

Aula 15 - Resumo

≡ Conteúdo	Filtros
📅 Data	@September 8, 2021
≡ Tags	Filtragem-otima binário-geral exercicios

Receptor Ótimo no caso binário

Relembrando a aula passada...

- Estamos buscando generalizar o máximo este receptor e em seguida seguir para outros tipos de modulação.
- Como estamos transmitindo um bit por um símbolo, logo a taxa de transmissão e o tempo da janela de transmissão são iguais para o caso binário.
- Estamos buscando também que o filtro casado seja causal para que possa ser devidamente implementado.

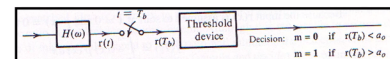
Receptor Binário Ótimo

- Considere um esquema binário em que a cada T_b segundos um símbolo correspondente a um bit 0 ou 1 é transmitido.
- Considere que $p(t)$ e $q(t)$ são dois pulsos utilizados para se transmitir os bits 1 e 0, respectivamente.

39

Receptor Binário Ótimo

- Considere o seguinte receptor ótimo:

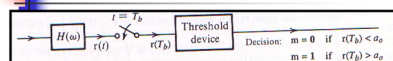


- O pulso recebido é injetado em um filtro $H(w)$ e a sua saída $r(t)$ é amostrada em $t = T_b$.
- A decisão será pelo bit 1 ou pelo bit 0 em função de um limiar de decisão ótimo a_0 .

40

- O $p(t)$ e $q(t)$ é para generalizar ainda mais para a transmissão, em que podem ser diferentes.
- Modelando a V.A que define $r(T_b)$:

Receptor Binário Ótimo



Então,

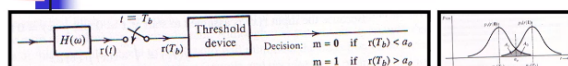
$$\begin{cases} p_{r|m}(r,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[r-q_0(T_b)]^2}{2\sigma^2}} \\ p_{r|m}(r,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[r-p_0(T_b)]^2}{2\sigma^2}} \end{cases}$$

46

- O limiar de decisão está localizado como no gráfico definido por a_0 para que possamos minimizar a probabilidade de erro. Note como é definido que erraremos e já conhecemos o problema de aulas passadas, agora conseguimos ver graficamente aonde estará a probabilidade de se errar.

- Para que a probabilidade de se errar seja mínima, ela se dá quando $A_0=A_1$, o que acontece quando a_0 está equidistante de $p_0(T_b)$ e $q_0(T_b)$.
- Seguindo:

Receptor Binário Ótimo



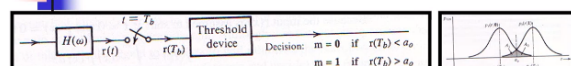
$$P_{\text{erro}} = \frac{A_0 + A_1}{2}$$

$$P_{\text{erro}} \text{ será mínimo se } a_0 = \frac{p_0(T_b) + q_0(T_b)}{2} \text{ e, dessa forma,}$$

$$P_{\text{erro}} = \frac{A_0 + A_1}{2} = A_0 = \int_{a_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{[r-q_0(T_b)]^2}{2\sigma^2}} dr$$

53

Receptor Binário Ótimo



$$P_{\text{erro}} = Q\left(\frac{\beta}{2}\right) \Leftarrow \beta = \frac{p_0(T_b) - q_0(T_b)}{\sigma_{a_0}}$$

Para maximizar β , vamos definir uma função:

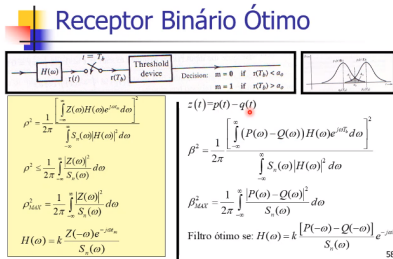
$$z_0(t) = p_0(t) - q_0(t)$$

Nós já sabemos maximizar essa função,

Sendo assim, $\beta = \frac{z_0(T_b)}{\sigma_{a_0}} \Leftarrow$ quando $z(t) = p(t) - q(t)$ é injetado na entrada do filtro de recepção.

