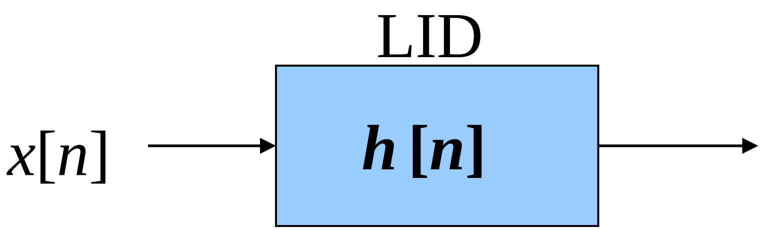
Equações de Diferença com Coeficientes Constantes

Suzete E. N. Correia

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba

suzete.correia@gmail.com

Sistemas Lineares e Invariantes ao Deslocamento (LID)



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]$$

Embora a convolução discreta possa calcular a saída do sistema para qualquer entrada, do ponto de vista computacional não é uma representação eficiente.

Solução: Representar a saída como soma de saídas e/ou entradas passadas e presentes.

Exemplo:

Para um sistema LID com h[n] = α^nu[n]:

$$\boxed{y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\,x[n-k]=x[n]+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k\,x[n-k]}$$

Sabendo que: $y[n-1]=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k\,x[n-1-k]$

Fazendo: $l=k+1,$

$$y[n-1]=\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^{l-1}\,x[n-l]=\alpha^{-1}\sum_{l=1}^{\infty}\alpha^l\,x[n-l]$$

Logo: $y[n]=x[n]+\alpha\,y[n-1]$

Equação de Diferença com Coeficientes Contantes

Equações de Diferenças com Coeficientes Constantes (EDCC)

Os sistemas discretos LID podem ser representados como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]$$

As Equações de Diferença com Coeficientes Constantes são também conhecidas como

Filtros Digitais.

Equações de Diferenças com Coeficientes Constantes (EDCC)

EDCC: $$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$a_0\, y[n] + \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Logo: $$\boxed{y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right]}$$

a_k e b_k são os coeficientes constantes que definem o sistema

O maior valor entre N e M define a ordem do filtro.

Equações de Diferenças com Coeficientes Constantes (EDCC)

Se N = 0, a equação é não – recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]\right]$$

Filtro FIR
Finite Impulse Response

Se N > 0, a equação é recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k \, y[n-k]\right]$$

Filtro IIR
Infinite Impulse Response

Exemplos de Filtro FIR:

- Filtro de Ganho Unitário: $y[n] = x[n]$
- Filtro de Ganho Simples: $y[n] = Kx[n]$, K é uma constante
- Filtro de Atraso Puro: $y[n] = x[n-1]$
- Filtro da Diferença entre dois termos: $y[n] = x[n] - x[n-1]$
- Filtro da Média entre dois termos: $y[n] = (x[n] + x[n-1]) / 2$
- Filtro da Média entre três termos:

  $$y[n] = (x[n] + x[n-1] + x[n-2]) / 3$$

- Filtro da Diferença Central: $y[n] = (x[n] - x[n-2]) / 2$
- Filtro da Média Móvel: $y[n] = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x[n-k]$

Exemplo de Filtro IIR:

- Acumulador: $y[n] = x[n] + y[n - 1]$

$y[0] = x[0] + y[- 1]$

$y[1] = x[1] + y[0] = x[1] + x[0] + y[- 1]$

$y[2] = x[2] + y[1] = x[2] + x[1] + x[0] + y[- 1]$

.

