# Análise de Sistemas por Transformadas

Suzete E. N. Correia

# Transformada Z

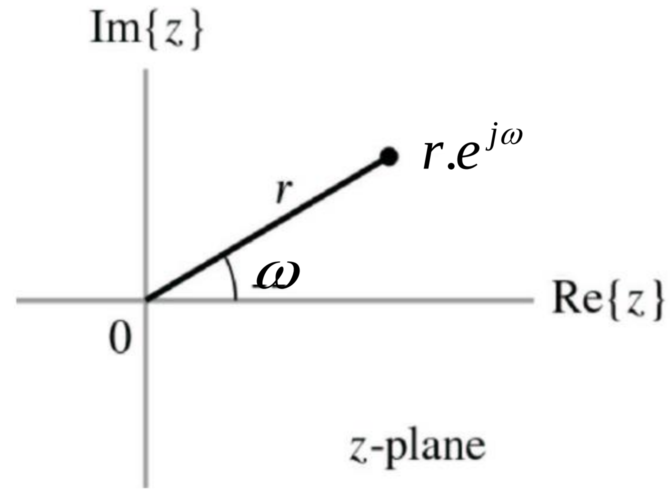
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

$$X(z) = Z[x[n]]$$

$$x[n] \overset{z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Com $Z$ variável complexa, representada na forma polar por:

$$z = r.e^{j\omega}$$



# Relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier

A transformada Z de *x[n]* é definida como

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

Seja $z = e^{-j\omega}$.

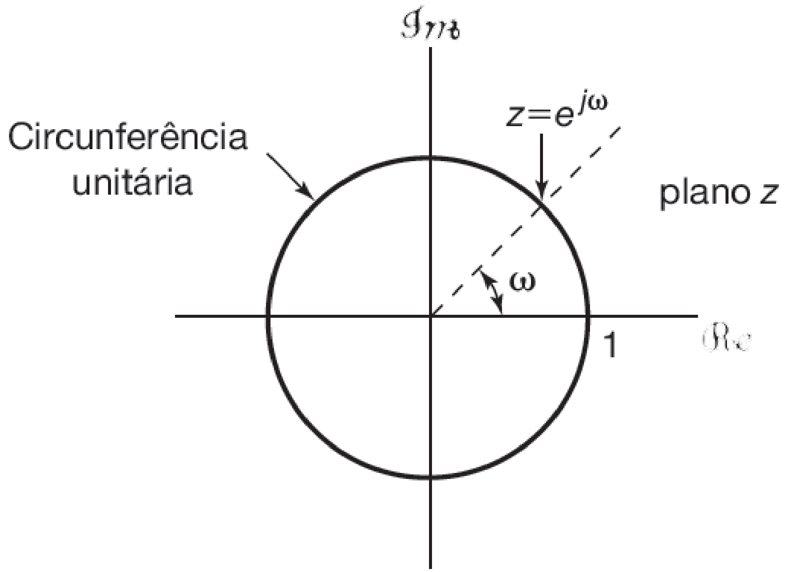
*Transformada de Fourier???*

$$\Rightarrow \quad X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j.\omega.n}$$

# Relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j.\omega.n}$$




A transformada de Fourier corresponde a transformada Z calculada no circulo de raio 1 (circulo unitário).

# Relação entre a transformada Z e a transformada de Fourier

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = X(re^{j.\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j.\omega})^{n}$$

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].r^{n}.e^{j.\omega.n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n].r^{n}\}e^{j.\omega.n}$$

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = F[x[n].r^{n}]$$

# Convergência da transformada Z

- A região de convergência (ROC) de um sinal *x[n]* é o conjunto de valores de z para os quais a transformada z converge. Ou seja: $|X(z)|<\infty$

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \, |z|^{-n} < \infty$$

ROC é centrada na origem e consiste de uma região anular no plano *Z*

# Convergência da transformada Z

Relembrando a relação entre a T.Z. e a T.F

$$X(z)\big|_{z=re^{j\omega}} = F[x[n].r^n]$$

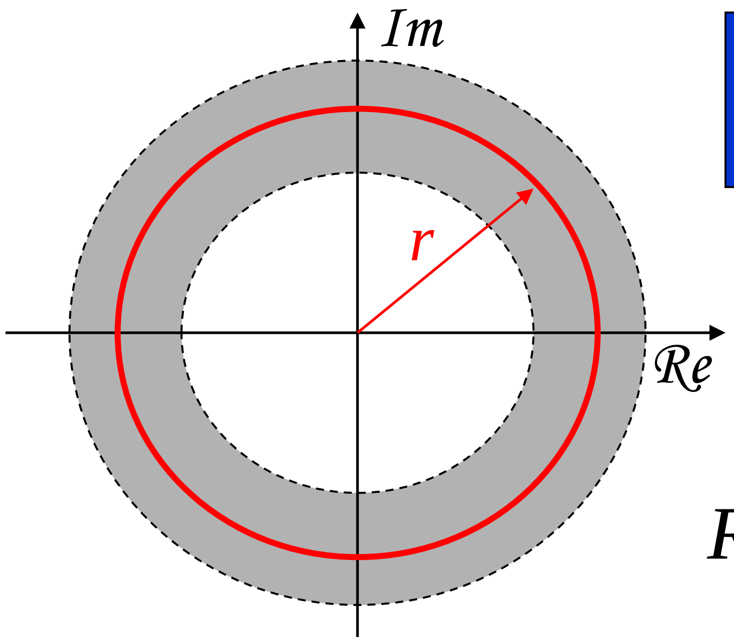
Convergência de $F[x[n].r^n]$

$\Downarrow$

Convergência de $Z[x[n]]$

# Exemplo: região de convergência

$$|X(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \, |z|^{-n} < \infty$$



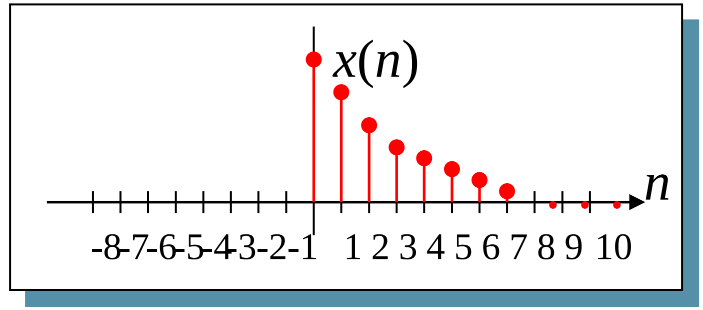

ROC é uma região anular no plano *Z*, centrada na origem

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$ROC = \{ z = re^{j\omega} \mid R_{x-} < r < R_{x+} \}$$

