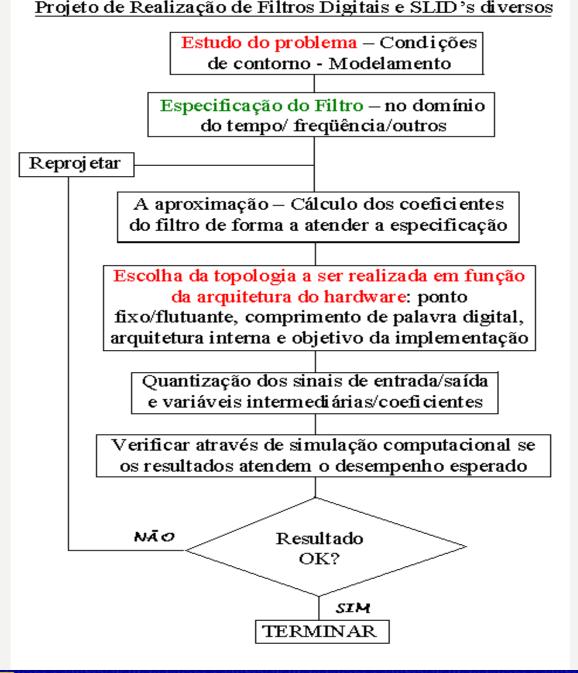
ESTRUTORAS PARA IMPLEMENTAÇÃO DE SISTEMAS EM TEMPO DISCRETO



#### ESTUDO DO PROBLEMA

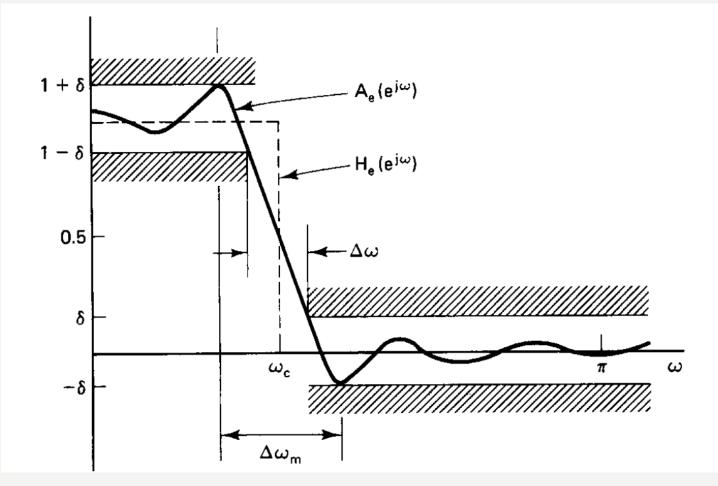
- Levantamento das condições de contorno;
- Modelamento matemático do problema;
- Especificação do filtro;
- Escolha da técnica do projeto a ser implementada com base nas especificações, requisitos de desempenho e condições técnicas de realização.





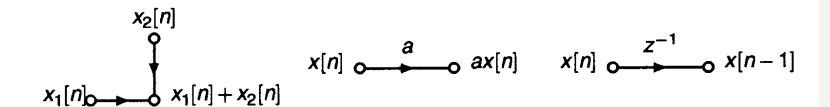
#### PROJETO DE SLIDS.

#### EXEMPLO DE ESPECIFICAÇÃO DE RESPOSTA NO DOMÍNIO DAS FREQUÊNCIAS



#### IMPLEMENTAÇÃO DE SLIDS

Elementos dos grafos:



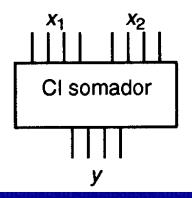
Implementação em software (C):

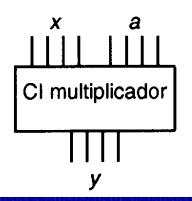
$$v = x1 + x2$$

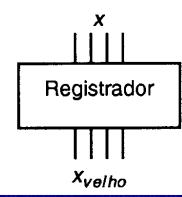
$$y = a * x;$$

$$y = x1 + x2;$$
  $y = a * x;$   $x_velho = x; x = ...$ 

Implementação em hardware:







- Forma direta I: Avaliando no domínio das frequências.
- Fazendo  $a_0=1$  na função de transferência do SLID, temos

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Forma direta I: O SLID pode ser visualizado por uma cascata de dois sistemas

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= \left(\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right) \left(\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right) = N(z) \frac{1}{D(z)}$$

- Forma direta I: Avaliando no domínio do tempo.
- Tomando a transformada z inversa de H(z)

$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

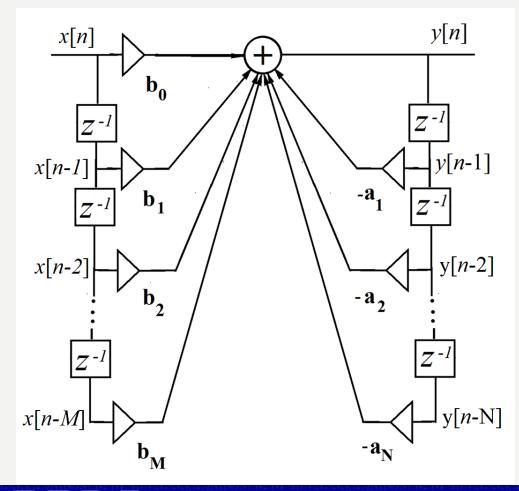
• Fazendo:

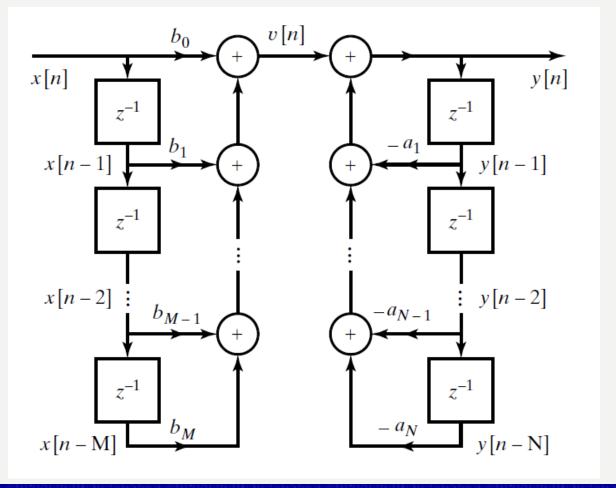
$$v[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r]$$

• Substituindo v[n] em y[n], resulta

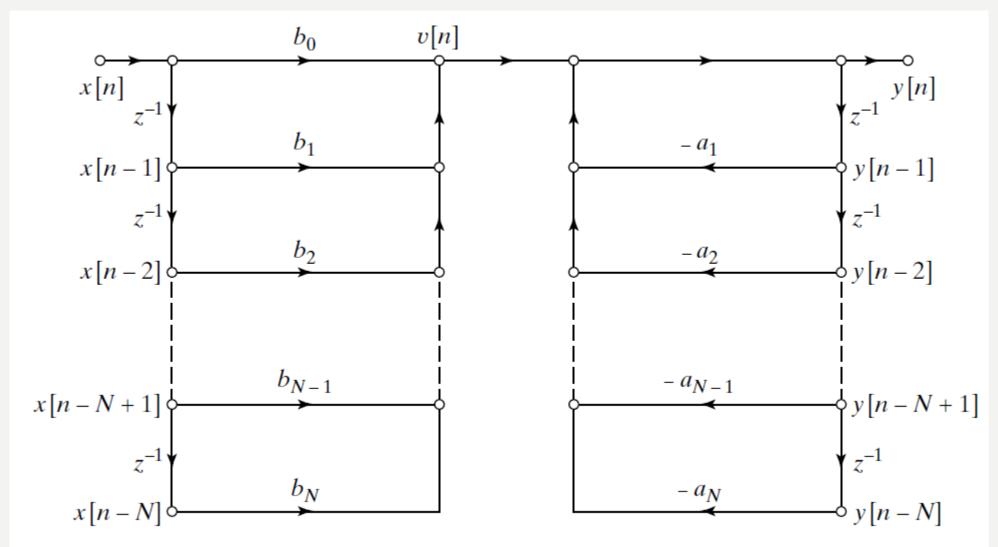
$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + v[n]$$

### FORMA DIRETA I: REALIZAÇÃO POR DIAGRAMA DE BLOCOS



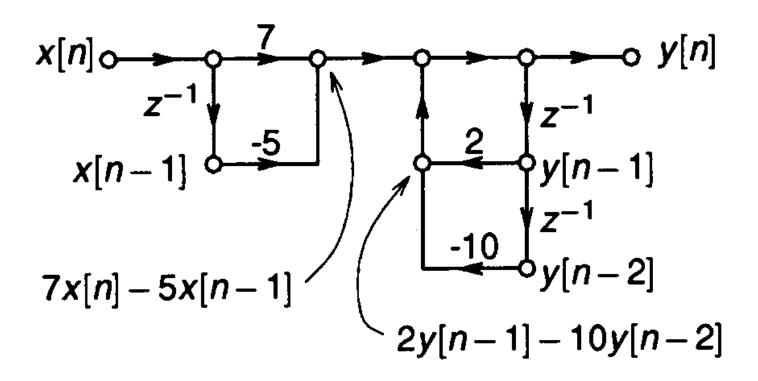


#### FORMA DIRETA I: REALIZAÇÃO POR GRAFO DE FLUXO ORIENTADO



#### **EXEMPLO: FORMA DIRETA I**

$$y[n] = 2y[n-1] - 10y[n-2] + 7x[n] - 5x[n-1]$$



• Forma direta II: Avaliando no domínio das frequências.