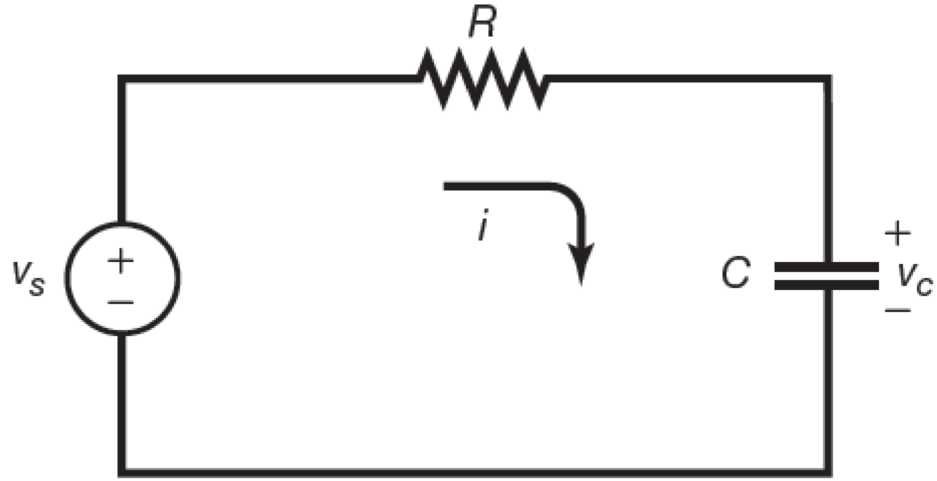
.

.

$y[n] = x[n] + y[n - 1] = x[n] + x[n-1] + \ldots + x[1] + x[0] + y[- 1]$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}$$

Filtro analógico - equações diferenciais em tempo contínuo



Corrente no resistor

$$i(t) = \frac{V_S(t) - V_c(t)}{R}$$

Corrente no capacitor

$$i(t) = c\frac{dV_c(t)}{dt}$$

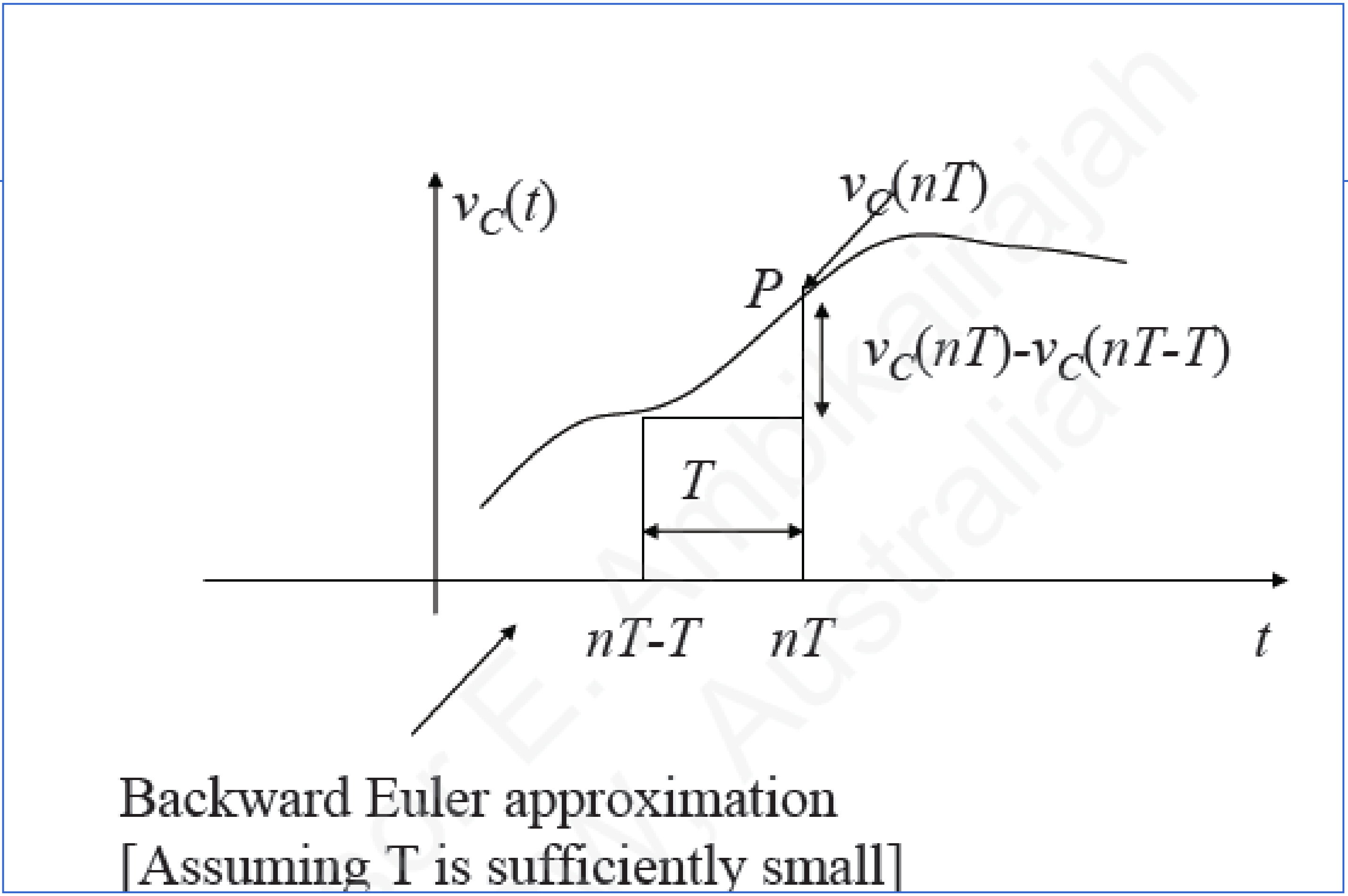
$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_s(t)$$