# Exemplo: Sequência lateral direita – Sistema Causal

$$\boxed{x(n) = a^n u(n)}$$




$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}| < \infty \Rightarrow |az^{-1}| < 1$$

$$\Rightarrow |z| > |a|$$

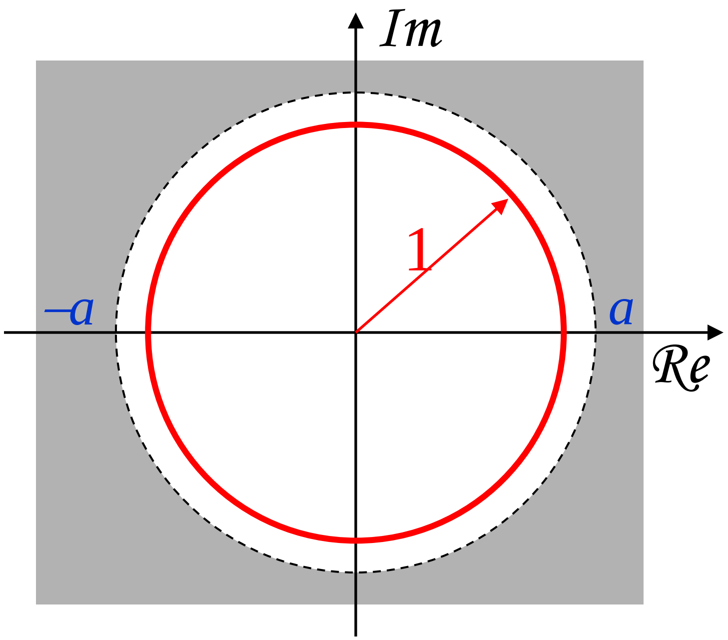
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

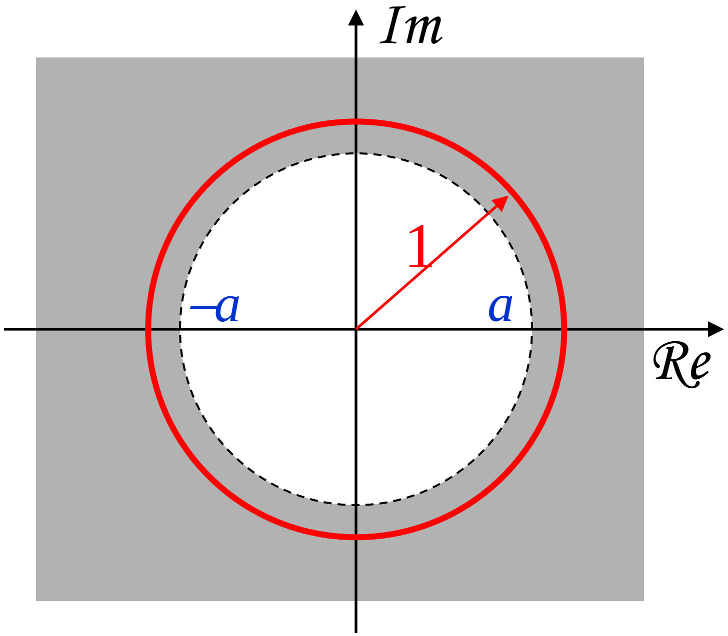
$$|z| > |a|$$

# Exemplo: Sequência lateral direita

$$x(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

**Qual é estável?**



# Representação da transformada Z como função racional

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Em que $P(z)$ e $Q(z)$ são polinomios em $z$.

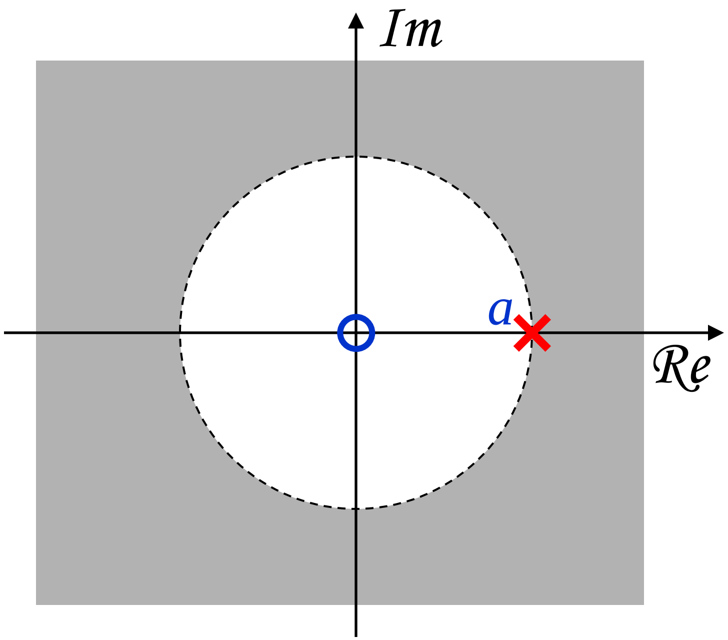
Zeros: Valores de z tais que $X(z) = 0$

Polos: Valores de z tais que $X(z) = \infty$

# Exemplo: Sequência lateral direita

$$x(n) = a^n u(n)$$

$$\Rightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|$$

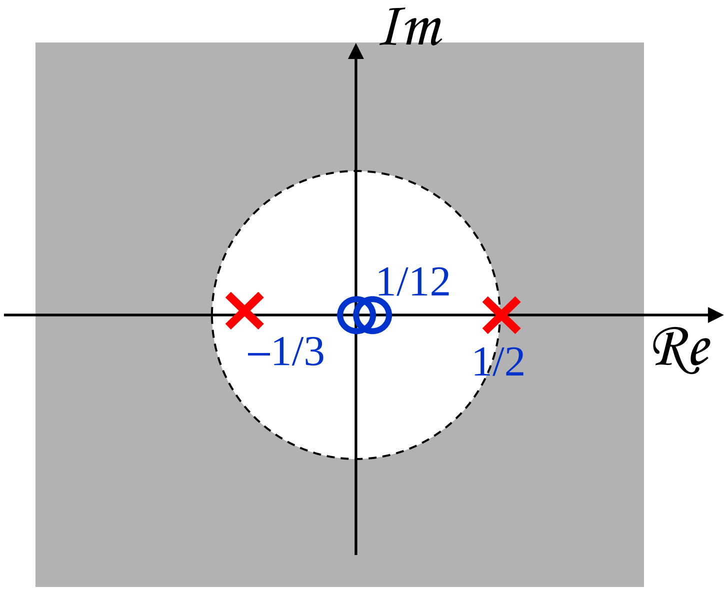



ROC é delimitada pelo polo e está na região exterior do círculo

# Example: Soma de duas sequências laterais direita

$$x(n) = (\tfrac{1}{2})^n u(n) + (-\tfrac{1}{3})^n u(n)$$

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z+\frac{1}{3}} = \frac{2z(z-\frac{1}{12})}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{3})}$$




ROC é delimitada pelos polos e está na região exterior ao circulo.

