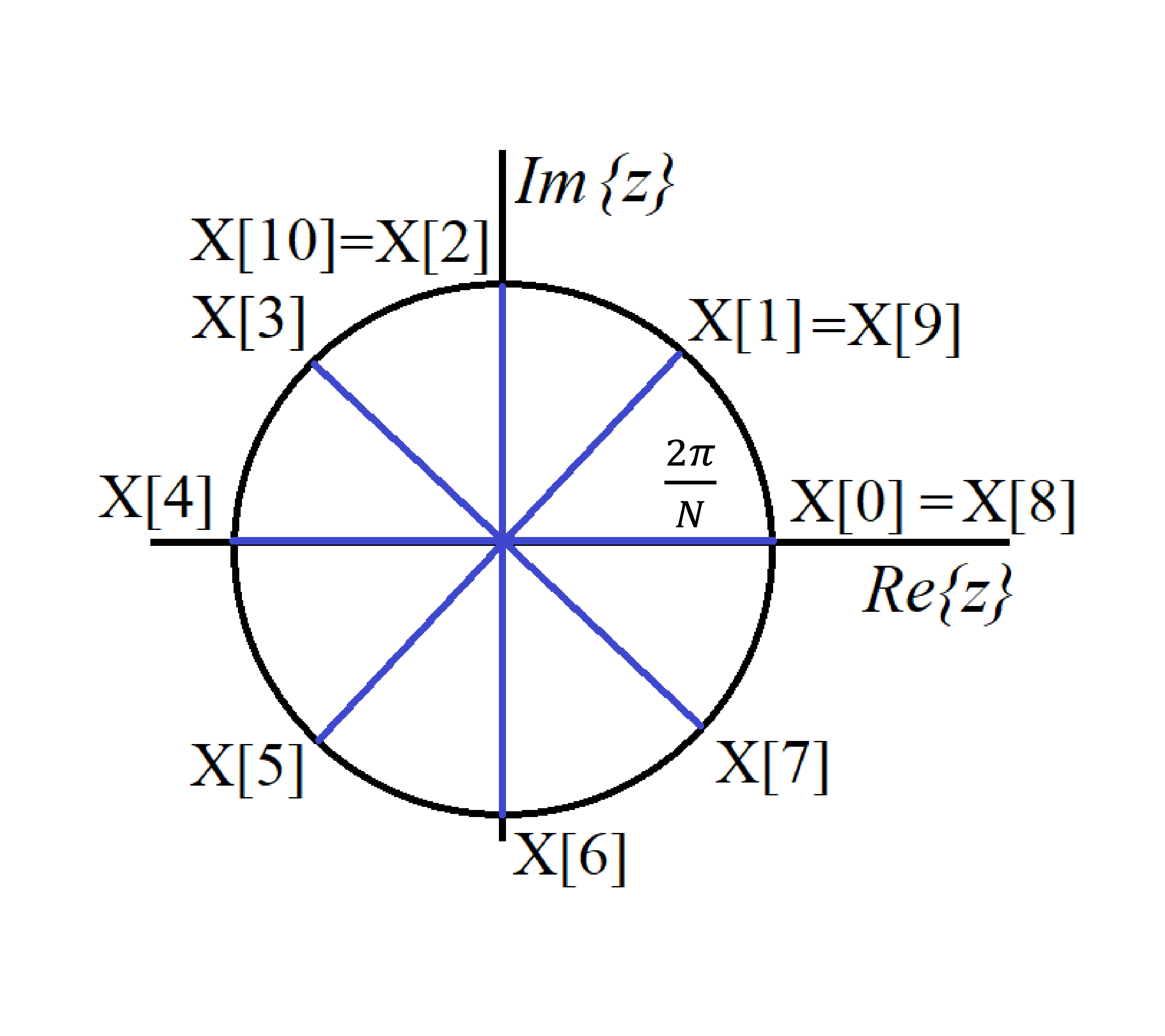
- A DFT é circular módulo N

$$X[k] = X[(k)_N]$$

- No exemplo mostrado

$$X[(k)_8] = \sum_{n=0}^{7} x[(n)_8]\, e^{-j\frac{2\pi}{8}kn},$$

$$k = 0,1,\dots,7$$

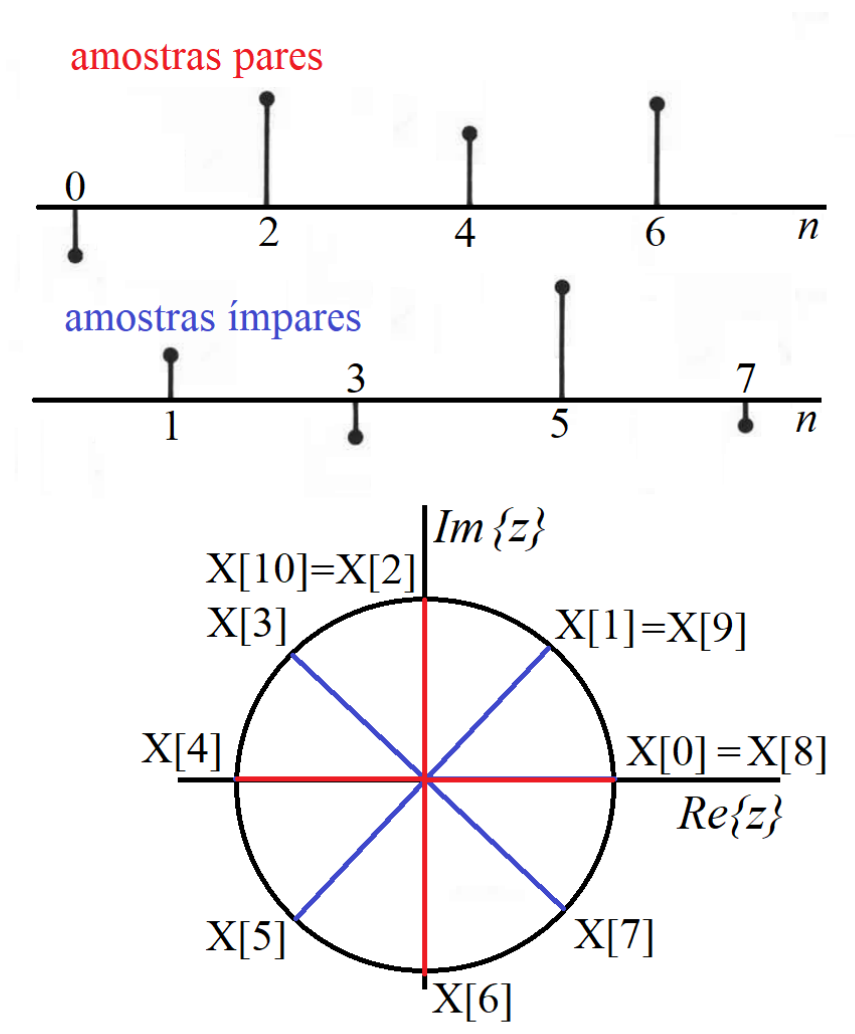


A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)
Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- O algoritmo da dizimação no tempo consiste em segmentar (dizimar) a sequência original em duas outras sequências. Uma contendo somente amostras pares da sequência original, a outra somente as amostras ímpares.
- Para cada sequência segmentada é computada uma DFT de comprimento N/2. A DFT de comprimento N pode ser obtida pela combinação linear das DFTs de comprimento N/2.
- Esse processo é implementado de forma recursiva indefinidamente.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- A sequência original é segmentada em duas sequências: uma só contém amostras de índices pares, a segunda somente amostras de índices ímpares.



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Genericamente para qualquer comprimento N, os coeficiente da DFT podem ser escritos como

$$X[k] = X[(k)_N] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

- Matematicamente podemos separar no cálculo dos coeficientes $X[k]$ as amostras de índice par e as de índice ímpar

$$X[k] = X[(k)_N] = \sum_{par} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{ímpar} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Podemos formalizar esta proposição fazendo $n = 2r$ para os índices pares e $n = (2r+1)$ para os índices ímpares na forma

$$X[k] = X[(k)_N] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r)} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]e^{-j\frac{2\pi}{N}k(2r+1)}$$

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Dividindo por 2 no numerador e no denominador do expoente do primeiro termo do segundo membro da equação e, no segundo termo, retirando o termo que não depende de r de dentro do somatório e dividindo numerador e denominador do expoente por 2, resulta em

$$X[k] = X[(k)_N] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr} + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr}$$

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Inspecionando os dois termos do segundo membro da equação

$$X[k] = X[(k)_N]$$
$$= \left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr} \right) + e^{-j\frac{2\pi}{N}k} \left(\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1] e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr} \right)$$

- DFT da amostras pares (comprimento $\frac{N}{2}$ amostras)
- DFT da amostras ímpares (comprimento $\frac{N}{2}$ amostras)

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

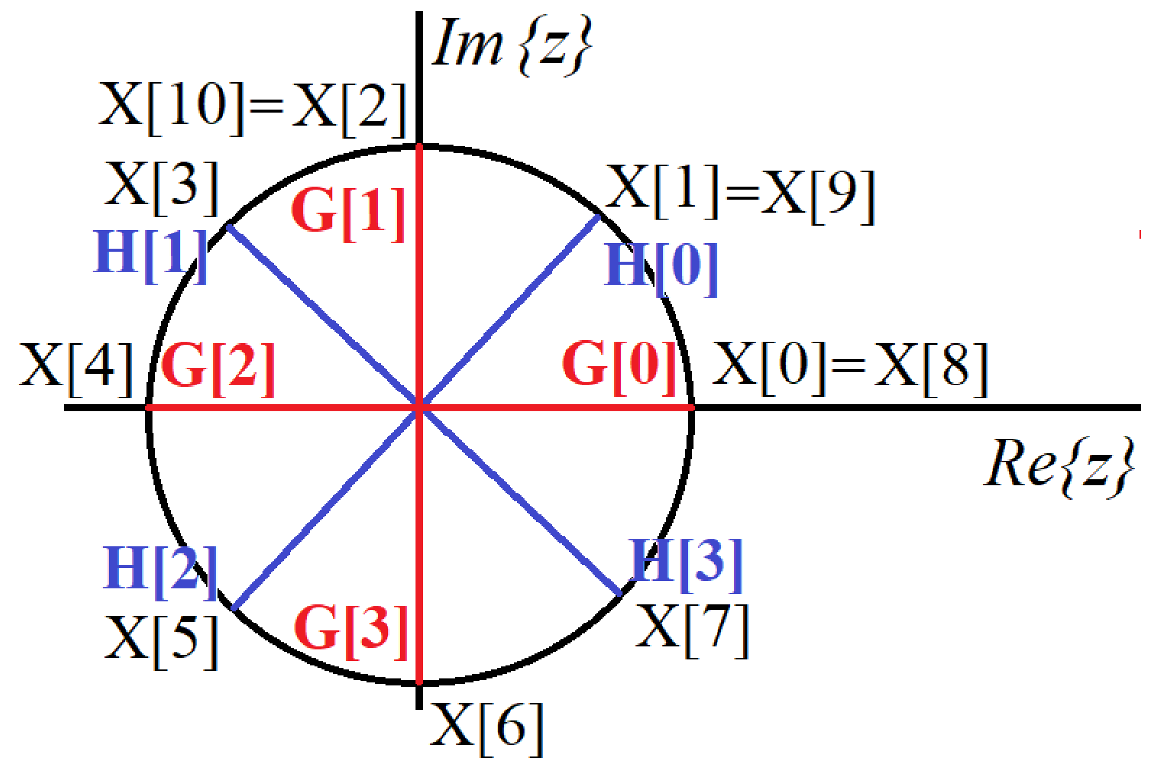
- Denotando a DFT das amostras pares (de comprimento N/2) por

$$G[k] = G\left[(k)_{N/2}\right] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r]e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr}$$

- Denotando a DFT das amostras pares (de comprimento N/2) por

$$H[k] = H\left[(k)_{N/2}\right] = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x[2r+1]e^{-j\frac{2\pi}{N/2}kr}$$

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**



A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Fazendo $e^{-j\frac{2\pi}{N}k} = W_N^k$ podemos rescrever a DFT na forma

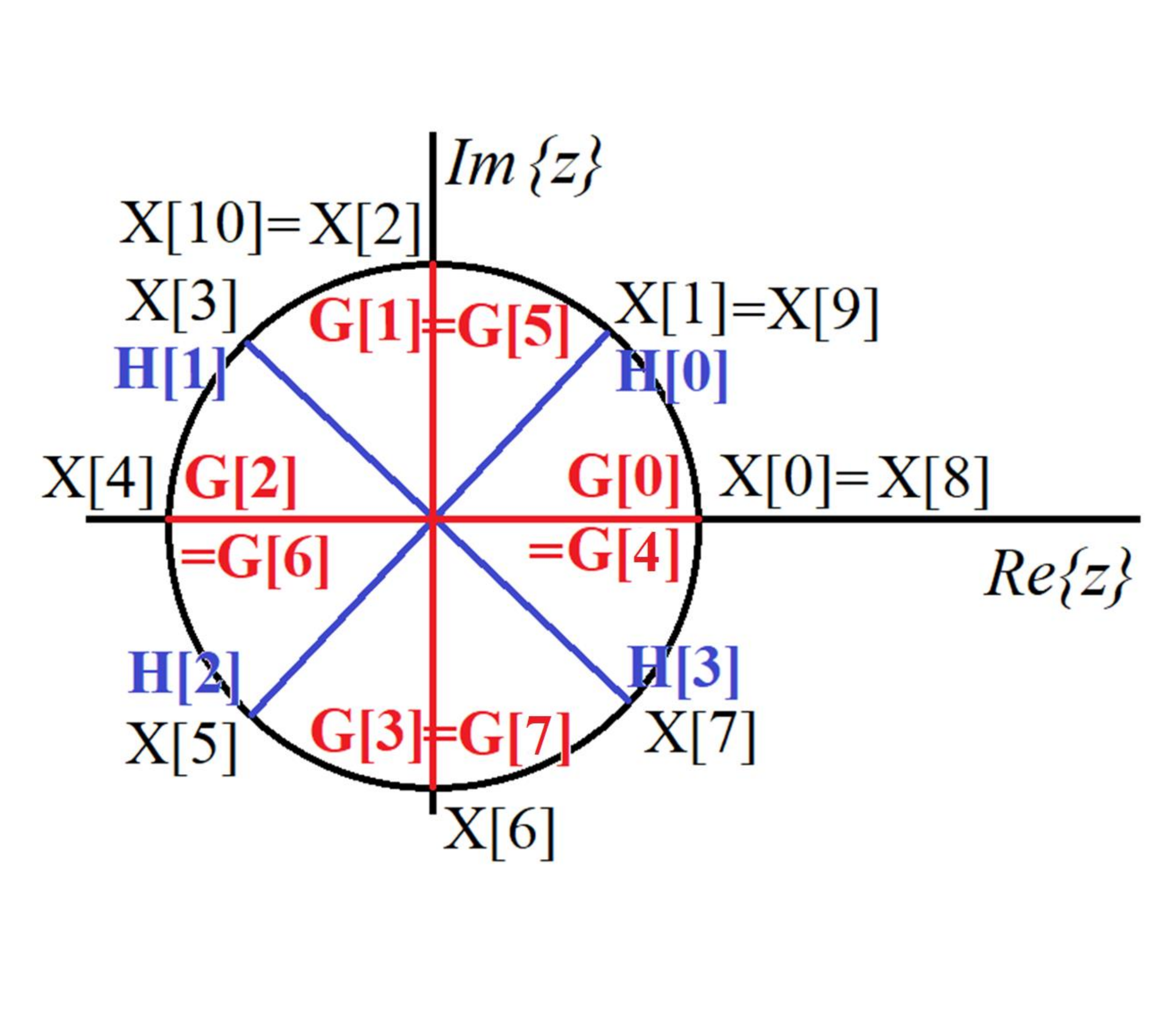
$$X[(k)_N] = G\left[(k)_{N/2}\right] + W_N^k H\left[(k)_{N/2}\right]$$

- A expressão acima nos diz que é possível representar uma DFT módulo N pela combinação linear de duas DFTs módulo N/2.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- $G[k]$ é circular módulo N/2.

