Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

Trabajo Práctico 2

Analisis de Senales y Sistemas

2R1

Ernst Pedro 400624, Leiva Matias 92170

Fecha de entrega: 17 / 08 / 2025

Índice

Ejercicio 1

Ejercicio 1. Dada la secuencia de senales $\varphi_n(t) = e^{j(n\omega)t} : n \in \mathbb{Z}$, con $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Demostrar:

A) El periodo fundamental de la senal $\varphi_n(t)$ es $T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega}$. ¿Por qué se puede afirmar que la suma entre estas señales está bien definida $\varphi_n(t)$?

i. Lo primero que realizaremos seria corroborar que T_n es un periodo.

$$\varphi_n(t + T_n) = \varphi_n(t)$$

$$e^{jn\omega(t+T_n)} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t+\dfrac{2\pi}{n\omega})} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)+jn\omega\dfrac{2\pi}{n\omega}} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)+j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot e^{j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot 1 = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} = e^{jn\omega(t)}$$

ii. Para ver que T_n es el periodo fundamental, suponemos que exisite un $T' > 0$ con $T' < T_n$, tal que.

$$\varphi_n(t + T') = \varphi_n(t)$$

Entonces $e^{jn\omega T'} = 1$, por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n\omega T' = 2\pi k$$

Despejando $n\omega$

$$T' = \frac{2\pi k}{n\omega}$$

Donde si $k = 0$ entonces $T' = 0$, lo cual contradic lo que postulamos al principio que $T' > 0$

Si $|k| \geq 1$, entonces

$$T' \geq \frac{2\pi}{|n|\omega} = T_{|n|}$$

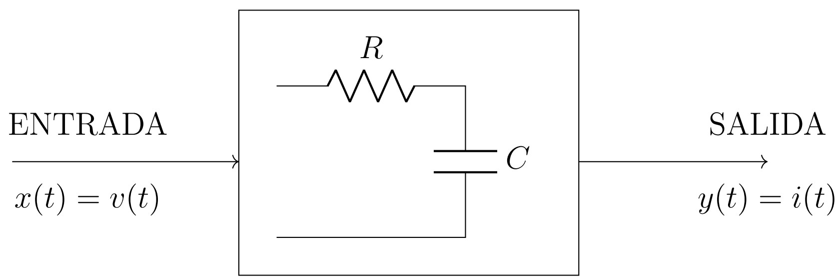
Lo cual contradice que $T' < T_n$. Por lo tanto no existe $T' \in (0, T_n)$ que sea periodo.
iii) Para decir que la suma entre senales esta bien definida por $\varphi_n(t)$

Ejercicio 2

Actividad 1

A

A) Expresar la Ecuación Diferencial (ED) que describe el circuito, y con ello, definir un Sistema en tiempo continuo con entrada x(t) = v(t) y salida y(t) = i(t) , con condiciones Iniciales genérica (CI).



Para plantear la EDO es necesario plantear ley de kirchoff

$$v(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

Ahora derivamos para conseguir la expresion buscada

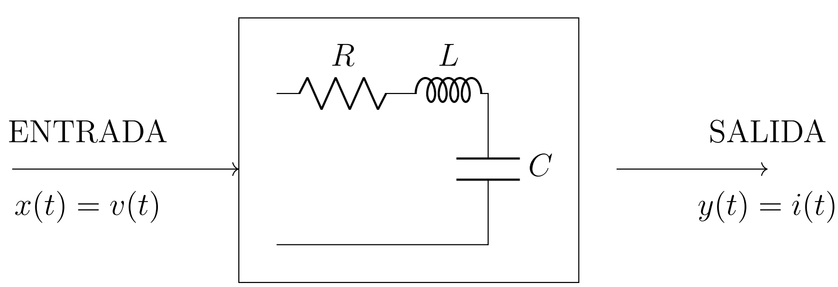
$$\frac{dv(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

Dividimos todo por R para normalizar la ecuacion

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y'(t) + \frac{1}{RC} \cdot y(t) = \frac{1}{R} \cdot x'(t)$$

Para el circuito de segundo orden:



Siguiendo con el mismo procedimiento

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y''(t) + \frac{R}{L} \cdot y'(t) + \frac{1}{LC} \cdot y(t) = \frac{1}{L} \cdot x'$$

B

B)Usar la transformada de Laplace para sintetizar el sistema en la expresión
Primero sintetizamos la ecuacion correspondiente al circuito de primer orden

$$\mathscr{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathscr{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0)$$

