RELATÓRIO
DIFERENÇAS FINITAS

Vitória, 2019

Alunos

João Victor Marçal Bragança

Pedro Vinicius dos Santos Custodio

Professora

Andrea Valli

Universidade Federal do Espírito Santo
Curso de Engenharia Elétrica

Sumário

1 Introdução

Neste relatório iremos apresentar a resolução da Equação de Poisson pelo método de diferenças finitas centrais, validando com uma solução já conhecida e resolvendo um problema da área de eletromagnetismo com a solução a ser encontrada pelo método.

2 Validação do Método

Para validar o método, foi disponibilizado a função:

$$f(x,y) = \frac{1}{5}[x(x-10)+y(y-5)]$$

com as seguintes condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = 0.625x(10-x) \text{ para } y = 2.5,\ 0 \leq x \leq 10$$

Onde solução conhecida é igual a:

$$V(x,y) = \frac{1}{10}x(10-x)y(5-y)$$

A partir daí, foi implementado um código computacional no Octave a fim de resolver este problema.

Para saber se o código está correto, foi calculado o erro máximo entre a solução conhecida e a solução encontrada. Ela pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula.

$$\text{erro} = \max|V_p^{exato}\text{-}V_p|,\ p = 1,2,\ ...\ ,n_x{*}n_y$$

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com h = 0.125, foi encontrado que levou 232 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 490.569 seconds.

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com h = 0.250, foi encontrado que levou 931 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 5.4899 seconds.

Utilizando o método de Gauss-Seidel para encontrar a solução com h = 0.500, foi encontrado que levou 232 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 0.0969028 seconds.

Quanto menor o h, maior o tempo de execução pois o gráfico se torna mais fidedigno a realidade e precisa de um maior número de iterações pois a quantidade de pontos a serem calculados aumenta.

Em geral, a escolha do ω para o método SOR é feita empiricamente, mas em malhas retangulares pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula:

$$\omega = \frac{8-\sqrt{64-16t^2}}{t^2}$$

onde

$$\text{t} = \cos(\frac{\pi}{n_x})+\cos(\frac{\pi}{n_y})$$

e n_x e n_y são os números de pontos nas direções x e y.

Para h = 0.125 temos que o ω ideal é de 1.8856.

Utilizando o método SOR com $\omega = 1.8856$ para encontrar a solução com h = 0.125, foi encontrado que levou 162 iterações para convergir com uma tolerância de 10^{-6} com o tempo de execução de 26.0348 segundos.

Para h= 0.125, temos os seguintes gráficos:

