Questionário 9

Princípios de Comunicação

Autoria	**Matrícula**
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

18 de abril de 2021

Questão 1

Considere o sinal PAM $s(t)$ obtido a partir da amostragem e retenção do sinal $m(t)$. O sinal é amostrado com período T_s e a retenção do valor amostrado se dá por um período $T < T_s$, conforme mostrado na Figura 1.

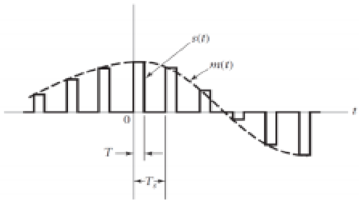

Figura 1: Sinal PAM de topo plano para a Questão 1.

A partir da situação mostrada, sabendo que o sinal $m(t)$ possui transformada de Fourier $M(f)$ e largura de banda (absoluta) B_m:

(a) (2,00) Determine uma expressão para o sinal $s(t)$ e $S(f)$, sua transformada de Fourier;

Resolução:
É possível observar do gráfico que $s(t)$ será do tipo:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) rect\Big(\frac{t - (nT_s + T/2)}{T}\Big)$$

Para a análise espectral precisaremos fazer algumas manipulações, primeiro, vamos adotar um $m_\delta(t)$, que representa a amostragem do sinal $m(t)$, da seguinte forma:

$$m_\delta(t) = m(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

$$m_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

E para representar o pulso adotaremos:

$$x(t) = rect(\frac{t - T/2}{T})$$

E para que consigamos uma forma semelhante a obtida do gráfico é necessário fazer uma convolução do tipo:

$$s(t) = (m_\delta * x)(t)$$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - nT_s)x(t-\tau)d\tau$$

Utilizando da propriedade da amostragem dos impulsos:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s)x(t - nT_s)$$

Agora podemos mostrar que o método funciona e que o $s(t)$ é o mesmo que obtemos de acordo com o gráfico:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) rect\Big(\frac{t - (nT_s + T/2)}{T}\Big)$$

Agora, podemos usar as relações encontradas para analisar espectralmente, da seguinte maneira, utilizando também a propriedade de que um trem de impulsos no tempo pode ser representado por:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{j2\pi t}{T_s}n}$$

$$m_\delta(t) = m(t) \cdot \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{j2\pi t}{T_s}n}$$

$$M_\delta(f) = M(f) * \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{k}{T_s})$$

E pela amostragem dos impulsos é possível ver:

$$M_\delta(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - \frac{k}{T_s})$$

Seguindo:

$$s(t) = (m_\delta * x)(t)$$
$$S(f) = M_\delta(f) \cdot X(f)$$

E como $X(f) = Tsinc(fT)e^{-j\pi fT}$:

$$S(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - \frac{k}{T_s}) Tsinc(fT)e^{-j\pi fT}$$

(b) (0,50) Especifique uma expressão para $R(f)$, que consiste no espectro do sinal recuperado a partir da reconstrução ideal do sinal $m(t)$ a partir de $s(t)$ por meio de um filtro passa-baixas ideal, sabendo ainda que não há aliasing no processo de amostragem;

Resolução:

Adotaremos como $H_R(f)$ a resposta em frequência do passa-baixas ideal e que $f_s \geq 2B_m$, e assim podemos fazer:

$$H_R(f) = rect\Big(\frac{f}{2B_m}\Big)$$

Então:

$$R(f) = S(f)H_R(f)$$

$$R(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} M(f - \frac{k}{T_s})Tsinc(fT)e^{-j\pi fT}rect\Big(\frac{f}{2B_m}\Big)$$

Como não há aliasing e é um passa baixas ideal, apenas o sinal quando k=0 vai passar, logo:

$$R(f) = \frac{1}{T_s}M(f)Tsinc(fT)e^{-j\pi fT}$$

(c) (2,00) A partir da expressão obtida no item "b", verifique se há necessidade de equalização de $r(t)$ (cuja transformada de Fourier é $R(f)$) para a obtenção de $m(t)$. Em caso positivo, especifique o tipo de distorção presente no sinal, uma resposta para o equalizador e uma expressão para $\hat{m}(t)$, o sinal na saída do equalizador. Caso contrário, justifique.

Resolução:

Há uma distorção na amplitude, causada pelo $sinc(fT)$, assim precisamos de um filtro equalizador e vamos utilizar sua resposta da seguinte forma:

$$H_{eq}(f) = \frac{1}{Tsinc(fT)}$$

E então, obtemos na saída do equalizador:

$$\hat{M}(f) = \frac{1}{T_s}M(f)e^{-j\pi fT}$$

Passando para o domínio do tempo temos uma versão não distorcida de $m(t)$:

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{T_s}m(t - \frac{T}{2})$$

Questão 2

Um sistema PCM usa um quantizador uniforme seguido de um codificador binário de 12 bits. A taxa de bits do sistema é igual a 52 Mbps.