Equação Diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dV_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}V_c(t) = \frac{1}{RC}V_s(t) \qquad (1)$$

Um sistema de tempo discreto pode ser obtido pela amostragem de um sistema de tempo contínuo para um período de amostragem T suficientemente pequeno

$$\frac{dV_c(t)}{dt}\bigg|_{t=nT} = \frac{V_c(nT) - V_c(nT-T)}{T} \qquad (2)$$



Aproximação de um sistema de tempo discreto a partir de um sistema de tempo discreto

Substituindo a equação (2) em (1) e *t* por *nT*, obtem-se:

$$\frac{V_c(nT)-V_c(nT-T)}{T}+\frac{1}{RC}V_c(nT)=\frac{1}{RC}V_S(nT)$$

A equação de diferenças do é dada por:

$$\frac{V_c[n]-V_c[n-1]}{T}+\frac{1}{RC}V_c[n]=\frac{1}{RC}V_S[n]$$

equação de diferenças de primeira ordem

$$\underbrace{V_c[n]}_{\text{Saída}}=\frac{RC}{RC+T}\underbrace{V_c[n-1]}_{\text{Saída anterior}}+\frac{T}{RC+T}\underbrace{V_S[n]}_{\text{Entrada atual}}$$

Solução das EDCC Não - Recursivas

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]\right]$$

N = 0

Para um sistema LID descrito por uma EDCC, a resposta ao impulso h[n] pode ser encontrada fazendo-se x[n] = δ[n]

Logo:

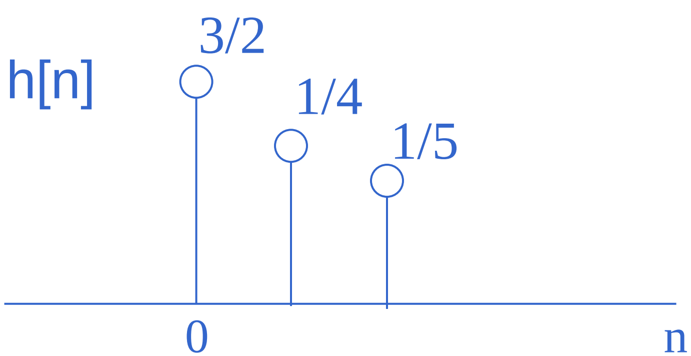
$$h[n] = \left[\sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0}\,\delta[n-k]\right]$$

h[n] corresponde à seqüência de coeficientes da equação de diferença

Solução das EDCC Não - Recursivas

Exemplo:

$$y[n] = \frac{3}{2}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{5}x[n-2]$$



Sistema FIR é absolutamente somável -> Estável

Solução das EDCC Recursivas

$$y[n]=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right] \qquad N > 0$$

Saída pode ser determinada recursivamente, a partir de uma condição inicial.