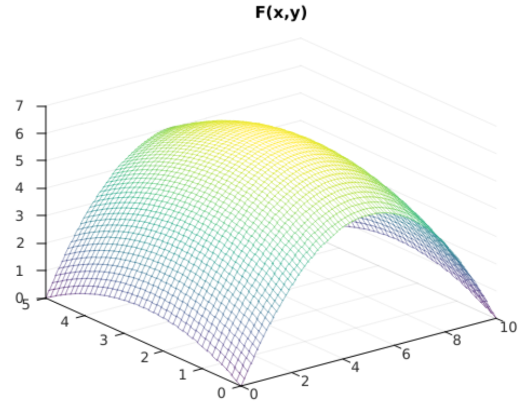

Figura 1 – Função f(x,y) com h = 0.125

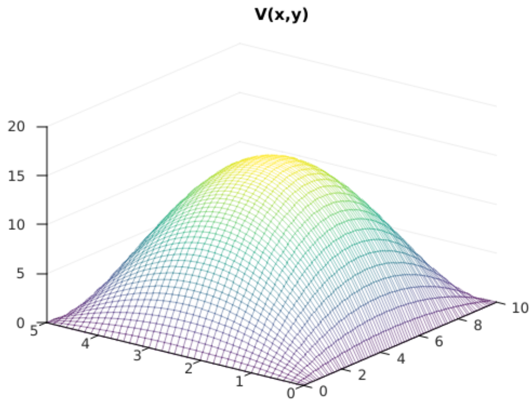

Figura 2 – Função V(x,y) com h = 0.125

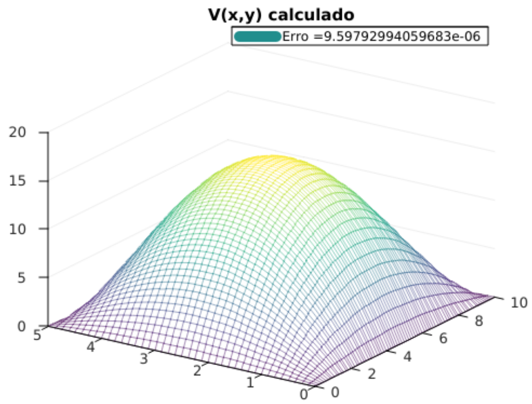

Figura 3 – Função V(x,y) calculada com h = 0.125

3 Capacitor de placas paralelas

Agora que sabemos que o nosso código está validado, utilizamos em um problema com solução até então desconhecida. O problema está a seguir.

Para um capacitor de placas paralelas, no domínio $\Omega = [0,10] \times [0,5]$, livre de cargas ($\rho = 0$) e com as condições de contorno:

$$V = 0 \text{ na fronteira.}$$

$$V = +5 \text{ para } y = 3,\ 3 \leq x \leq 7$$

$$V = -5 \text{ para } y = 2,\ 3 \leq x \leq 7$$

Foi escolhido para resolver o problema h = 0.125.