ROC não contém nenhum polo.

# Alguns pares comuns de transformada Z

| Sequência | *Transformada z* | ROC |
|---|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ | All $z$ |
| $\delta(n-m)$ | $z^{-m}$ | All $z$ except 0 (if $m$>0) or $\infty$ (if $m$<0) |
| $u(n)$ | $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > 1$ |
| $-u(-n-1)$ | $\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ | $\lvert z\rvert < 1$ |
| $a^n u(n)$ | $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$ |
| $-a^n u(-n-1)$ | $\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ | $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$ |

# Propriedades da transformada Z: linearidade

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Z}[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z), \qquad z \in R_x \cap R_y$$

# Propriedades da transformada Z: deslocamento no tempo

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(n+n_0)] = z^{n_0} X(z) \qquad z \in R_x$$

# Propriedades da transformada Z: mudança de escala no domínio Z

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathcal{Z}[a^n x(n)] = X(a^{-1}z) \qquad z \in |a| \cdot R_x$$

# Propriedades da transformada Z: reflexão no tempo

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[x(-n)] = X(z^{-1}) \qquad z \in 1/R_x$$

# Propriedades da transformada Z: Convolução

$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z), \qquad z \in R_x$$

$$\mathcal{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad z \in R_y$$

$$\mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = X(z)Y(z) \qquad z \in R_x \cap R_y$$

# Sistemas LIT

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

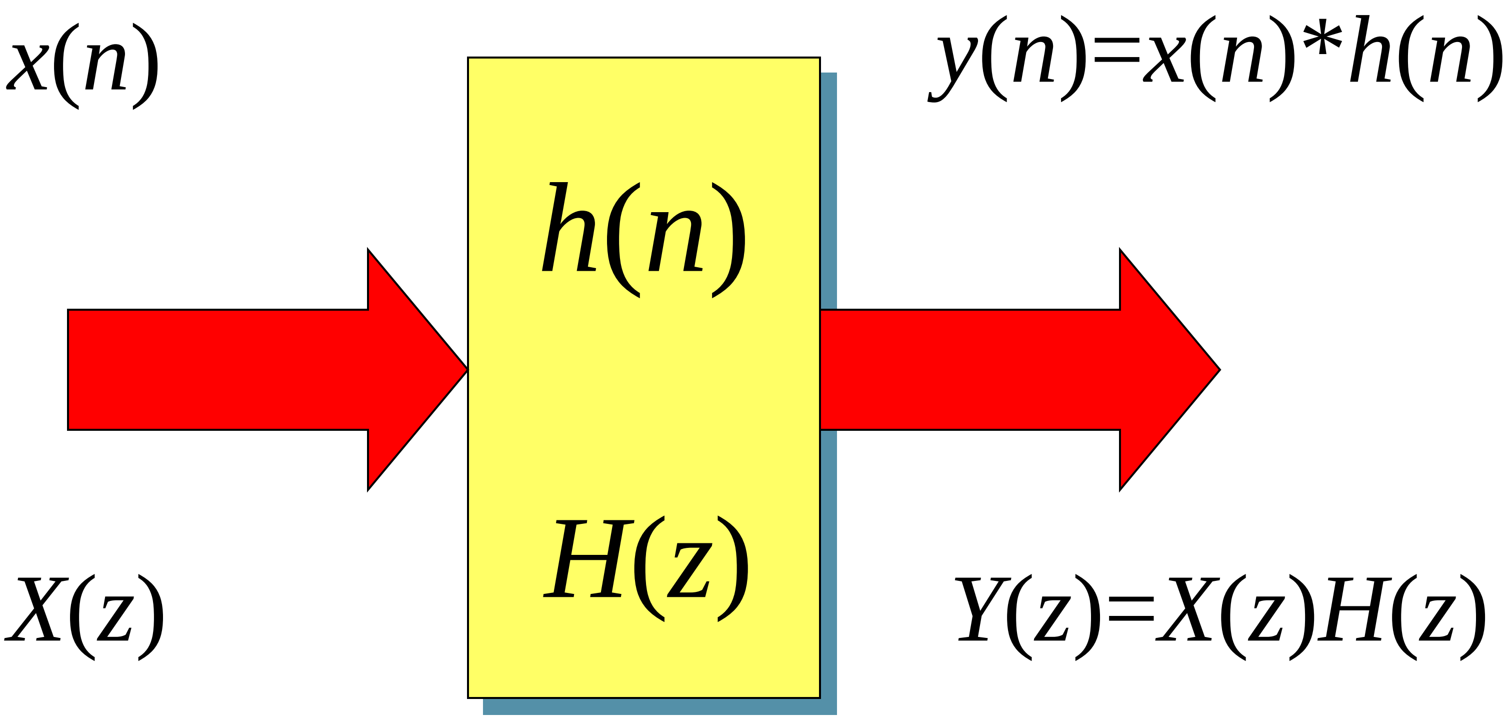
$$x(n) = Z^{n} \qquad\qquad y(n) = Z^{n} H(z)$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n].z^{n}$$

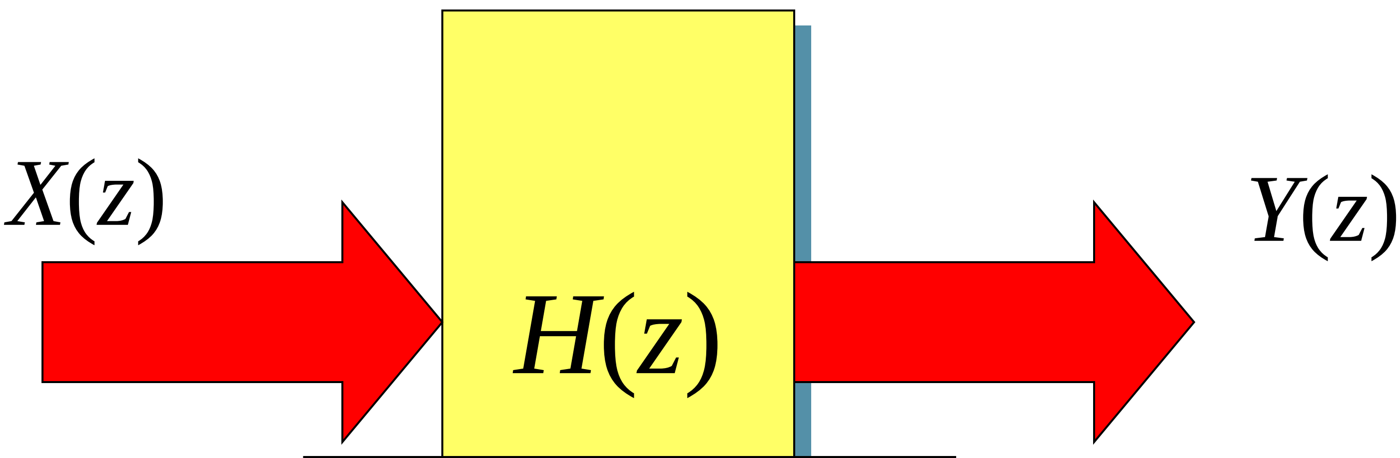
$H(z) \Rightarrow$ Transformada $Z$ de *h(n)*