57

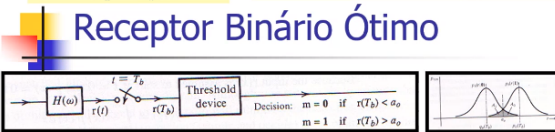
- Note que fazendo essa substituição podemos usar a manipulação para o caso binário polar em que conseguimos maximizar o β para que o filtro $H(\omega)$ seja o melhor possível - filtro ótimo.
- Então, usando o desenvolvimento que tivemos para o caso binário polar (apenas trocando variáveis para não confundirmos):



- Lembre que o T_b deve ser ajustado para que tenhamos um filtro causal, que não tenha atraso em excesso e que proporcione um bom momento para tomada de decisão da amostra.
- Temos como entender melhor o que o B_{MAX}^2 nos diz com a integral, então podemos continuar desenvolvendo na esquerda:

$$\beta_{MAX}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P(\omega) - Q(\omega)|^2}{S_n(\omega)} d\omega$$

Filtro ótimo se: $H(\omega) = k \frac{[P(-\omega) - Q(-\omega)]}{S_n(\omega)} e^{-j\omega T_b}$



$$\text{Se } S_n(\omega) = \frac{N}{2} \text{ e } k = \frac{N}{2}:$$

$$H(\omega) = [P(-\omega) - Q(-\omega)] e^{-j\omega T_b}$$

$$H(\omega) \leftrightarrow h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$

$$\beta_{MAX}^2 = \frac{2}{N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega) - Q(\omega)|^2 d\omega$$

59

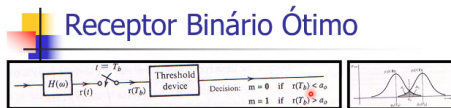
- Isto nos mostrou que o filtro continua sendo um filtro casado.

Receptor Binário Ótimo

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left(\int_0^{T_b} p^*(t) - q^*(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) e^{j\omega t} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) \right) \left(\int_0^{T_b} p^*(t) - q^*(t) \right) dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) \right) \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) \right) dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) \right)^2 dt d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) dt - 2 \int_0^{T_b} p(t) q(t) dt + \int_0^{T_b} q(t) dt \right) d\omega \\ &= E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t) q(t) dt \end{aligned}$$

61

- Voltando para o receptor e a sua probabilidade de erro:



$$\beta_{MAX}^2 = \frac{2}{N} \int_0^{T_b} [p(t) - q(t)]^2 dt = \frac{E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t) q(t) dt}{N/2}$$

$$P_{erro} = Q\left(\frac{\beta_{MAX}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t) q(t) dt}{2N}}\right)$$

62

- Neste momento podemos definir o receptor ótimo como o seguinte, com sua devida probabilidade de erro:

- Continuando abrindo a integral:

Receptor Binário Ótimo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega) - Q(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (P(\omega) - Q(\omega)) (P^*(\omega) - Q^*(\omega)) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) e^{-j\omega t} dt - \int_0^{T_b} q(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left(\int_0^{T_b} p^*(t) e^{j\omega t} dt - \int_0^{T_b} q^*(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{T_b} p(t) - q(t) e^{-j\omega t} dt \right) \left(\int_0^{T_b} p^*(t) - q^*(t) e^{j\omega t} dt \right) d\omega \end{aligned}$$

60

- Note que a equação final nos define que o B_{MAX} é definido por valores de energia, com uma medida de correlação cruzada (medida de semelhança) que pode ser vista como ortogonalidade se quisermos.

- Vamos trabalhar agora com o a_0 com uma forma parecida com a probabilidade de erro acima. Então podemos achar um a_0 assim:

Receptor Binário Ótimo

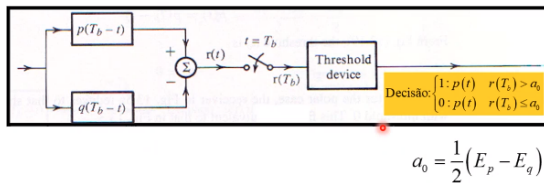
$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) P^*(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) Q^*(\omega) d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) Q^*(-\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} P(-\omega) Q(\omega) d\omega \right) \\ a_0 &= \frac{1}{2} (E_p - E_q - \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) Q^*(-\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} P(-\omega) Q(\omega) d\omega) \\ a_0 &= \frac{1}{2} (E_p - E_q) \end{aligned}$$