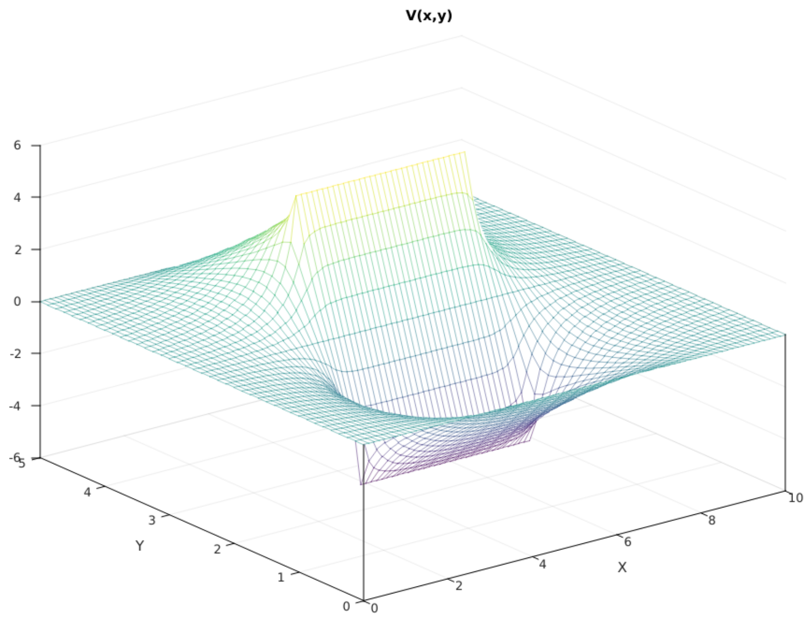

Figura 4 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 1

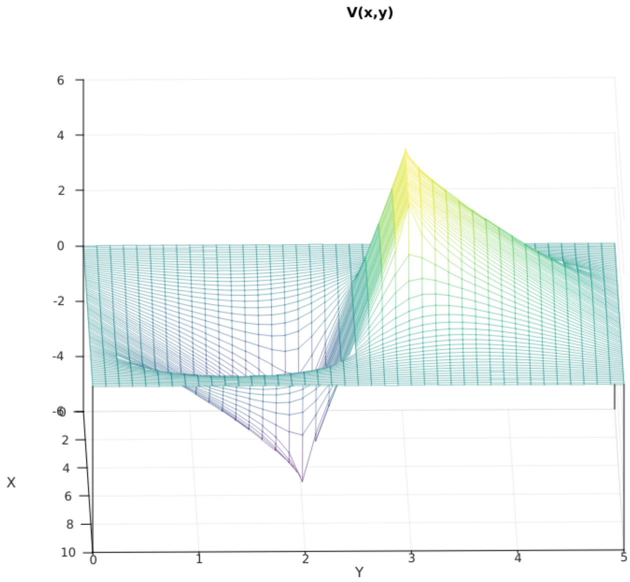

Figura 5 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 2

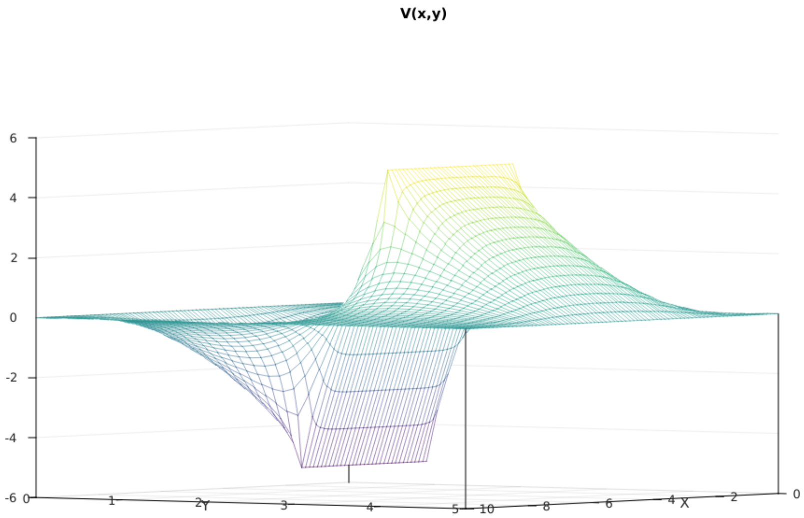

Figura 6 – Visão da tensão no capacitor em uma perspectiva 3

Como se pode observar, as condições de contorno estão atendidas e a tensão no capacitor está variando entre -5V e 5V, o que era de se esperar.