(a) (1,00) Qual é a máxima largura de banda do sinal-mensagem analógico de entrada para a qual o sistema opera sem aliasing?

Resolução:
Como a taxa de transmissão é $R_b = f_s \cdot n$:

$$52M = 12f_s$$

$$f_s = \frac{52}{12}MHz$$

Para que o sistema opere sem alisasing é necessário que:

$$f_s \geq 2B_m$$

$$2B_m \leq f_s$$

$$B_m \leq \frac{f_s}{2}$$

$$B_m \leq \frac{52}{24}MHz$$

$$B_m \leq 2,166MHz$$

Assim, a máxima largura de banda é dada por:

$$B_m = 2,166MHz$$

(b) (1,00) Determine a razão sinal-ruído (de quantização) quando um sinal dado pela soma de dois tons sinais senoidais de mesma amplitude e fase e frequências de 1 MHz e 2 MHz é aplicado na entrada desse sistema, dado que não há sobrecarga do quantizador

Resolução:
Podemos ver que o nosso sinal $m(t)$ a ser aplicado é da forma:

$$m(t) = Csen(2\pi f_1 t + \theta) + Csen(4\pi f_1 t + \theta)$$

A SNR por sua vez é dada por:

$$SNR|_{dB} = 6,02n + 4,77 + 10log\Big(\frac{< m^2(t) >}{X^2_{Q_{max}}}\Big)$$

$$< m^2(t) >= C^2$$
$$X_{Q^2_{max}} = (1,76C)^2$$

Em que foi calculado utilizando uma rotina computacional, da seguinte maneira:

Figura 2: Máximo de m(t)

O link para o cálculo é: `https://www.wolframalpha.com/input/?i=maximum+calculator&assumption=%7B%22F%22%2C+%22GlobalMaximizeCalculator%22%2C+%22curvefunction%22%7D+-%3E%22sin%282*pi*x%29%2Bsin%284*pi*x%29%22`

Então, temos:

$$SNR|_{dB} = 77,01 + 10log\Big(\frac{C^2}{3,0976C^2}\Big) = 77,01 - 4,91$$

$$SNR|_{dB} = 72,10dB$$

Questão 3

Quinze sinais de voz, cada um limitado em faixa em 4 kHz, devem ser quantizados utilizando-se um *companding* de Lei-µ (µ=250), gerando cada um sinal PCM, que serão multiplexados em TDM e transmitidos de forma binária por um canal de comunicação do tipo banda base com largura de faixa disponível de 600 kHz. Por limitações do filtro de reconstrução no receptor, a taxa de amostragem utilizada na conversão A/D deve ser superior à taxa de Nyquist em, no mínimo, 15%. Qual é a máxima razão sinal-ruído de quantização, em dB, que pode ser obtida para o sistema PCM em questão? *Justifique apropriada e detalhadamente sua resposta.*

Resolução:

Primeiro devemos notar que a frequência de amostragem f_s é dada por:

$$f_s \geq 2,3B_m$$

$$f_s \geq 9,2kHz$$

Agora, analisando o multiplexador pela sua taxa de transmissão de R_{mux} , pode se ver que como ele utiliza o sistema binário para transmissão, temos pelo teorema da dimensionalidade que a taxa de símbolos por segundo(R_s) é igual a taxa de transmissão do multiplexador, assim:

$$R_s = R_{mux}$$

Logo, a largura de banda utilizada pelo multiplexador(B_T) deve ser tal que:

$$B_T \geq \frac{R_s}{2}$$

Manipulando e aplicando a largura de banda $B_T = 600kHz$:

$$R_s \leq 2B_T$$

$$R_s \leq 1,2Mbauds \text{ ou } Mbps$$

Note agora que $R_s = 15R_{voz}$, em que R_{voz} é a taxa de transmissão de um canal que entrará no multiplexador, assim:

$$15R_{voz} \leq 1,2Mbps$$

$$R_{voz} \leq 80kbps$$

Note também que $R_{voz} = f_s \cdot n$:

$$f_s \cdot n \leq 80kbps$$

$$n \leq \frac{80kbps}{9,1kHz}$$

$$n \leq 8,69bits \rightarrow n \leq 8bits$$

Então a escolha de n que garante a maior SNR é $n = 8bits$, assim a SNR fica da seguinte maneira para $\mu = 250$:

$$SNR|_{dB} = 10log\left(\frac{3 \cdot 2^{2n}}{[ln(1+\mu)]^2}\right)$$

$$SNR|_{dB} = 6,02n + 4,77 - 20log\big(ln(251)\big)$$

$$SNR|_{dB} = 48,16 - 10,07$$

$$SNR|_{dB} = 38,090dB$$