63

Receptores binários Ótimos

Para recepção ótima :

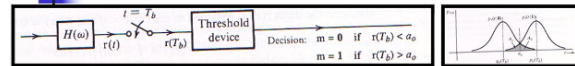
$$H(\omega) = P(-\omega)e^{-j\omega T_b} - Q(-\omega)e^{-j\omega T_b} \leftrightarrow h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$



$$a_0 = \frac{1}{2}(E_p - E_q)$$

68

Receptor Binário Ótimo



$$\beta_{MAX}^2 = \frac{2}{N} \int_0^{T_b} [p(t) - q(t)]^2 dt = \frac{E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt}{N/2}$$

$$P_{erro} = Q\left(\frac{\beta_{MAX}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt}{2N}}\right)$$

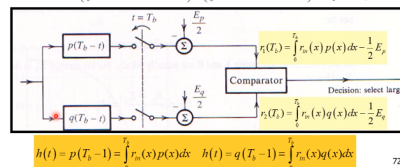
62

- Agora vamos tentar entrar mais a fundo no diagramas de bloco na foto acima, para interpretar o que o $r(T_b)$ - amostra, está nos dizendo por meio da correlação, e verificar que o filtro está implementando uma medida de semelhança.
- Manipulando devidamente, podemos chegar na equação com o seguinte diagrama de blocos:

Receptores binários Ótimos

Para recepção ótima:

$$r(T_b) = \left(\int_0^{T_b} r_m(x)p(x)dx - \frac{1}{2}E_p \right) - \left(\int_0^{T_b} r_m(x)q(x)dx - \frac{1}{2}E_q \right) \Rightarrow \begin{cases} 0 & r(T_b) \leq 0 \\ 1 & r(T_b) > 0 \end{cases}$$



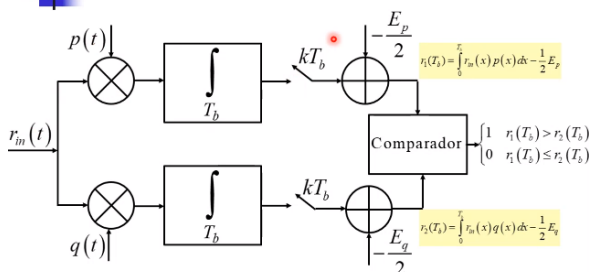
$$h(t) = p(T_b - t) = \int_0^{T_b} r_m(x)p(x)dx \quad h(t) = q(T_b - t) = \int_0^{T_b} r_m(x)q(x)dx$$

72

- Agora, com esta equação, pode-se tentar implementar outro diagrama de blocos para o sistema, da seguinte maneira:

Para recepção ótima:

$$r(T_b) = \left(\int_0^{T_b} r_m(t)p(x)dx - \frac{1}{2}E_p \right) - \left(\int_0^{T_b} r_m(t)q(x)dx - \frac{1}{2}E_q \right) \Rightarrow \begin{cases} 0 & r(T_b) \leq 0 \\ 1 & r(T_b) > 0 \end{cases}$$



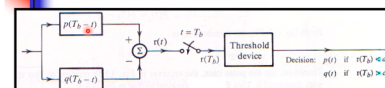
73

Note da figura ao lado que a subtração que fazemos com a medida de energia serve para normalizarmos o sistema, pois pode ser que a energia de p(t) seja bem maior que q(t), e vice-versa também.

Isto garante uma boa comparação.

- Note que podemos pensar que o receptor ótimo para o caso m-ário, pode ser parecido com este sistema.
- Resumindo o nosso receptor ótimo:

Resultados Obtidos



$$P_{erro} = Q\left(\frac{\beta_{MAX}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2 \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt}{2N}}\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(E_p - E_q)$$

$$H(\omega) \leftrightarrow h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t)$$

74

Em seguida foram feitos alguns exercícios comparando diferentes tipo de modulação em que usam sinalização binária como estudamos acima.