Se o sistema estiver em repouso, a condição inicial é y[-1] = 0 -> Sistema Causal

Solução das EDCC Recursivas

Exemplo: Sistema causal

$$y[n] - by[n-1] = x[n]$$

Condição inicial: $y[-1] = 0$

$$y[n] = x[n] + by[n-1]$$

$$y[0] = x[0] + by[-1] = x[0]$$

$$y[1] = x[1] + by[0] = x[1] + bx[0]$$

$$y[2] = x[2] + by[1] = x[2] + bx[1] + b^2 x[0]^3$$

$$y[3] = x[3] + by[2] = x[3] + bx[2] + b^2 x[1] + b^3 x[0]$$

Solução das EDCC Recursivas

$$y[0] = x[0] + by[-1] = x[0]$$

$$y[1] = x[1] + by[0] = x[1] + bx[0]$$

$$y[2] = x[2] + by[1] = x[2] + bx[1] + b^2 x[0]^3$$

$$y[3] = x[3] + by[2] = x[3] + bx[2] + b^2 x[1] + b^3 x[0]$$

$$\boxed{y[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} b^k x[n-k] \right), \quad n \geq 0}$$

Solução das EDCC Recursivas

Para obter h[n], faz-se x[n] = δ[n]:

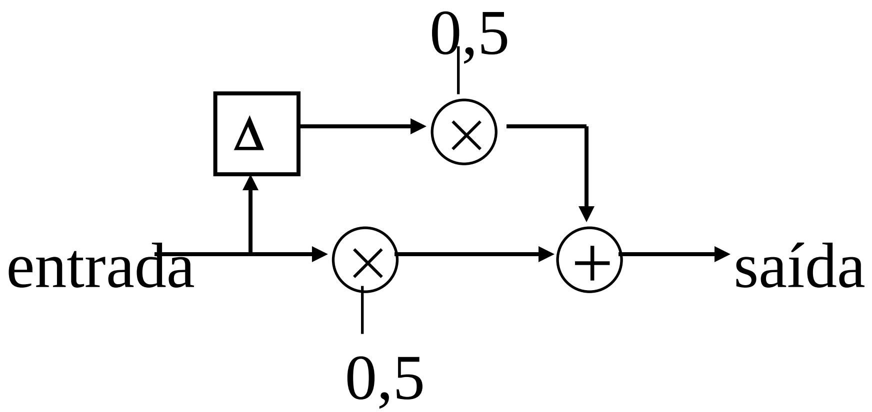
$$h[n] = \left(\sum_{k=0}^{n} b^k \delta[n-k] \right), \quad n \geq 0$$

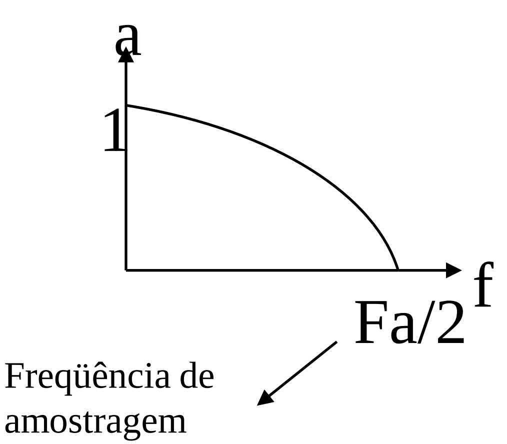
$$h[n] = b^n u[n]$$

Se condição inicial nula -> linear, causal e invariante ao deslocamento

Passa-Baixas FIR

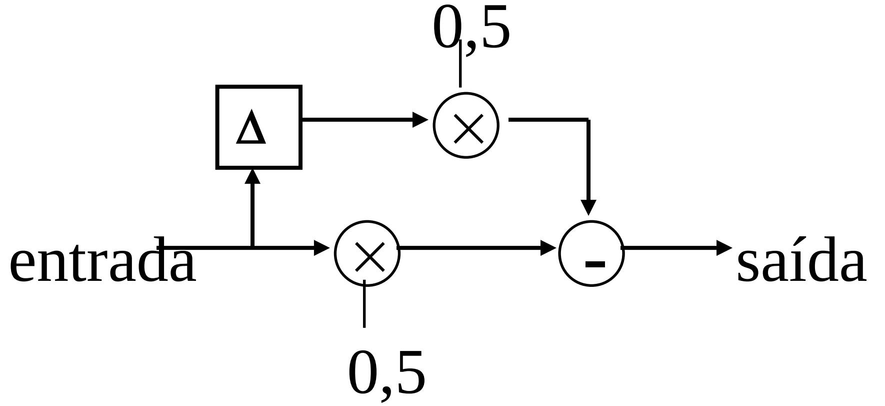
- Equação
  - $y[n] = (0{,}5 \times x[n]) + (0{,}5 \times x[n-1])$
- Comentário
  - equivalente a encontrar a média aritmética de pares de amostras subseqüentes
  - efeito: “amaciar” a forma de onda (passa-baixas)
- Circuito/algoritmo

