
RELATÓRIO DIFERENÇAS FINITAS

VITÓRIA, 2019

ALUNOS

JOÃO VICTOR MARÇAL BRAGANÇA
PEDRO VINICIUS DOS SANTOS CUSTODIO

PROFESSORA

ANDREA VALLI

*Universidade Federal do Espírito Santo
Curso de Engenharia Elétrica*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	3
2	VALIDAÇÃO DO MÉTODO	4
3	CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS	7
4	RESULTADOS	10
5	CONCLUSÃO	13

1 Introdução

Neste relatório iremos apresentar a resolução da Equação de Poisson pelo método de diferenças finitas centrais, validando com uma solução já conhecida e resolvendo um problema da área de eletromagnetismo com a solução a ser encontrada pelo método.

2 Validação do Método

Para validar o método, foi disponibilizado a função:

$$f(x,y) = \frac{1}{5}[x(x-10)+y(y-5)]$$

com as seguintes condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = 0.625x(10-x) \text{ para } y = 2.5, 0 \leq x \leq 10$$

Onde solução conhecida é igual a:

$$V(x,y) = \frac{1}{10}x(10-x)y(5-y)$$

A partir daí, foi implementado um código computacional no Octave a fim de resolver este problema.

Para saber se o código está correto, foi calculado o erro máximo entre a solução conhecida e a solução encontrada. Ela pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula.

$$\text{erro} = \max |V_p^{exato} - V_p|, p = 1, 2, \dots, n_x * n_y$$

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com $h = 0.125$, foi encontrado que levou 232 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 490.569 seconds.

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com $h = 0.250$, foi encontrado que levou 931 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 5.4899 seconds.

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com $h = 0.500$, foi encontrado que levou 232 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 0.0969028 seconds.

Quanto menor o h , maior o tempo de execução pois o gráfico se torna mais fidedigno a realidade e precisa de um maior número de iterações pois a quantidade de pontos a serem calculados aumenta.

Em geral, a escolha do ω para o método SOR é feita empiricamente, mas em malhas retangulares pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula:

$$\omega = \frac{8 - \sqrt{64 - 16t^2}}{t^2}$$

onde

$$t = \cos\left(\frac{\pi}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n_y}\right)$$

e n_x e n_y são os números de pontos nas direções x e y.

Para $h = 0.125$ temos que o ω ideal é de 1.8856.

Utilizando o método SOR com $\omega = 1.8856$ para encontrar a solução com $h = 0.125$, foi encontrado que levou 162 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 26.0348 seconds.

Para $h = 0.125$, temos os seguintes gráficos:

