

Estruturas de Sistemas Discretos

Luís Caldas de Oliveira

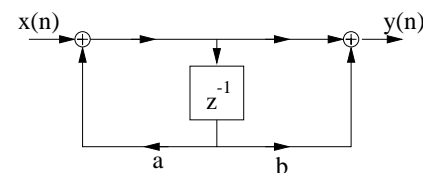
1. Representações gráficas das equações às diferenças
2. Estruturas básicas de sistemas IIR
3. Formas transpostas
4. Estruturas básicas de sistemas FIR
5. Estruturas em *lattice*
6. Efeitos numéricos da precisão finita

Diagrama de Blocos

As equações às diferenças podem ser representadas num diagrama de blocos com símbolos para:

- soma de duas sequências;
- multiplicação de uma sequência por uma constante;
- atraso unitário.

Exemplo: $y(n] = x(n] + bx(n - 1] + ay(n - 1]$



Luís Caldas de Oliveira

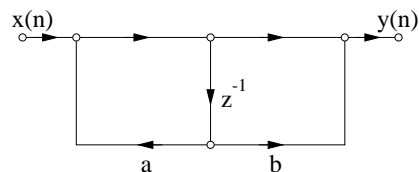
2

Grafo de Fluxo

A representação num grafo de fluxo é essencialmente igual à representação em blocos excepto na notação utilizada:

- o grafo é um conjunto de ramos que se interligam em nós;
- a cada nó está associada uma sequência;
- cada ramo corresponde a uma transformação linear do nó de entrada para o de saída.

Exemplo: $y(n] = x(n] + bx(n - 1] + ay(n - 1]$



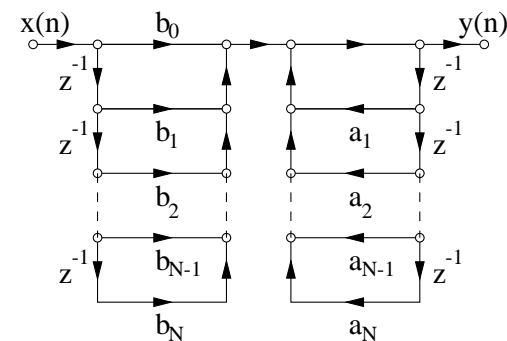
Luís Caldas de Oliveira

3

Sistemas IIR – Forma Directa I

$$y(n] = \sum_{k=1}^N a_k y(n - k] + \sum_{k=0}^N b_k x(n - k]$$

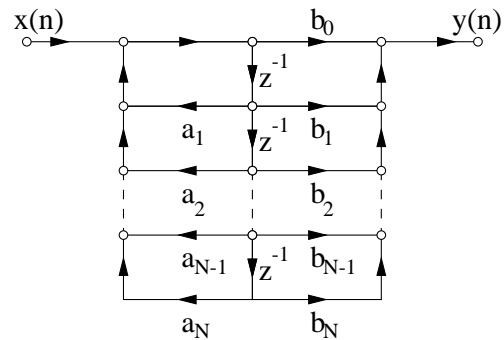
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$



Luís Caldas de Oliveira

4

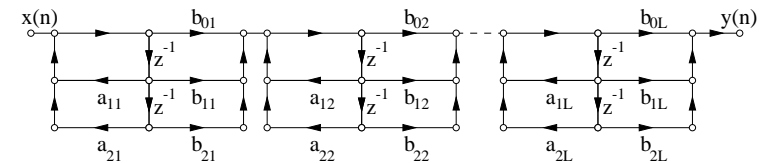
Sistemas IIR – Forma Directa II



Forma canónica: forma de realização do sistema com o número mínimo de atrasos

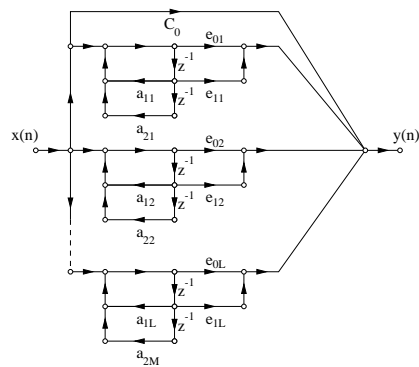
Sistemas IIR – Forma de Cascata

$$H(z) = \prod_{k=1}^L \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$



Sistemas IIR – Forma Paralela

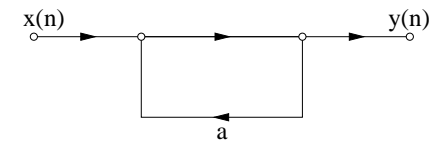
$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-N} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^L \frac{e_{0k} + e_{1k}z^{-1}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}}$$