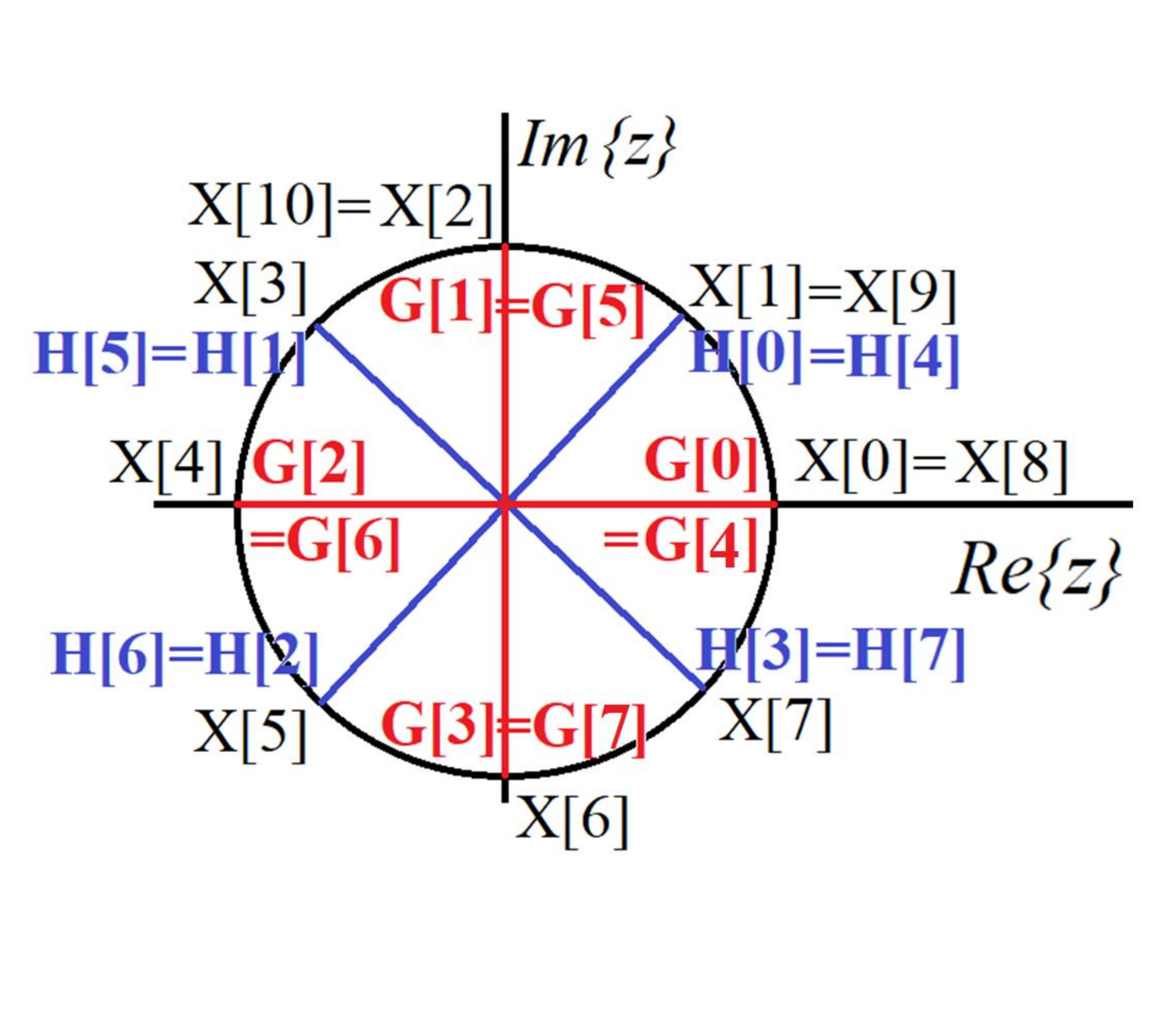
$$G[k] = G\left[(k)_{N/2}\right]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

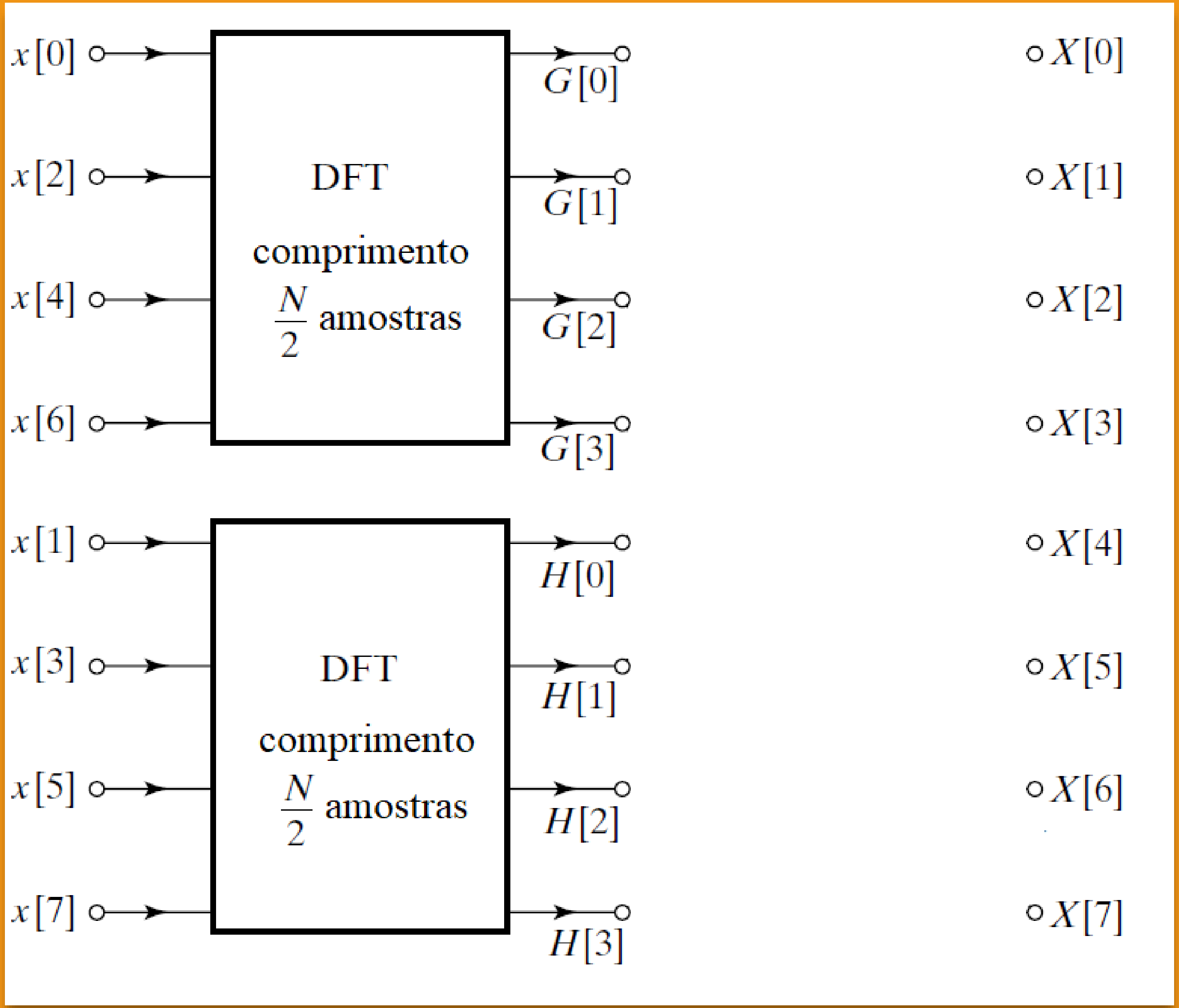
- H[k] também é circular módulo N/2.

$$H[k] = H\left[(k)_{N/2}\right]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

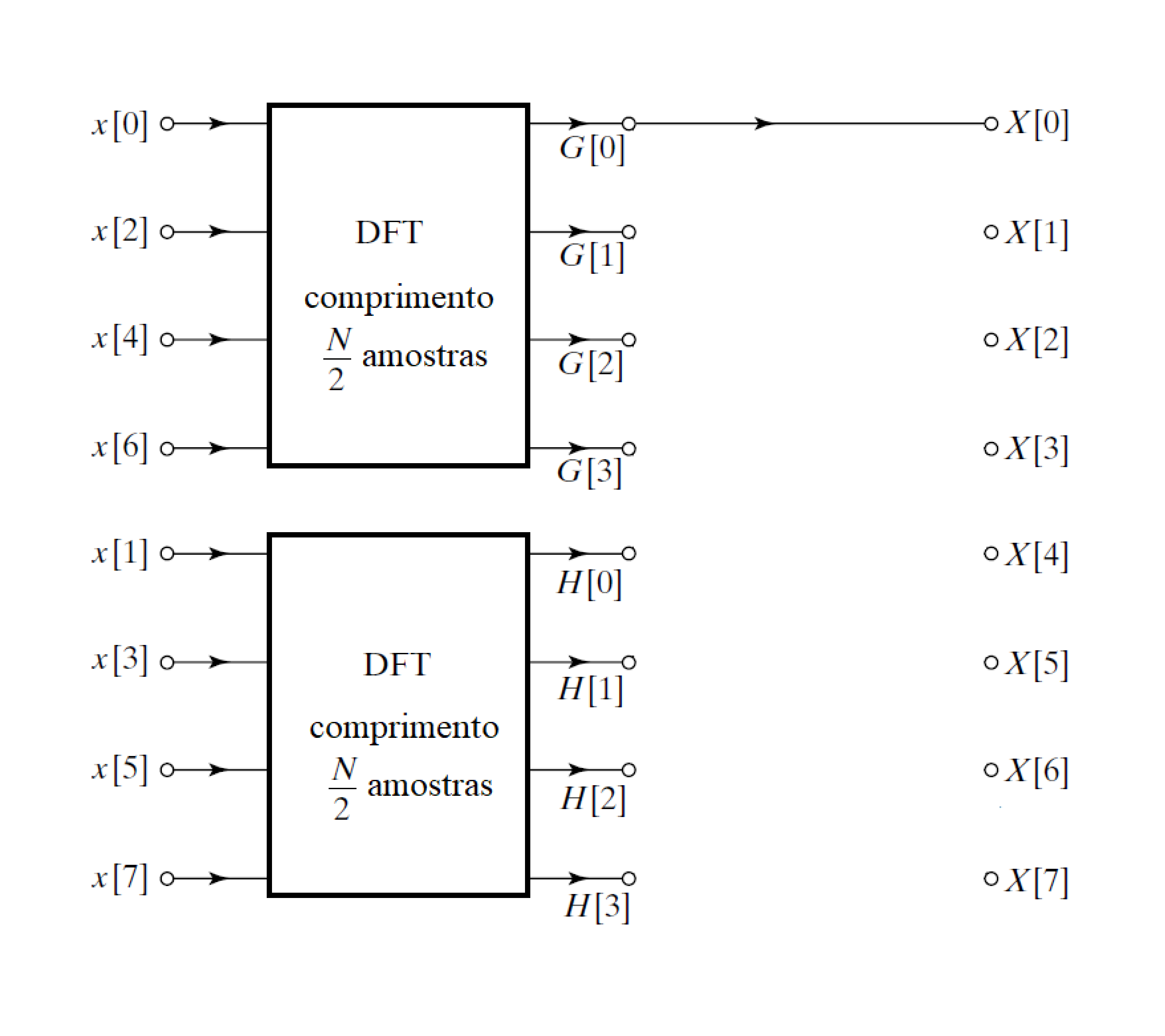
- Exemplo: N = 8



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- X[k] pode ser expresso como:
- $X[(k)_N] = G\left[(k)_{N/2}\right] + W_N^k H\left[(k)_{N/2}\right]$
- Para k=0 e N = 8

