

---

---

# RELATÓRIO DIFERENÇAS FINITAS

---

---

VITÓRIA, 2019

ALUNOS

JOÃO VICTOR MARÇAL BRAGANÇA  
PEDRO VINICIUS DOS SANTOS CUSTODIO

PROFESSORA

ANDREA VALLI

*Universidade Federal do Espírito Santo  
Curso de Engenharia Elétrica*

# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	3
2	VALIDAÇÃO DO MÉTODO . . . . .	4
2.1	Função de validação . . . . .	4
2.2	Encontrando a Solução . . . . .	5
3	CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS . . . . .	7
4	CONCLUSÃO . . . . .	11

# 1 Introdução

Neste trabalho iremos apresentar a resolução da Equação de Poisson pelo método de diferenças finitas centrais, usando o método SOR para resolver o sistema obtido.

## 2 Validação do Método

### 2.1 Função de validação

Para validar o método, foi utilizada uma função e uma condição de contorno com resposta já conhecida, assim foi possível validar o algoritmo e medir o erro entre a resposta conhecida e a calculada.

Função de validação:

$$f(x,y) = \frac{1}{5}[x(x-10)+y(y-5)]$$

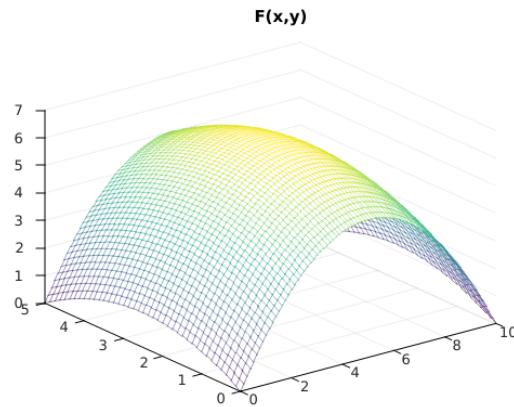


Figura 1 – Função  $f(x,y)$  com  $h = 0.125$

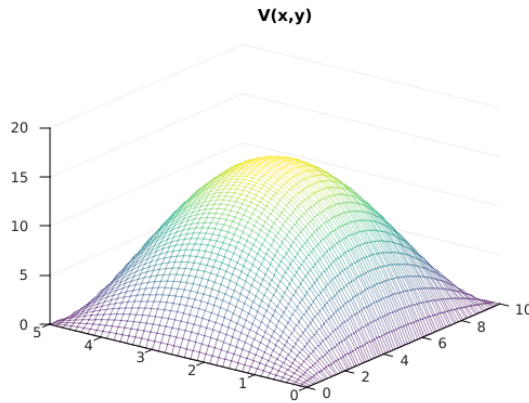
Condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = 0.625x(10-x) \text{ para } y = 2.5, 0 \leq x \leq 10$$

O problema acima tem solução conhecida igual a:

$$V(x,y) = \frac{1}{10}x(10-x)y(5-y)$$

Figura 2 – Função  $V(x,y)$  com  $h = 0.125$ 

Para a validação do código, foi calculado o erro máximo entre a solução conhecida e a solução encontrada. A seguinte fórmula foi usada para o cálculo do erro:

$$\text{erro} = \max |V_p^{exato} - V_p|, p = 1, 2, \dots, n_x * n_y$$

## 2.2 Encontrando a Solução

**\*Tem que explicar o SOR antes\***

Foi então implementado um código no Octave a fim de resolver este problema.

Utilizando o método de Gauss-Seidel, SOR com  $\omega = 1$ , para encontrar a solução com tolerância de  $10^{-6}$ . Em todos os casos  $h_x = h_y$ .

Tabela 1 – Soluções por Gauss-Seidel

Passo da malha	Iterações	Tempo decorrido (s)	Erro
$h = 0.500$	640	0.0969	$9.369 \cdot 10^{-6}$
$h = 0.250$	931	5.4899	$9.494 \cdot 10^{-6}$
$h = 0.125$	3725	490.569	$9.598 \cdot 10^{-6}$

Vemos que quanto menor o  $h$ , mais fidedigno é o gráfico, pois temos mais pontos, porém isso acarreta em uma maior exigência computacional, porque temos mais pontos e o método precisa de um maior número de iterações para alcançar a solução com a precisão desejada.

Para uma convergência mais rápida, o parâmetro  $\omega$  pode ser ajustado.