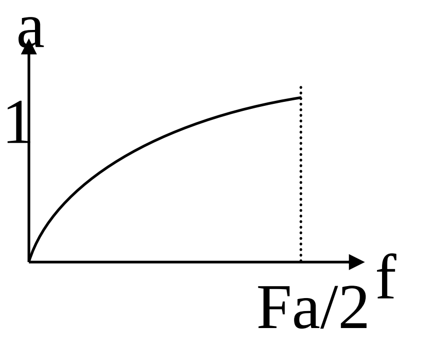




Passa-Altas FIR

- Equação
  - $y[n] = (0,5 \times x[n]) - (0,5 \times x[n-1])$
- Comentário
  - equivalente a enfatizar as diferenças entre pares de amostras subseqüentes
  - efeito: enfatizar altas freqüências (passa-altas)
- Circuito/algoritmo

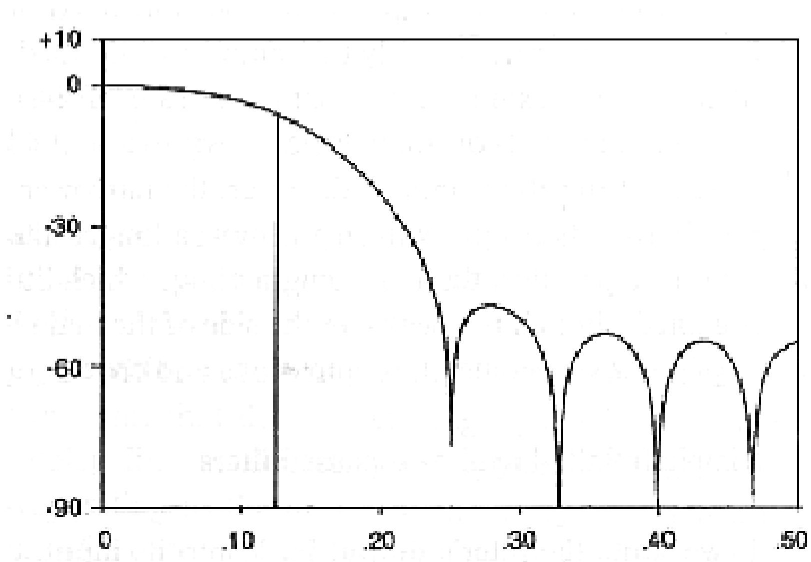




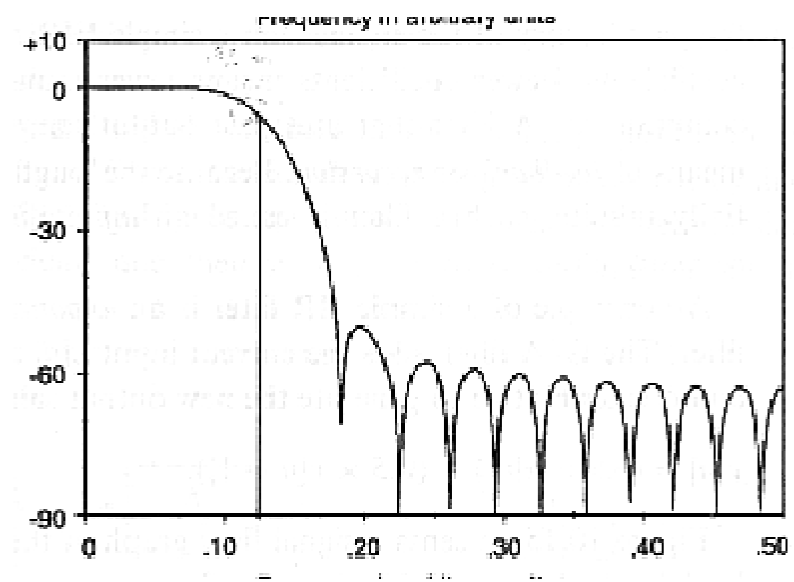
Filtro FIR geral

- A resposta do filtro dependerá de
  - quantidade de estágios do filtro (valor de j)
  - operações de adição ou subtração
  - coeficientes $a_1, \ldots, a_j$
- Observações
  - quanto mais longo (mais estágios) for o filtro, mais estreita pode ser sua banda de transição (inclinação)
  - mas isto vai requerer mais computação
  - depois de certos estágios o ganho em precisão de corte do filtro é mínimo, não valendo a pena o custo benefício

Aumento de estágios nos filtros FIR



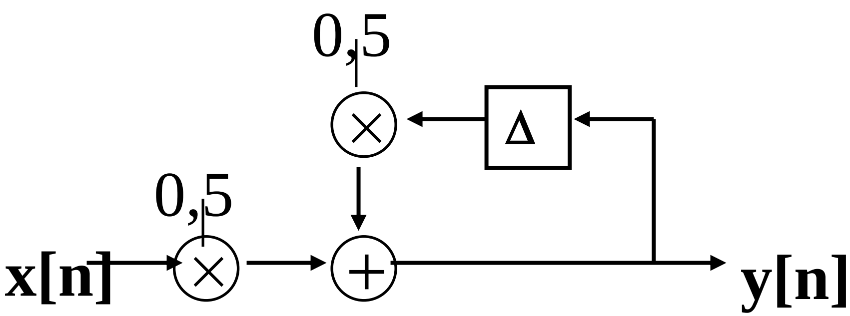
Passa baixas FIR de 15 estagios

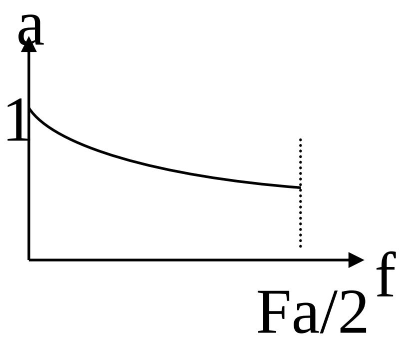


Passa baixas FIR de 31 estagios

Filtro IIR simples

- **Equação: Filtro ETA (exponential time average)**
  - $y[n] = (0,5 \times x[n]) + (0,5 \times y[n-1])$
- **Comentário**