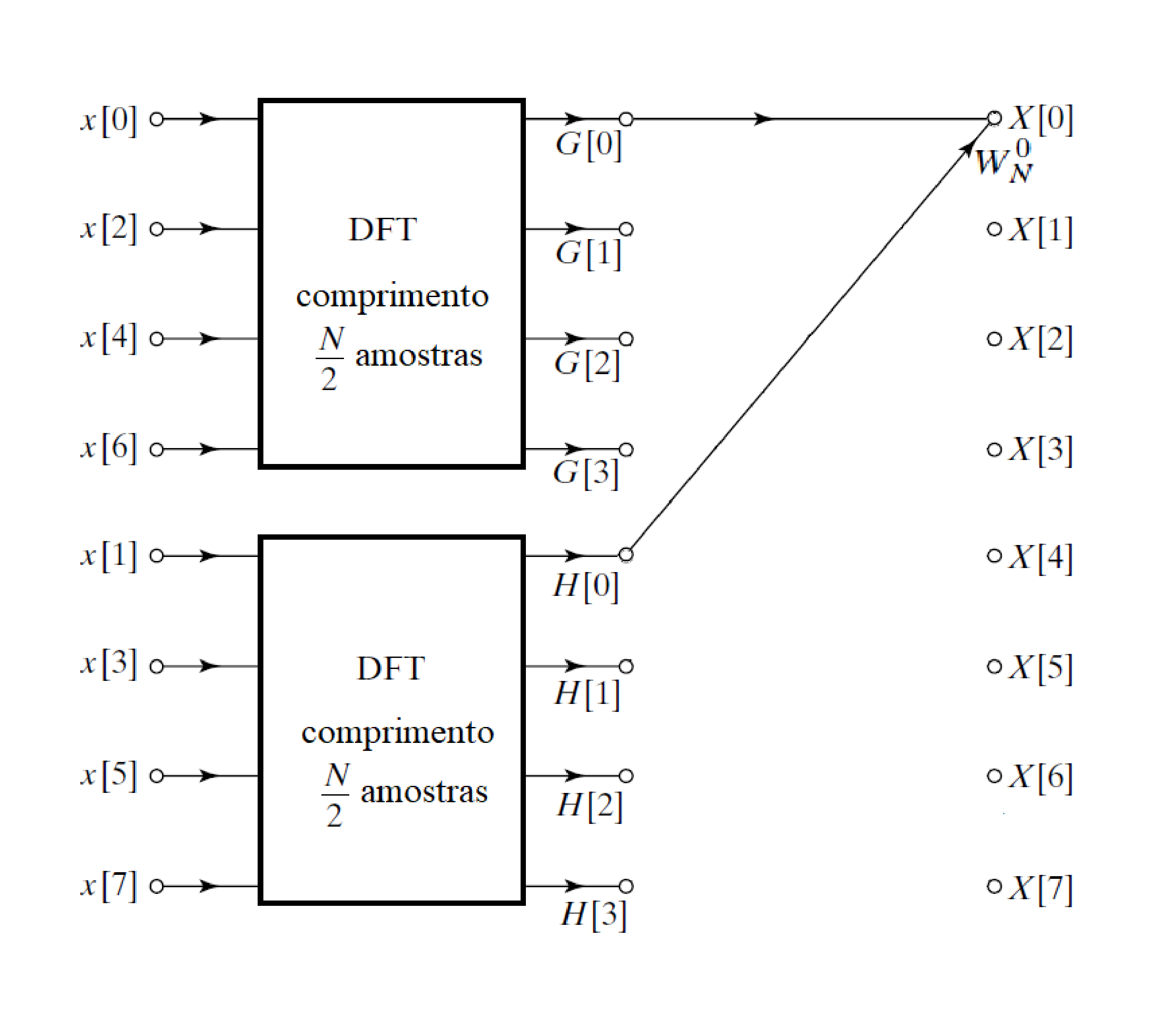
$$X[(0)_8] = G[(0)_4] + \cdots$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 0.

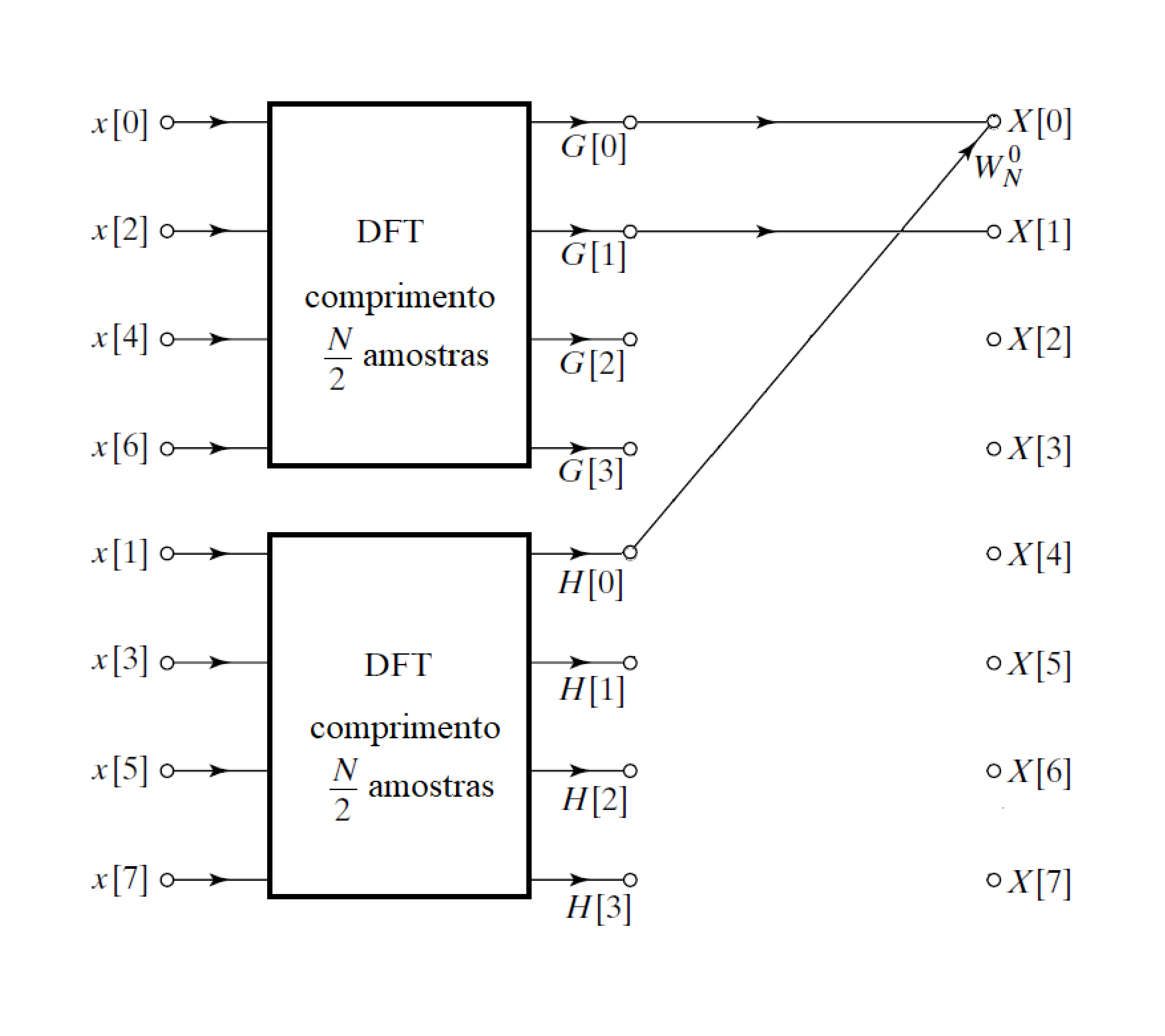
$$X[(0)_8] = G[(0)_4] + W_8^0 H[(0)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 1.

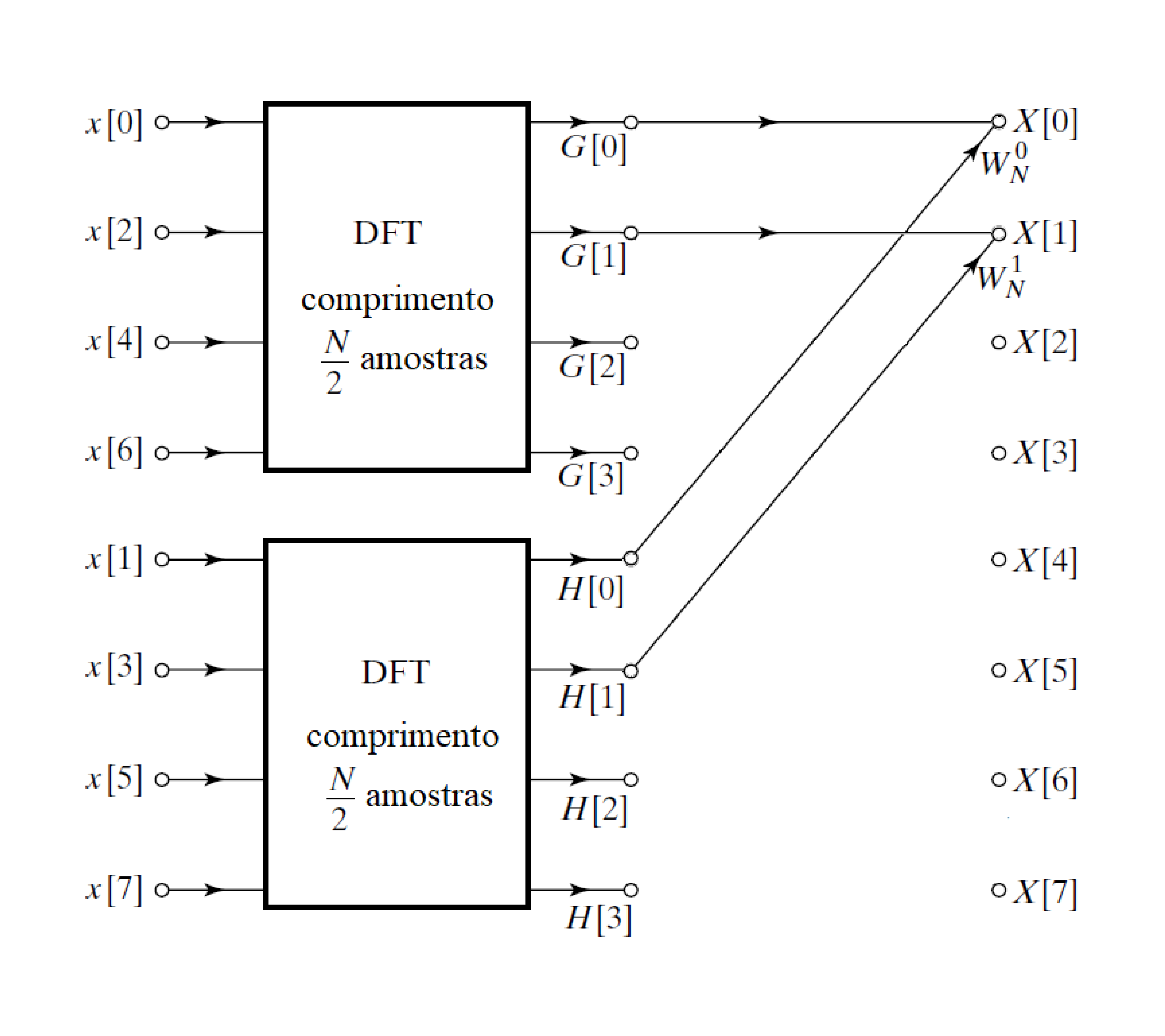
$$X[(1)_8] = G[(1)_4] + \cdots$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 1.

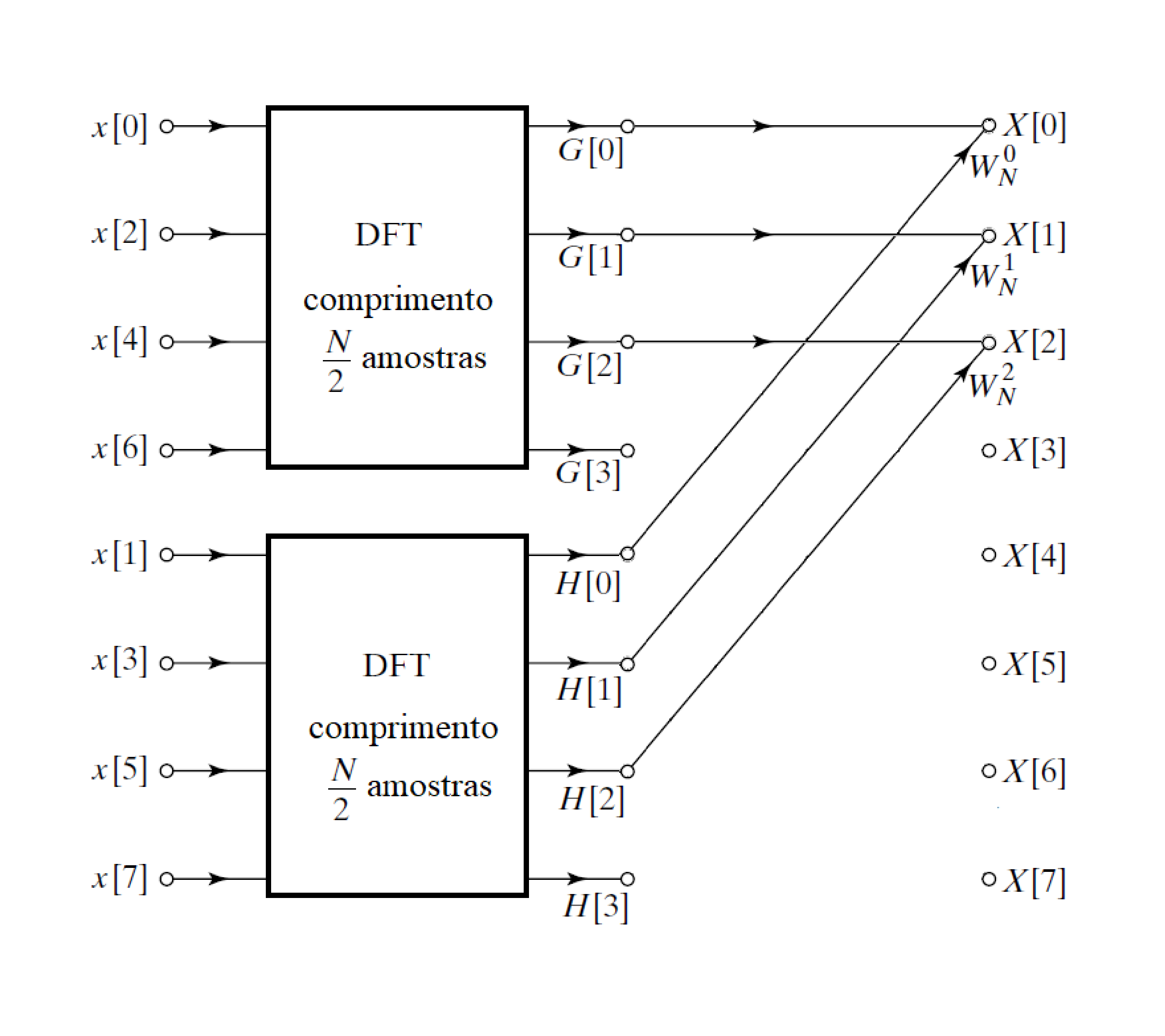
$$X[(1)_8] = G[(1)_4] + W_8^1 H[(1)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 2.

