

Universidad Tecnológica Nacional  
Facultad Regional Córdoba

## **Trabajo Práctico 2**

Analisis de Senales y Sistemas  
2R1

Ernst Pedro 400624, Leiva Matias 92170

Fecha de entrega: 17 / 08 / 2025



# Índice

<b>1</b>	<b>Ejercicio 1</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ejercicio 2</b>	<b>5</b>
2.1	Actividad 1 . . . . .	5
2.1.1	A . . . . .	5
2.1.2	B . . . . .	6
2.1.3	C . . . . .	7
2.1.4	D . . . . .	7
2.1.5	E . . . . .	8
2.1.6	F . . . . .	10
2.1.7	G . . . . .	12



## Ejercicio 1

**Ejercicio 1.** Dada la secuencia de senales  $\varphi_n(t) = e^{j(n\omega)t} : n \in \mathbb{Z}$ , con  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Demostrar:

**A)** El periodo fundamental de la senal  $\varphi_n(t)$  es  $T_n = \frac{2\pi}{n\omega}$ . ¿Por qué se puede afirmar que la suma entre estas señales está bien definida  $\varphi_n(t)$ ?

**i.** Lo primero que realizaremos seria corroborar que  $T_n$  es un periodo.

$$\varphi_n(t + T_n) = \varphi_n(t)$$

$$e^{jn\omega(t+T_n)} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t + \frac{2\pi}{n\omega})} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t) + jn\omega \frac{2\pi}{n\omega}} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t) + j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot e^{j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot 1 = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} = e^{jn\omega(t)}$$

**ii.** Para ver que  $T_n$  es el periodo fundamental, suponemos que existe un  $T' > 0$  con  $T' < T_n$ , tal que.

$$\varphi_n(t + T') = \varphi_n(t)$$

Entonces  $e^{jn\omega T'} = 1$ , por lo que existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$n\omega T' = 2\pi k$$

Despejando  $n\omega$

$$T' = \frac{2\pi k}{n\omega}$$

Donde si  $k = 0$  entonces  $T' = 0$ , lo cual contradic lo que postulamos al principio que  $T' > 0$

Si  $|k| \geq 1$ , entonces

$$T' \geq \frac{2\pi}{|n|\omega} = T_{|n|}$$

Lo cual contradice que  $T' < T_n$ . Por lo tanto no existe  $T' \in (0, T_n)$  que sea periodo.

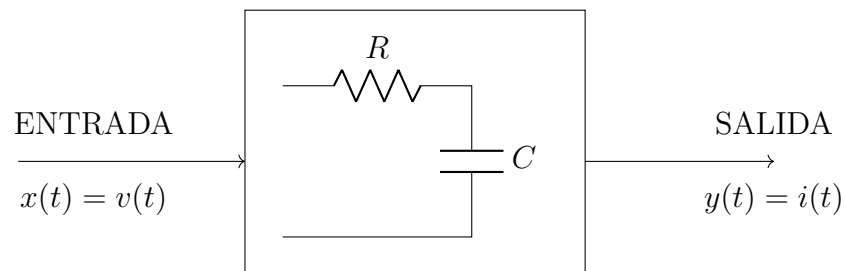
**iii)** Para decir que la suma entre senales esta bien definida por  $\varphi_n(t)$

## Ejercicio 2

### Actividad 1

#### A

A) Expresar la Ecuación Diferencial (ED) que describe el circuito, y con ello, definir un Sistema en tiempo continuo con entrada  $x(t) = v(t)$  y salida  $y(t) = i(t)$ , con condiciones Iniciales genérica (CI).



Para plantear la EDO es necesario plantear ley de kirchoff

$$v(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

Ahora derivamos para conseguir la expresion buscada

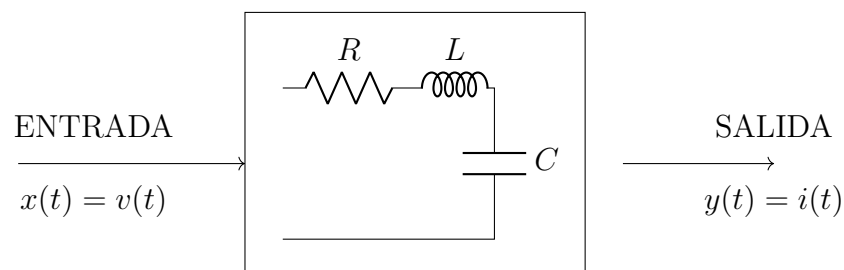
$$\frac{dv(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

Dividimos todo por  $R$  para normalizar la ecuacion

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y'(t) + \frac{1}{RC} \cdot y(t) = \frac{1}{R} \cdot x'(t)$$

Para el circuito de segundo orden:



Siguiendo con el mismo procedimiento

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y''(t) + \frac{R}{L} \cdot y'(t) + \frac{1}{LC} \cdot y(t) = \frac{1}{L} \cdot x'$$

## B

**B)** Usar la transformada de Laplace para sintetizar el sistema en la expresión  
Primero sintetizamos la ecuacion correspondiente al circuito de primer orden