  - equivale a recursivamente adicionar vários estágios de um filtro FIR
  - soma com a saída anterior e divide por dois. Com coeficientes iguais a 0,5 => passa-baixas
- **Circuito/algoritmo**





Matlab

```
>> y=filter(b,a,x);
```

- *b* = [*b0*,*b1*,...,*bM*] e *a* = [*a0*,*a1*,...,*aN*] são os vetores que representam os coeficientes da equação de diferenças.

- x é o vetor que representa o sinal de entrada e y o vetor que representa a saída do sistema para condições iniciais nulas.

- Condições iniciais diferentes de zero usa-se o comando y=filter(b,a,x,zi), em que zi representa as condições iniciais exigidas por filter.

Exemplo

$$y[n] - y[n-1] + 0.9y[n-2] = x[n]$$

Trace a resposta ao impulso para n = -20,...,100

```
>> b=[1]; a=[1,-1,0.9];
>> x=impseq(0,-20,120); n=[-20:120];
>> h=filter(b,a,x);
>> stem(n,h);
>> title('Resposta ao Impulso'); xlabel('n'); ylabel('h[n]');
```

Sistema estável: `>> sum(abs(h))`

Exercícios

1. Trace a resposta ao impulso para:

$$y[n] - 0.5y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-3]$$

2. O sistema definido por $y[n] = x[n] - x[n-1]$ é um diferenciador digital. Determine a saída $y[n]$ se a entrada for $x[n] = 5(u[n] - u[n-20])$. Considere as condições iniciais nulas.