Quedando la ecuacion

$$sY(s) - y(0) + \frac{1}{RC} \cdot Y(s) = \frac{1}{R} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s + \frac{1}{rc}) = \frac{1}{R} \cdot sX(s) - \frac{1}{R}x(0) + y(0)$$

$$Y(s) = X(s)\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})}[y(0) - x(0)\frac{1}{R}]$$

Ya nos queda sintetizado a la expresion

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) + F(s, CI)$$

Ahora para el circuito de segundo orden, primero debemos definir la transformada para la segunda derivada

$$\mathscr{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Quedando la ecuacion sintetizada

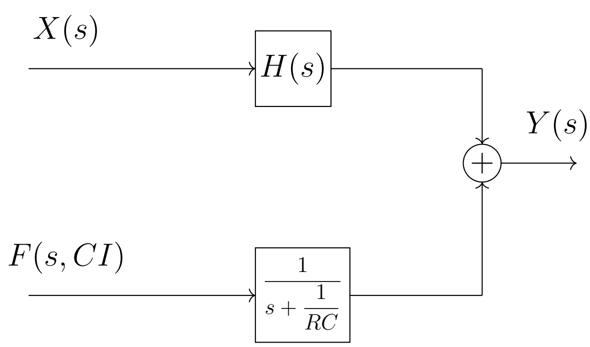
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{R}{L}(sY(s) - y(0)) + \frac{1}{LC} \cdot Y(s) = \frac{1}{L} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}) = X(s)\frac{s}{L} - x(0)\frac{1}{L} + sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0)$$

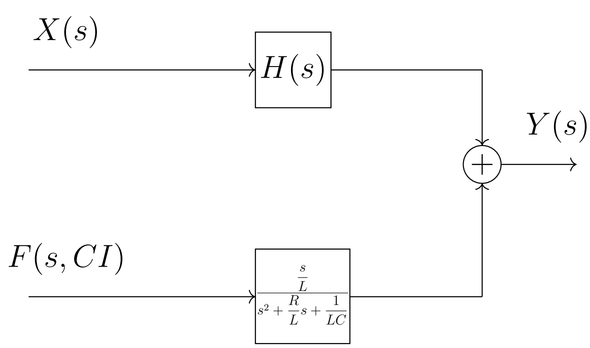
$$Y(s) = X(s)\frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}[sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0) - x(0)\frac{1}{L}]$$

C

C) Escribir un diagrama de Bloques en la variable compleja S que determine al Sistema.
El diagrama de bloques que describe a la ecuacion de primer orden es:



Por otro lado el que describe a la ecuacion de segundo orden



D

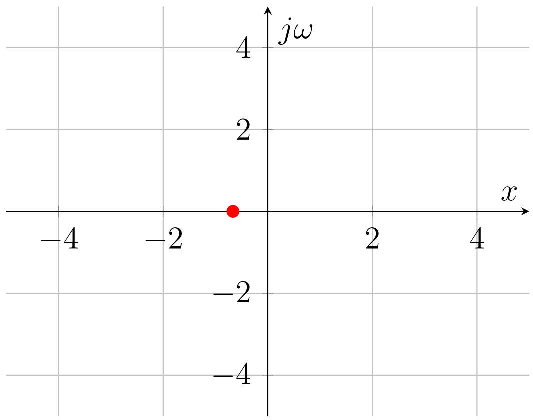
D) Graficar en el plano S polos y ceros de $H(s)$.
Para el caso de primer orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Donde el unico polo se encuentra en $s = -\dfrac{1}{RC}$ y el cero en $s = 0$.

$R = 3$, $C = \dfrac{1}{2}$, $L = 1$.

El polo con estos datos seria $s = -\dfrac{2}{3}$

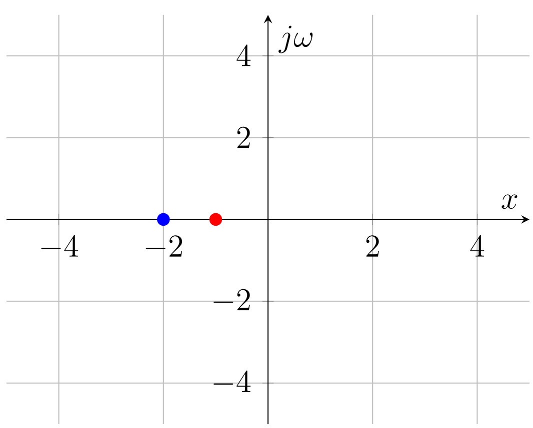


Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Y los polos se encontrarian en $s_n = \dfrac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R}{L}^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$

Donde reemplazando con los valores previamente dados, los polos quedarian en $(-1, 0)$ y $(-2, 0)$.



