Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

Trabajo Práctico 2

Analisis de Señales y Sistemas

2R1

Ernst Pedro 400624
Leiva Matias 92170
Tissera Mauro 401187
Ignacio Perea

Fecha de entrega: 17 / 08 / 2025

Índice

Ejercicio 1

Actividad 1

Actividad 1. Dada la secuencia de senales $\phi_n(t) = e^{j(n\omega)t} : n \in \mathbb{Z}$, con $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Demostrar:

A

A) El periodo fundamental de la senal $\phi_n(t)$ es $T_n = \dfrac{2\pi}{n\omega}$. ¿Por qué se puede afirmar que la suma entre estas señales está bien definida $\phi_n(t)$?

i. Lo primero que realizaremos seria corroborar que T_n es un periodo.

$$\phi_n(t + T_n) = \phi_n(t)$$

$$e^{jn\omega(t+T_n)} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t+\dfrac{2\pi}{n\omega})} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)+jn\omega\dfrac{2\pi}{n\omega}} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)+j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot e^{j2\pi} = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} \cdot 1 = e^{jn\omega(t)}$$

$$e^{jn\omega(t)} = e^{jn\omega(t)}$$

ii. Para ver que T_n es el periodo fundamental, suponemos que exisite un $T' > 0$ con $T' < T_n$, tal que.

$$\phi_n(t + T') = \phi_n(t)$$

Entonces $e^{jn\omega T'} = 1$, por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$n\omega T' = 2\pi k$$

Despejando $n\omega$

$$T' = \frac{2\pi k}{n\omega}$$

Donde si $k = 0$ entonces $T' = 0$, lo cual contradic lo que postulamos al principio que $T' > 0$

Si $|k| \geq 1$, entonces

$$T' \geq \frac{2\pi}{|n|\omega} = T_{|n|}$$

Lo cual contradice que $T' < T_n$. Por lo tanto no existe $T' \in (0, T_n)$ que sea periodo.

iii.

Ahora bien podemos concluir que la suma $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \phi_n(t)$ está bien definida porque todas las señales $\phi_n(t)$ son periódicas con un periodo común $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (múltiplo entero de T_n). Esto garantiza que la superposición de señales mantenga la periodicidad global.

B

B) Calcular $E_n = (\phi_n(t), \phi_n(t))_T \quad \text{y} \quad (\phi_n(t), \phi_m(t))_T, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$

Como primer paso definiremos

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \phi_n(t)\overline{\phi_m(t)}dt$$

Caso 1: $n = m$

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_n \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{jn\omega t} e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T 1\, dt = 1 \quad \forall n \end{aligned}$$

Caso 2: $n \neq m$

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_m \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(n-m)\omega t} dt \\ &= \left. \frac{e^{j(n-m)\omega t}}{j(n-m)\omega T} \right|_0^T = 0 \quad \text{(por periodicidad)} \end{aligned}$$

C

C) La secuencia de señales $\{\phi_n(t) = e^{j(n\omega)t} : n \in \mathbb{Z}\}$ es base de Fourier.

Propiedades requeridas:

(i) **Ortogonalidad**: $\langle \phi_n, \phi_m \rangle_T = \delta_{nm}$ (demostrado en B)

(ii) **Completitud**: Cualquier señal $x(t)$ periódica puede expresarse como:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \phi_n(t)$$

D

D) La secuencia de señales $\{\rho_n^0(t) = \cos(n\omega t) = \frac{1}{2}\phi_n(t) + \frac{1}{2}\overline{\phi_n(t)} : n \geq 0\}$ es base de Fourier.

Relación con $\phi_n(t)$:

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}\phi_n(t) + \frac{1}{2}\phi_{-n}(t)$$

Ortogonalidad:

$$\langle \rho_n^0, \rho_m^0 \rangle_T = \begin{cases} 1 & n = m = 0 \\ \frac{1}{2} & n = m \neq 0 \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

E

E) La secuencia de señales

$$\{\rho_n^1(t) = \sin(n\omega t) = \tfrac{1}{2j}\phi_n(t) - \tfrac{1}{2j}\overline{\phi_n(t)} : n > 0\}$$

es base de Fourier.