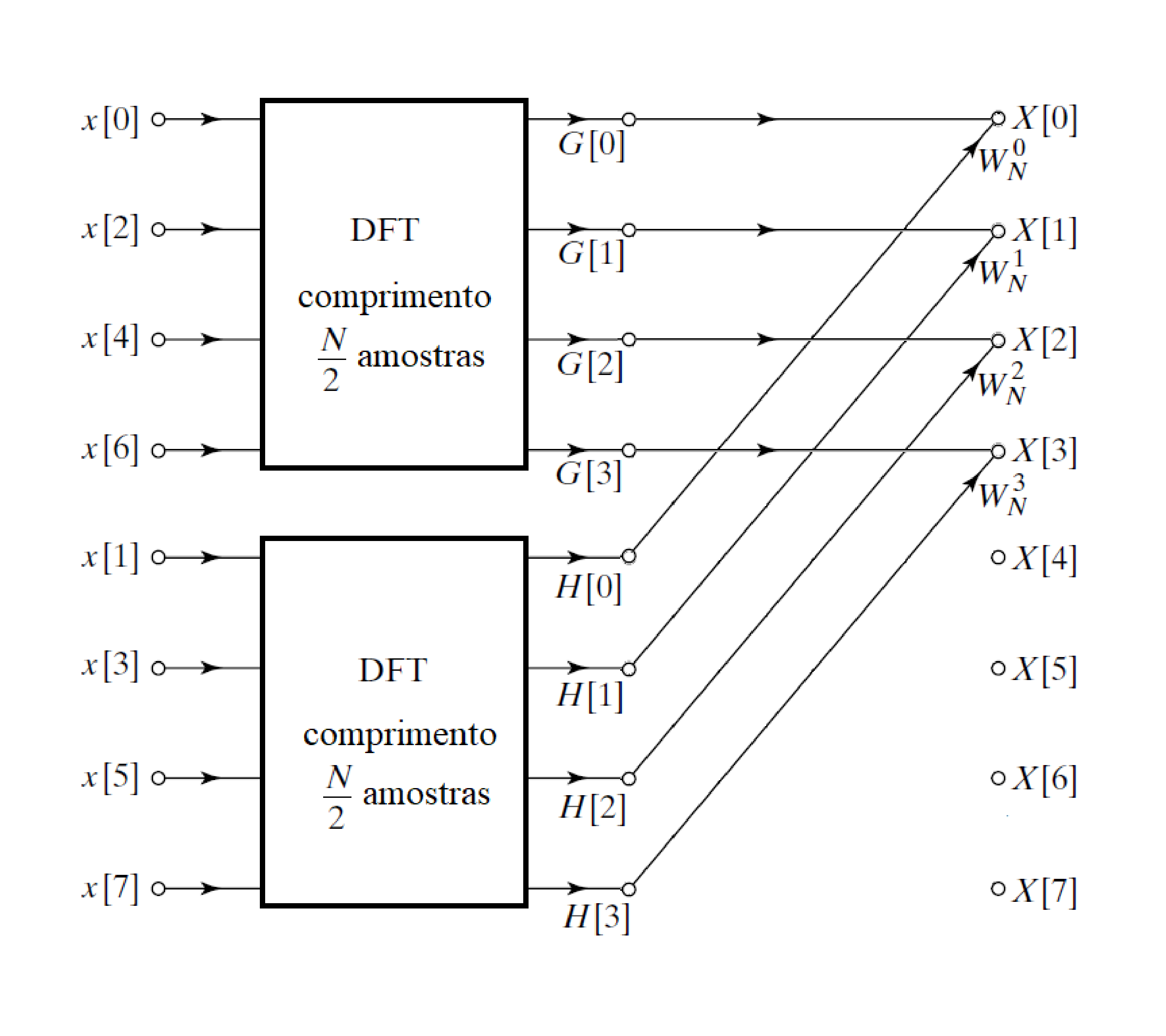
$$X[(2)_8] = G[(2)_4] + W_8^2 H[(2)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 3.

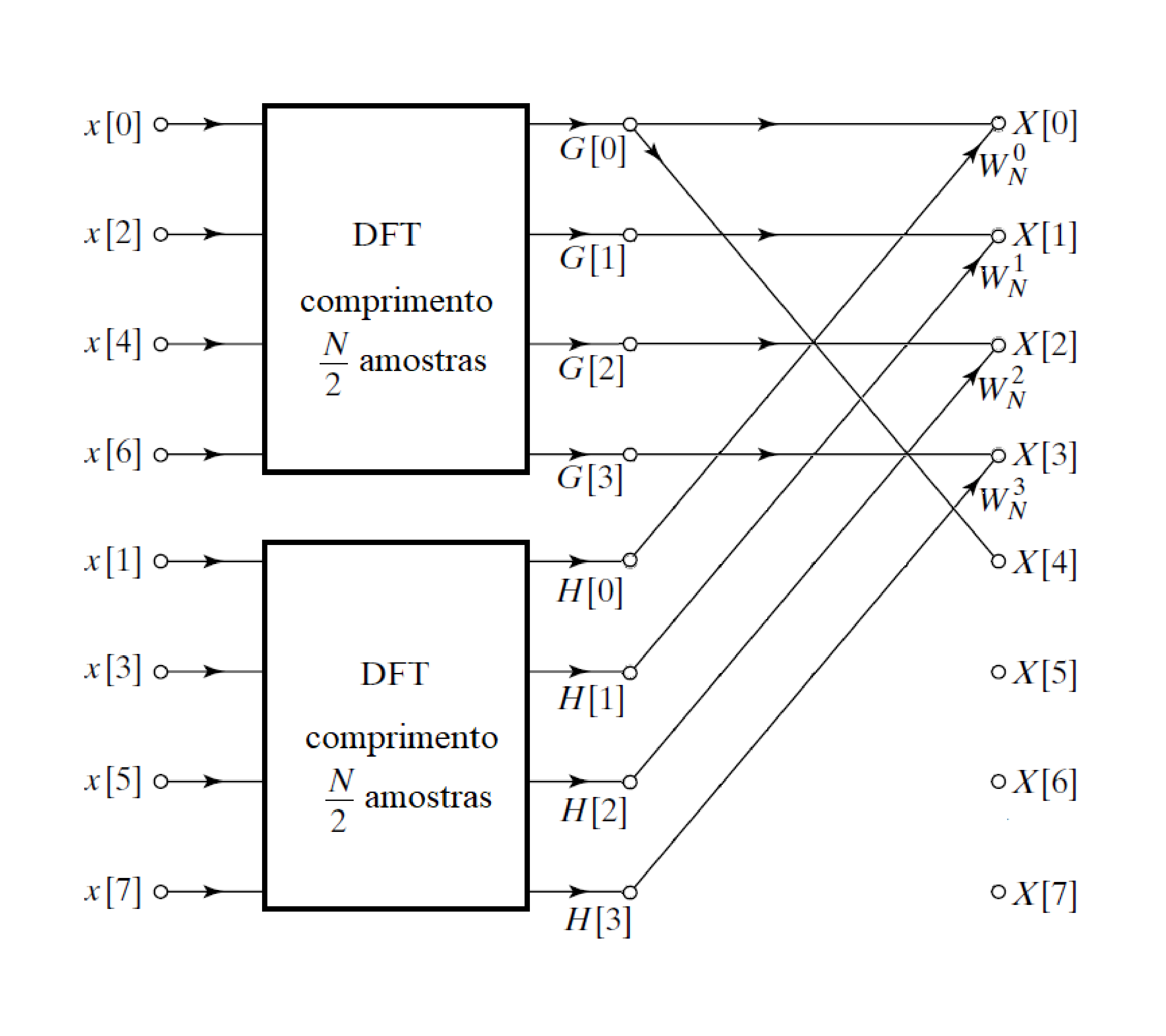
$$X[(3)_8] = G[(3)_4] + W_8^3 H[(3)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 4.

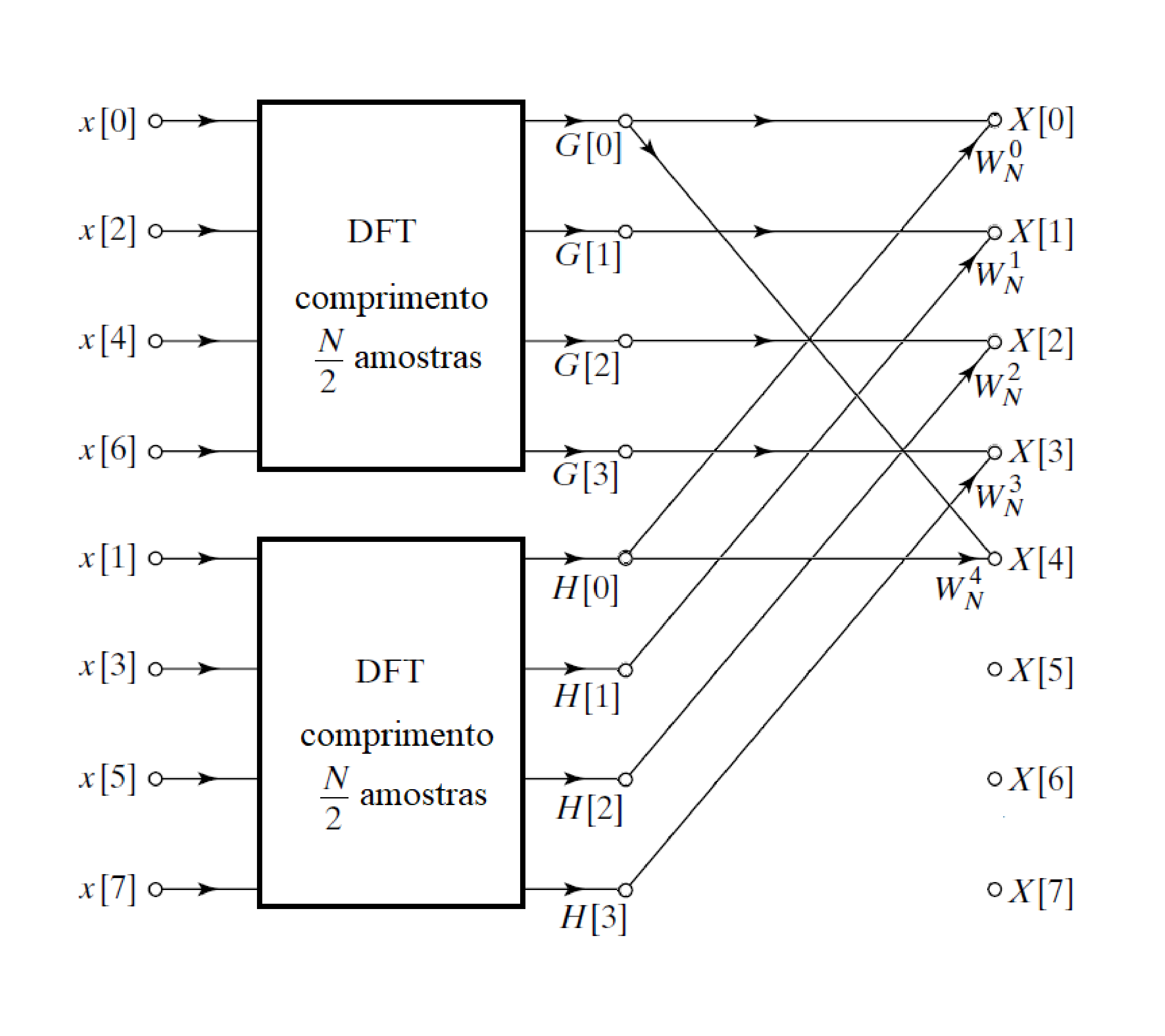
$$X[(4)_8] = G[(0)_4] + \cdots$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 4.

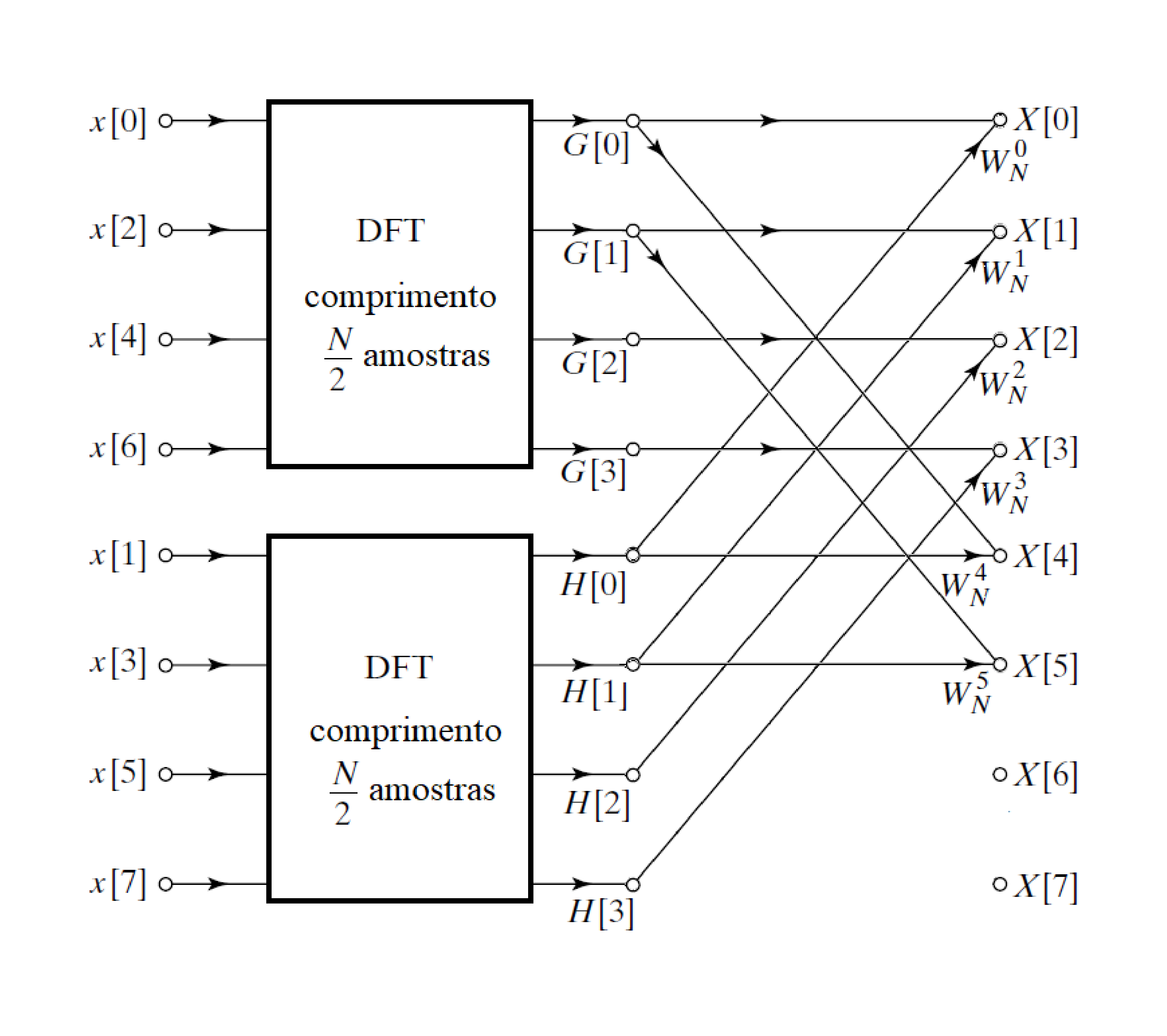
$$X[(4)_8] = G[(0)_4] + W_8^4 H[(0)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

- Para k = 5.