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}\right) \left(\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\right) = \frac{1}{D(z)} N(z)$$

• Forma direta II: Avaliando no domínio do tempo.

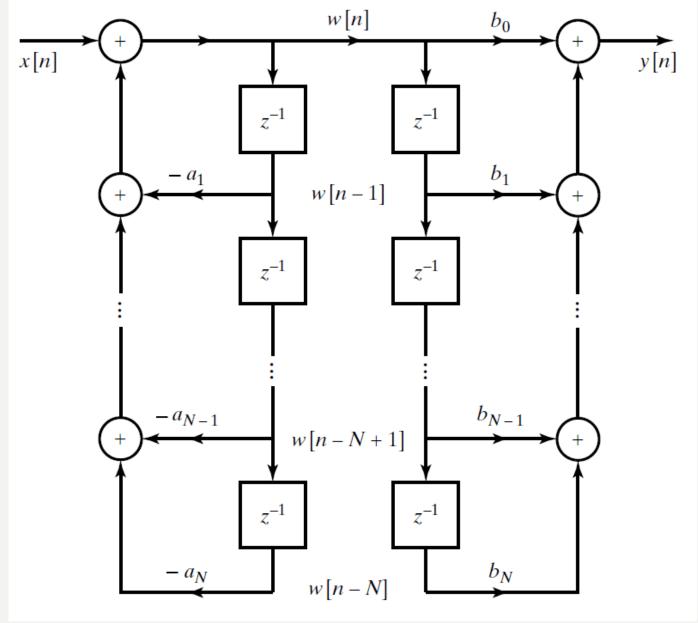
$$y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r x[n-r] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

Fazendo

$$w[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k w[n-k] + x[n] \quad y[n] = \sum_{r=0}^{M} b_r w[n-r]$$

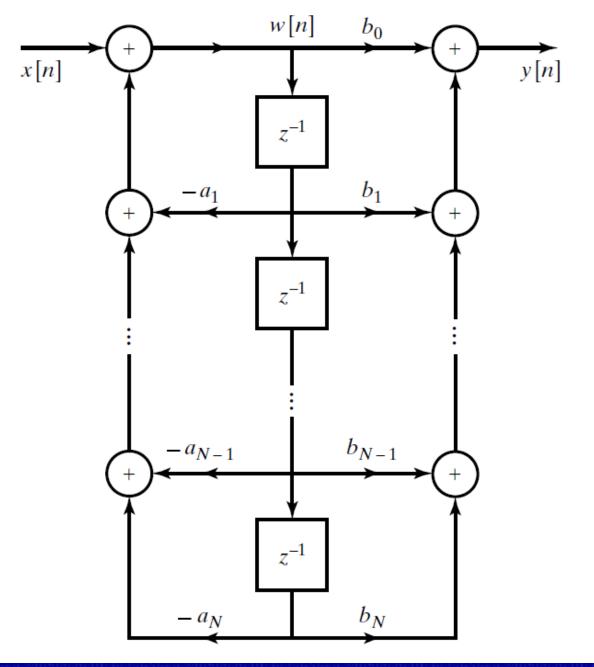


# FORMA DIRETA II:REALIZAÇÃO POR DIAGRAMA DE BLOCOS



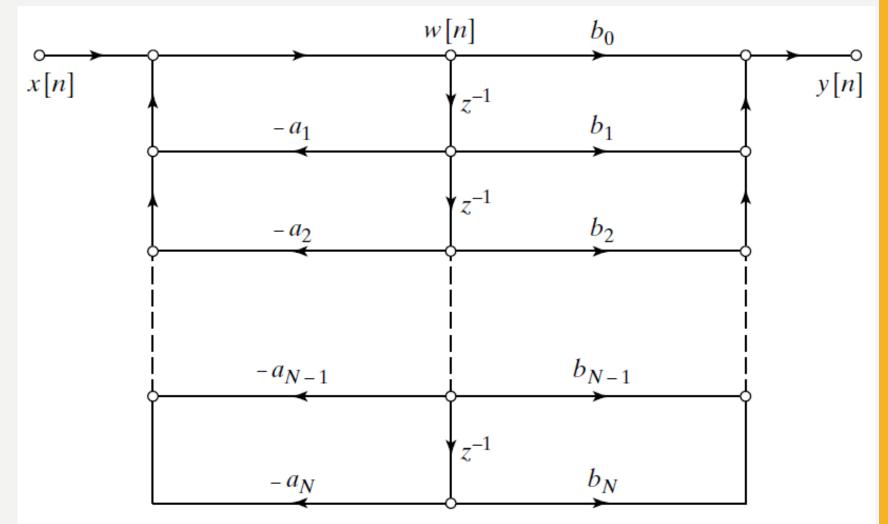
#### FORMA DIRETA II: REALIZAÇÃO POR DIAGRAMA DE BLOCOS

 Realização denominada canônica com respeito aos atrasos.



### FORMA DIRETA II: REALIZAÇÃO POR GRAFO DE FLUXO ORIENTADO

Conexão
 back-to-back



#### **EXEMPLO: FORMA DIRETA II**

$$y[n] = 2y[n-1] - 10y[n-2] + 7x[n] - 5x[n-1]$$

$$x[n] - 7 - y[n]$$

$$z^{-1}$$

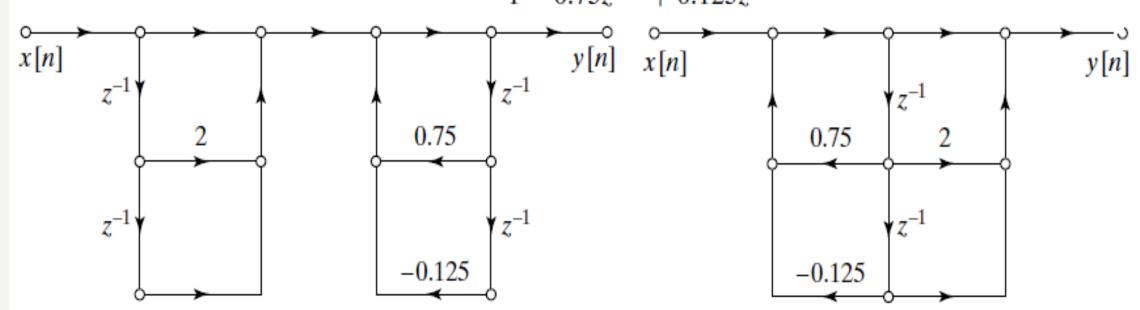
$$z^{-1}$$

$$z^{-1}$$

#### **EXEMPLO:**

Realize a função de transferência pelas formas diretas I e II:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}.$$



Forma direta I

Forma direta II



· Realização em cascata

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Algoritmo
- Passo I: Fatorar D(z) e N(z) e encontrar os polos e os

zeros de H(z).  

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0}{a_0} \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1}) \dots (1 - z_M z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \dots (1 - p_N z^{-1})}$$



- Passo 2: Agrupe os fatores de primeira ordem de forma a construir uma função biquadrática.
- Uma função biquadrática é da forma

$$H_{bm}(z) = \frac{b_{0m} + b_{1m}z^{-1} + b_{2m}z^{-2}}{a_{0m} + a_{1m}z^{-1} + a_{2m}z^{-2}}, m = 1, 2, \dots$$

• Passo 3: Escreva H(z) como um produtório de funções biquadráticas.