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0)$$

Quedando la ecuacion

$$sY(s) - y(0) + \frac{1}{RC} \cdot Y(s) = \frac{1}{R} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s + \frac{1}{RC}) = \frac{1}{R} \cdot sX(s) - \frac{1}{R}x(0) + y(0)$$

$$Y(s) = X(s) \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})} [y(0) - x(0) \frac{1}{R}]$$

Ya nos queda sintetizado a la expresion

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) + F(s, CI)$$

Ahora para el circuito de segundo orden, primero debemos definir la transformada para la segunda derivada

$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Quedando la ecuacion sintetizada



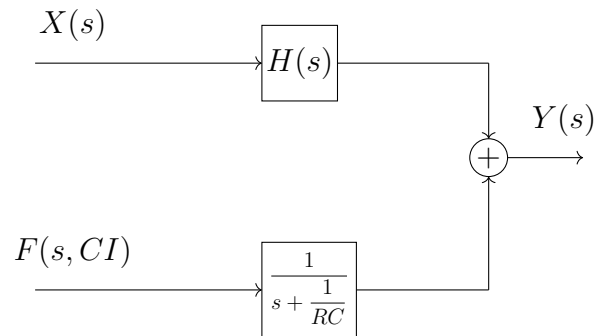
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{R}{L}(sY(s) - y(0)) + \frac{1}{LC} \cdot Y(s) = \frac{1}{L} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}) = X(s)\frac{s}{L} - x(0)\frac{1}{L} + sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0)$$

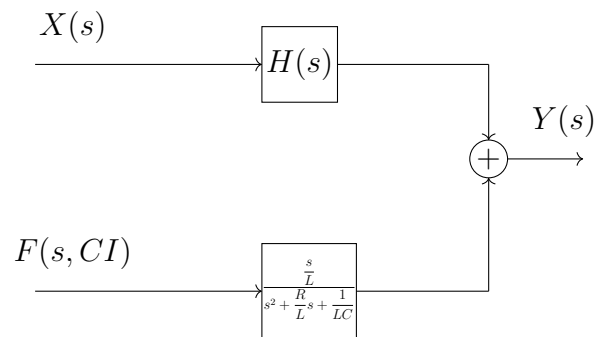
$$Y(s) = X(s) \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} [sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0) - x(0)\frac{1}{L}]$$

**C**

C) Escribir un diagrama de Bloques en la variable compleja S que determine al Sistema. El diagrama de bloques que describe a la ecuacion de primer orden es:



Por otro lado el que describe a la ecuacion de segundo orden



**D**

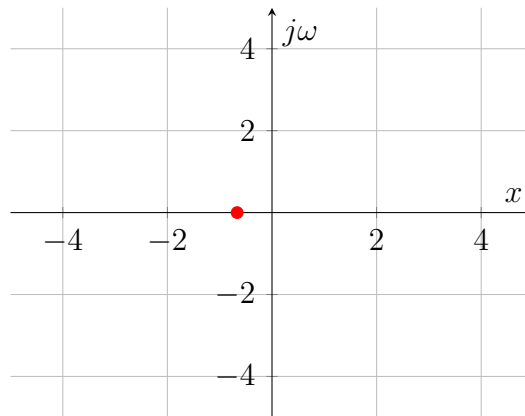
D) Graficar en el plano S polos y ceros de  $H(s)$ .  
Para el caso de primer orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Donde el unico polo se encuentra en  $s = -\frac{1}{RC}$  y el cero en  $s = 0$ .

$$R = 3, C = \frac{1}{2}, L = 1.$$

El polo con estos datos seria  $s = -\frac{2}{3}$

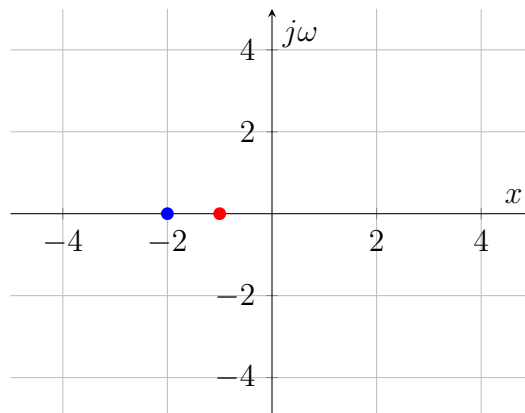


Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\text{Y los polos se encontrarian en } s_n = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{L} - \frac{4}{LC}}}{2}$$

Donde reemplazando con los valores previamente dados, los polos quedarian en  $(-1, 0)$  y  $(-2, 0)$ .