Grafo Não-Computável

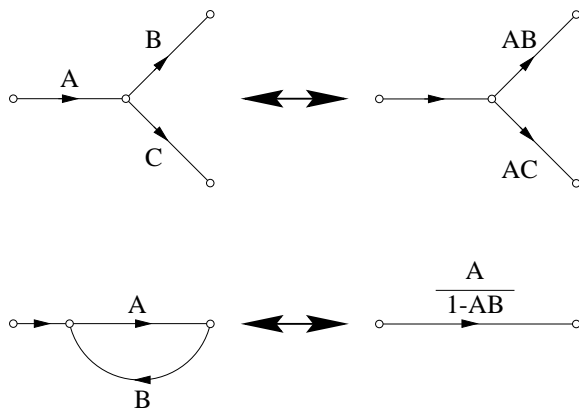
Quando não é possível ordenar os nós de um grafo de forma a que as variáveis associadas aos nós se possam calcular em sequência, diz-se que o grafo é *não-computável*.

Exemplo: $y(n) = ay(n) + x(n)$



- Para um grafo ser computável, todas as realimentações têm de possuir pelo menos um atraso.
- O facto de um grafo não ser computável, não significa que a equação às diferenças não tenha solução.

Transformações de Grafos



Transposição de Um Grafo

- Inverter as direcções de todos os ramos mantendo as transmitâncias
- Trocar o nó de saída pelo de entrada

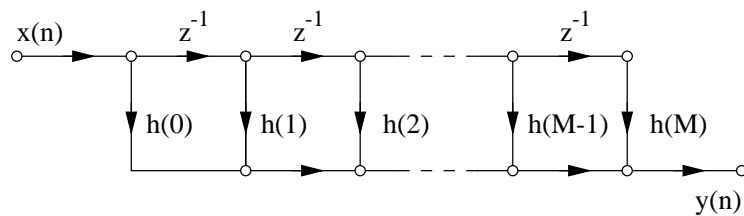
Teorema da transposição:

O grafo resultante da transposição tem a mesma função de transferência do grafo original

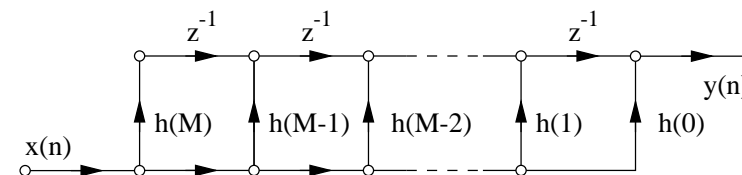
Sistemas FIR – Forma Directa

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) = \sum_{k=0}^M h(k) x(n-k)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

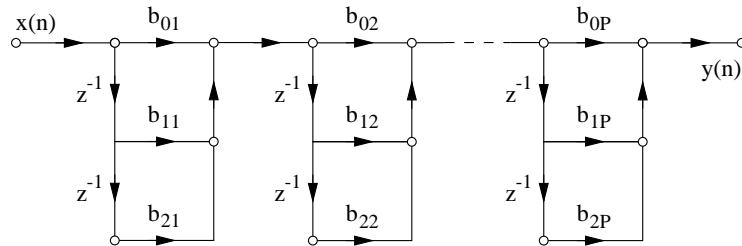


Sistemas FIR – Forma Directa Transposta



Sistemas FIR – Forma em Cascata

$$H(z) = \sum_{n=0}^M h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{M+1}{2} \rfloor} (b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2})$$



Sistemas FIR de Fase Linear

$$h(M-n) = h(n), \quad 0 \leq n \leq M$$

ou

$$h(M-n) = -h(n), \quad 0 \leq n \leq M$$

No primeiro caso:

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\omega \frac{M}{2}}$$

em que $A(e^{j\omega})$ é uma função real.

tipo I: $h(M-n) = h(n)$ e M par;