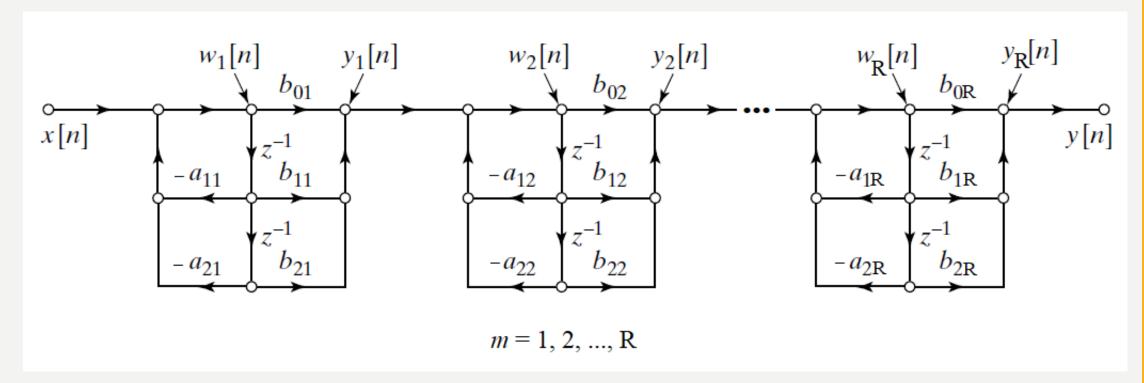
$$H(z) = \prod_{m} H_{bm}(z) = \prod_{m} \frac{b_{0m} + b_{1m}z^{-1} + b_{2m}z^{-2}}{a_{0m} + a_{1m}z^{-1} + a_{2m}z^{-2}}$$

• Passo 4: Realize H(z) como a cascata das funções biquadráticas  $H_{bm}(z)$ , m=1,2,... implementadas pela forma direta II.

$$H(z) = \prod_{m} \frac{b_{0m} + b_{1m}z^{-1} + b_{2m}z^{-2}}{1 + a_{1m}z^{-1} + a_{2m}z^{-2}}$$

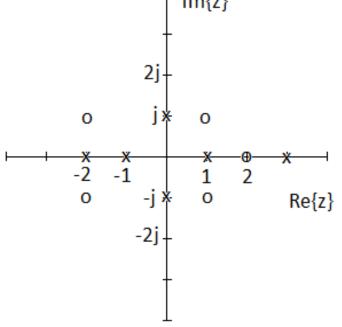
### FORMA EM CASCATA: REALIZAÇÃO POR GRAFO DE FLUXO ORIENTADO

• Realização em cascata: diagrama defluxo orientado



• Dada a configuração de polos e zeros para um determinado SLID, realize a sua função de transferência pela forma em cascata. Mostre a realização por meio do grafo de fluxo

orientado.



• Direto por inspeção do diagrama de polos e zeros, podemos escrever

$$H(z) = \frac{(z-2)(z-1-j)(z-1+j)(z+2-j)(z+2+j)}{(z+1)(z+2)(z-1)(z-3)(z-j)(z+j)}$$
$$= \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Primeiramente temos que escolher o par de polos e zeros que constituirão cada função biquadrática (claro que se N(z) ou D(z) for de grau ímpar, deve sobrar uma fração de grau 1(um) no numerador e/ou no denominador).

$$H(z) = \frac{(z-1-j)(z-1+j)(z+2-j)(z+2+j)(z-2)}{\{(z+1)(z-1)\}\{(z+2) (z-3)\}(z-j)(z+j)}$$

$$= \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Uma solução, dentre várias possíveis, seria organizar as funções biquadráticas na forma

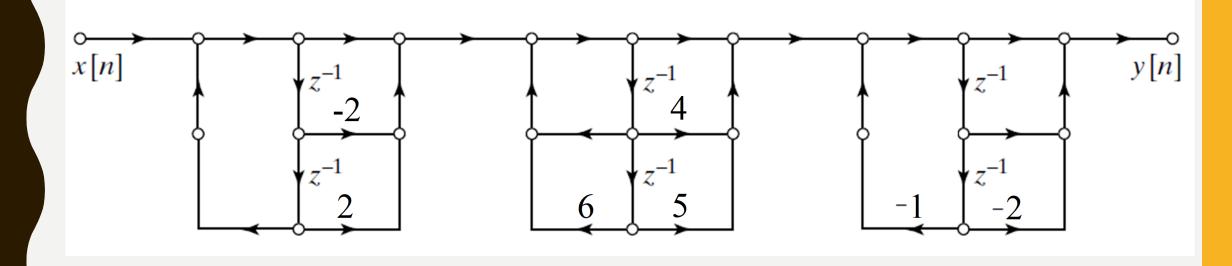
$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 - 1} \frac{z^2 + 4z + 5}{z^2 - z - 6} \frac{z - 2}{z^2 + 1} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Multiplicando o numerador de o denominador por  $z^{-6}$  para representar as funções biquadráticas em termos de expoentes negativos, obtemos

expoentes negativos, obtemos
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - z^{-2}} \frac{1 + 4z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - z^{-1} - 6z^{-2}} \frac{z^{-1} - 2z^{-2}}{1 + z^{-2}}$$

$$= \frac{N(z)}{D(z)}$$

• Realização de H(z) em cascata por diagrama de fluxo orientado.



Realização em paralelo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{N(z)}{D(z)}$$

- Algoritmo

• Passo I: Fazer uma mudança de variável: 
$$z^{-1} = p$$
. 
$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_M p^M}{a_0 + a_1 p + \dots + a_N p^N} = \frac{N(p)}{D(p)}$$



• Passo 2: Verificar se:  $Grau(N(p)) \ge Grau(D(p))$ . Caso afirmativo, proceda a divisão polinomial.

$$N(p)$$
  $|D(p)|$   $N_1(p)$   $Q(p)$ 

• Y(p) pode ser rescrito como:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = Q(p) + \frac{N_1(p)}{D(p)} = Q(p) + \widehat{H}(p)$$



• Observe que Q(p) é da forma

$$Q(p) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k p^{-k} = C_0 + C_1 p + \dots + C_{M-N} p^{M-N}$$

• Fazendo  $p = z^{-1}$ 

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} = C_0 + C_1 z^{-1} + \dots + C_{M-N} z^{-(M-N)}$$



- Uma parte do problema está resolvido. Caso  $Grau\{N(p)\}$  <  $Grau\{D(p)\}$ , passe para o passo 3.
- Fatorar D(p) e obter os polos  $de\widehat{H}(p).\widehat{H}(p)$  é da forma

$$\widehat{H}(p) = \frac{N_1(p)}{D(p)}$$

- Observe que os polos de  $\widehat{H}(p)$  são os mesmos de H(p) .
- Fazendo D(p) = 0, resulta

$$D(p) = 0 \Rightarrow (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_N)$$

•  $p_k$ , k = 1,2,...N, são os polos de  $\widehat{H}(p)$ .

• Passo 4: Expandir  $\widehat{H}(p)$  em frações parciais e calcular resíduos

$$\widehat{H}(p) = \frac{N_1(p)}{D(p)} = \frac{K_1}{p - p_1} + \frac{K_2}{p - p_2} + \dots + \frac{K_N}{p - p_N}$$

•  $K_r$ , r = 1, 2, ..., N, é uma constante denominada "resíduo associado à singularidade (polo)  $K_r$ ".

- Para o cálculo do resíduo associado a cada singularidade se apresentam três casos distintos:
  - I  $\widehat{H}(p)$  possui somente polos reais e simples.
  - 2  $\widehat{H}(p)$  possui polos de multiplicidade "q".
  - 3  $\widehat{H}(p)$  possui polos complexos conjugados.

## ESTRUTURAS BÁSICAS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE SLIDS

• Passo 5: Fazer  $p=z^{-1}$  e agrupar as frações parciais aos pares de forma a construir funções biquadráticas. H(z) pode ser representada na forma

$$H(z) = Q(z) + \widehat{H}(z)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{r} \frac{b_{0r} + b_{1r} z^{-1}}{a_{0r} + a_{1r} z^{-1} + a_{2r} z^{-2}}$$

## ESTRUTURAS BÁSICAS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE SLIDS

- Necessariamente  $b_{2r}=0$  pois o grau do denominador tem que ser maior que o do numerador.
- Pode ser que algum outro coeficiente de alguma função biquadrática seja nulo.
- As biquadráticas são realizadas pela forma direta II.

## ESTRUTURAS BÁSICAS PARA A IMPLEMENTAÇÃO DE SLIDS

• Fazendo  $a_{0r} = 1$ , resulta

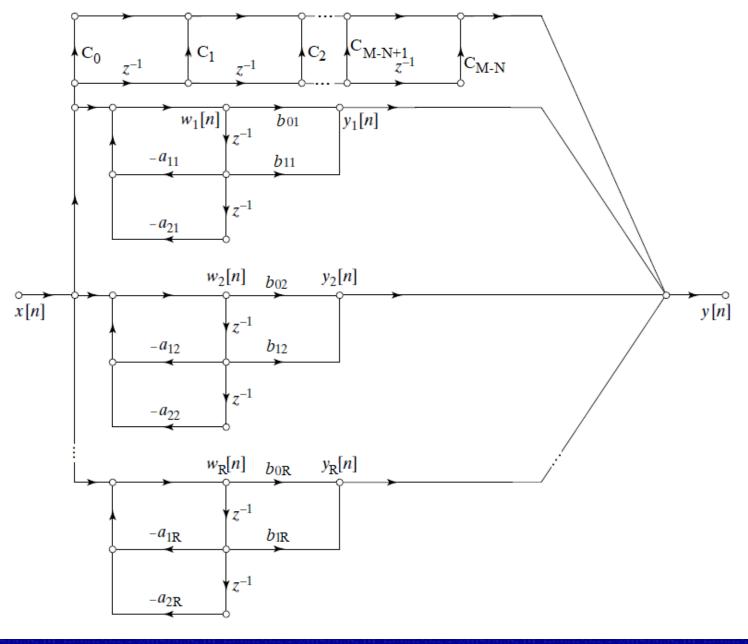
$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{r} \frac{b_{0r} + b_{1r} z^{-1}}{1 + a_{1r} z^{-1} + a_{2r} z^{-2}}$$

**SLID-FIR** 

**SLID-IIR** 

 Observe que nesta realização tem-se a combinação linear de um SLID FIR com um SLID IIR.