Em geral, a escolha do  $\omega$  para o método SOR é feita empiricamente, mas em malhas retangulares pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula:

$$\omega = \frac{8 - \sqrt{64 - 16t^2}}{t^2}$$

onde

$$t = \cos\left(\frac{\pi}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n_y}\right)$$

e  $n_x$  e  $n_y$  são os números de pontos nas direções x e y.

Os testes acima foram refeitos utilizando os valores ótimos de  $\omega$  em cada situação.

Tabela 2 – Soluções por SOR

Passo da malha	Iterações	Tempo decorrido (s)	$\omega$
$h = 0.500$	41	0.0331311	1.6315
$h = 0.250$	81	0.526252	1.7880
$h = 0.125$	162	26.3311	1.8856

É evidente o efeito da escolha do valor de  $\omega$  sobre o tempo de convergência. Com  $h = 1.25$ , o número de iterações cai de 3725 para 162, uma melhora de 2200%.

Para  $h = 0.125$ , temos como resposta o seguinte gráfico:

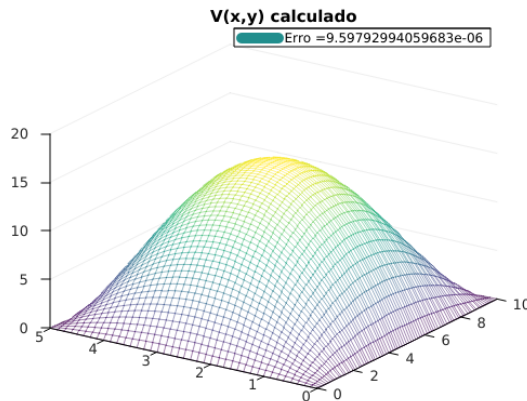


Figura 3 – Função  $V(x,y)$  calculada com  $h = 0.125$

É possível observar que a figura 3 é idêntica à figura 2.

### 3 Capacitor de placas paralelas

Agora que sabemos que o nosso código está validado, utilizamos em um problema com solução até então desconhecida. O problema está a seguir.

Para um capacitor de placas paralelas, no domínio  $\Omega = [0,10] \times [0,5]$ , livre de cargas ( $\rho = 0$ ) e com as condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = +5 \text{ para } y = 3, 3 \leq x \leq 7$$

$$V = -5 \text{ para } y = 2, 3 \leq x \leq 7$$

Foi escolhido para resolver o problema  $h = 0.125$ .