$$X[(5)_8] = G[(1)_4] + W_8^5 H[(1)_4]$$



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform): Algoritmo da **Dizimação no tempo**

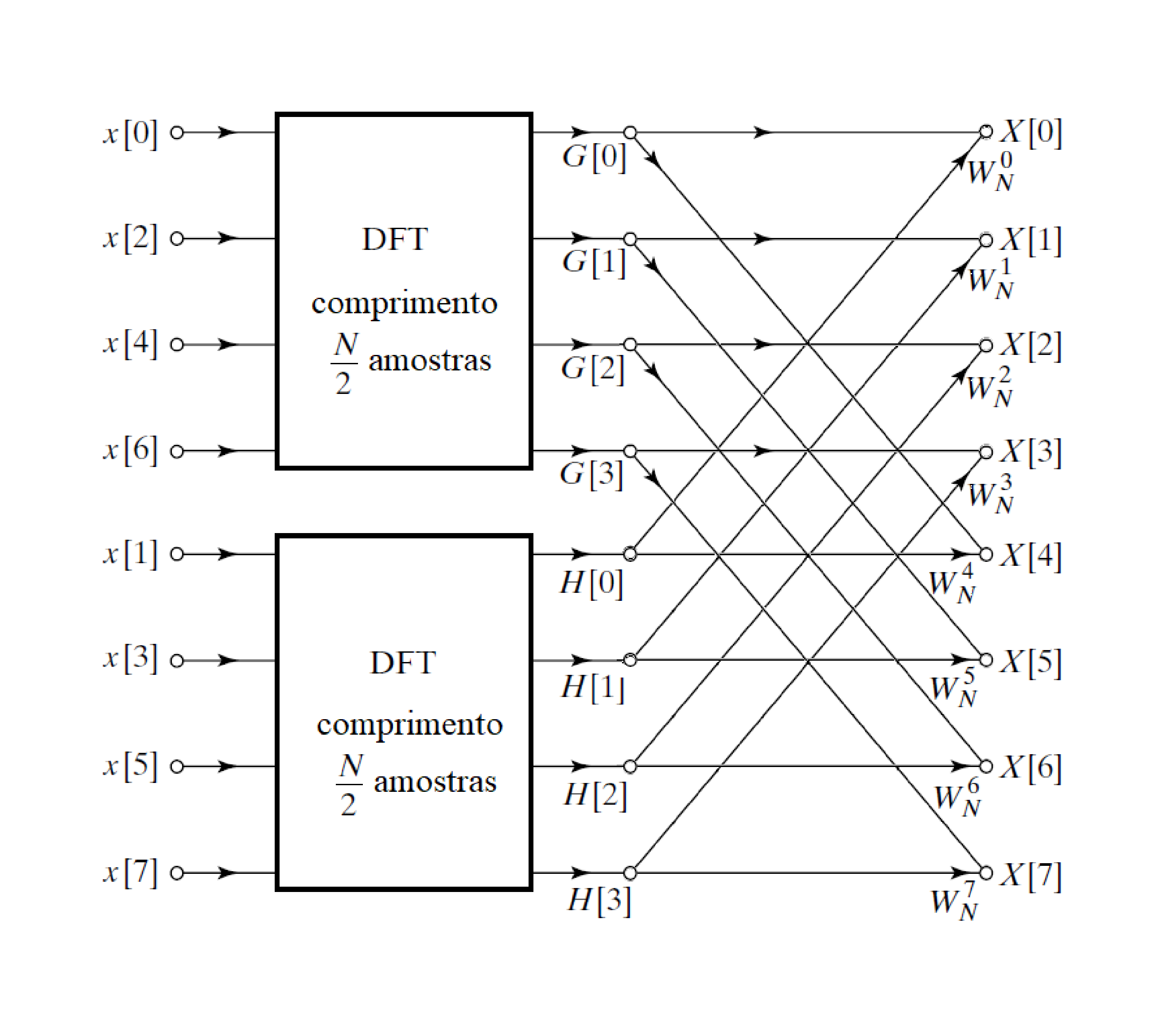
- Para k = 6 e 7.

$$X[(6)_8] = G[(2)_4] + W_8^6 H[(2)_4]$$

$$X[(7)_8] = G[(3)_4] + W_8^7 H[(3)_4]$$

- Total de operações:

$N + 2(N/2)^2 = 40$ operações complexas



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)

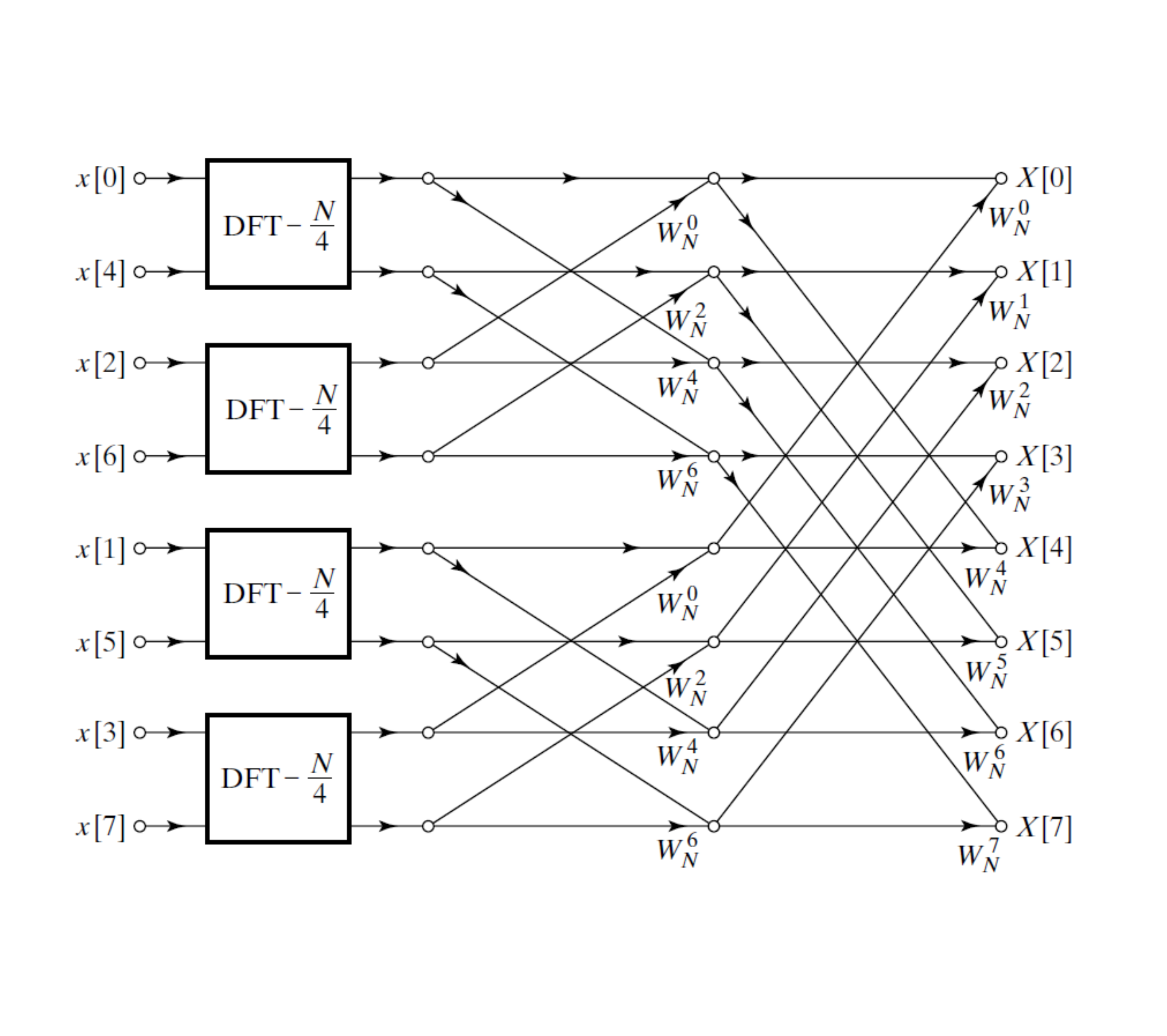
- Aplicando a dizimação no tempo novamente: pode-se computar uma DFT de tamanho N/2 por meio de combinação linear de duas DFTs de tamanho N/4.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Aplicando a dizimação no tempo novamente: pode-se computar uma DFT de tamanho N/4 por uma combinação linear de 2 DFTs de tamanho N/8.
- Total de operações:

$$2N + 4(N/4)^2 = 32$$

operações complexas



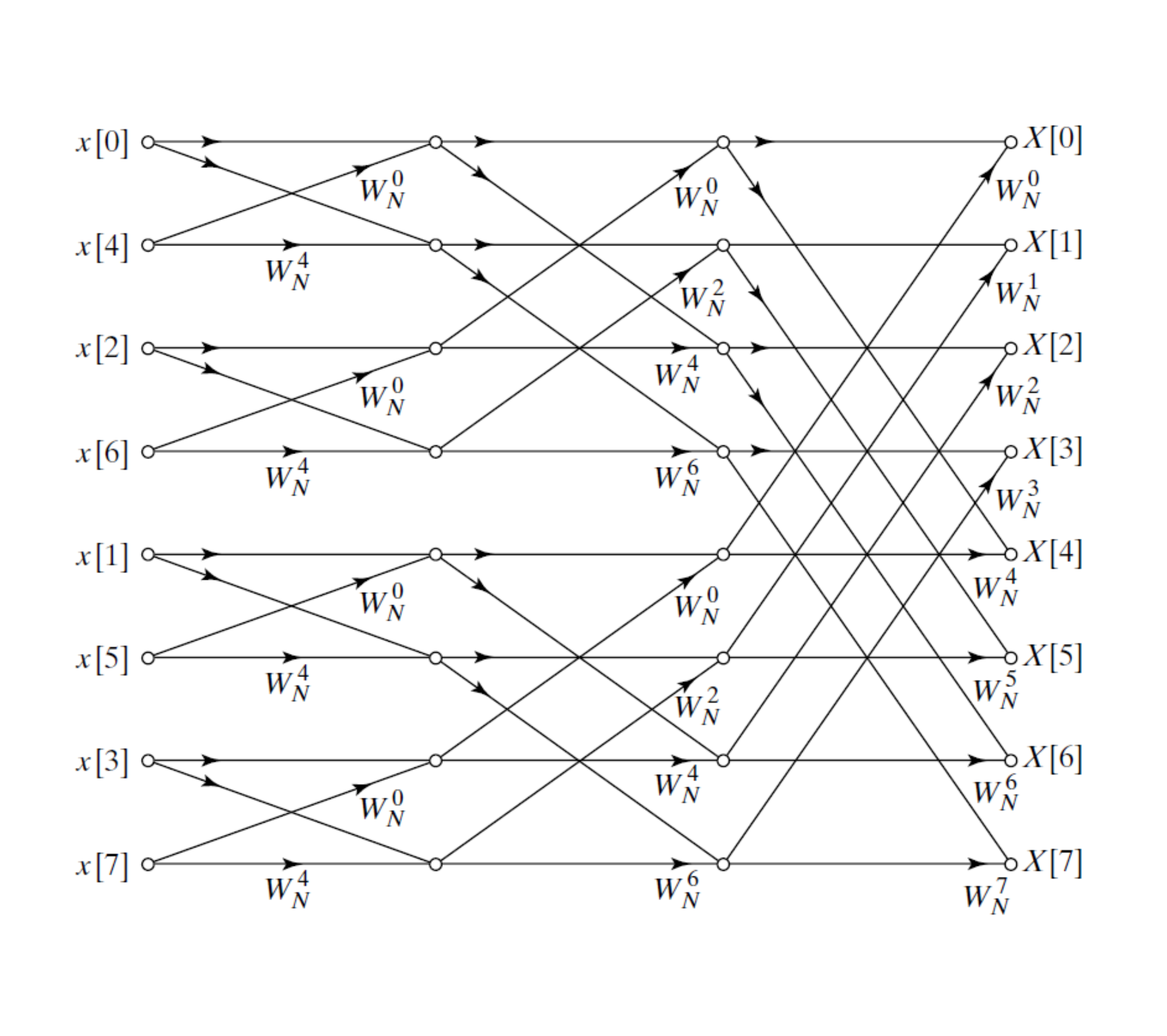
A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Diagrama de fluxo final para uma FFT de comprimento

N = 8.

- Total de operações:

3N = 24 operações complexas



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)

- Este algoritmo é denominado: FFT de radical 2.
- Observe que a quantidade de amostras necessárias para a implementação do algoritmo de radical 2 precisa ser uma potência inteira de dois, para que a dizimação aplicada na forma recursiva termine com uma DFT de duas amostras.
- Em cada estágio da FFT são necessárias N operações complexas e, no total, existem $log_2 N$ estágios.