*F*unção de transferência do sistema

# Sistemas LIT



# Sistemas LIT




$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

# Equação de diferença de orden N

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$\Rightarrow \quad Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}$$

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}$$

# Representação na forma racional

$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$

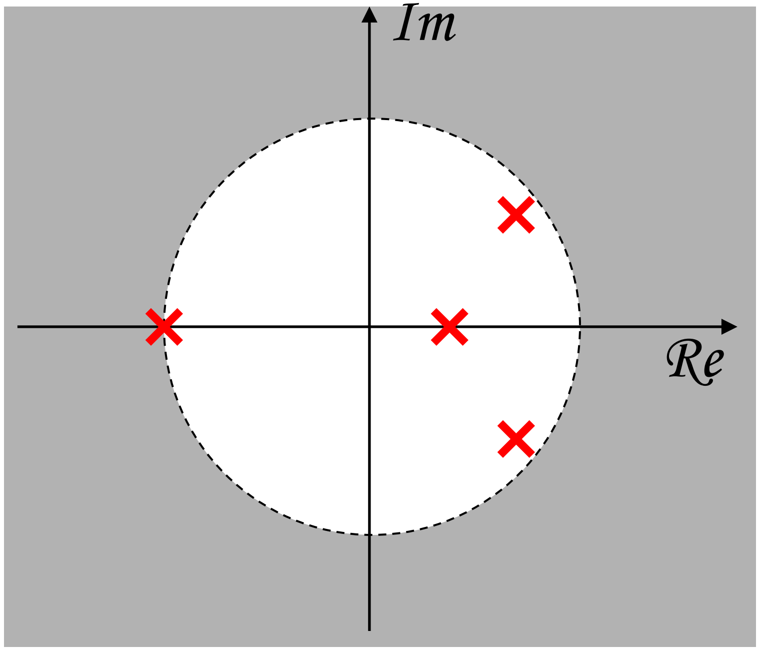
Contribui com *zeros*

Contribui com *polos*

# Sistema estável e causal

Sistema causal: ROC é o exterior de um círculo que inclui o polo mais externo.

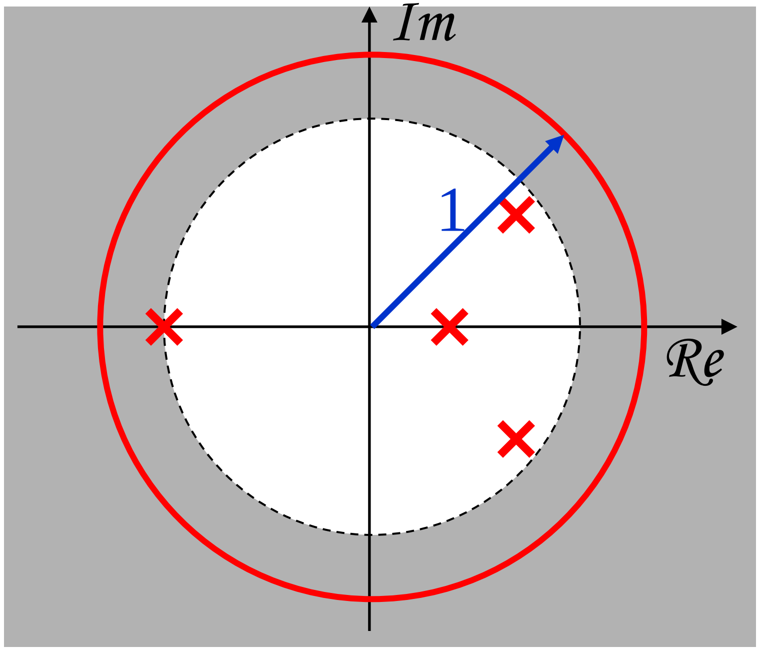
$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1-c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_r z^{-1})}$$



# Sistema estável e causal

Sistema estável: ROC inclui o círculo unitário.

$$H(z) = \frac{A\prod_{r=1}^{M}(1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1 - d_r z^{-1})}$$



# Resposta em frequência de Sistemas LIT

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$$p/\ z = e^{jw}$$

Transformada de Fourier p/ Sinais Discretos (DTFT)
$\rightarrow$ Resposta em Frequência

$$Y(e^{jw}) = H(e^{jw}).X(e^{jw})$$

Função complexa:

$$\left|Y(e^{jw})\right| = \left|H(e^{jw})\right|.\left|X(e^{jw})\right|$$

$$\angle Y(e^{jw}) = \angle H(e^{jw}) + \angle X(e^{jw})$$

$H(e^{jw})$ produz modificações na amplitude e fase do sinal de entrada

# Resposta em frequência de Sistemas LIT

Módulo:

$$\left|H(e^{jw})\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\{H(e^{jw})\}^2 + \mathrm{Im}\{H(e^{jw})\}^2}$$

Módulo em dB: Diagrama de Bode

$$\left|H(e^{jw})\right|_{dB} = 20\log\left(\left|H(e^{jw})\right|\right)$$

Fase:

$$\angle H(e^{jw}) = \arctan\left[\frac{\mathrm{Im}\{H(e^{jw})\}}{\mathrm{Re}\{H(e^{jw})\}}\right]$$

# Sistemas LIT como Filtros Seletores de Frequência

- O termo filtro é normalmente usado para descrever um dispositivo que discrimina, de acordo com algum atributo do objeto aplicado como entrada, o que passa através dele.