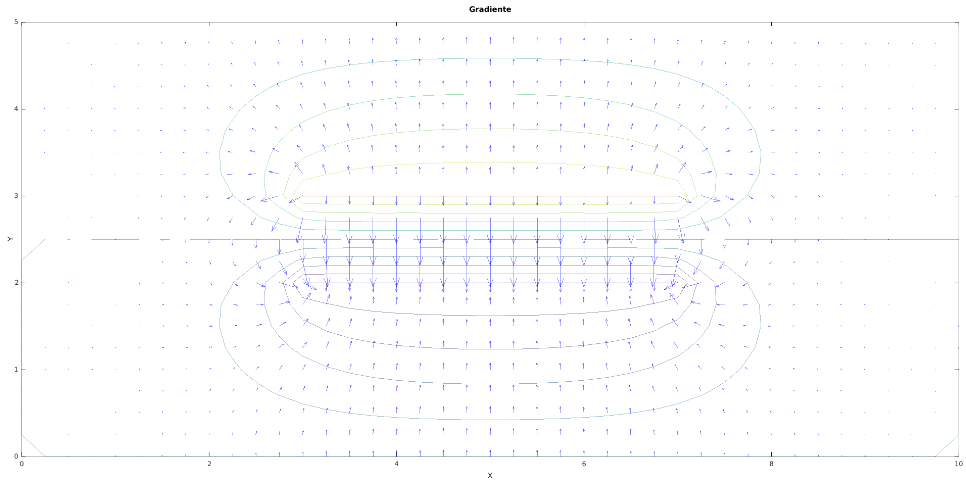

Figura 7 – Linhas equipotenciais e gradiente

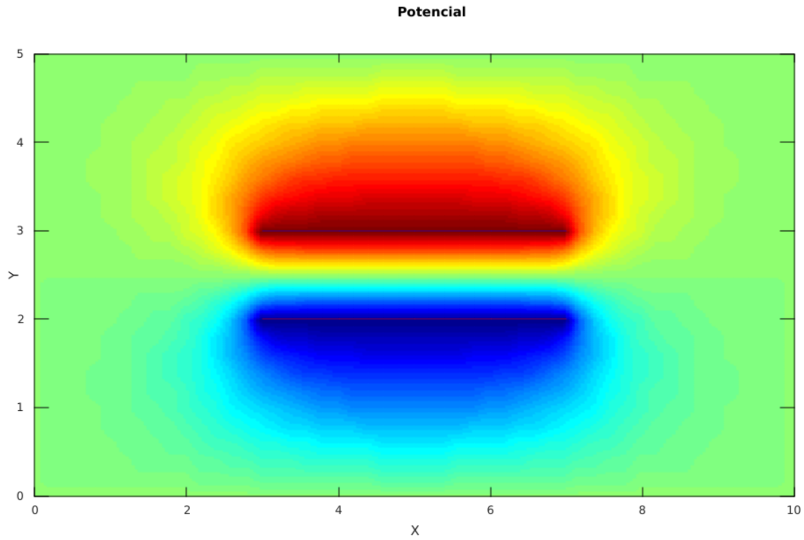

Figura 8 – Potencial variando com a cor

Pela imagem, percebemos que existem regiões elípticas que possuem o mesmo potencial, o que pode-se notar ao fazer cortes horizontais em diferentes alturas no gráfico de tensão do capacitor, e o gradiente mostrando a forma de como a tensão vai aumentando de acordo com a região. As setas sempre vão se aproximando de y = 3 porque o contorno informa que essa região possui tensão de +5V com x variando de 3 a 7 e, as setas sempre vão se afastando de y = 2 porque o contorno informa que essa região possui tensão de -5V com x variando de 3 a 7. Mostrando assim um resultado coerente com o esperado.

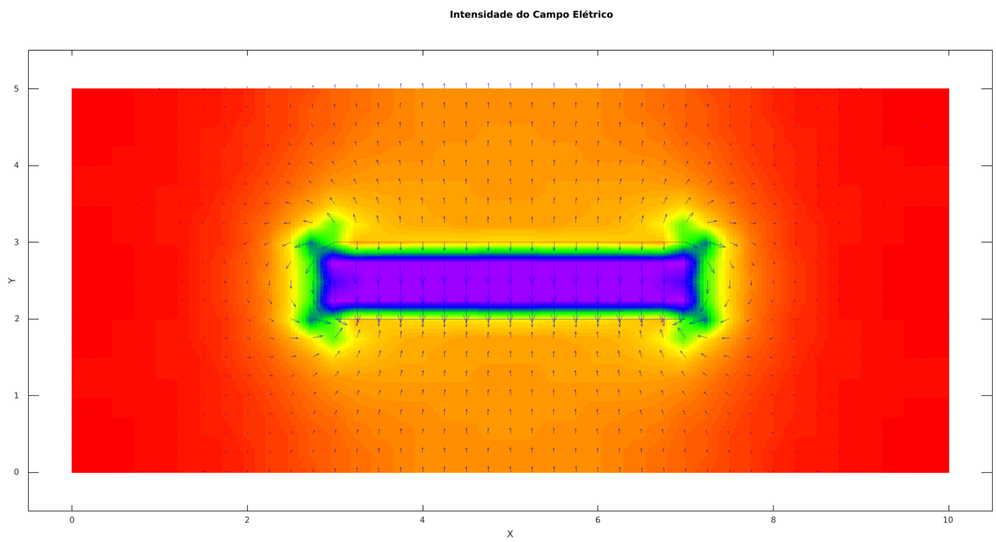

Figura 9 – Intensidade do campo elétrico no capacitor

As linhas de campo elétrico divergem do pólo positivo e convergem para o pólo negativo.

Podemos notar que as regiões mais próximas as placas possuem maior variação de campo e no centro a variação é bem mais constante, sendo quase linear.

É possível observar que as linhas de campo elétrico são de fato perpendiculares às linhas equipotenciais e que são mais uniformes em sentido e módulo entre as placas do capacitor.

4 Conclusão

Com o experimento foi possível observar na prática a relação entre o campo elétrico e o potencial elétrico. Duas coisas saltaram dentre as outras que foram possíveis de serem observadas: as linhas equipotenciais e a semelhança dos resultados obtidos com o de um dipolo gerado por cargas pontuais.