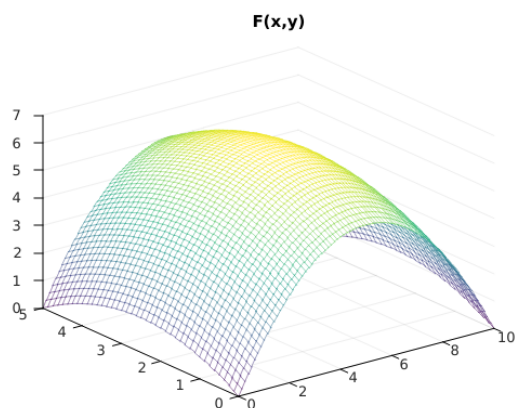


Figura 1 – Função $f(x,y)$ com $h = 0.125$

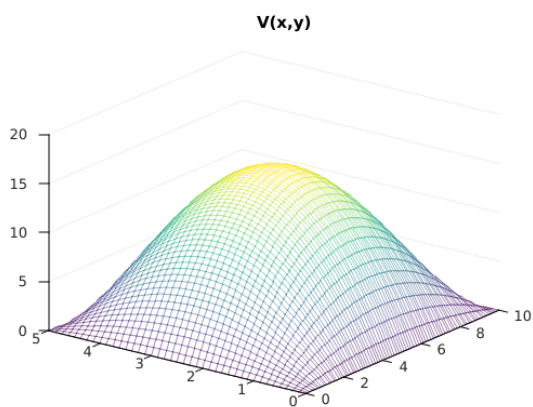


Figura 2 – Função $V(x,y)$ com $h = 0.125$

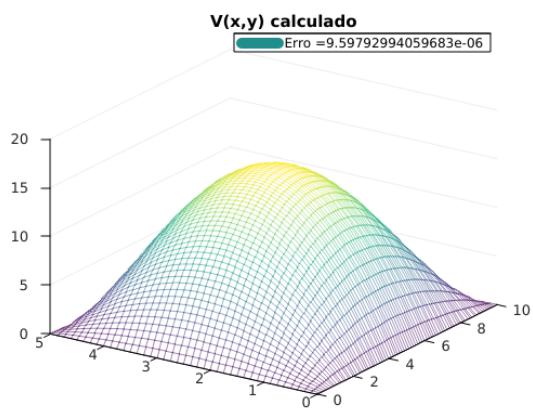


Figura 3 – Função $V(x,y)$ calculada com $h = 0.125$

3 Capacitor de placas paralelas

Agora que sabemos que o nosso código está validado, utilizamos em um problema com solução até então desconhecida. O problema está a seguir.

Para um capacitor de placas paralelas, no domínio $\Omega = [0,10] \times [0,5]$, livre de cargas ($\rho = 0$) e com as condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = +5 \text{ para } y = 3, 3 \leq x \leq 7$$

$$V = -5 \text{ para } y = 2, 3 \leq x \leq 7$$

Foi escolhido para resolver o problema $h = 0.125$.