Relación con $\phi_n(t)$:

$$\sin(n\omega t) = \frac{1}{2j}\phi_n(t) - \frac{1}{2j}\phi_{-n}(t)$$

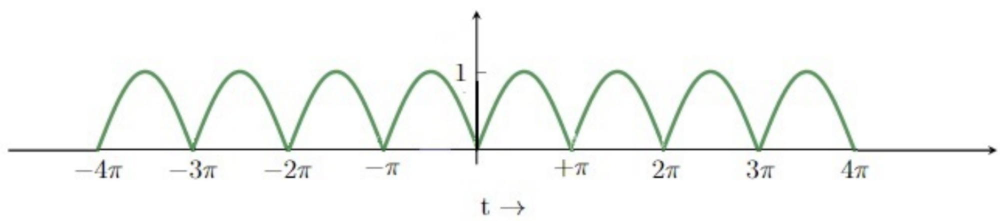
Ortogonalidad:

$$\langle \rho_n^1, \rho_m^1 \rangle_T = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

Actividad 2

Actividad 2. Calcular la descomposicion de series $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}$ y $x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\rho_n^0(t) + b_n\rho_n^1(t))$ de las siguientes señales. Para luego calcular aproximadamente la energia de la señal usando el teorema de Parseval.

Señal sinusoidal rectificada de onda completa



La señal se trata de $x(t) = |sen(t)|$.

Primero debemos tomar el periodo de la señal, el cual es igual a π, para poder calcular el coeficiente C_n el cual esta dado por la siguiente ecuacion.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-j(n\omega)t}dt$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |sen(t)|e^{-j(n\omega)t}dt$$

Siendo $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2$

Quedando $e^{-j(n\omega)t} = e^{-j2nt} = cos(2nt) - j\, sen(2nt)$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |sen(t)|[\cos(2nt) - jsen(2nt)]dt$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} sen(t)cos(2nt)dt + j\int_0^{\pi} sen(t)sen(2nt)dt\right]$$

Es de importancia saber que $\int_0^{\pi} sen(t)sen(2nt)dt = 0$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} sen(t)cos(2nt)dt + 0\right]$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{j2}\right)\cdot\left(\frac{e^{j2nt} + e^{-j2nt}}{2}\right)\right]dt$$

En este paso distribuimos

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{e^{jt(1+2n)}}{j4} + \frac{e^{jt(1-2n)}}{j4} - \frac{e^{-jt(1-2n)}}{j4} - \frac{e^{-jt(1+2n)}}{j4}\right]dt$$

Sacamos factor comun y ordenamos

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{j4}\left[e^{jt(1+2n)} - e^{-jt(1+2n)} - e^{-jt(1-2n)} + e^{jt(1-2n)}\right]dt$$

$$C_n = \frac{1}{j4\pi}\left[\left.\frac{e^{jt(1+2n)}}{j(1+2n)}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{e^{-jt(1+2n)}}{-j(1+2n)}\right|_0^{\pi} - \left.\frac{e^{-jt(1-2n)}}{-j(1-2n)}\right|_0^{\pi} + \left.\frac{e^{jt(1-2n)}}{j(1-2n)}\right|_0^{\pi}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{j4\pi}\left[\frac{e^{j\pi(1+2n)}-1}{j(1+2n)} + \frac{e^{-j\pi(1+2n)}-1}{j(1+2n)} + \frac{e^{-j\pi(1-2n)}-1}{j(1-2n)} + \frac{e^{j\pi(1-2n)}-1}{j(1-2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{j4\pi}\left[\frac{(-1)-1}{j(1+2n)} + \frac{(-1)-1}{j(1+2n)} + \frac{(-1)-1}{j(1-2n)} + \frac{(-1)-1}{j(1-2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{j4\pi}\left[\frac{-2}{j(1+2n)} + \frac{-2}{j(1+2n)} + \frac{-2}{j(1-2n)} + \frac{-2}{j(1-2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{-2}{j4\pi}\left[\frac{2}{j(1+2n)} + \frac{2}{j(1-2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2+2}{(1+2n)(1-2n)}\right]$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{4}{1-4n^2}\right]$$

$$C_n = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

Ahora con el coeficiente podemos desarrollar a la señal en su serie

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_n \cdot \phi_n(t) = \sum_{n\in mathbbZ} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cdot e^{j2nt}$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{j2nt}}{1-4n^2}$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{pi}\frac{cos(2nt)}{1-4n^2}$$