A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)

- A complexidade computacional é $\mathcal{O}(N log_2 N)$ operações complexas.
- Comparação com a DFT:

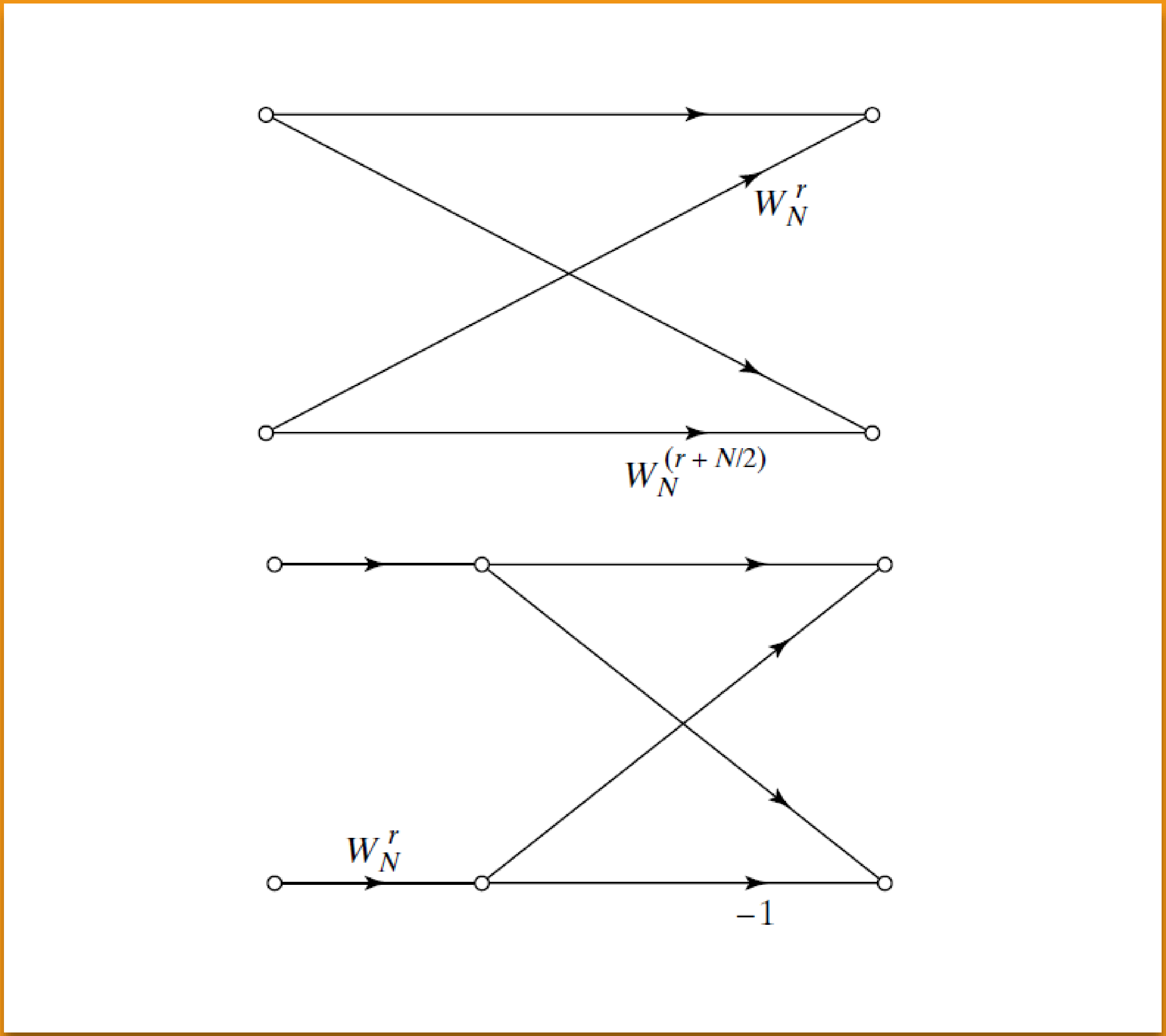
- N = 256 amostras; DFT: 65536 operações – FFT: 2048 operações; Razão: 32
- N = 512 amostras; DFT: 262144 operações – FFT: 4608 operações; Razão: 58.89
- N = 1024 amostras; DFT: 1048576 operações – FFT: 1024 operações; Razão: 102.4

A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Estrutura básica do grafo de fluxo: borboleta (butterfly).
- A borboleta pode ser otimizada:

$$W_N^{\left(r+\frac{N}{2}\right)} = -W_N^r$$

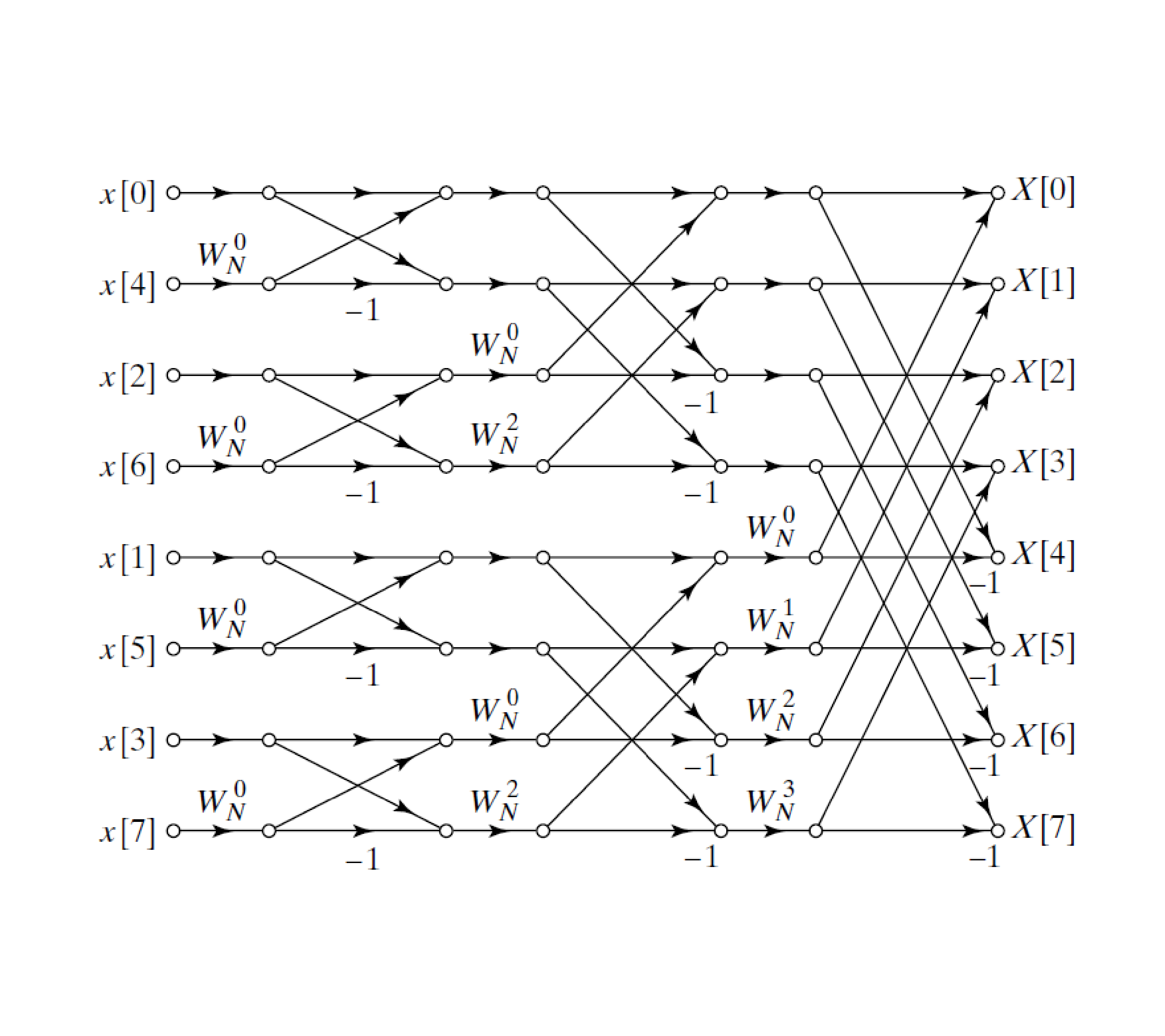
- Somente uma operação complexa é necessária.



A Transformada Rápida de Fourier (FFT – Fast Fourier Transform)

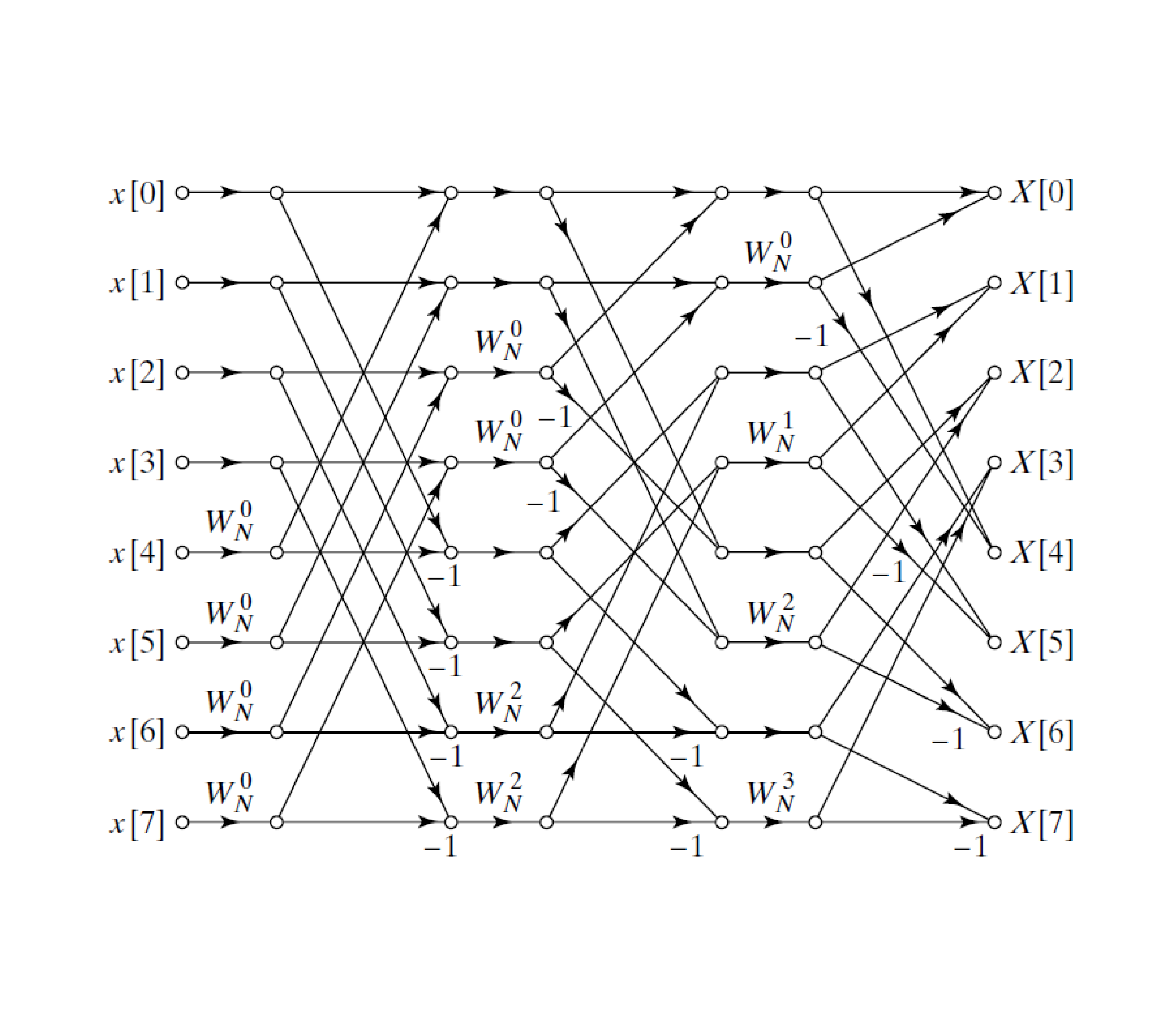
- Grafo de fluxo com butterfly otimizada para FFT de comprimento

  N = 8.



A Transformada Rápida de Fourier (FFT - Fast Fourier Transform)

- Outro algoritmo: Entrada e saída com índices na ordem normal (crescente).



Realização de SLID-FIR por meio da FFT

- A saída de um SLID pode ser calculado pela convolução linear expressa por meio de.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

- A convolução circular é uma operação que guarda alguma semelhança com a convolução linear, contudo os sinais são vistos com circulares. Matematicamente pode-se postular

$$\hat{y}[n] = \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} h[(m)_N]x(n-m)_N$$

Realização de SLID-FIR por meio da FFT

- Se $x[n]$ pe finito e possui N amostras e $h[n]$ resposta impulsional de um SLID-FIR possui M amostras, precisamos saber em que condições teremos:

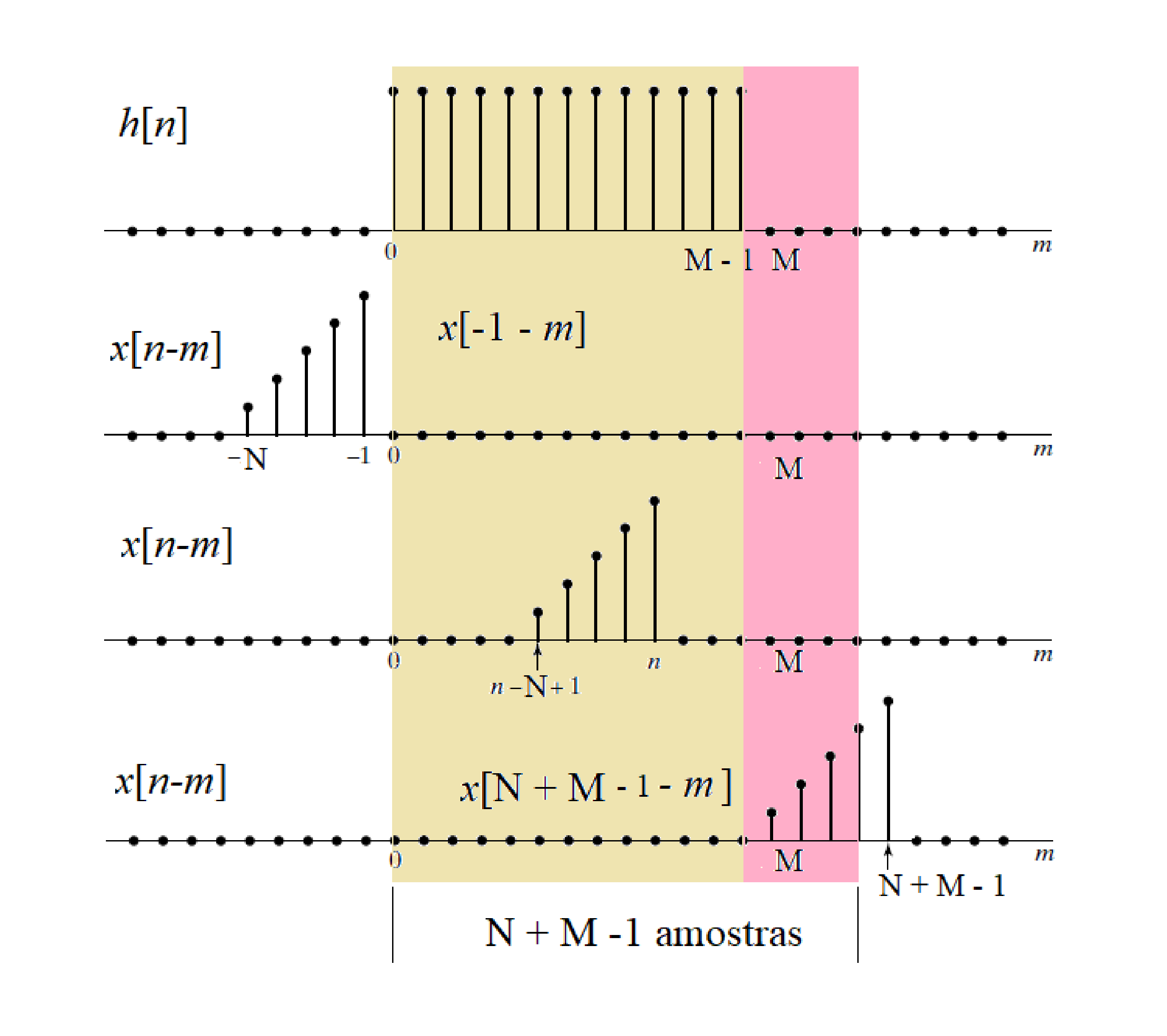
$$y[n] = \hat{y}[n]$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} h[(m)_Q]x[(n-m)_Q]$$