#### **FORMA EM** CASCATA: REALIZAÇÃO POR GRAFO DE FLUXO ORIENTADO



Prof. F. Assis

## EXEMPLO: FORMA EMPARALELO.

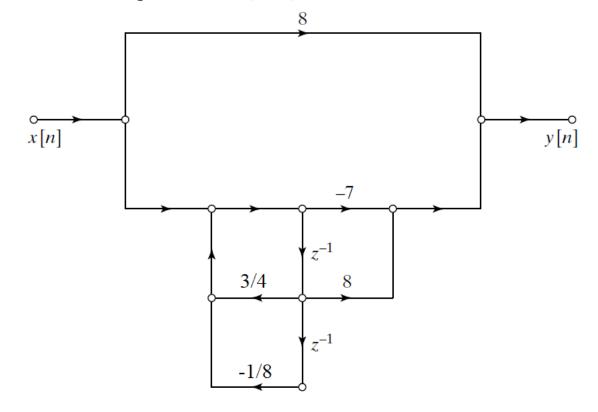
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Grau do num. =

Grau dodenom. ⇒ divisão polinomial

$$\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{-8+6z^{-1}-z^{-2}} \quad \frac{|1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}{8} \Rightarrow H(z) = 8 + \frac{-7+8z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

Não é preciso continuar a expansão em frações parciais porque já está na forma desejada.



#### **EXEMPLO**

• Realize a função de transferência abaixo pela forma em paralelo. Mostre a realização por meio do grafo de fluxo orientado.

$$H(z) = \frac{6 - 4z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3} - z^{-4}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^{-1} + (1 - z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})$$

• H(z) já está representada como uma combinação linear. Podemos escrever H(z) na forma

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

• Como  $H_1(z)$  já está na forma de uma biquadrática, pois seu denominador é de segunda ordem. Assim, pode-se tratar  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$  em separado e, depois, compor a solução final.

• Tratando primeiramente  $H_1(z)$ , temos

$$H_1(z) = \frac{6 - 4z^{-1} - z^{-2} + 2z^{-3} - z^{-4}}{2 - 2z^{-1} + z^{-2}}$$

• Fazendo  $z^{-1} = p$ 

$$H_1(p) = \frac{6 - 4p - p^2 + 2p^3 - p^4}{2 - 2p + p^2}$$

• Efetuando a divisão polinomial, podemos escrever  $H_1(z)$  como

$$H_1(p) = \frac{6 - 4p - p^2 + 2p^3 - p^4}{2 - 2p + p^2}$$
$$= 1 - p^2 + \frac{4 - 2p}{2 - 2p + p^2}$$

• Fazendo  $p=z^{-1}$  e  $a_0=1$ , obtemos

$$H_1(z) = 1 - z^{-2} + \frac{2 - z^{-1}}{1 - z + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

• Para  $H_2(z)$ , temos

$$H_2(z) = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}z^{-1}}{(1 - z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

• Fazendo  $z^{-1} = p$ 

$$H_{2}(p) = \frac{-\frac{1}{6} + \frac{1}{3}p}{(1-p)\left(1 - \frac{1}{2}p\right)\left(1 - \frac{1}{3}p\right)}$$

$$= \frac{-1 + 2p}{(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{K_{1}}{p-1} + \frac{K_{2}}{p-2} + \frac{K_{3}}{p-3}$$

Calculando os resíduos

$$K_1 = (p-1) \frac{1-2p}{(p-1)(p-2)(p-3)} \Big|_{p=1} = \frac{1-2p}{(p-2)(p-3)} \Big|_{p=1} = -\frac{1}{2}$$

$$K_2 = (p-2) \frac{1-2p}{(p-1)(p-2)(p-3)} \Big|_{p=2} = \frac{1-2p}{(p-1)(p-3)} \Big|_{p=2} = 3$$

$$K_3 = (p-3) \frac{1-2p}{(p-1)(p-2)(p-3)} \Big|_{p=3} = \frac{1-2p}{(p-1)(p-2)} \Big|_{p=3} = -\frac{5}{2}$$

•  $H_2(p)$  pode ser rescrita como:

$$H_2(p) = \frac{-\frac{1}{2}}{p-1} + \frac{3}{p-2} + \frac{-\frac{5}{2}}{p-3}$$

• Fazer  $p = z^{-1}$ 

$$H_2(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{5}{6}}{p - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

• Somando as duas primeiras frações parciais, resulta

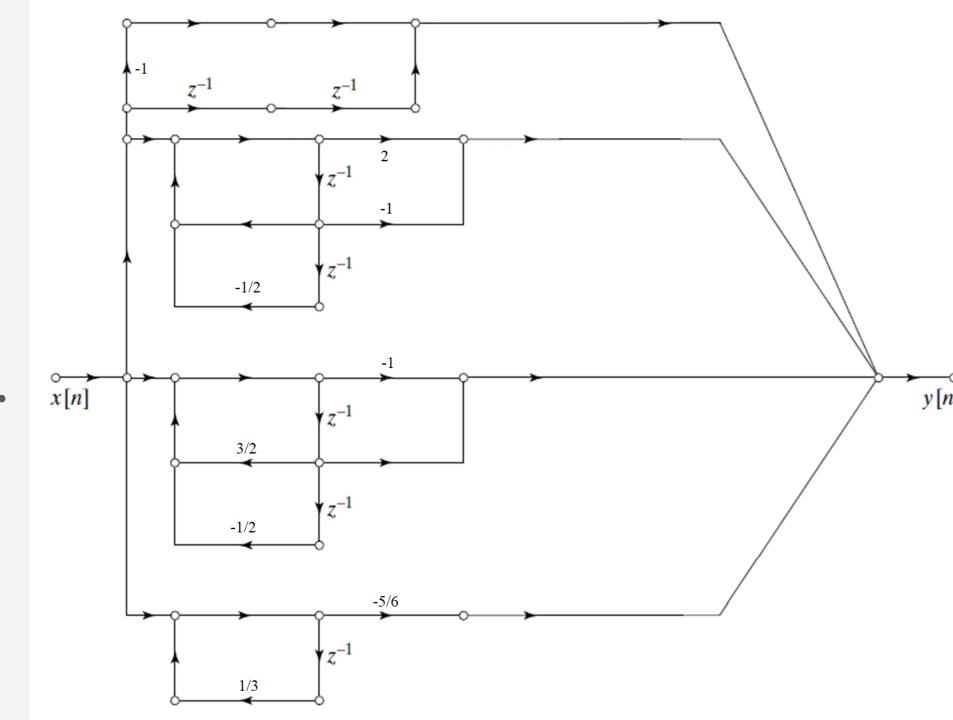
$$H_2(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - z^{-1}} - \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$= \frac{-1 + z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{-\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

•  $H(z) = H_1(z) + H_2(z)$  pode ser escrita como

$$H(z) = 1 - z^{-2} + \frac{2 - z^{-1}}{1 - z + \frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{-1 + z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} + \frac{-\frac{5}{6}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Diagramade fluxoorientado.