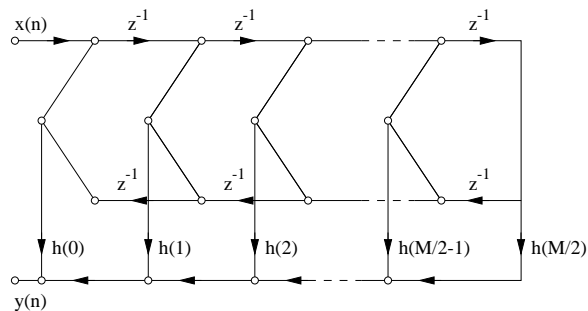
tipo II: $h(M-n) = h(n)$ e M ímpar;

tipo III: $h(M-n) = -h(n)$ e M par;

tipo IV: $h(M-n) = -h(n)$ e M ímpar;

FIR de Fase Linear do Tipo I

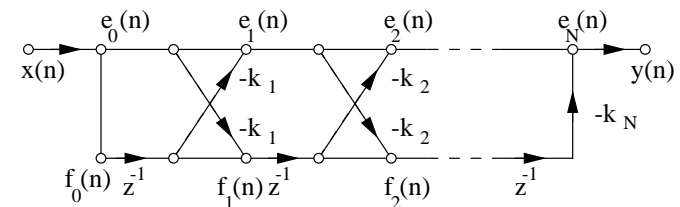
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M/2-1} h(k)[x(n-k) + x(n-M+k)] + h(M/2)x(n-M/2)$$



Estrutura Lattice de Sistemas FIR

$$e_i(n) = e_{i-1}(n) - k_i f_{i-1}(n-1)$$

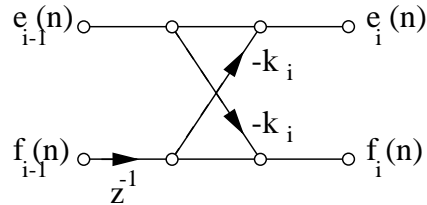
$$f_i(n) = -k_i e_{i-1}(n) + f_{i-1}(n-1)$$



$$H(z) = A(z) = 1 - \sum_{m=1}^N a_m z^{-m} \rightarrow h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -a_n & 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Recursão

$$A_i(z) = \frac{E_i(z)}{E_0(z)} = 1 - \sum_{m=1}^i a_m^{(i)} z^{-m}, \quad B_i(z) = \frac{F_i(z)}{F_0(z)} \quad (1)$$



$$A_i(z) = A_{i-1}(z) - k_i z^{-i} A_{i-1}(z^{-1}), \quad B_i(z) = z^{-i} A_i(z^{-1}) \quad (2)$$

Relação entre Parâmetros

Conversão $k_i \rightarrow a_i$: repetir para $i = 1, 2, \dots, N$

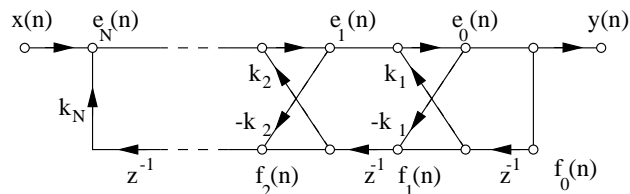
$$\begin{cases} a_i^{(i)} = k_i \\ a_m^{(i)} = a_m^{(i-1)} - k_i a_{i-m}^{(i-1)} \quad 1 \leq m \leq i-1 \end{cases}$$

Conversão $a_i \rightarrow k_i$: repetir para $i = N, (N-1), \dots, 1$

$$\begin{cases} k_i = a_i^{(i)} \\ a_m^{(i-1)} = \frac{a_m^{(i)} + k_i a_{i-m}^{(i)}}{1 - k_i^2} \quad 1 \leq m \leq i-1 \end{cases}$$

Lattice Só com Pólos

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 - \sum_{m=1}^N a_m z^{-m}}$$



$|k_i| < 1 \quad \forall_{i \in [1, N]}$ é condição necessária e suficiente para que todas as raízes de $A(z)$ se localizem no interior do círculo unitário

Efeitos da Precisão Numérica Finita

As principais causas de degradação do desempenho dos filtros digitais são:

- a quantificação dos sinais de entrada e de saída;
- a quantificação dos coeficientes;
- erros de arredondamento nas operações aritméticas;
- saturação (overflow).