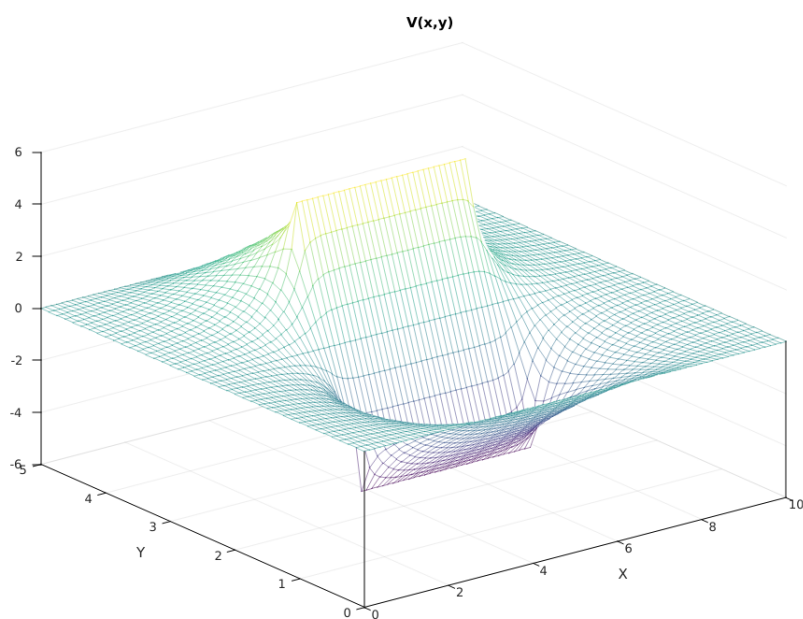


Figura 4 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 1

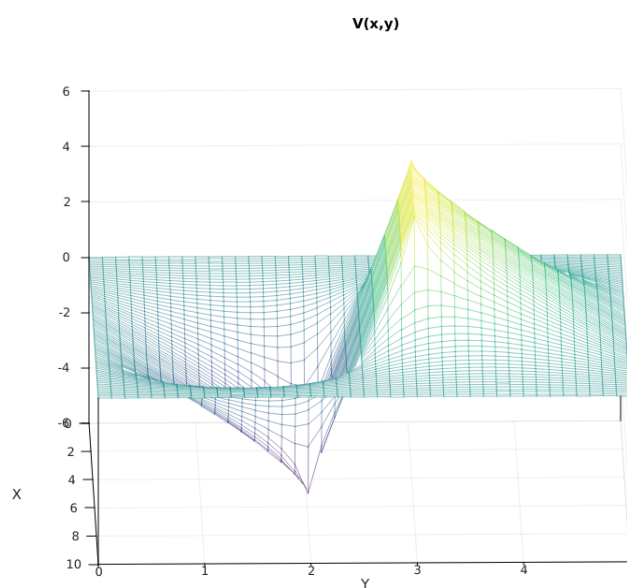


Figura 5 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 2

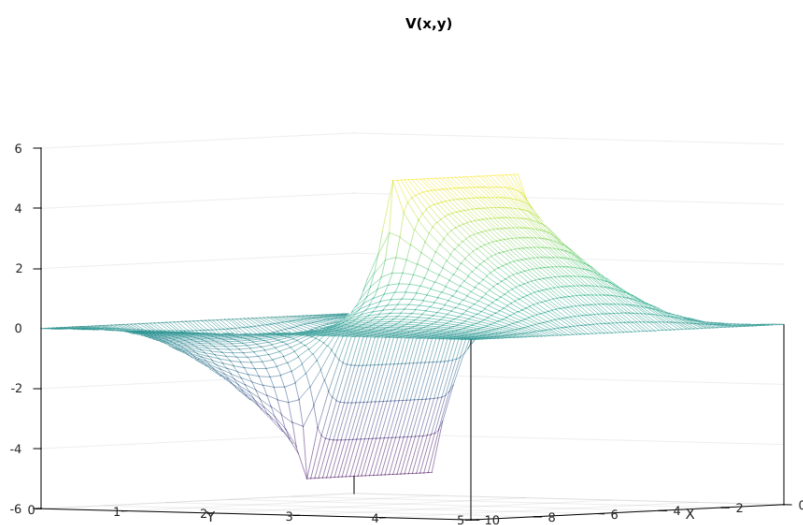


Figura 6 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 3

Como se pode observar, as condições de contorno estão atendidas e a tensão no capacitor está variando entre -5V e 5V, o que era de se esperar.



