Questionário 10

Princípios de Comunicação

Autoria	Matrícula
Pedro Henrique Dornelas Almeida	18/0108140

Engenharia de Redes de Comunicação
Universidade de Brasília

2 de maio de 2021

Questão 1 (7,00)

Um sistema transmite, de forma equiprovável e independente, bits a uma taxa $R_b = 1/T_b$ de forma binária utilizando sinalização do tipo polar RZ com níveis $a_k = \pm 5$ ($a_k = +5$ quando o bit 1 deve ser transmitido e $a_k = -5$ quando o bit 0 deve ser transmitido). É utilizado como pulso conformador a forma de onda $p(t)$ mostrada na Figura 1.

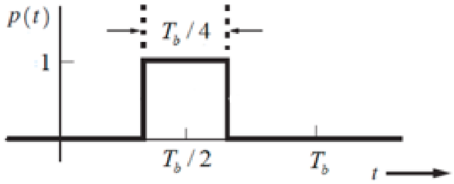

Figura 1: Forma de onda para sinalização RZ da Questão 1.

Determine (4,00) a densidade espectral de potência da sinalização em questão, (1,00) a potência média da forma de onda que representa o fluxo de transmissão e (2,00) a largura de banda essencial que contém 95% da potência da sinalização em questão.

Resolução:

Podemos ver que o sinal de sinalização pode ser dado por:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k p(t - kT_s)$$

E a densidade espectral de potência pode ser dada por:

$$S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi n f T_s}$$

Em que o R_n é a média do produto das amplitudes e pode ser dado por:

$$R_n = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k a_{k-n}^*$$

Seguindo com a questão, por conta da transmissão ser binária é possível ver que:

$$T_s = T_b$$

$$R_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{T_b} = R_b$$

Após isso então é possível montar o pulso conformador e sua transformada de fourier:

$$p(t) = rect\Big(\frac{t - T_b/2}{T_b/4}\Big)$$

$$p(t) \rightleftharpoons P(f)$$

$$P(f) = \frac{T_b}{4} sinc\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) e^{-j\pi f T_b}$$

E então:

$$|P(f)|^2 = \Big|\frac{T_b}{4} sinc\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) e^{-j\pi f T_b}\Big|^2$$

$$|P(f)|^2 = \frac{T_b^2}{16} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big)$$

Para achar os coeficientes R_n iremos analisar alguns casos:

$$n = 0$$

$$R_0 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k a_k^* = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} |a_k|^2$$

$$|a_k|^2 = 25 \rightarrow R_0 = 25$$

$$n = 1$$

$$R_1 = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k a_{k-1}^*$$

Para analisar os casos possíveis para a transmissão podemos fazer uma tabela de probabilidades para os bits transmitidos :

Probabilidade	b_k	b_{k-1}	a_k	a_{k-1}	$a_k a_{k-1}$
1/4	0	0	-5	-5	+25
1/4	0	1	-5	+5	-25
1/4	1	0	+5	-5	-25
1/4	1	1	+5	+5	+25

Tabela 1: Tabela de probabilidades

Então, podemos ver que existem dois casos para $a_k a_{k-1}^*$, com probabilidade de 1/2:

$$a_k a_{k-1}^* = \begin{cases} +25 \ , \ 1/2 \\ -25 \ , \ 1/2 \end{cases}$$

Pode-se ver então que:

$$R_1 = (+25)\frac{1}{2} + (-25)\frac{1}{2} = 0$$

Da mesma maneira, acontece também para $R_{-1} = 0$. Fazendo para $n = 2$ também é possível ver que $R_2 = 0$, e assim por diante para todos valores de $n \neq 0$. Então é possível ver que:

$$S(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{-j2\pi f n T_s}$$

Logo, podemos reduzir a equação ao caso que $R_0 = 25$, assim temos a densidade espectral de potência:

$$S(f) = \frac{T_b^2}{16} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big)\frac{1}{T_b} \cdot 25$$

$$S(f) = \frac{25}{16} T_b sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big)$$