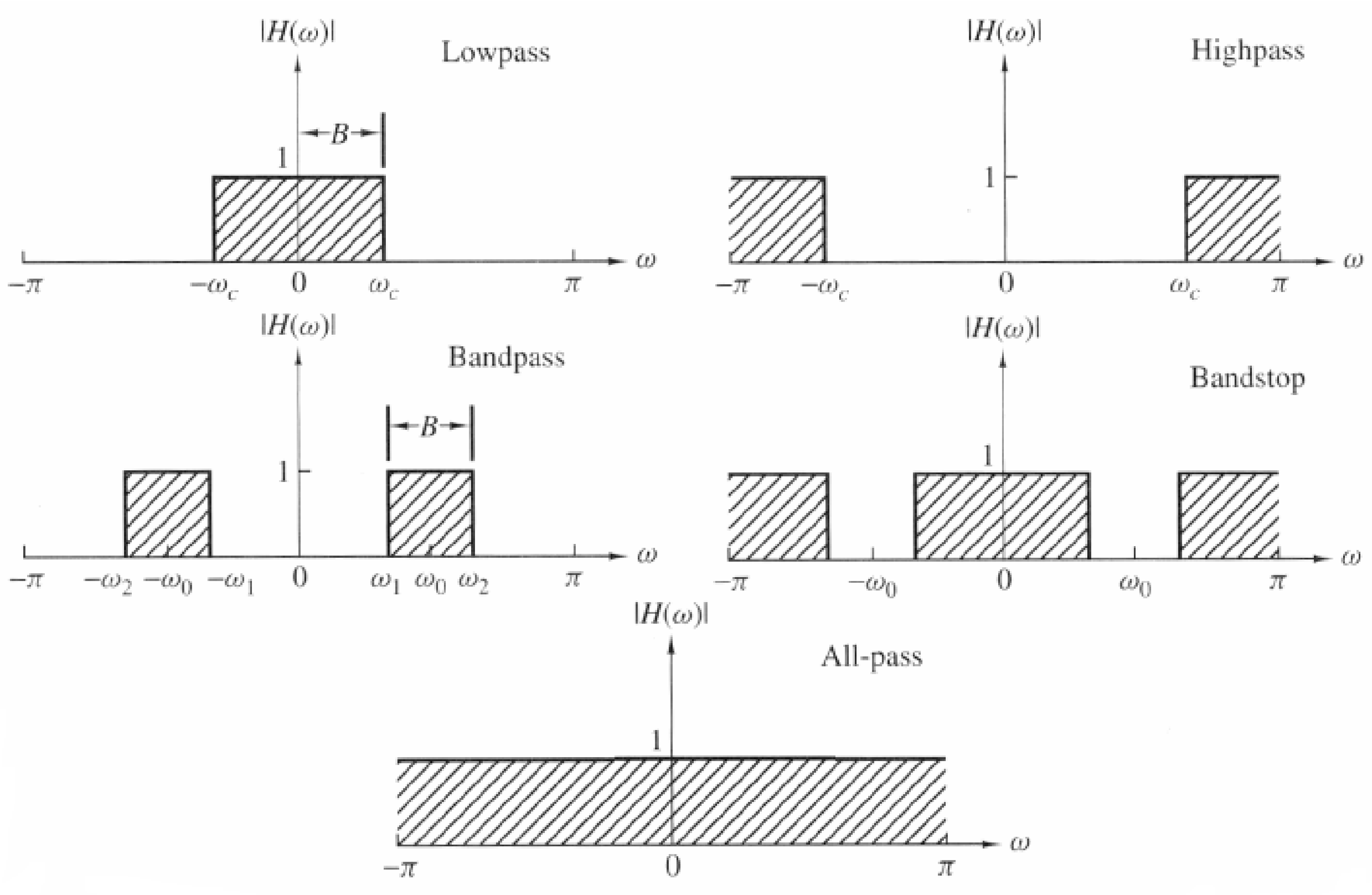
    - Como um filtro de ar que deixa o ar passar, mas retém partículas de impureza

- Um sistema LTI também funciona como um tipo de discriminante ou filtrando entre os vários componentes de frequência na sua entrada

# Sistemas LIT como Filtros Seletores de Frequência

- A forma da filtragem é definida pela resposta de frequência $H(\omega)$ que depende da escolha de parâmetros do sistema (como os coeficientes do filtro).
- Assim, com uma escolha apropriada de parâmetros, pode-se projetar filtros seletores de frequência que deixam passar sinais contendo componentes de frequência em algumas bandas e atenuando sinais contendo componentes de frequência em outras bandas.

# Sistemas LIT como Filtros Seletores de Frequência



# Filtros Seletores de Frequência Ideais

- Passa-Baixas ideal:

$$H_{lp}(e^{jw}) = \begin{cases} 1, & |w| < w_c \\ 0, & w_c < |w| \le \pi \end{cases}$$

$$h_{lp}[n] = \frac{\sin(w_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Não - causal

- Passa-Altas ideal:

$$H_{hp}(e^{jw}) = \begin{cases} 0, & |w| < w_c \\ 1, & w_c < |w| \le \pi \end{cases}$$

$$H_{hp}(w) = 1 - H_{lp}(w)$$

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\sin(w_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty$$

Não - causal

# Sistemas com Atraso ideal

$$h_{id}[n] = \delta[n-\alpha]$$

Resposta em frequência: $H_{id}(e^{jw}) = e^{-jw\alpha}$

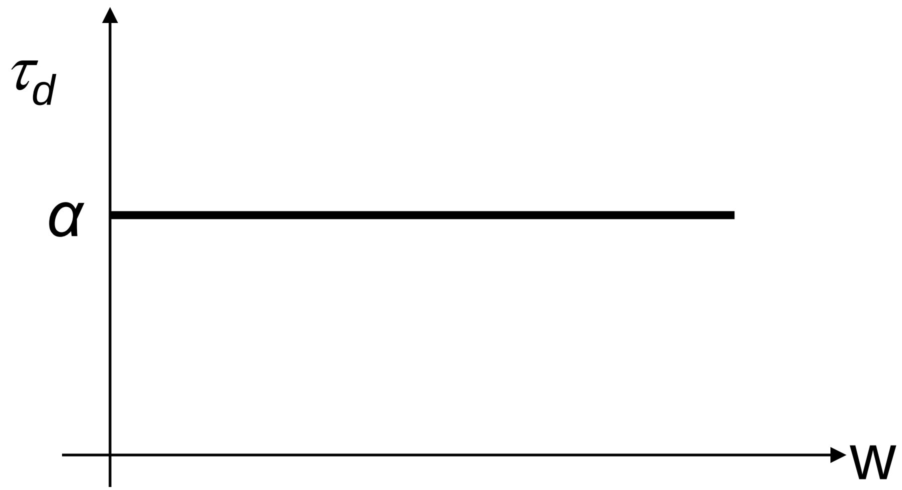
Notação polar: $\left|H_{id}(e^{jw})\right| = 1$

$$\angle H_{id}(e^{jw}) = -w.\alpha\,, \quad |w| < \pi$$

Atraso de grupo: $\tau_d(w) = -\dfrac{d\angle H_{id}(e^{jw})}{dw} = \alpha = cte$