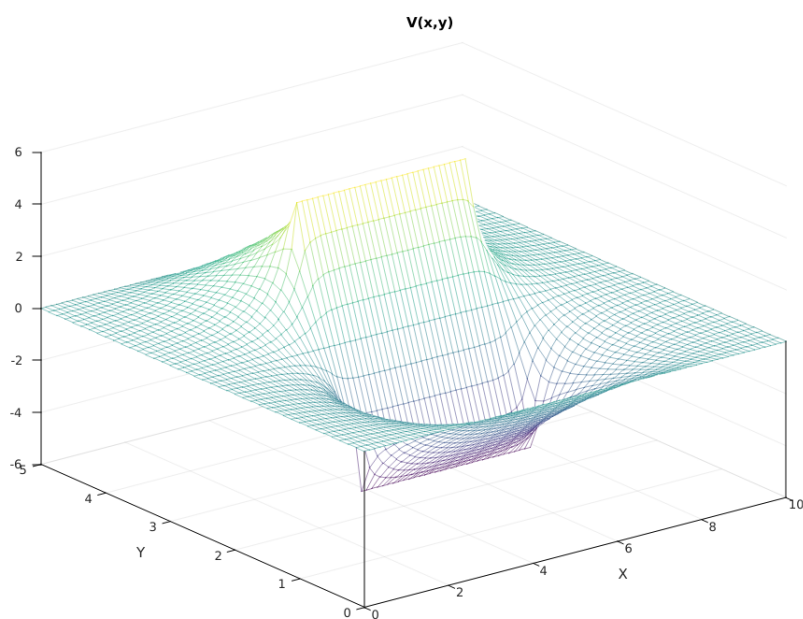


Figura 4 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 1

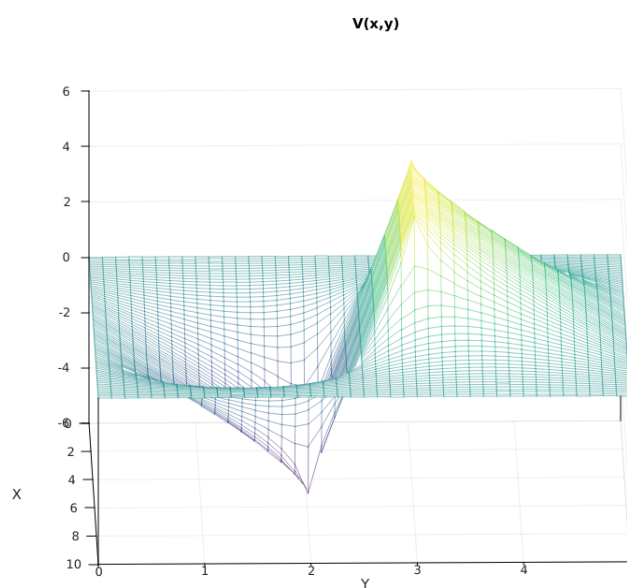


Figura 5 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 2

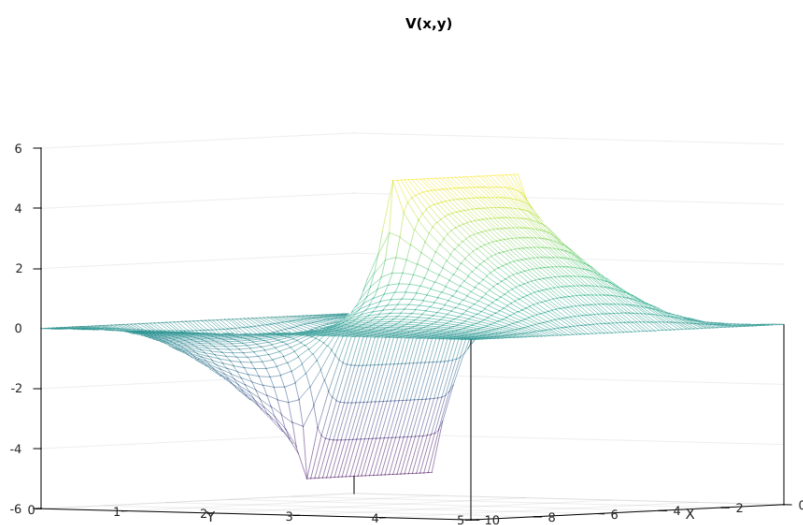


Figura 6 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 3

Como se pode observar, as condições de contorno estão atendidas e a tensão no capacitor está variando entre -5V e 5V, o que era de se esperar.