A potência média é dada por:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{25}{16} T_b sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big)df$$

$$P = \frac{25}{16} T_b \int_{-\infty}^{\infty} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big)df$$

Também é possível obter que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} sinc^2(xf)df = \frac{1}{x}$$

Logo a potência é dada por:

$$P = \frac{25}{16} T_b \cdot \frac{4}{T_b}$$

$$P = \frac{25}{4}$$

Para obter a largura de banda que contém 95% da banda, é possível fazer:

$$0,95 \cdot \frac{25}{4} = \int_{-B}^{B} \frac{25}{16} T_b sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) df$$

$$0,95 \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{16} T_b \int_{-B}^{B} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) df$$

$$\frac{0,95 \cdot 4}{T_b} = \int_{-B}^{B} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) df$$

$$\frac{3,8}{T_b} = \int_{-B}^{B} sinc^2\Big(\frac{fT_b}{4}\Big) df$$

Questão 2 (3,00)

Um sinal analógico de áudio, contínuo no tempo e de largura de banda 15 kHz, é utilizado para a geração de um sinal PCM a partir de sua amostragem à taxa de Nyquist e posterior quantização e codificação em binário por um quantizador uniforme com 256 níveis de quantização.

Este sinal PCM deve ser transmitido por um canal de comunicação de banda base utilizando-se um esquema M-ário de sinalização. Por questões de sincronismo e decodificação, o sinal a ser transmitido é o resultado da multiplexação do sinal PCM descrito e de um sinal de controle de taxa, em bits por segundo, igual a 10% da taxa do sinal quantizado e codificado.

Por restrições de projeto, a resposta do pulso conformador deve ser do tipo cosseno levantado com fator de rolloff de pelo menos 0,25.

Para a situação apresentada:

(a) (1,50) Determine qual o menor valor possível para M de forma a permitir a operação do sistema, sabendo-se que se dispõe de largura de banda de 50 kHz para a transmissão;

Resolução:

Pelo nível de quantização é possível obter quantos bits contém em uma amostra:

$$L = 256 = 2^n$$

$$n = 8bits$$

Como B=15kHz, também é possível ver que para que o sinal seja amostrado corretamente, por Nyquist é possível ver que:

$$B \geq \frac{R_s}{2}$$

$$R_s \leq 30kbps$$

Por isso, a quantidade de bits/seg transmitida deve ser:

$$30000 \cdot 8 = 240000bits/seg$$

Também é possível ver que a quantidade de M-ário pulsos/seg requerida é:

$$R = \frac{2}{1+r}B_T$$

Em que r é o fator de *rolloff* e B_T é a largura de banda disponível para o sinal ser transmitido, assim:

$$R \geq \frac{2}{1,25} \cdot 50000$$

$$R \geq 80000 \text{ M-ário pulsos/seg}$$

Assim, o número de bits requerido para o envio de cada um dos pulsos é de:

$$\frac{240000}{80000} = 3 \text{ bits/pulso}$$

Porém, precisamos adicionar o sinal de controle, que exige 10%, assim, a taxa para cada um dos pulsos é de no mínimo 3,3 bits/pulso, dessa maneira, devemos escolher 4 bits/pulso para ser possível a transmissão completa, então o valor de $M = 16$.

(b) (1,50) Repita o item "a", considerando que a largura de banda disponível para a transmissão é de 100 kHz.

Aqui, a única coisa que se altera é a quantidade de M-ário pulsos/seg que podemos ter, no caso:

$$R \geq \frac{2}{1,25} \cdot 100000$$

$$R \geq 160000 \text{ M-ário pulsos/seg}$$

Assim, o número de bits requerido para o envio de cada um dos pulsos é de:

$$\frac{240000}{160000} = 1,5 \text{ bits/pulso}$$

Adicionando o sinal de controle precisamos de no mínimo 1,65 bits/pulso, então devemos escolher 2 bits/pulso, o que nos dá um valor de $M = 4$.