**O sinal de entrada sofre a mesma atenuação e o mesmo atraso para todos os componentes de freqüência**

# Sistemas com Atraso ideal




**O tempo de atraso é independente da freqüência, ou seja, é o mesmo para todos os componentes de freqüência**

# Sistemas de Fase Linear

- Um sistema LIT é dito de fase linear se a resposta em frequência for:

$$H(e^{jw}) = A(e^{jw})e^{-jw\alpha}$$

sendo α um número real e $A(e^{jw})$ é uma função de valor real de w

- Sistemas de fase linear tem atraso de grupo constante

$$\tau_d(w) = \alpha = cte$$

# Sistemas de Fase Linear Generalizada

- Um sistema LIT é dito de fase linear generalizada se :

$$H(e^{jw}) = A(e^{jw})e^{-j(w\alpha-\beta)}$$

sendo β uma constante

$$\tau_d(w) = \alpha = cte$$

- O termo fase linear é usado tanto para sistemas com fase linear generalizada ou não.

# Sistemas de Fase Linear

- Exemplo: Passa-Baixas ideal com fase linear

$$H_{lp}(e^{jw}) = \begin{cases} e^{-jw\alpha}, & |w| < w_c \\ 0, & w_c < |w| \le \pi \end{cases}$$

$$\left|H_{lp}(e^{jw})\right| = 1, \quad |w| < w_c$$

$$\angle H_{lp}(e^{jw}) = -w.\alpha\,, \qquad |w| < w_c$$

$$h_{lp}[n] = \frac{sin[\Omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

O mesmo pode ser feito para **outros filtros ideais.**
**Por maior que seja α será sempre u**m filtro não-causal.

# Sistemas de Fase Linear

- Exemplo: $$h[n]=\begin{cases}1\ , & 0\le n\le M\\ 0, & demais\ casos\end{cases}$$ Filtro FIR

Resposta em frequência: $$H(e^{jw})=e^{-jMw/2}\frac{sen(\frac{M+1}{2}w)}{sen(\frac{w}{2})}$$

Sistema com fase linear generalizada, com α=M/2 e β=0

•Sistema é causal: h[n]=0 n<0

# Filtros FIR de Fase Linear

- Filtros FIR com resposta ao impulso de comprimento M+1 amostras possui fase linear generalizada se:

$$h[n] = h(M-n), \quad 0 \le n \le M$$

Simétrica

$$h[n] = -h(M-n), \quad 0 \le n \le M$$

Anti - Simétrica

Tipos I e II: h[n] simétrico

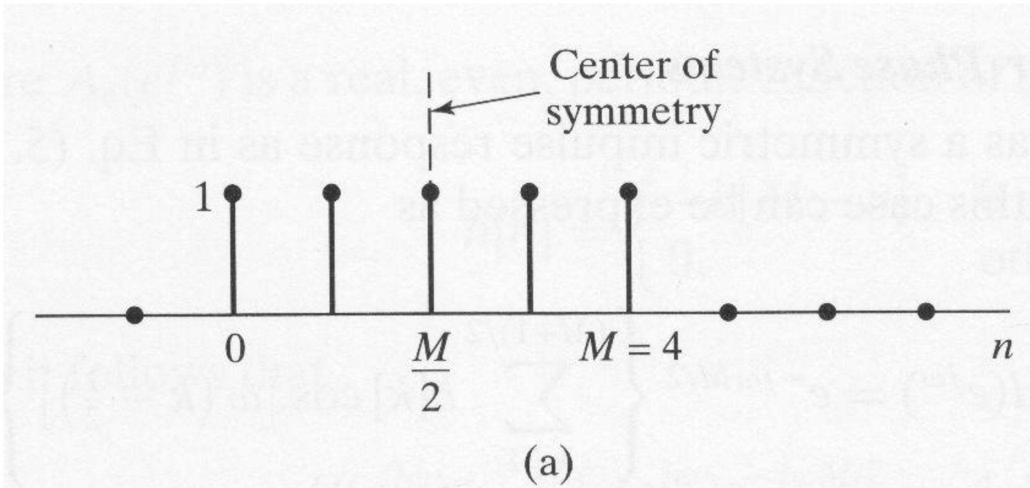
Tipos III e IV: h[n] anti-simétrico

Tipos I e III: M par

Tipos II e IV: M ímpar

# Filtros FIR de Fase Linear

- Tipo I : $h[n] = h[M-n] \quad M \ par$




$\alpha = M/2$

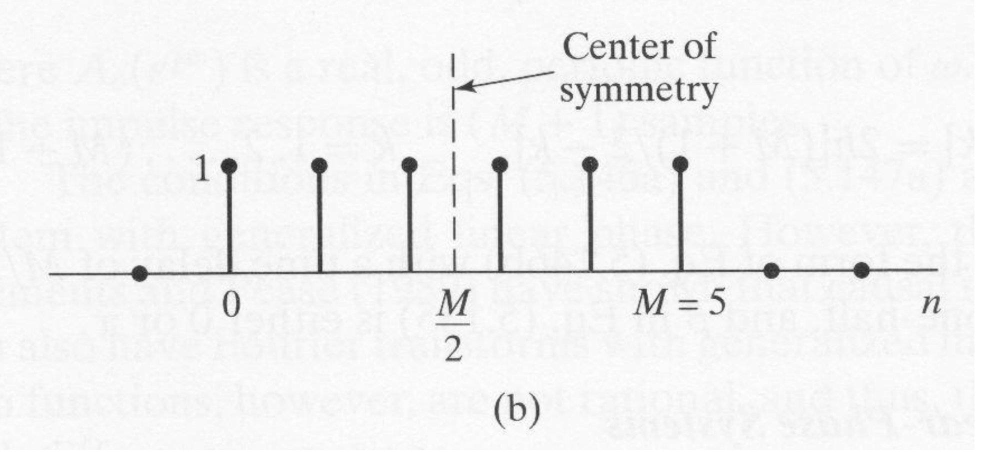
$$H(e^{jw}) = e^{-jwM/2}\left(\sum_{k=0}^{M/2} a(k)\cos(kw)\right)$$

$$a(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right) \quad k = 1,2,\ldots\frac{N}{2}$$