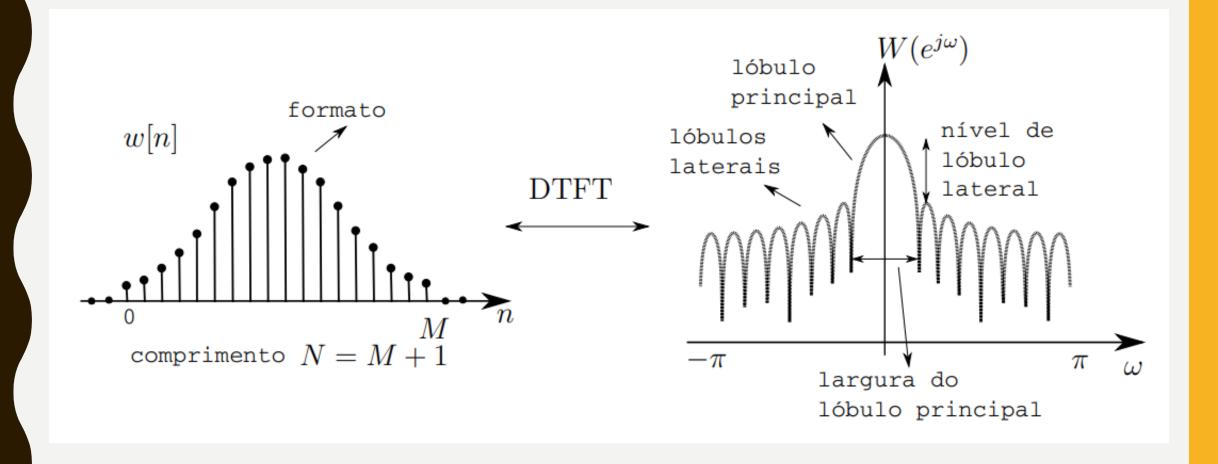
#### JANELAMENTO DE SINAIS

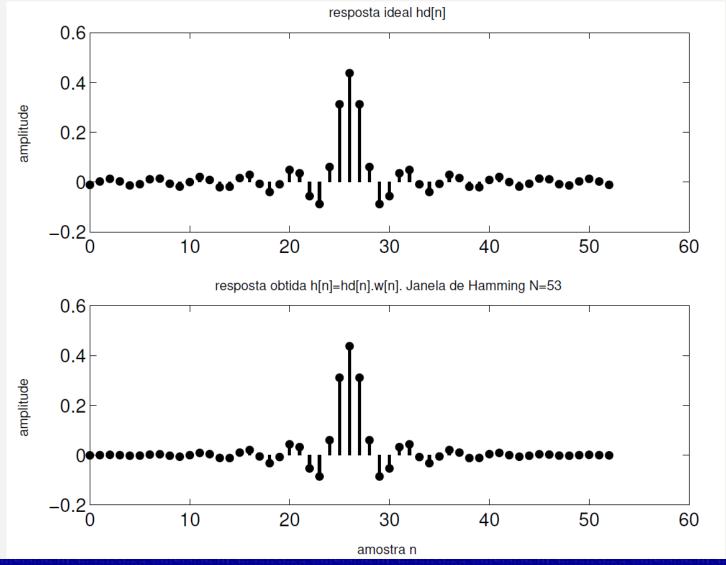
- Produto de uma sequência no domínio do tempo de comprimento arbitrário por uma janela de comprimento finito Aplicações:
  - −1. Análise espectral
  - −2. Projeto de SLIDs-FIR (filtros digitais FIR)
  - -3. Pre-processamento para extração de parâmetros/assinaturas espectrais.

Produto de sequências no domínio do tempo: Teorema da convolução complexa

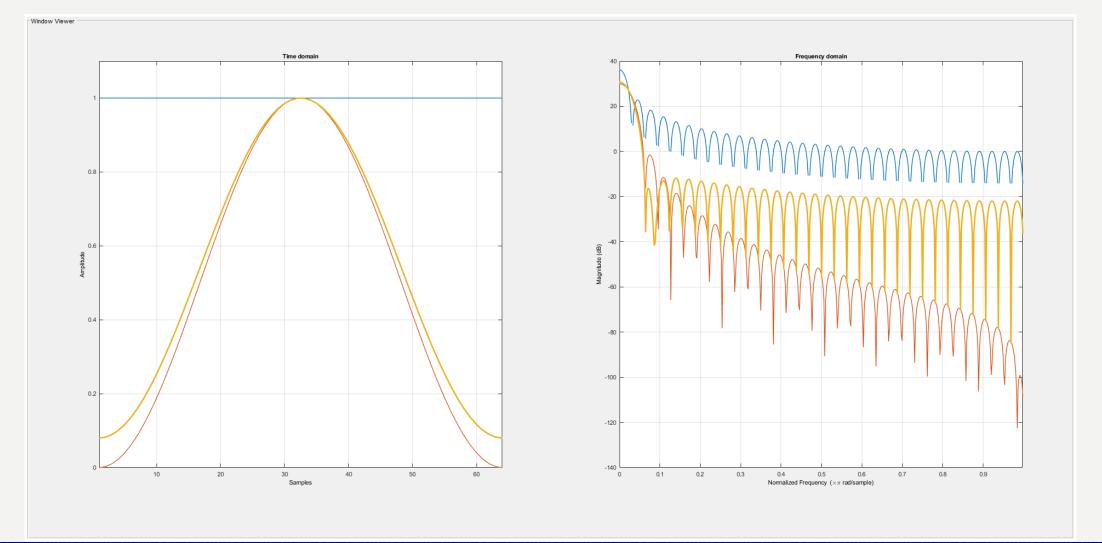
$$y[n] = \mathcal{F}\{x[n]w[n]\} \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\tau})W(e^{j(\omega-\tau)})d\tau$$

Para a análise espectral se espera que a resposta em frequência da janela se aproxime de um impulso em frequência:  $\delta(\omega)$ 

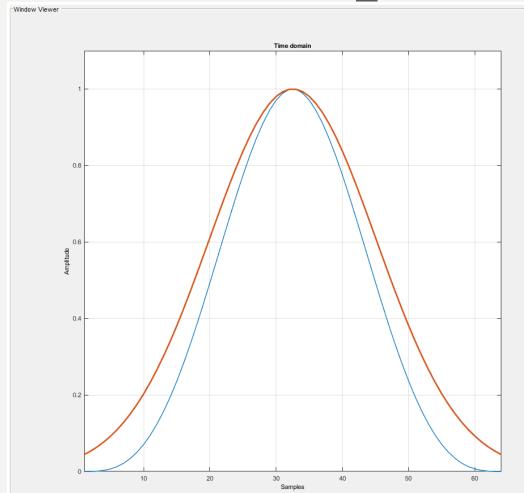


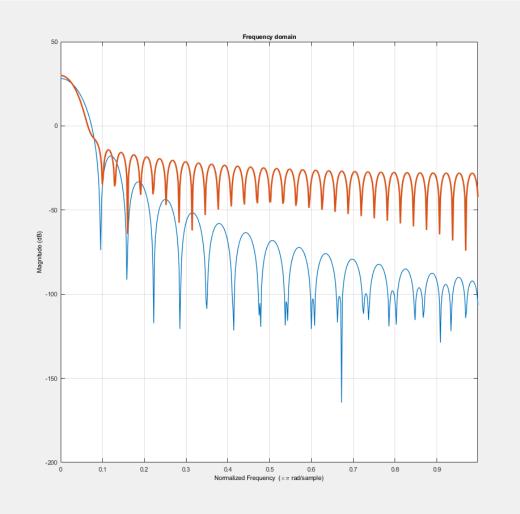


• Janelas Retangular, de Hanning e de Hamming:

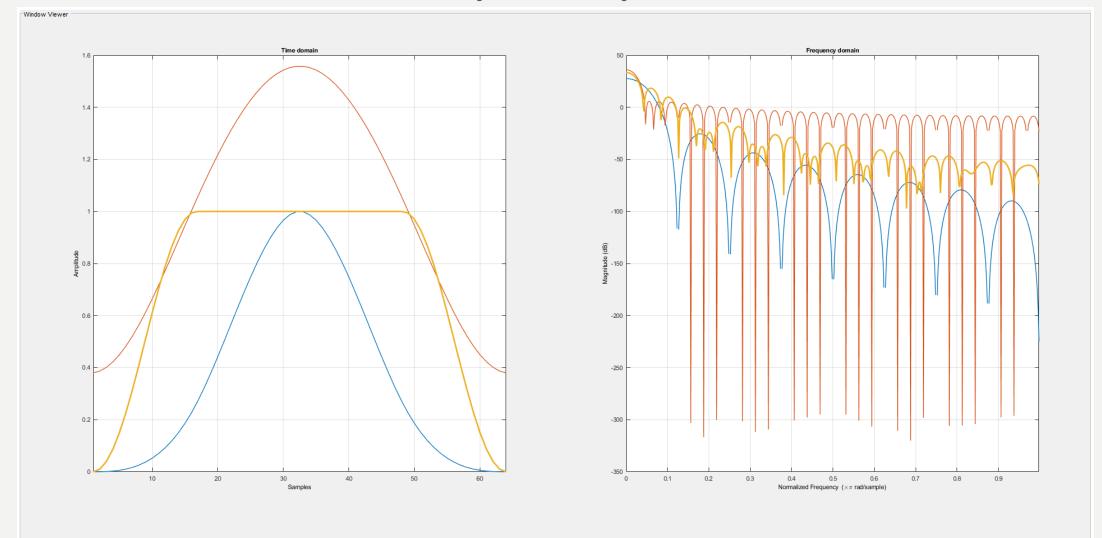


• Janelas de Bohman\_e Gaussiana:

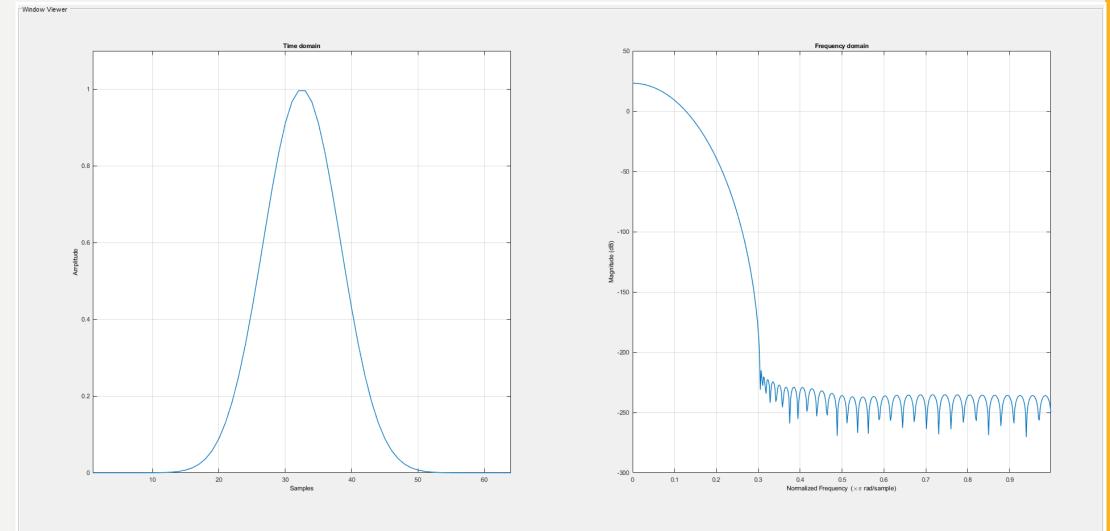




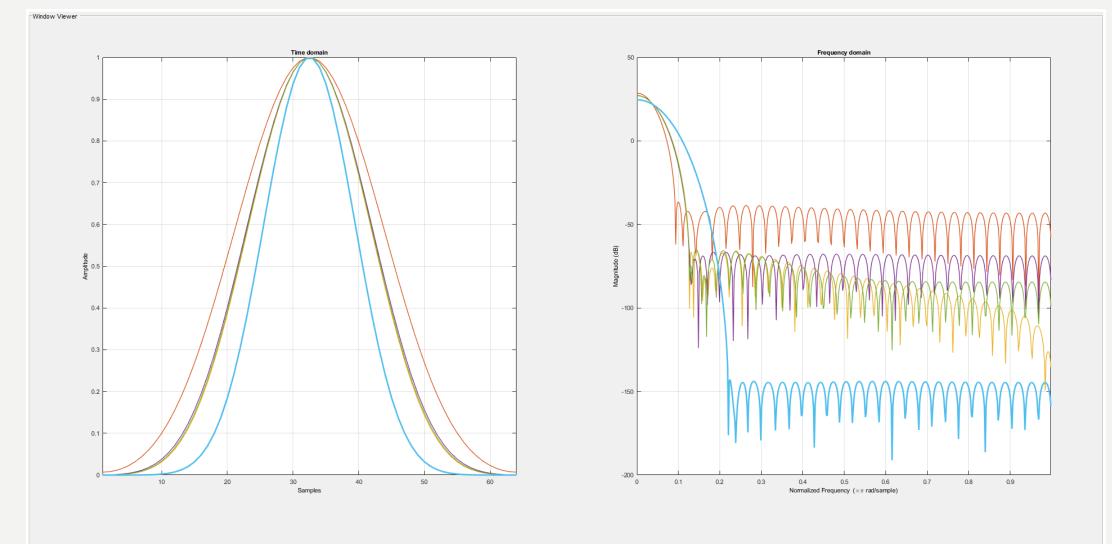
• Janelas de Parzen, de Tukey e de Taylor:



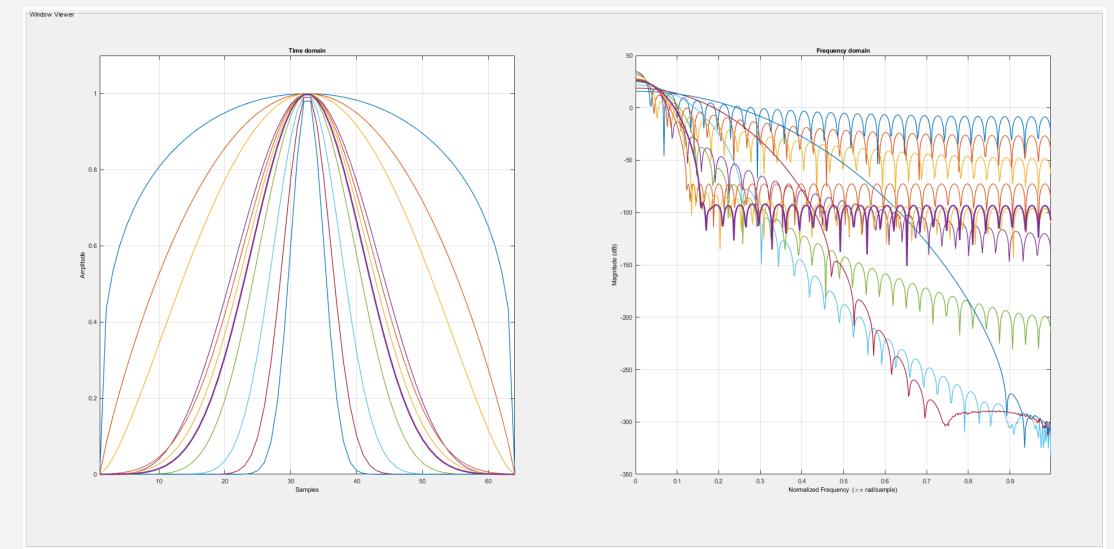
• Janelas de Kaiser:



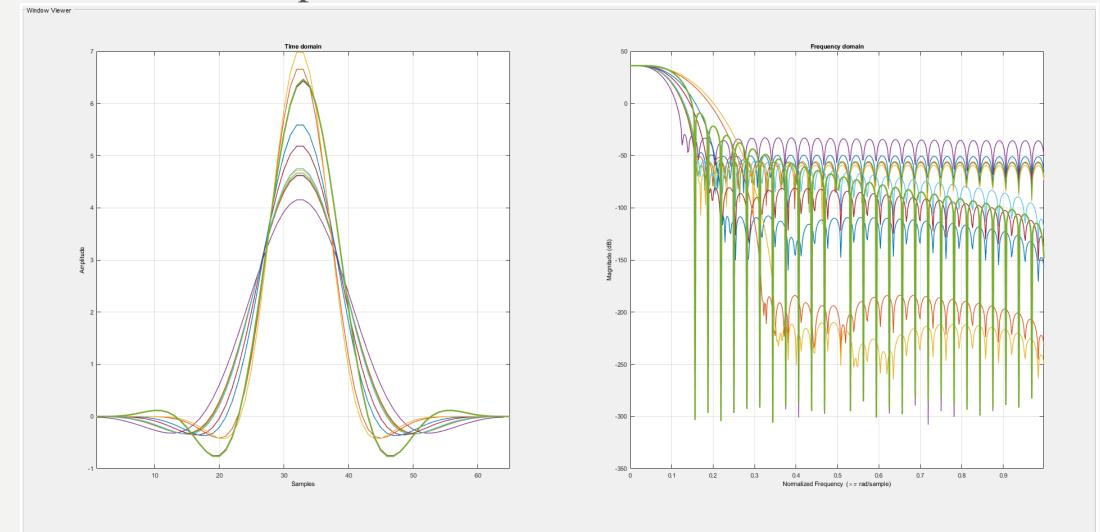
• Janelas de Blackman:



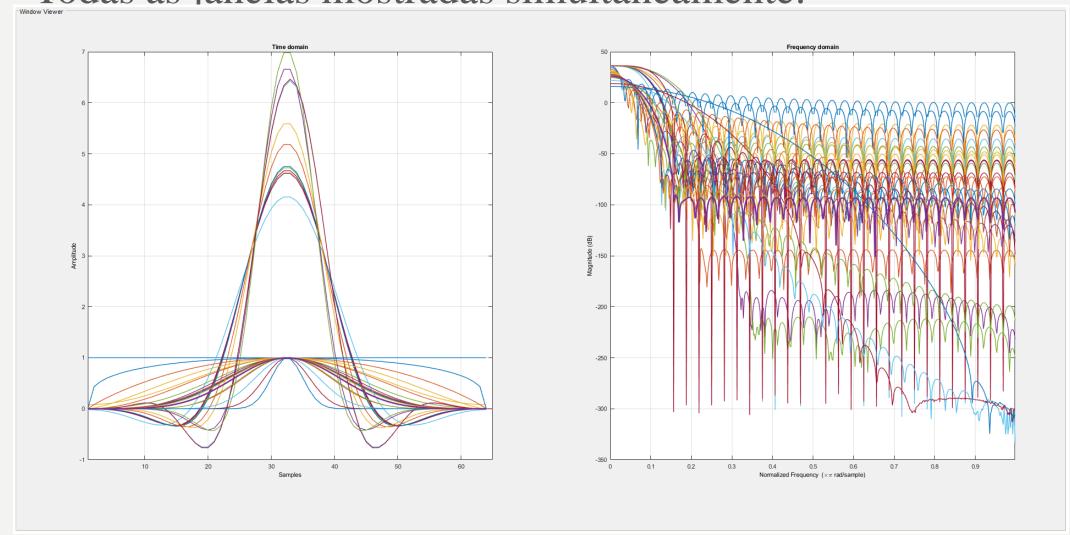
• Janelas Ultra-esférica:



• Janelas Flat-Top:

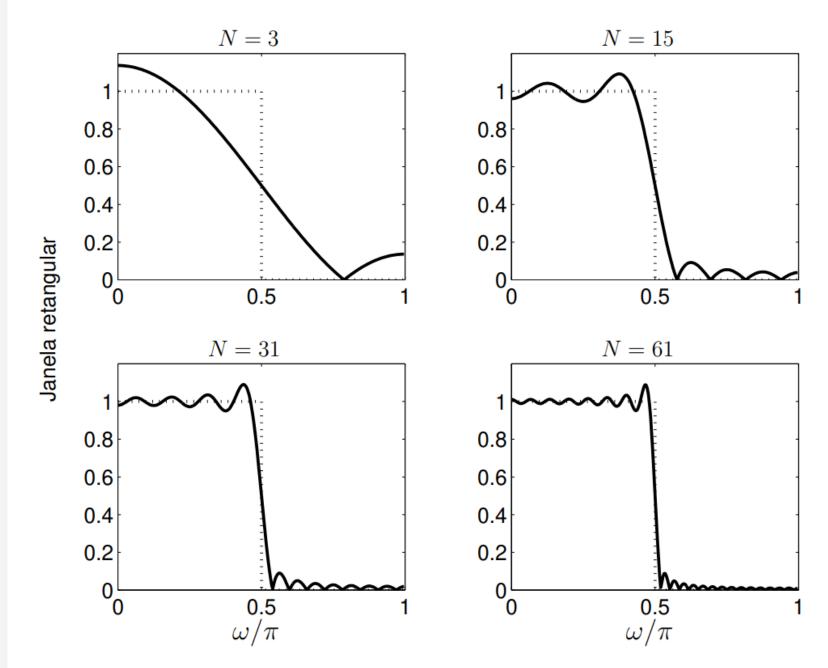


• Todas as janelas mostradas simultaneamente:



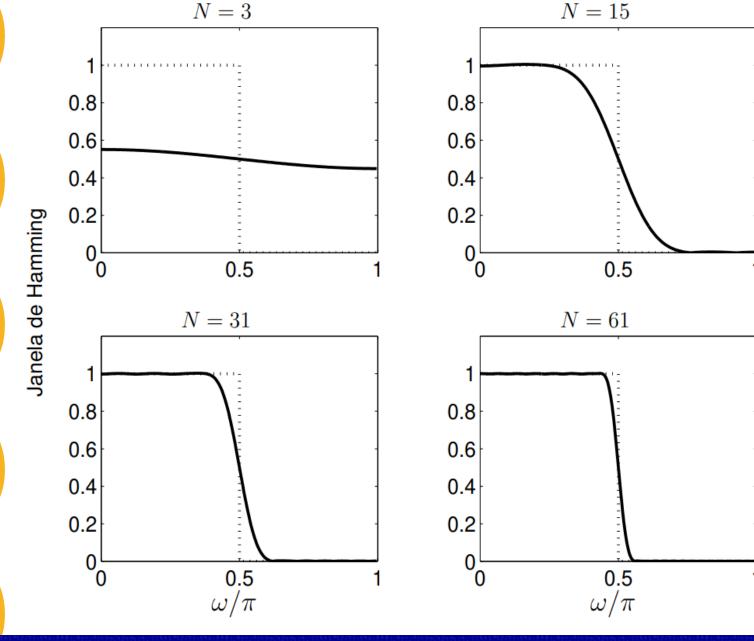
#### EFEITO DO JANELAMENTO EM FREQUÊNCIA

· JANELA RETANGULAR



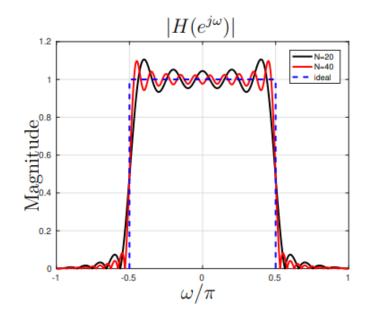
#### EFEITO DO JANELAMENTO EM FREQUÊNCIA

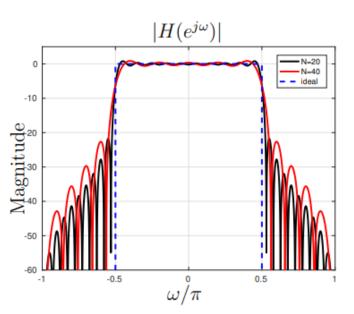
JANELA DE HAMMING

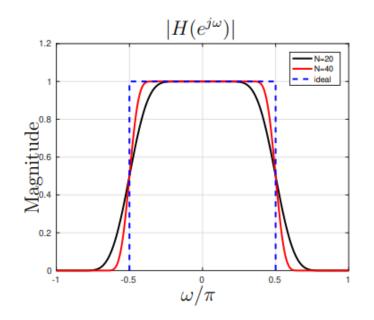


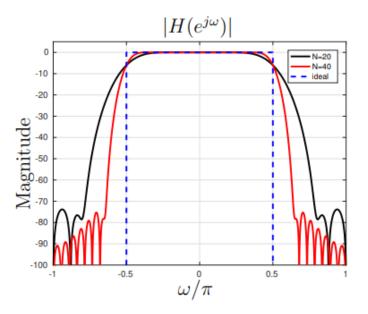
#### EFEITO DO JANELAMENTO EM FREQUÊNCIA

COMPARAÇÃO:
JANELAS
RETANGULAR
(ACIMA) E
BLACKMAN
(ABAIXO



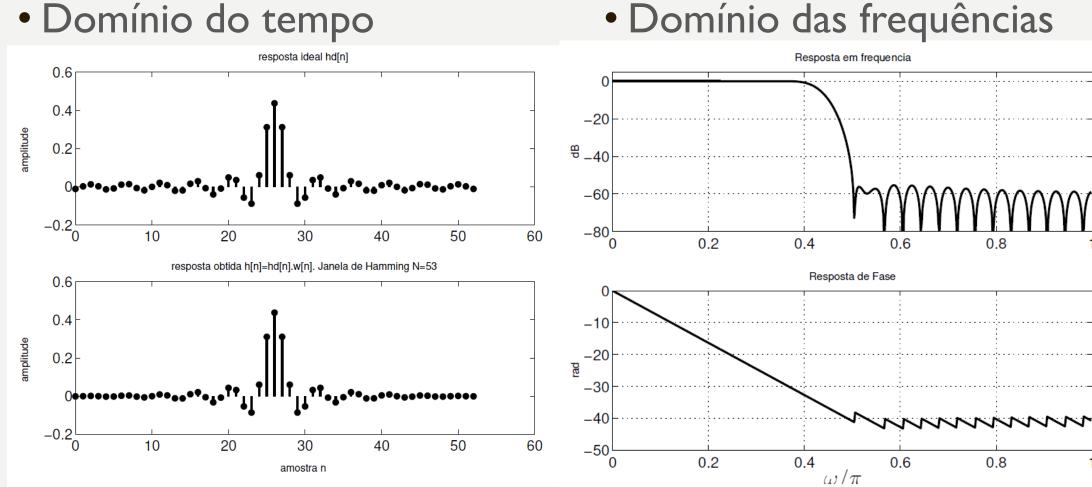






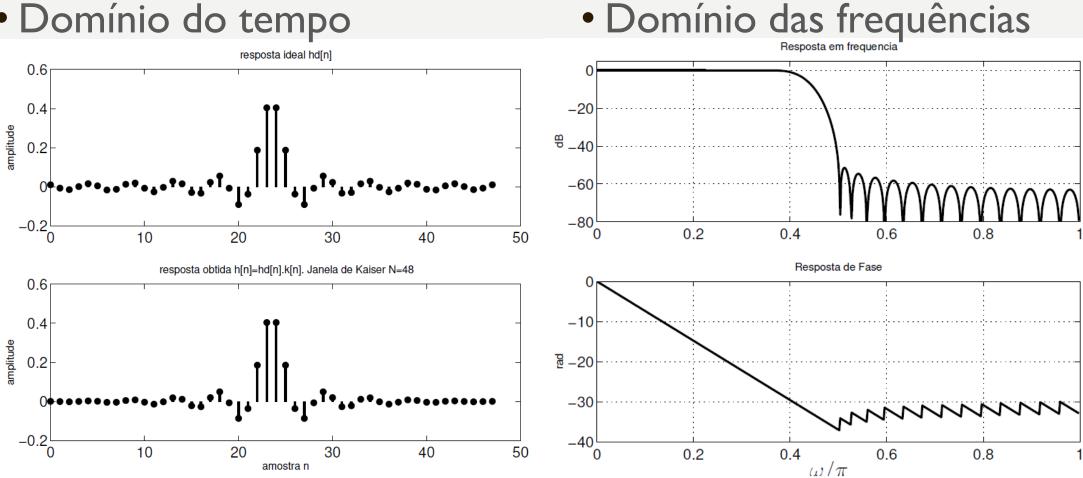
#### FILTRO PASSA-BAIXAS JANELA DE **HAMMING**

Domínio do tempo



#### FILTRO PASSA-BAIXAS JANELA DE **KAISER**

Domínio do tempo



#### PROJETO DE FILTROS POR AMOSTRAGEM EM FREQUÊNCIA

• Deseja-se projetar  $H(e^{j\omega})$ :

$$H(e^{j\omega}) \longrightarrow H[k] = H(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \omega_k}$$

 $\updownarrow DFT^{-1}$ 

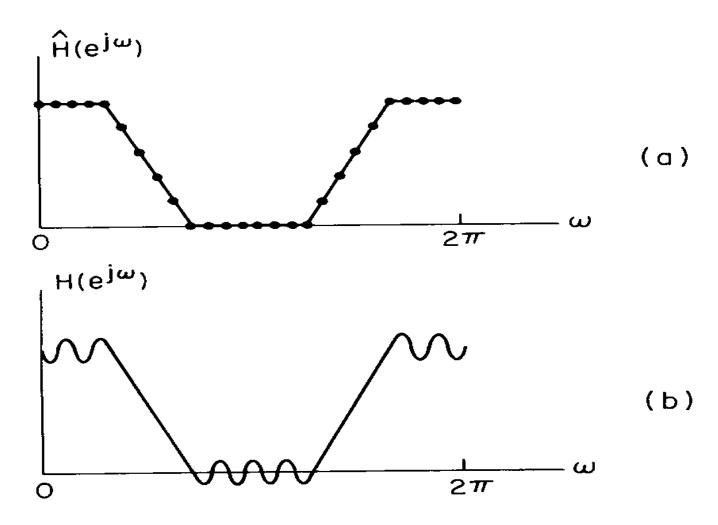
$$\widehat{h}[n] \stackrel{DTFT}{\longleftrightarrow} \widehat{H}(e^{j\omega}) \approx H(e^{j\omega}) \Rightarrow$$

• O h[n]final é obtido após a multiplicação por uma janela :

$$h[n] = \hat{h}[n]w[n]$$



#### Projeto de Filtros por amostragem em frequência



Explanation of frequency sampling.