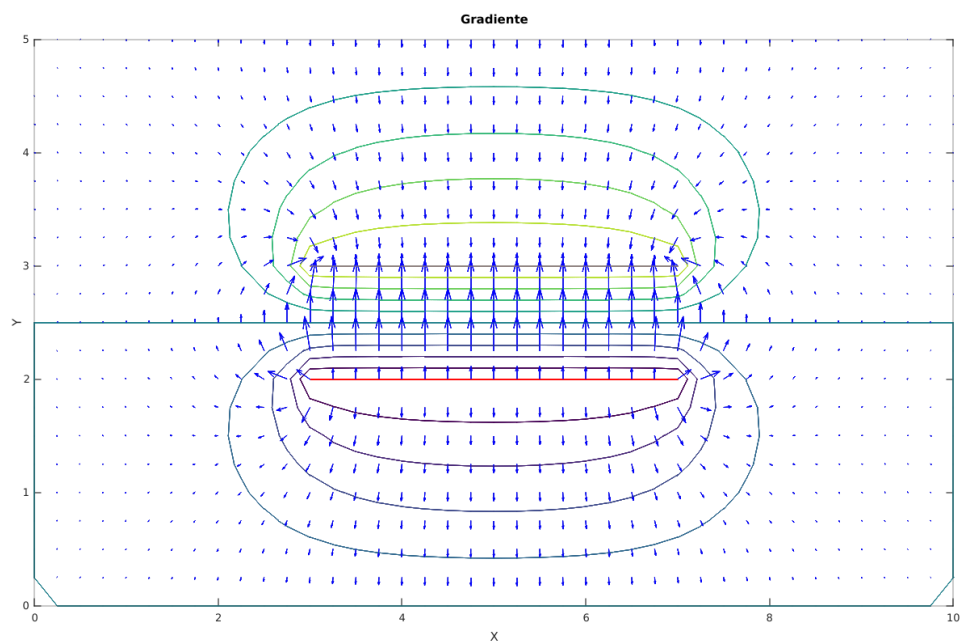


Figura 7 – Linhas equipotenciais e gradiente

Pela imagem, percebemos que existem regiões elípticas que possuem o mesmo potencial, o que pode-se notar ao fazer cortes horizontais em diferentes alturas no gráfico de tensão do capacitor, e o gradiente mostrando a forma de como a tensão vai aumentando de acordo com a região. As setas sempre vão se aproximando de $y = 3$ porque o contorno informa que essa região possui tensão de $+5V$ com x variando de 3 a 7 e, as setas sempre vão se afastando de $y = 2$ porque o contorno informa que essa região possui tensão de $-5V$ com x variando de 3 a 7. Mostrando assim um resultado coerente com o esperado.

4 Resultados

Os dados obtidos na primeira parte do experimento foram analisados no Matlab usando o *script* fornecido pela professora.

A figura abaixo representa a tensão como uma função $V(x, y)$

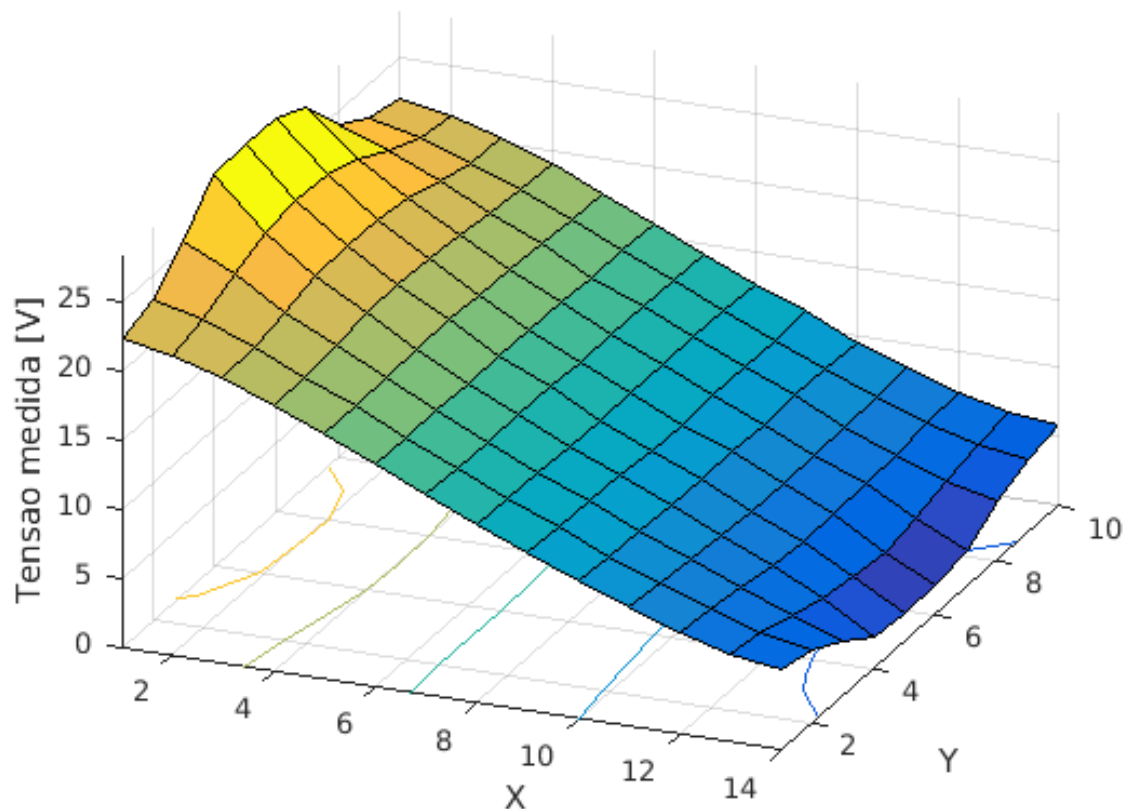


Figura 8 – Superfície gerada por $V(x, y)$

As regiões próximas as placas possuem maior variação de tensão e no centro a variação é bem mais constante, sendo quase linear.