E

E) Obtener la respuesta al impulso, $h(t)$, suponiendo que las CI $= 0$.

Continuaremos resolviendo primero la ecuacion de primer orden

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathscr{L}^{-1}[H(s) \cdot 1] = \mathscr{L}[H(s)]$$

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s+a-a}{s+a}$$

$$H(s) = \frac{1}{R}(\frac{s+a}{s+a} - \frac{a}{s+a})$$

$$H(s) = \frac{1}{R}(1 - \frac{a}{s+a})$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{R}(1-\frac{a}{s+a})] = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}[1-\frac{a}{s+a}] = \frac{1}{R}(\mathscr{L}^{-1}[1] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{a}{s+a}])$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1] = \delta(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{a}{s+a}] = ae^{-at}u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{R}(\delta(t) - ae^{at}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{R}(\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}u(t))$$

$$h(t) = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9}e^{\frac{2}{3}}u(t)$$

Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{R}{L} = a; \frac{1}{LC} = b$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{s}{s^2 + as + b}$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{L}\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}]$$

$$h(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}[\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}]$$

$$h(t) = \frac{1}{L}(-\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{2}{s+2}))$$

$$h(t) = \frac{1}{L}(-e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{L}u(t)(-e^{-t} + 2e^{-2t})$$

F

F) Obtener la respuesta al escalón unitario $v(t)$, suponiendo CI $= 0$ y verificar la identidad $\frac{d}{dt}v(t) = h(t), \forall t$

Para la ecuacion de primer orden

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(H(s) \cdot \mathscr{L}(u(t)))$$

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s})$$

$$v(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}})$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$v(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+a})$$

$$v(t) = \frac{1}{R}e^{-at}u(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

En el caso de la ecuacion de segundo orden

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{L}}{s(s+1)(s+2)})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)(s+2)})$$

Por fracciones simples

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s+1}\frac{B}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) - \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$L = 1$$

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Ahora para ambos casos vamos a verificar que $\frac{dv(t)}{dt} = h(t)$

En ambos casos vamos a usar que $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f(0)\delta(t) + f'(t)u(t)$, siendo para el la ecuacion de primer orden

$$v(0) = \frac{1}{3}$$

$$v'(t) = \frac{-2}{9}e^{-\frac{2}{3}}$$

Quedando

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}}u(t)$$

Por lo cual se verifica para la primera ecuacion, por otro lado para la segunda ecuacion

$$v(0) = e^{-0} - e^{0} = 1 - 1 = 0$$

$$v'(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Lo cual aplicando lo explicado anteriormente

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0\delta(t) + e^{-t} + 2e^{-2t}u(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = e^{-t} + 2e^{-2t}u(t) = h(t)$$

G

G) Obtener la respuesta a la rampa.
Primero transformamos la integral del escalon

$$\mathscr{L}(\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau)$$

$$\mathscr{L}(\int_{-\infty}^{0} 0d\tau + \int_{0} t1d\tau)$$

$$\mathscr{L}(t)$$

$$\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

Entonces para calcular la respuesta a la rampa con la ecuacion de primer orden

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(H(s)\frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{R}}{s+\frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+\frac{1}{RC})})$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{2}{3} = a$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+a})$$

$$A = \frac{1}{a}; B = -\frac{1}{a}$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}(\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s} - \mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s+a})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}(u(t) - e^{-at}u(t))$$

$$y(t) = \frac{1}{aR}u(t)(1 - e^{-at})$$

$$y(t) = Cu(t)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t)(1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Para el caso de la ecuacion de segundo orden, recordamos que

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+1)(s+2)})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}[\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s}) - \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+2})]$$

$$y(t) = \frac{1}{L}[\frac{1}{2}u(t) - e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)]$$

$$y(t) = \frac{1}{L}u(t)[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}]$$

$L = 1$

$$y(t) = u(t)[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}]$$

Vamos a completar este ejercicio realizando al verificacion de los calculos mediante la siguiente igualdad $y(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$.

Manteniendo el orden de realizacion de ejercicios, comenzamos con la ecuacion de primer orden

$$v(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

$$\int_{-infty}^{t} v(t) = \frac{1}{3}\int_{0}^{t} e^{-\frac{2}{3}\tau}d\tau = y(t)$$

$a = \frac{-2}{3}$

$$y(t) = \frac{1}{3}[\frac{1}{a}e^{at}\Big|_{0}^{t}]$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Verificando correctamente para la primera ecuacion, ahora correspondemos con la de segundo orden

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = y(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) =$$