**E**

**E)** Obtener la respuesta al impulso,  $h(t)$ , suponiendo que las CI = 0.

Continuaremos resolviendo primero la ecuacion de primer orden

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

$$H(s) = \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$H(s) = \frac{1}{R} \frac{s + a - a}{s + a}$$

$$H(s) = \frac{1}{R} \left( \frac{s + a}{s + a} - \frac{a}{s + a} \right)$$

$$H(s) = \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{a}{s + a} \right)$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{a}{s + a} \right) \right] = \frac{1}{R} \mathcal{L}^{-1} \left[ 1 - \frac{a}{s + a} \right] = \frac{1}{R} (\mathcal{L}^{-1}[1] - \mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{s + a}])$$

$$\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\frac{a}{s + a}] = ae^{-at}u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{R} (\delta(t) - ae^{at}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{R} (\delta(t) - \frac{1}{RC} e^{\frac{1}{RC}t} u(t))$$

$$h(t) = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9} e^{\frac{2}{3}t} u(t)$$

Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{R}{L} = a; \frac{1}{LC} = b$$

$$H(s) = \frac{1}{L} \frac{s}{s^2 + as + b}$$

$$H(s) = \frac{1}{L} \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{L} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{L} \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right]$$

$$h(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}\right]$$

$$h(t) = \frac{1}{L} \left( -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s+2}\right) \right)$$

$$h(t) = \frac{1}{L} (-e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{L} u(t) (-e^{-t} + 2e^{-2t})$$

## F

**F)** Obtener la respuesta al escalón unitario  $v(t)$ , suponiendo  $CI = 0$  y verificar la identidad  $\frac{d}{dt}v(t) = h(t), \forall t$

Para la ecuacion de primer orden

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s) \cdot \mathcal{L}(u(t)))$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{R} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$v(t) = \frac{1}{R} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + a}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{R} e^{-at} u(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

En el caso de la ecuacion de segundo orden

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{s}{L}}{s(s+1)(s+2)}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)$$

Por fracciones simples

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s+1}\frac{B}{s+2}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$v(t) = \frac{1}{L}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$L = 1$$

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Ahora para ambos casos vamos a verificar que  $\frac{dv(t)}{dt} = h(t)$

En ambos casos vamos a usar que  $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f(0)\delta(t) + f'(t)u(t)$ , siendo para el la ecuacion de primer orden

$$v(0) = \frac{1}{3}$$

$$v'(t) = \frac{-2}{9}e^{-\frac{2}{3}t}$$

Quedando

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

Por lo cual se verifica para la primera ecuacion, por otro lado para la segunda ecuacion

$$v(0) = e^{-0} - e^0 = 1 - 1 = 0$$

$$v'(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Lo cual aplicando lo explicado anteriormente

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0\delta(t) + e^{-t} + 2e^{-2t}u(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = e^{-t} + 2e^{-2t}u(t) = h(t)$$

## G

G) Obtener la respuesta a la rampa.

Primero transformamos la integral del escalon

$$\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^t u(\tau)d\tau\right)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_{-\infty}^0 0d\tau + \int_0^t 1d\tau\right)$$

$$\mathcal{L}(t)$$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

Entonces para calcular la respuesta a la rampa con la ecuacion de primer orden

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(H(s)\frac{1}{s^2}\right)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s^2}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})}\right)$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{2}{3} = a$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B}{s + a}\right)$$

$$A = \frac{1}{a}; B = -\frac{1}{a}$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + a}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{R} \frac{1}{a} (\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s} - \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{s+a})$$

$$y(t) = \frac{1}{R} \frac{1}{a} (u(t) - e^{-at} u(t))$$

$$y(t) = \frac{1}{aR} u(t) (1 - e^{-at})$$

$$y(t) = Cu(t) (1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$y(t) = \frac{1}{2} u(t) (1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Para el caso de la ecuacion de segundo orden, recordamos que

$$H(s) = \frac{\frac{s}{\bar{L}}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\frac{s}{\bar{L}}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{1}{s^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s} \right) - \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s+1} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left( \frac{1}{s+2} \right) \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{L} \left[ \frac{1}{2} u(t) - e^{-t} u(t) + \frac{1}{2} e^{-2t} u(t) \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{L} u(t) \left[ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} \right]$$

$$L = 1$$

$$y(t) = u(t) \left[ \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2} \right]$$

Vamos a completar este ejercicio realizando la verificación de los cálculos mediante la siguiente igualdad  $y(t) = \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$ .

Manteniendo el orden de realización de ejercicios, comenzamos con la ecuación de primer orden

$$v(t) = \frac{1}{3} e^{-\frac{2}{3}t} u(t)$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = \frac{1}{3} \int_0^t e^{-\frac{2}{3}\tau} d\tau = y(t)$$

$$a = \frac{-2}{3}$$

$$y(t) = \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{a} e^{at} \right]_0^t$$

$$y(t) = \frac{1}{3} \frac{1}{a} (e^{at} - 1)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Verificando correctamente para la primera ecuación, ahora correspondemos con la de segundo orden

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = y(t)$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = \int_0^t (e^{-\tau} - e^{-2\tau}) d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = \int_0^t e^{-\tau} d\tau - \int_0^t e^{-2\tau} d\tau$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = -e^{-\tau} \Big|_0^t - \left( -\frac{1}{2} e^{-2\tau} \Big|_0^t \right)$$



$$\int_{-\infty}^t v(t) = -(e^{-t} - 1) - \left(-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = 1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^t v(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Su forma causal

$$\int_{-\infty}^t v(t) = u(t)\left[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]$$