Representação de Números Inteiros

sinal + valor absoluto: o bit de maior peso indica o sinal e os restantes o valor absoluto do número ($3_{10} = 0011_2$, $-3_{10} = 1011_2$;

complemento para 1: os números negativos são representados negando todos os bits do valor absoluto do número ($3_{10} = 0011_2$, $-3_{10} = 1100_2$;

complemento para 2: os números negativos são representados negando todos os bits do valor absoluto do número e somando 1 ($3_{10} = 0011_2$, $-3_{10} = 1101_2$;

Números Reais de Vírgula Fixa

$$\hat{x} = Q_B[x] = X_m \left(b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} \right)$$

b_0 é o bit de sinal:

$$\begin{cases} -X_m \leq \hat{x} < 0 & \text{se } b_0 = 1 \\ 0 \leq \hat{x} < X_m & \text{se } b_0 = 0 \end{cases}$$

Parte fraccionária de \hat{x} :

$$\hat{x}_B = b_0, b_1 b_2 \dots b_B$$

Overflow

Se o valor de x exceder X_m existe *overflow*.

Quantificação do *overflow*:

truncatura: os bits de peso superior são ignorados e a quantificação pode ter um erro muito elevado ($0.625_{10} + 0.375_{10} = 0.101_2 + 0.011_2 = 1.000_2 = -1.0_{10}$)

saturação: em caso de x exceder o máximo, é quantificado com o valor máximo ($0.625_{10} + 0.375_{10} = 0.101_2 + 0.011_2 = 0.111_2 = 0.875_{10}$)

Propriedade da aritmética de complemento para 2:

Se se somar vários números em complemento para 2 cuja soma não ultrapasse o valor máximo de quantificação, então o resultado da acumulação destes números estará correcta mesmo que as somas intermédias produzam *overflow*.

Realização de Algoritmos em Vírgula Fixa

Considerar que todas as variáveis e todos os coeficientes são fraccionários ($|x| < 1$) representados com $1 + B$ bits.

multiplicação : o resultado usa $1 + 2B$ bits do qual se pode truncar os B bits menos significativos.

soma: o resultado ocupa $2 + B$ bits. Se se utilizarem apenas os $1 + B$ bits menos significativos podem surgir erros de *overflow*.

Representação em Vírgula Flutuante

$$\hat{x} = \left(b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i} \right) X_m = m 2^e$$

mantissa (m): parte fraccionária do número normalmente representada em complemento para 2 ($m = b_0 + \sum_{i=1}^B b_i 2^{-i}$).

expoente (e): factor de escala da mantissa também representado em complemento para 2 ($X_m = 2^e$).

Quantificação dos Coeficientes em Sistemas IIR

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

Considerando apenas os pólos:

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} = \prod_{j=1}^N (1 - z_j z^{-1})$$

Se os coeficientes forem quantificados ($\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k$) os pólos são deslocados:

$$\Delta z_i = \sum_{k=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial a_k} \Delta a_k, \quad 1 \leq i \leq N$$

Sensibilidade dos Pólos à Quantificação dos Coeficientes

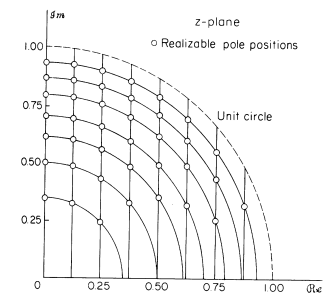
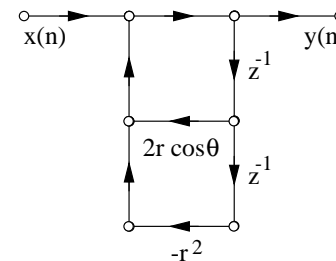
$$\frac{\partial z_i}{\partial a_k} = \frac{z_i^{N-k}}{\prod_{j=1, j \neq i}^N (z_i - z_j)}$$

Se os pólos (ou zeros) estiverem muito próximos pequenos erros nos coeficientes do denominador (ou do numerador) produzem grandes deslocamentos na localizações dos pólos (zeros) das realizações nas formas directas

Realizações em Cascata e Paralelo:

As realizações que utilizam combinações de sistemas de segunda ordem torna a localização de cada par de pólos complexos conjugados independente dos restantes.

Sensibilidade de um Sistema IIR de 2ª Ordem



Realização Alternativa de um Sistema IIR de 2ª Ordem