$$a(0) = h\left(\frac{M}{2}\right)$$

# Filtros FIR de Fase Linear

- Tipo II : $h[n] = h[M-n] \qquad M \text{ ímpar}$



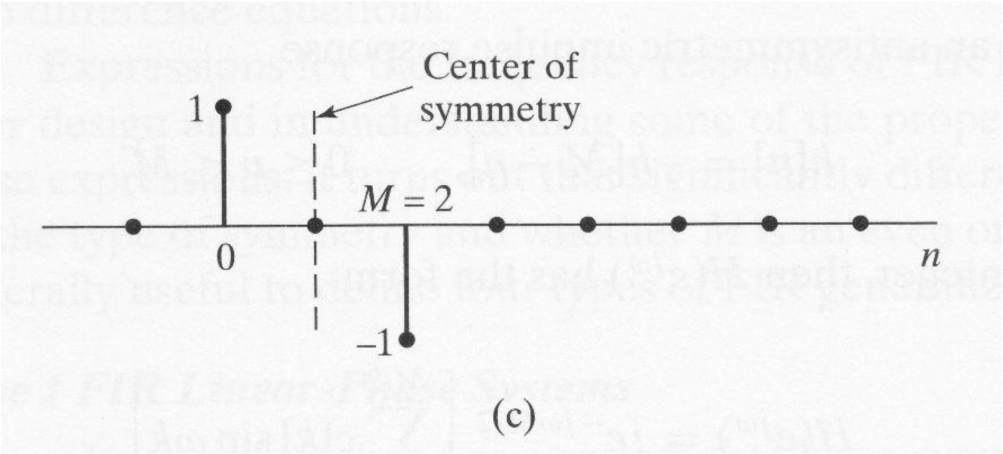

α = M/2

$$H(e^{jw}) = e^{-jwM/2}\left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} b(k)\cos[(k-\frac{1}{2})w]\right)$$

$$b(k) = 2h\left(\frac{M+1}{2} - k\right) \quad k = 1,2,\ldots\frac{M+1}{2}$$

# Filtros FIR de Fase Linear

- Tipo III : $h[n] = -h[M-n] \quad M \ par$




α = M/2

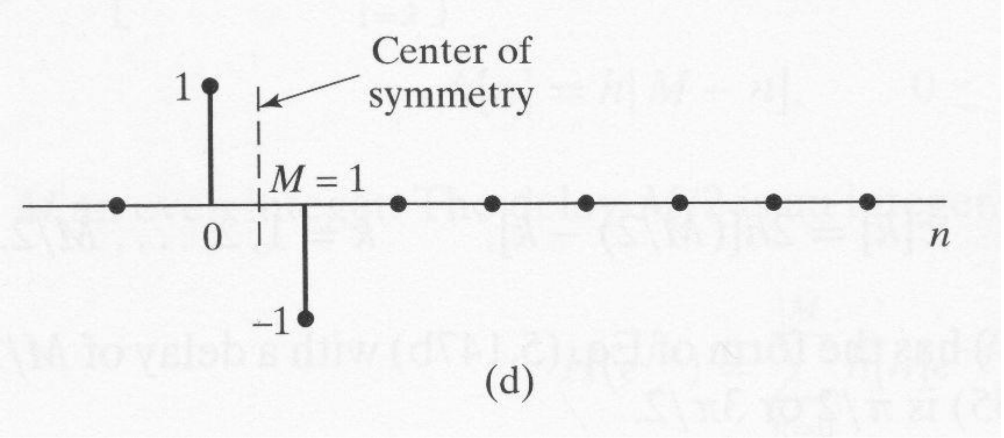
$$h[\frac{M}{2}] = 0$$

$$H(e^{jw}) = je^{-jwM/2}\left(\sum_{k=1}^{M/2} c(k) sen(wk)\right)$$

$$c(k) = 2h\left(\frac{M}{2} - k\right) \quad k = 1,2,\ldots\frac{M}{2}$$

# Filtros FIR de Fase Linear

- Tipo IV : $h[n] = -h[M-n] \quad M \text{ ímpar}$




α = M/2

$$H(e^{jw}) = je^{-jwM/2}\left(\sum_{k=1}^{(M+1)/2} d(k)sen[(k-\frac{1}{2})w]\right)$$

$$d(k) = 2h\left(\frac{M+1}{2}-k\right) \quad k = 1,2,\ldots\frac{M+1}{2}$$

# Transformada Z de filtros FIR

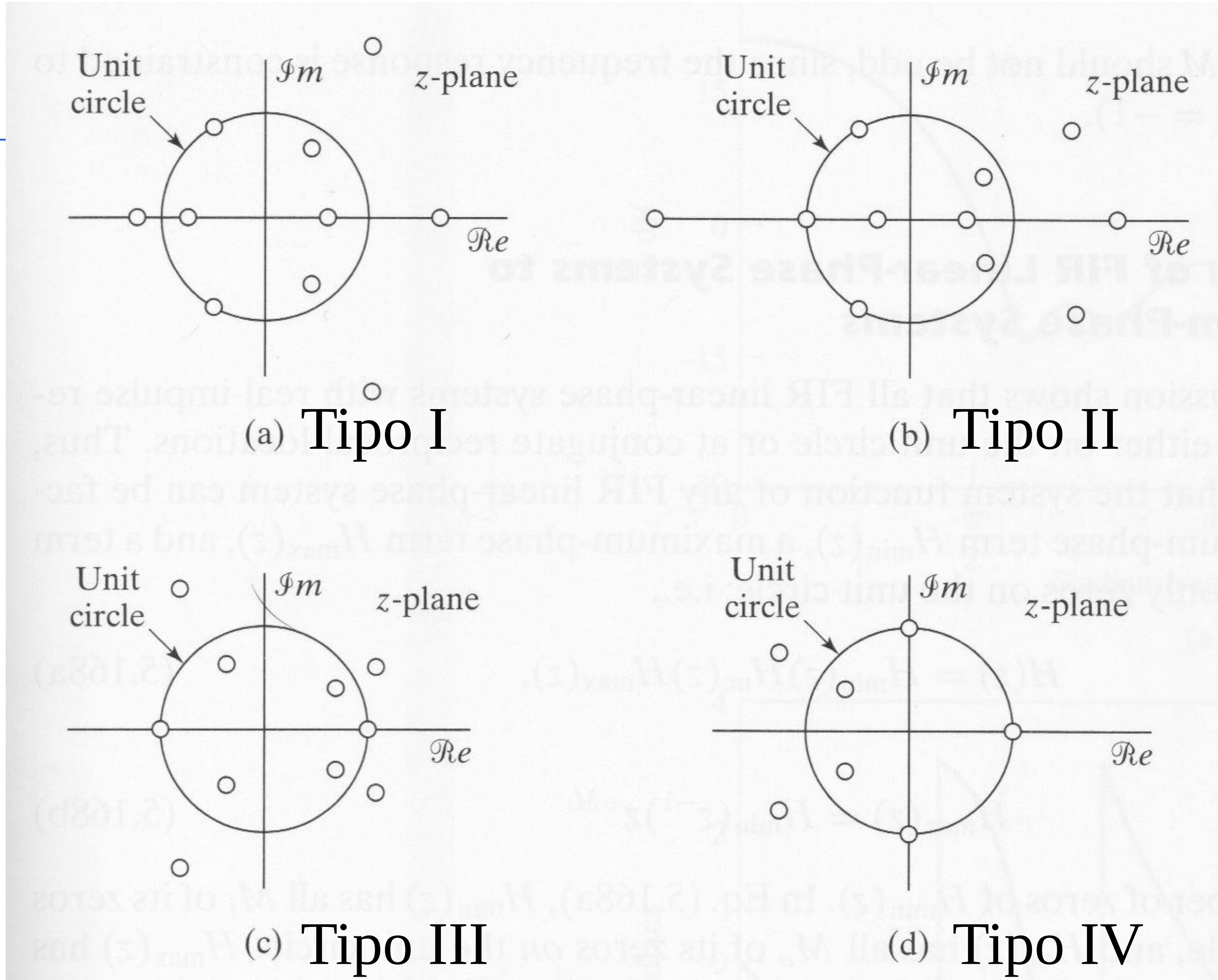
- Tipos I e II :