O *script* também calcula o gradiente da tensão, por consequência, o campo elétrico(?), e as linhas equipotenciais.

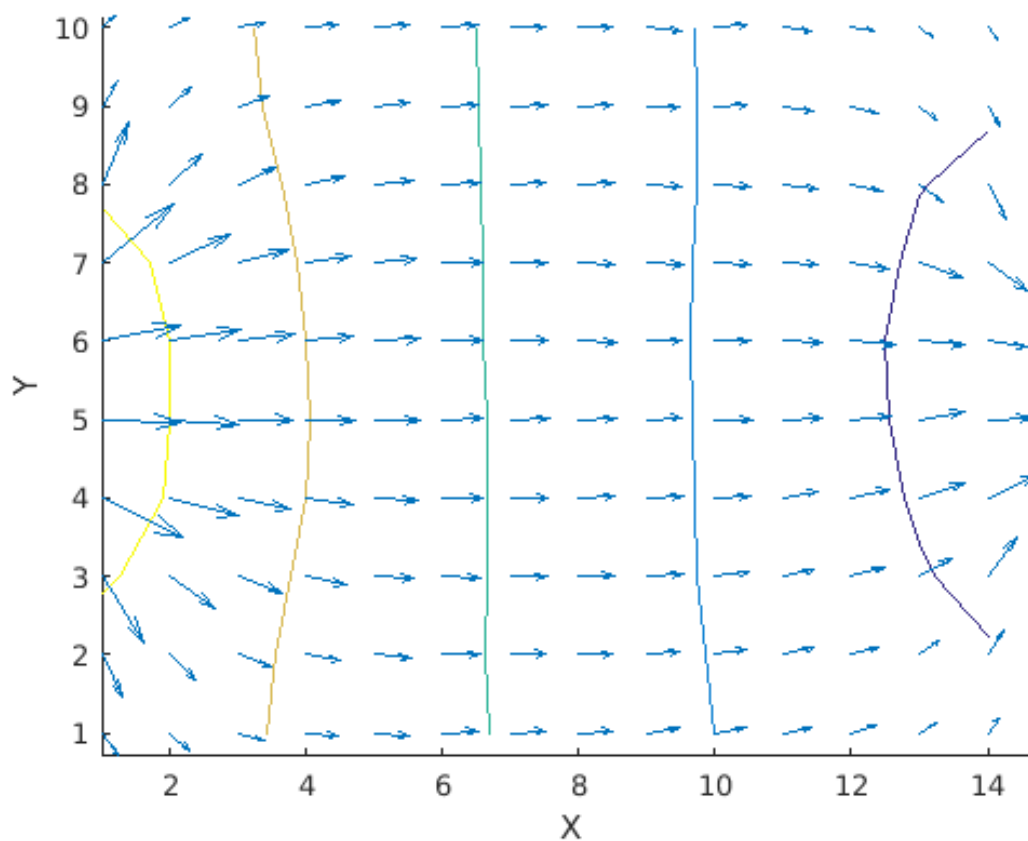


Figura 9 – Gradiente de tensão e linhas de campo elétrico

É possível observar que as linhas de campo elétrico são de fato perpendiculares às linhas equipotenciais e que são mais uniformes em sentido e módulo no sentro da cuba.

Para observar melhor as linhas de campo elétrico e o gradiente de tensão, foi feita uma sobreposição da imagem gerada pelo *script* e de um foto do experimento.