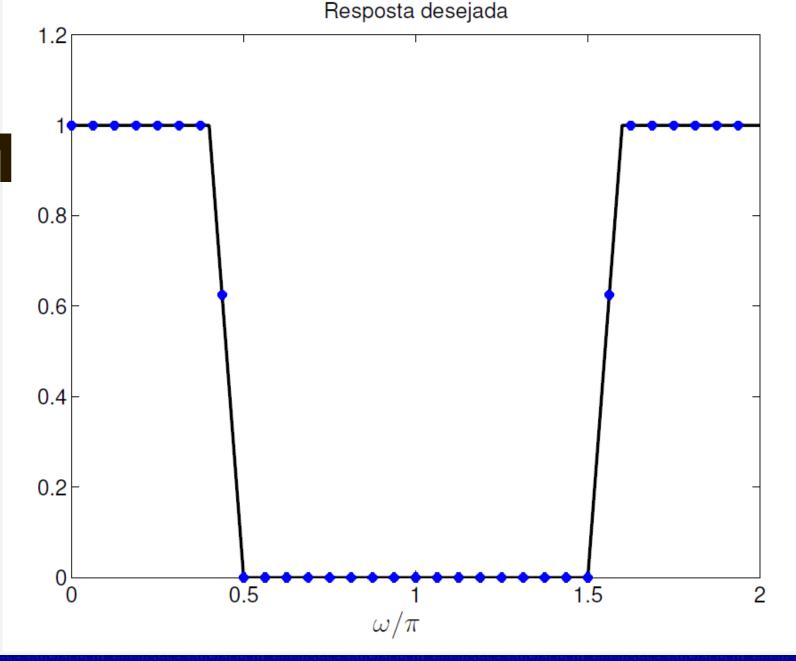


# PROJETO DE FILTROS POR AMOSTRAGEM EM FREQUÊNCIA

• Exemplo:

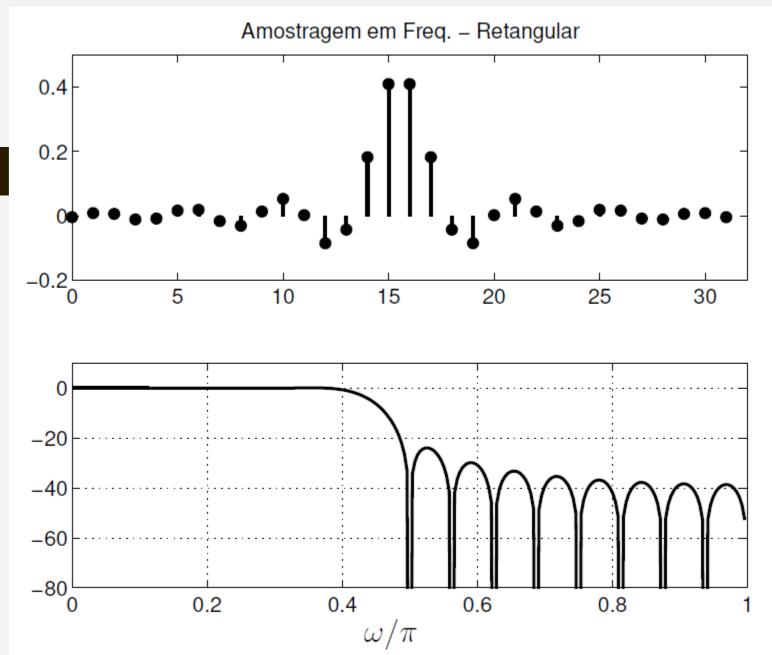
Passa-Baixas

N = 32



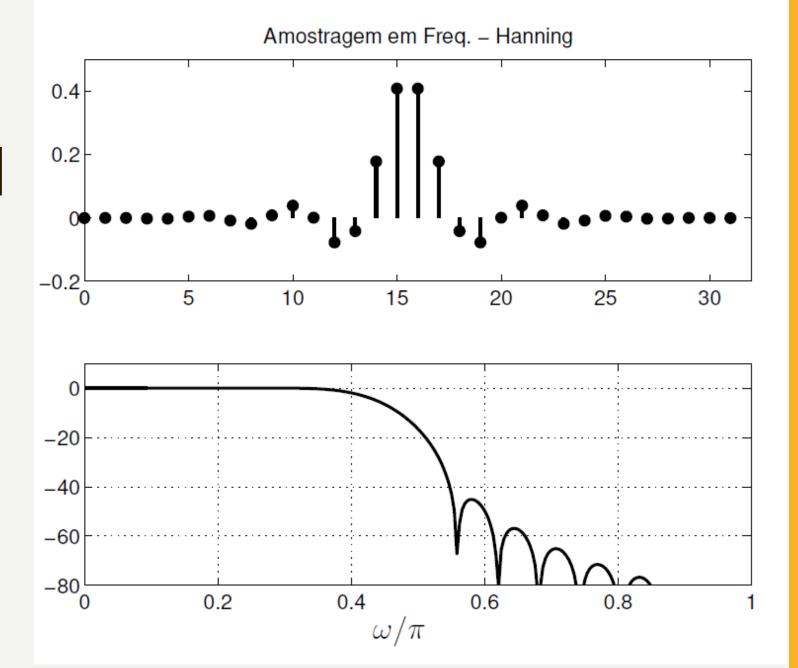
# PROJETO DE FILTROS POR AMOSTRAGEM EM FREQUÊNCIA

Exemplo: Passa-Baixas N = 32 –JanelaRetangular



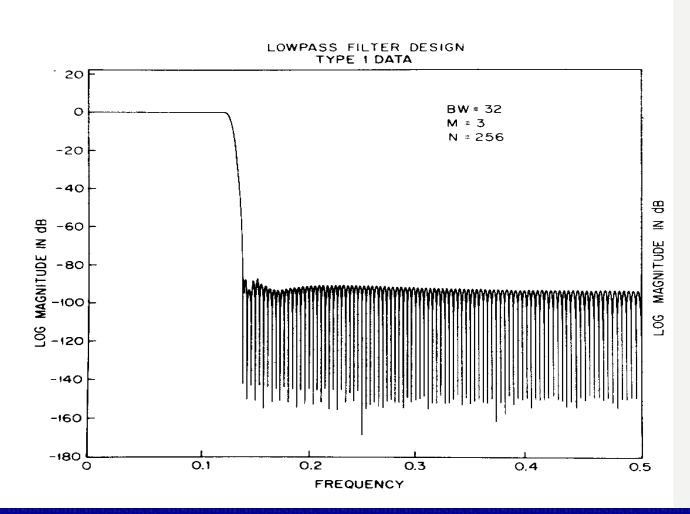
# PROJETO DE FILTROS POR AMOSTRAGEM EM FREQUÊNCIA

Exemplo: Passa-Baixas N = 32 –JanelaRetangular

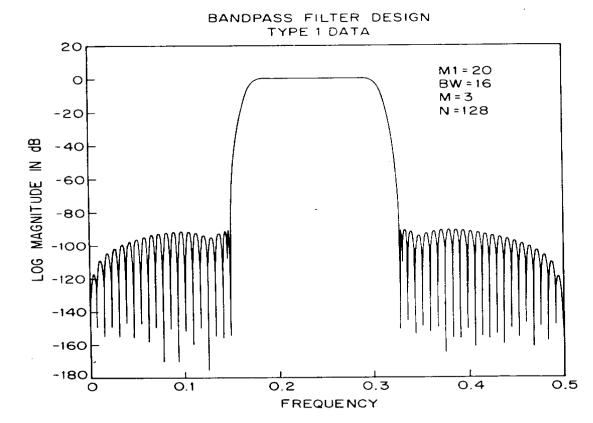




### Exemplo de projeto de filtro digital por amostragem em frequência — Passa Baixas



### Exemplo de projeto de filtro digital por amostragem em frequência — Passa Banda



Frequency response of a frequency sampling bandpass filter.