$$h[n] = h[M-n] \longleftrightarrow H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$$

- Tipos III e IV :

$$h[n] = -h[M-n] \longleftrightarrow H(z) = -z^{-M} H(z^{-1})$$

- Se H(Z) = 0 em $z=z_0$, H(z) deve ser também zero em $1/z_0$
- Os zeros ocorrem em pares recíprocos e zeros complexos em pares conjugados recíprocos.
- Os filtros dos tipos II e III devem ter um zero em z= -1, e os filtros dos tipos III e IV devem ter um zero em z=1.




Zeros: Sobre circulo unitário

Fora do circulo unitário aos pares simétricos

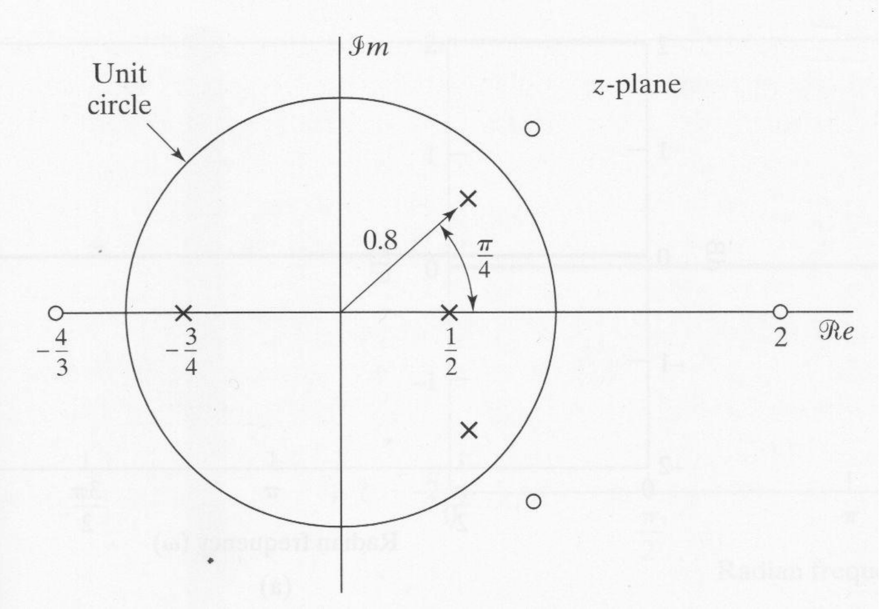
# Filtros Passa - Tudo

- Um filtro passa-tudo tem resposta em frequência cujo módulo é constante:

$$\left|H(e^{jw})\right| = cte$$

- A restrição de magnitude unitária obriga os pólos e zeros do sistema a ocorrerem em pares conjugados recíprocos:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1} - a_k^{*}}{1 - a_k . z^{-1}}$$

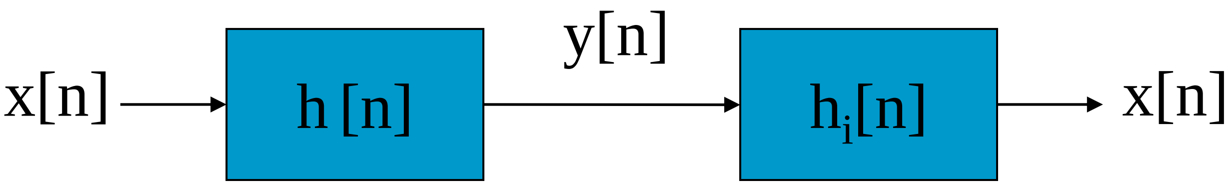


# Filtros Passa - Tudo

- Se um filtro passa-tudo for estável e causal os pólos estão dentro do círculo unitário
- Os filtro passa-tudo são úteis na equalização de retardo de grupo de modo a compensar as não-linearidades da fase
- O atraso de grupo de um filtro passa-tudo racional, estável e causal é não negativo.
- Um filtro pode ser cascateado com um filtro passa-tudo sem que ocorra alteração na magnitude da resposta em frequência.

# Sistema inverso

$H_i(z)$ é inverso de $H(z)$ se:




$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$G(z) = H(z).H_i(z) = 1$$

Logo: $$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Pólos de $H(z)$ são zeros de $H_i(z)$
Zeros de $H(z)$ são polos de $H_i(z)$

Um sistema Estável Causal $H(z)$ terá um sistema Inverso $H_i(z)$ Estável e Causal se e somente se os pólos e zeros de $H(z)$ estiverem no interior do circulo unitário. Tais sistemas são ditos SISTEMAS DE FASE MÍNIMA

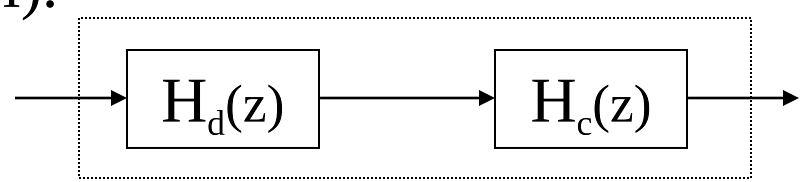
# Sistemas de Fase Mínima

- Qualquer função H(z) racional pode ser decomposta em:

$$H(z) = H_{\min}(z).H_{ap}(z)$$

Isto é, uma função fase mínima cascateada com
um sistema passa-tudo para ajuste da fase.

- Uso de filtros passa-tudo em compensação da resposta em frequência de sistemas fase não-mínima (sistema inverso é instável).




$$H_d(z) = H_{d\min}(z).H_{ap}(z) \qquad H_c(z) = \frac{1}{H_{d\min}(z)}$$