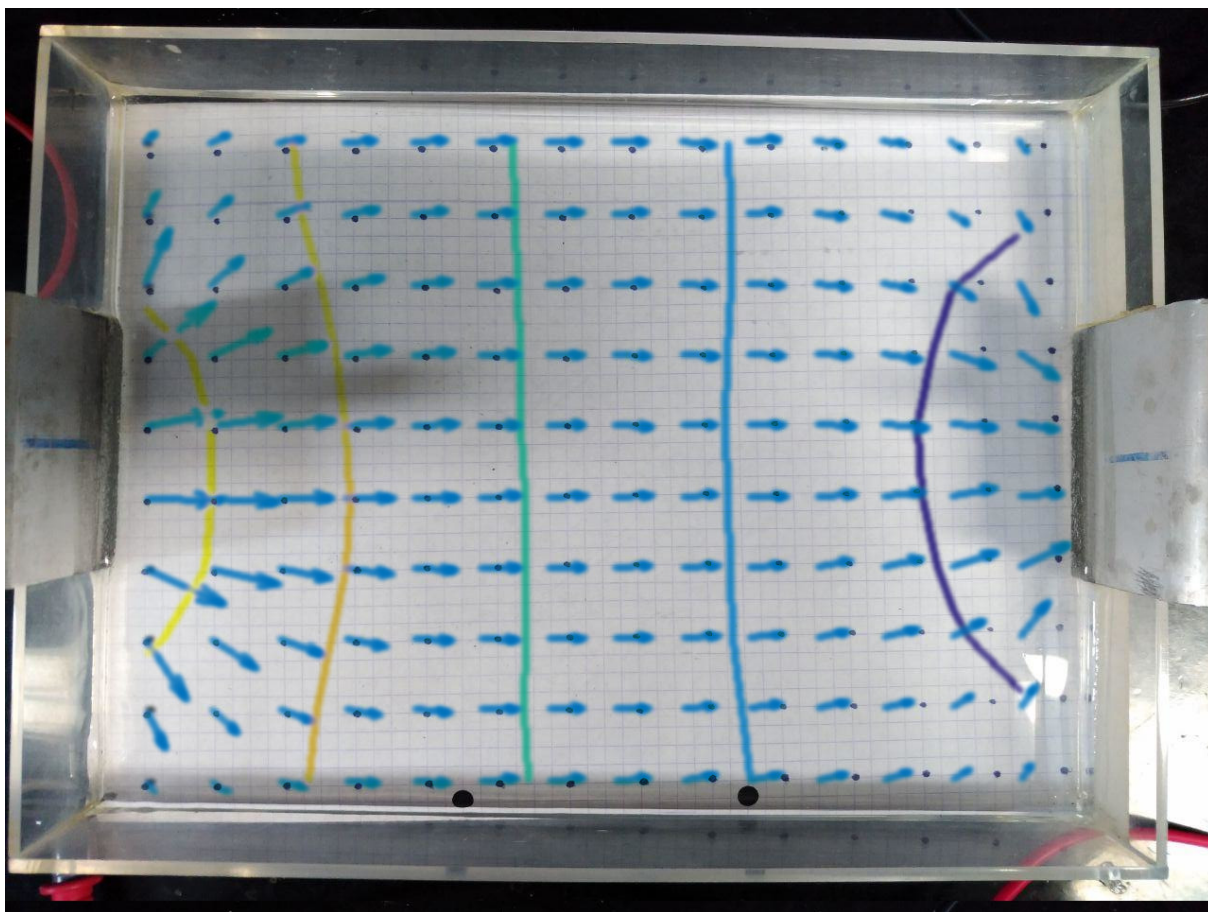


Figura 10 – Gradiente sobreposto no experimento

Com as imagens sobrepostas, fica mais fácil observar as linhas de campo elétrico divergindo do polo positivo e convergindo para o polo negativo. As linhas equipotenciais também ficam mais evidentes. No centro da cuba elas são mais retas, resultado esperado após a segunda parte do experimento, em que era mais fácil encontrar linhas equipotenciais, pois bastava andar verticalmente com a ponta de prova.

É interessante observar a semelhança do sistema com um dipolo gerado por cargas pontuais, mesmo com a grande dimensão das placas em comparação à distância entre elas.

Apesar de ser possível observar a semelhança anteriormente dita, também é possível observar no centro das placas as linhas de campo normais às superfícies das placas e o efeito de borda nas suas laterais. Como seria esperado numa placa de grande dimensão.

5 Conclusão

Com o experimento foi possível observar na prática a relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico. Duas coisas saltaram dentre as outras que foram possíveis de serem observadas: as linhas equipotenciais e a semelhança dos resultados obtidos com o de um dipolo gerado por cargas pontuais.