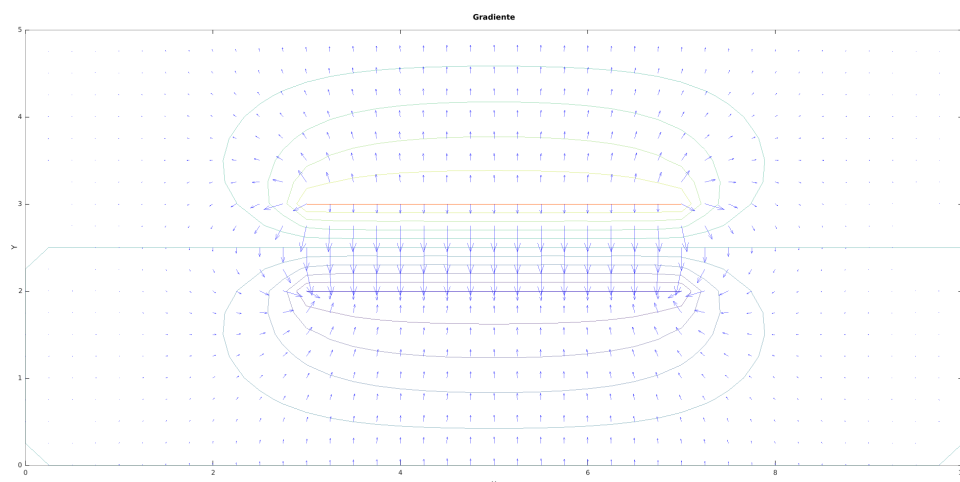


Figura 7 – Linhas equipotenciais e gradiente

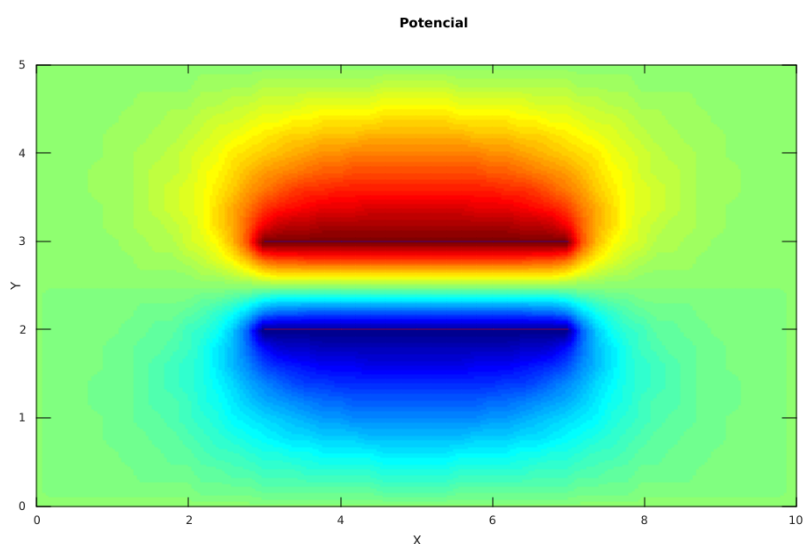


Figura 8 – Potencial variando com a cor

Pela imagem, percebemos que existem regiões elípticas que possuem o mesmo potencial, o que pode-se notar ao fazer cortes horizontais em diferentes alturas no gráfico de tensão do capacitor, e o gradiente mostrando a forma de como a tensão vai aumentando de acordo com a região. As setas sempre vão se aproximando de  $y = 3$  porque o contorno informa que essa região possui tensão de  $+5V$  com  $x$  variando de 3 a 7 e, as setas sempre vão se afastando de  $y = 2$  porque o contorno informa que essa região possui tensão de  $-5V$  com  $x$  variando de 3 a 7. Mostrando assim um resultado coerente com o esperado.

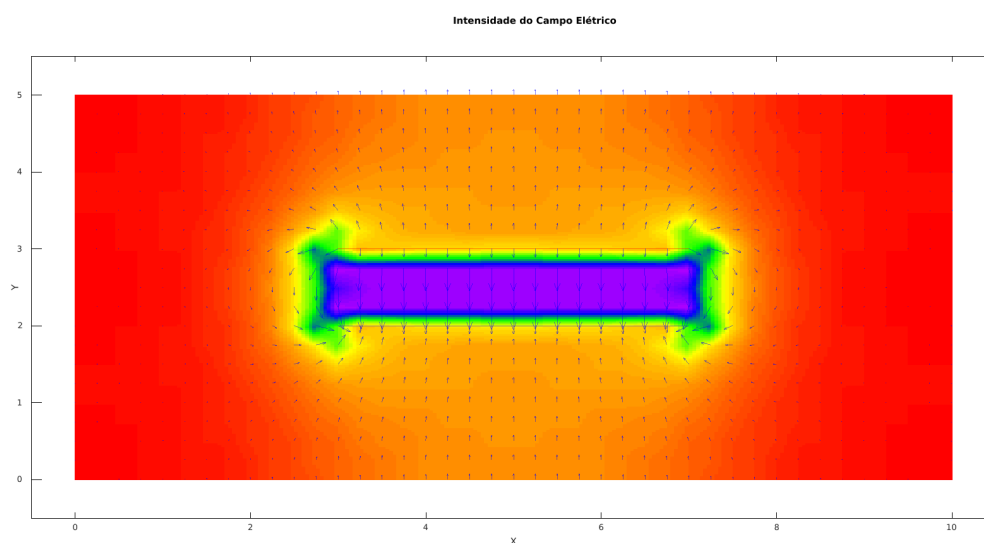


Figura 9 – Intensidade do campo elétrico no capacitor

As linhas de campo elétrico divergem do pólo positivo e convergem para o pólo negativo.

Podemos notar que as regiões mais próximas as placas possuem maior variação de campo e no centro a variação é bem mais constante, sendo quase linear.

É possível observar que as linhas de campo elétrico são de fato perpendiculares às linhas equipotenciais e que são mais uniformes em sentido e módulo entre as placas do capacitor.

## 4 Conclusão

Com o relatório foi possível observar como a utilização de métodos para encontrar a solução de sistemas, Gauss-Seidel ou SOR, podem ser úteis quando implementados computacionalmente, ajudando assim a encontrar a solução de problemas complexos rapidamente.

A partir de uma resposta já conhecida, conseguimos validar nosso código e depois disso, resolvemos um problema bem complexo da área do eletromagnetismo sem muito esforço. Mostrando assim que diversas áreas podem se comunicar para auxiliar a resolver desafios diferentes, porém com resolução semelhante.