Realização de SLID-FIR por meio da FFT

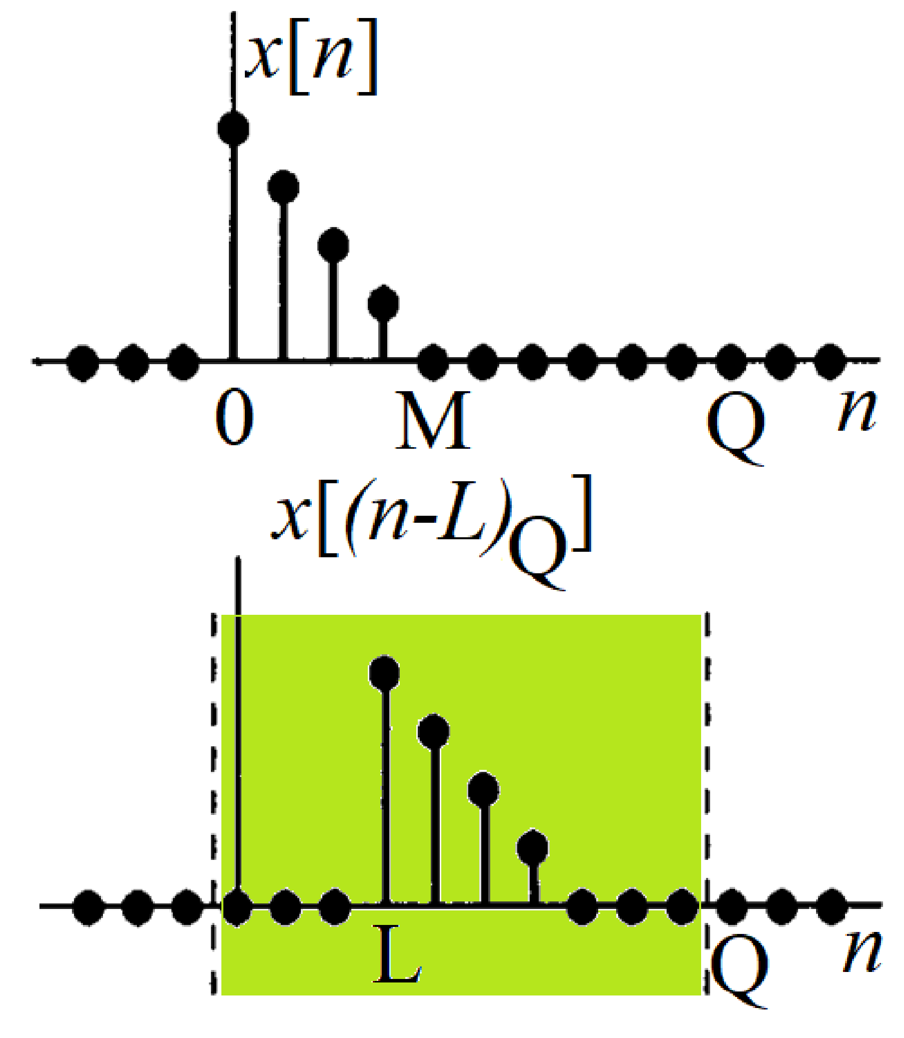
- Considere duas sequências finitas:
- $h[n]$ a resposta impulsional de um SLID do tipo FIR $n \in [0, M-1]$ e
- $x[n]$ uma entrada genérica e de comprimento finito $n \in [0, N-1]$
- A vonvolução linear

$h[n]* x[n]$ produz M + N -1 amostras.



Realização de SLID-FIR por meio da FFT

- Quando o deslocamento circular simulação deslocamento linear.



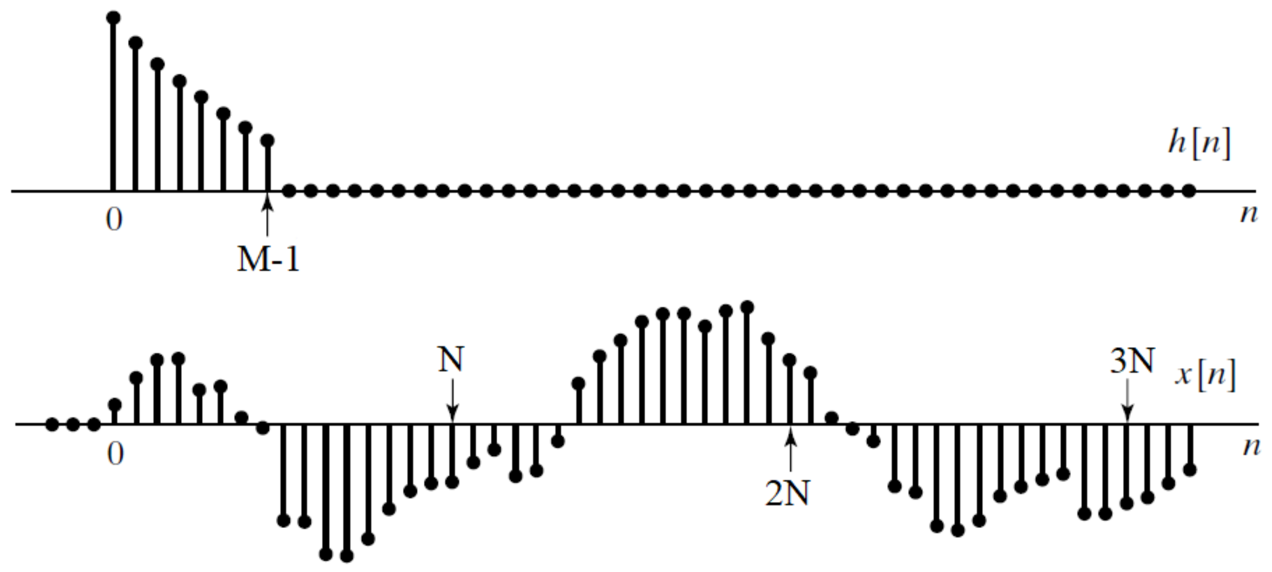
Realização de SLID-FIR por meio da FFT

- Conclui-se que Q = N + M - 1

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = \sum_{m=0}^{\mathrm{N}-1} h\big[(m)_{(N+M-1)}\big]x\big[(n-m)_{(N+M-1)}\big]$$

Realização de SLID-FIR por meio da FFT

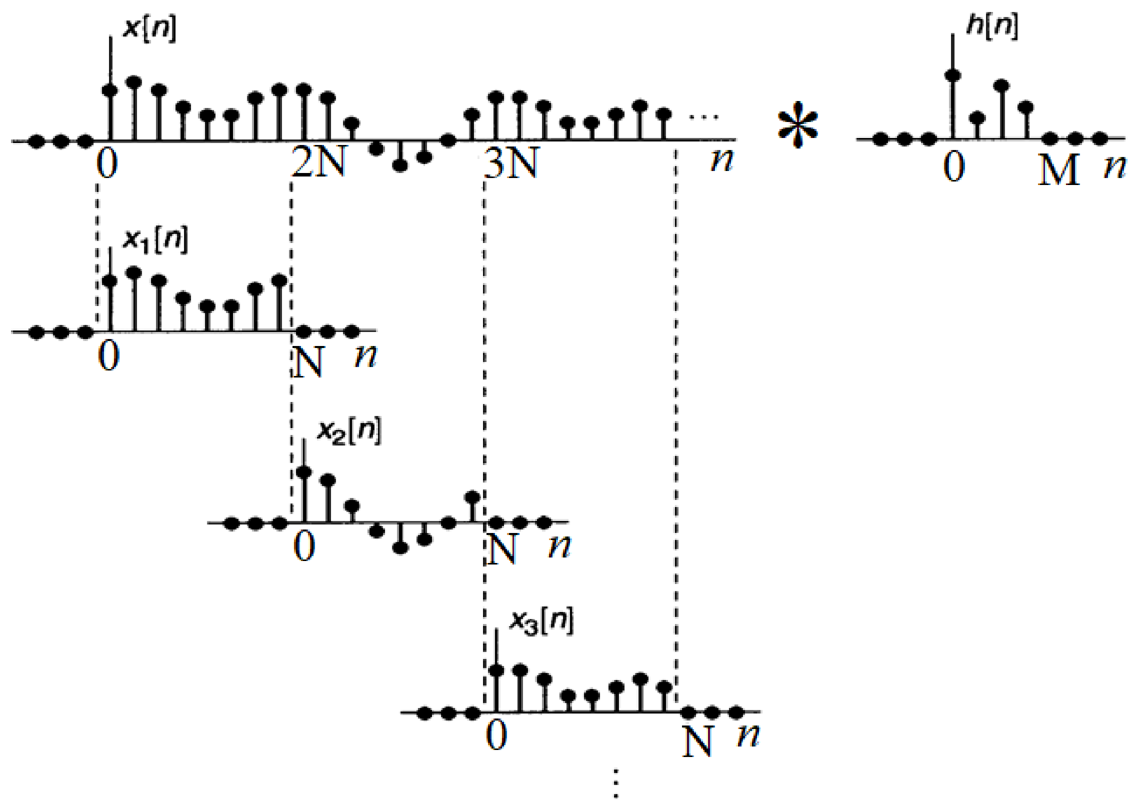
- A entrada $x[n]$ pode ter comprimento indeterminado.



Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com soma

- O sinal de entrada é segmentado em janelas de comprimento N amostras.
- $x[n]$ pode ser escrito como

$$x[n] = \sum_r x_r[n]$$



Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com soma

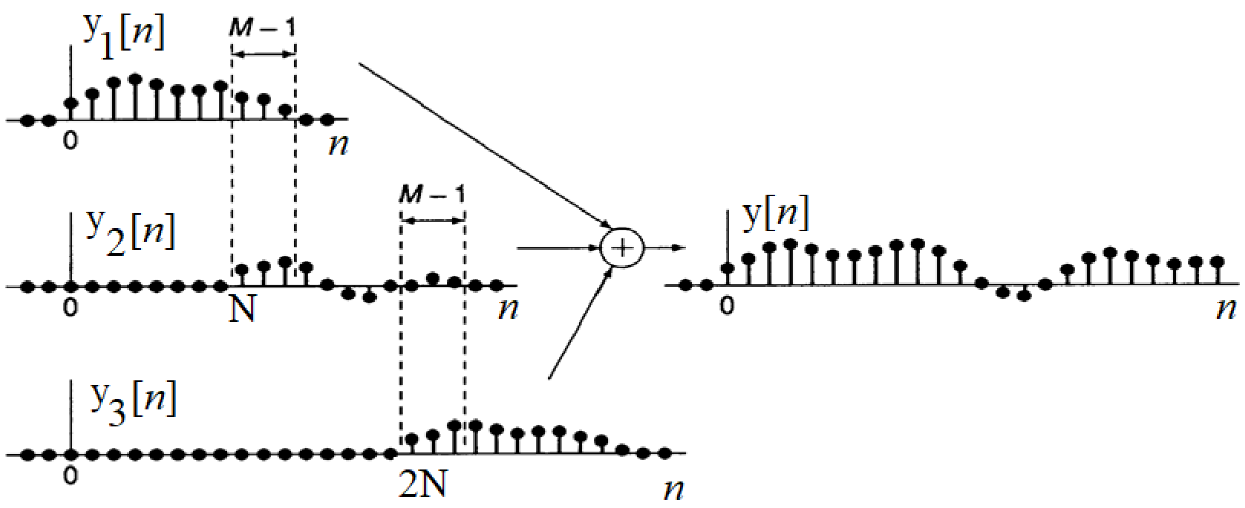
- A convolução de cada janela de comprimento N amostras do sinal de entrada é convoluida com a resposta impulsional do SLID-FIR de comprimento M amostras.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n] = \left(\sum_{r} x_r[n]\right) * h[n]$$

$$= \sum_{r} (x_r[n] * h[n]) = \sum_{r} y_r[n] \ \ (\mathrm{N} + \mathrm{M} - 1 \text{ amostras})$$

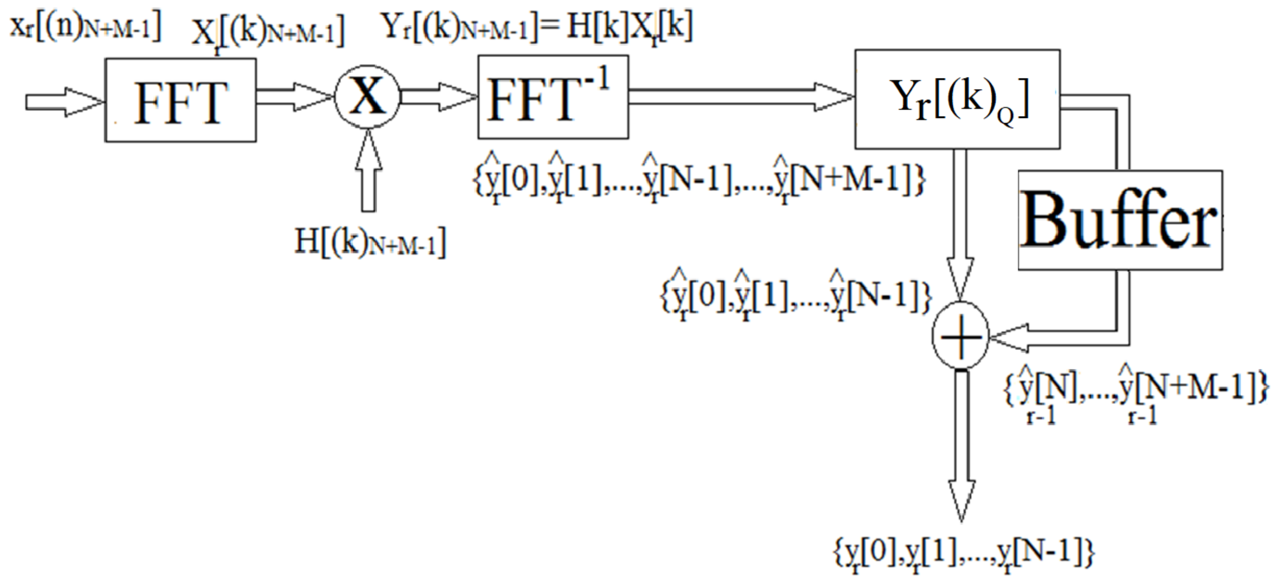
Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com soma

- A combinação linear das convoluções $y_r[n], r = 1, 2, \ldots$ é realizada, produzindo osinal obtido na saída do SLID.



Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com soma

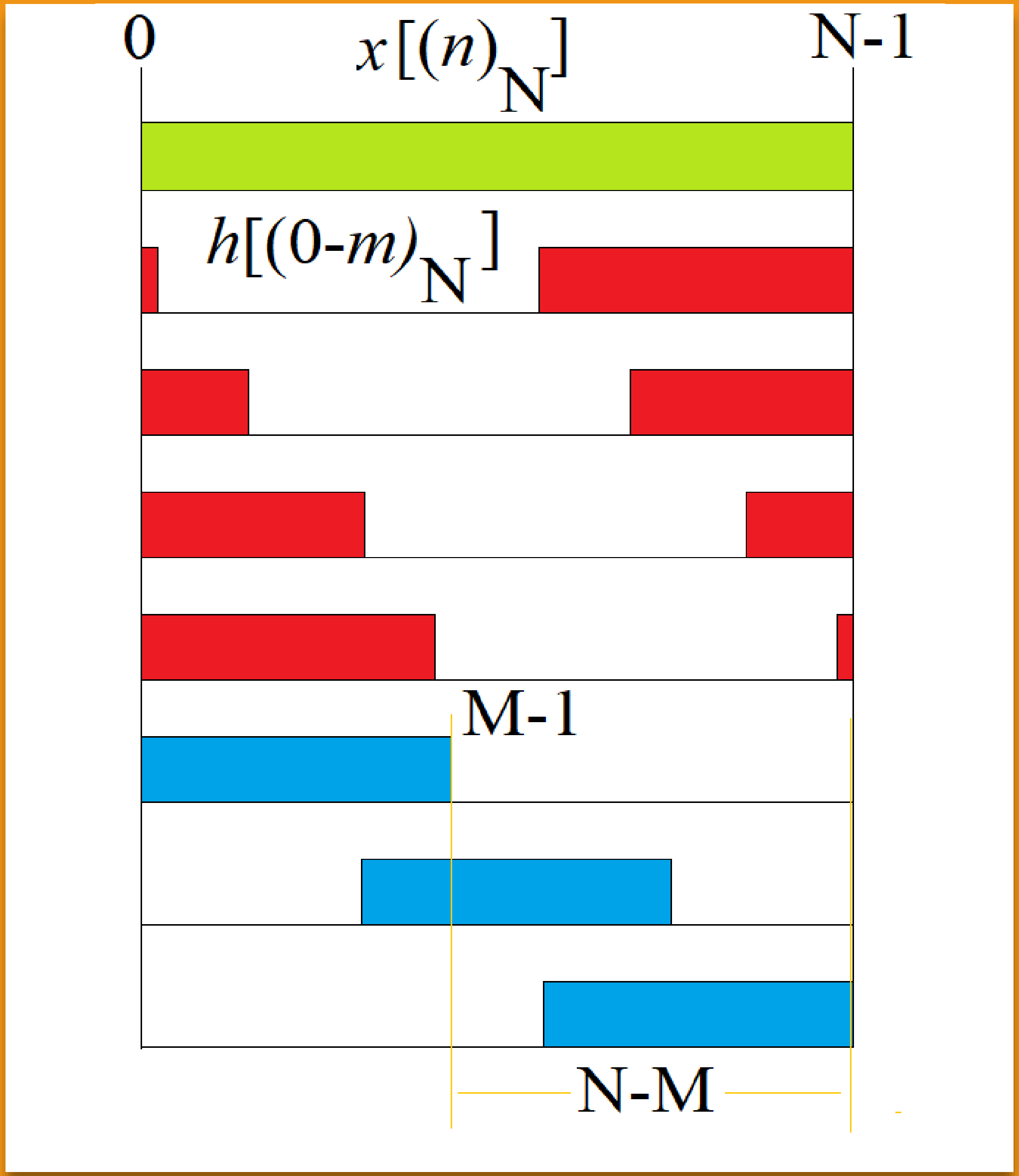
- Diagrama de blocos usando a FFT.
- Complexidade computacional: $\mathcal{O}(2Q\log_2 Q + Q + M - 1)$



Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com armazenamento

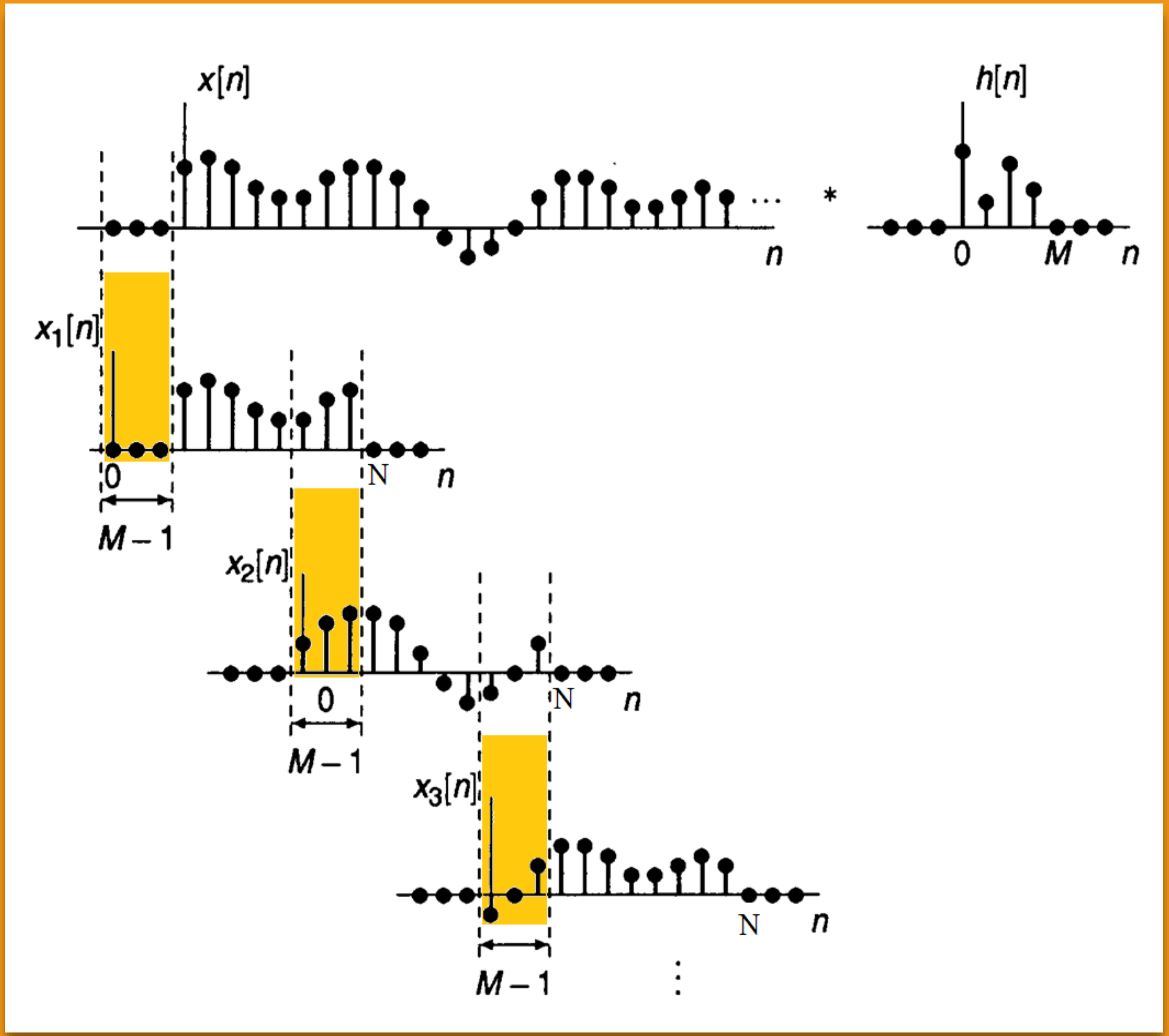
- Comparação entre convolução circular de comprimento N e convolução linear de comprimento (N+M-1).

$$\sum_{m=0}^{N-1} x[(m)_N]h[(n-m)_N]$$



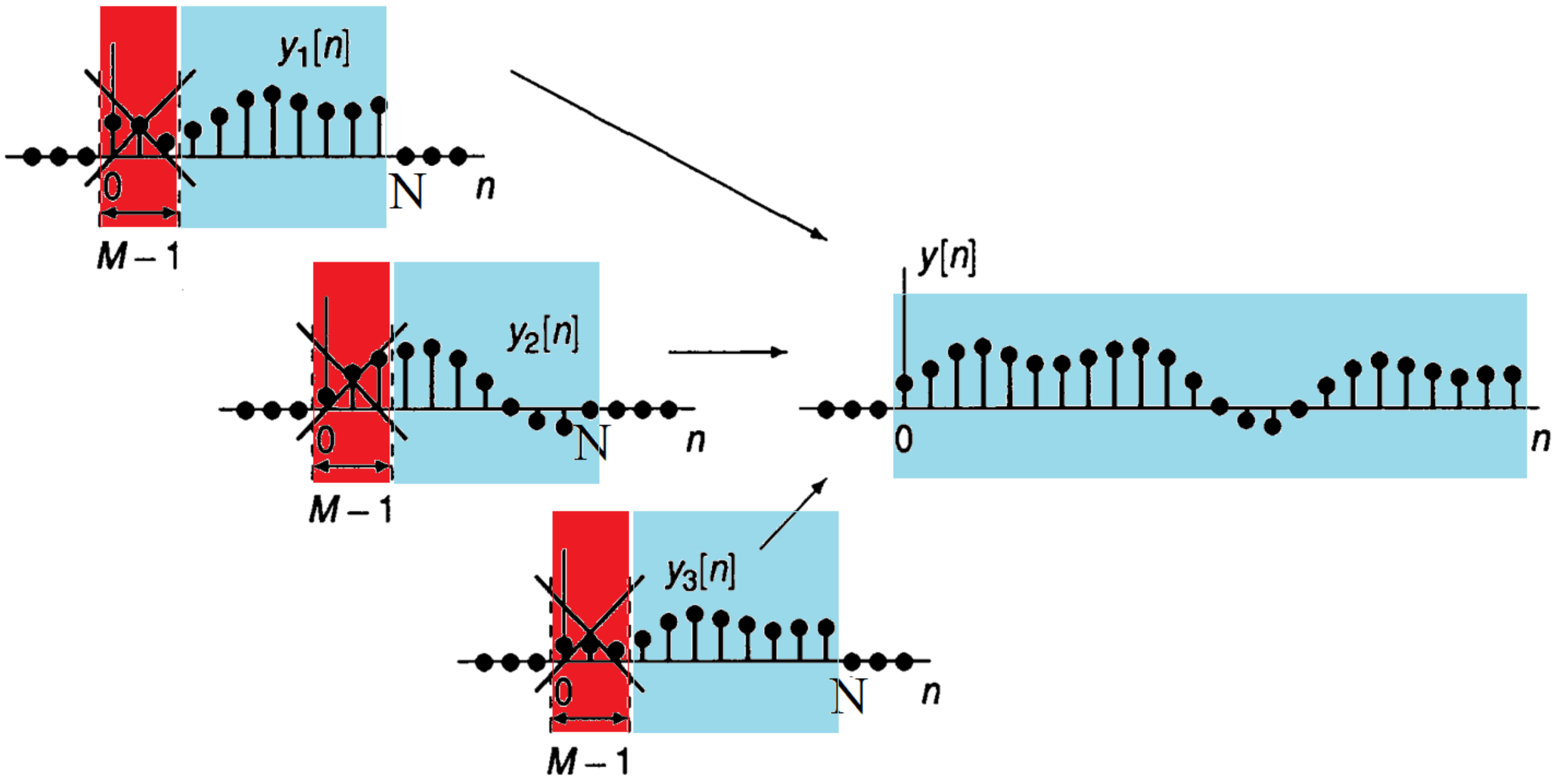
Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com armazenamento

- A superposição de M-1 amostras acontece na segmentação da janela do sinal de entrada.



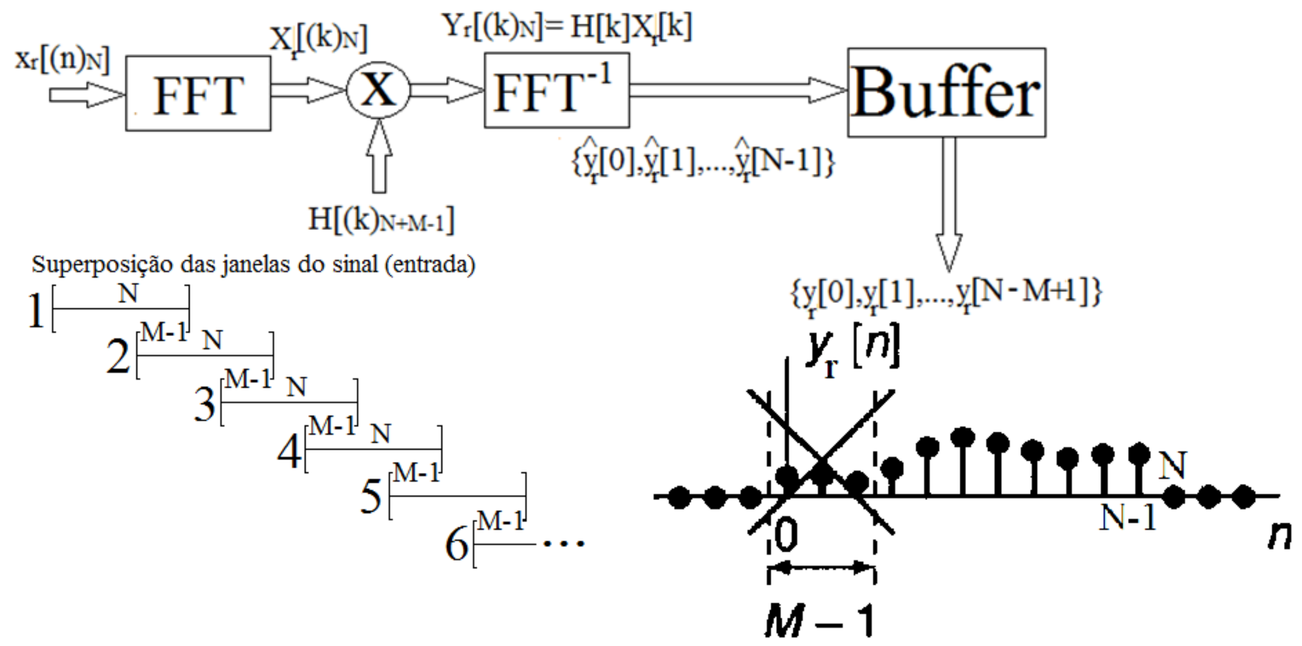
Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com armazenamento

- As amostras que não correspondem à convolução linear são descartadas.
- As N-M que são idênticas ao resultado da convolução linear são concatenadas para construí o sinal de saída do SLID-FIR.



Realização de SLID-FIR por meio da FFT: superposição com armazenamento

- Algoritmo da superposição com armazenamento: diagrama de blocos.
- Complexidade computacional: $O(2Nlog_2N + N)$



Fim do módulo 7