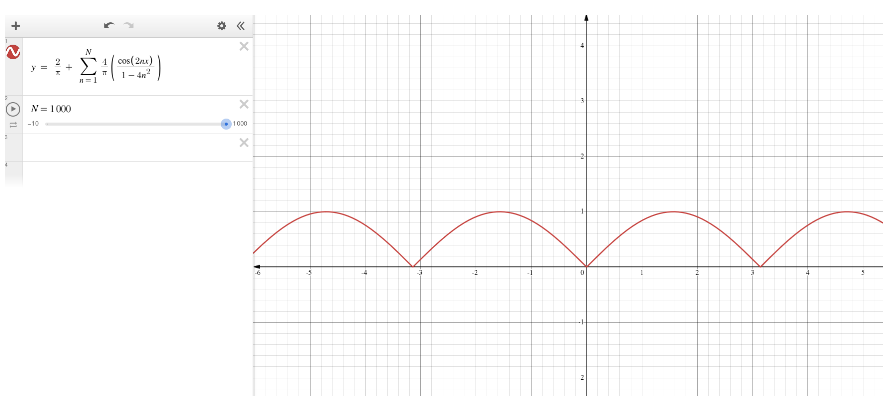


Figura 1.1: Imagen de la señal en su serie

Desarrollando los primeros terminos de la serie obtenemos los siguiente

$$x(t) = \frac{2}{pi} - \frac{4}{3pi}cos(2t) - \frac{4}{15\pi}cos(4t) - \frac{4}{35\pi}cos(6t)$$

Para expresar la señal en su segunda forma (la cual si es posible ya que la señal con la que estamos trabajando SI es real) nos es de suma importancia saber si la señal es tiene simetria, par, impar o no tiene simetria.

Para que sea par debe cumplir con que $f(-t) = f(t)$

$$f(-t) = |sen(-t)| = |-sen(t)| = |sen(t)| = f(t)$$

Por lo que verificamos que la señal es par, entonces

$$b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} - \cos(t)\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}(-1-1) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{<T>} x(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen(t)cos(2nt)dt$$

Anteriormente se realizo el calculo, con la diferencia de tener un 2 en el numerador

$$a_n = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}$$

$$x(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)cos(2nt)}$$

Llegando al mismo resultado obtenido anteriomente. Ahora procederemos a calcular la potencia media de la señal mediante el teorema de Parseval.

$$P_m = \frac{1}{T}\int_{<T>} f(t)^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$$

Lo calcularemos mediante ambos procedimientos y luego verificaremos la semejanza entre ambas alternativas

$$P_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen^2(t)dt$$

$$P_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-cos(2t)}{2}dt$$

$$P_m = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}dt - \int_0^{\pi} cos(2t)dt$$

$$P_m = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P_m = |C_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|^2$$

$$|C_0|^2 = \frac{4}{\pi^2}$$

$$|C_n|^2 = \frac{4}{\pi^2(1-4n^2)^2}$$

$$P_m = \frac{4}{\pi^2}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-4n^2)^2}\right]$$

Desarrollando 4 terminos de la serie

$$P_m = \frac{4}{\pi^2}\left[1 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{225} + \frac{1}{1225} + \frac{1}{3969}\right)\right]$$

$$P_m = 0,499816$$

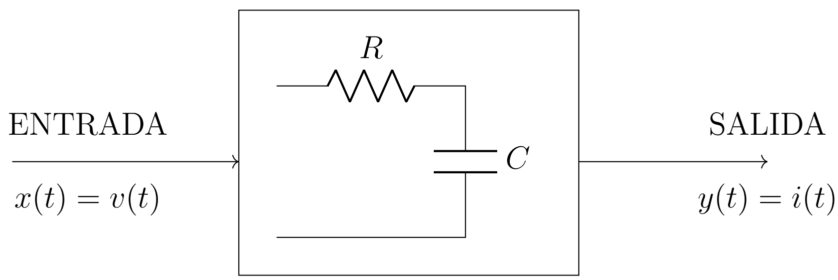
Verificando que el valor obtenido por ambas alternativas es el mismo, con una aproximacion mediante la serie del $99,962\,\%$

Ejercicio 2

Actividad 1

A

A) Expresar la Ecuación Diferencial (ED) que describe el circuito, y con ello, definir un Sistema en tiempo continuo con entrada x(t) = v(t) y salida y(t) = i(t) , con condiciones Iniciales genérica (CI).



Para plantear la EDO es necesario plantear ley de kirchoff

$$v(t) = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

Ahora derivamos para conseguir la expresion buscada

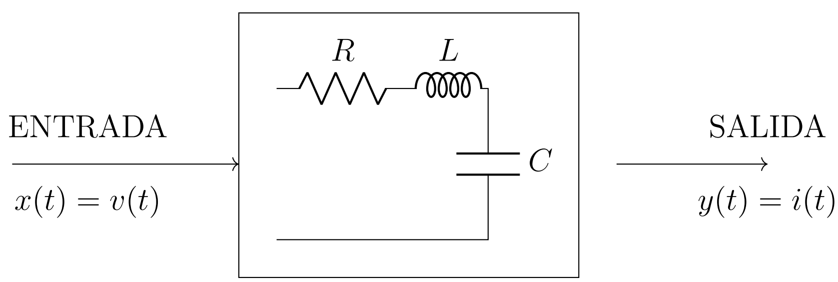
$$\frac{dv(t)}{dt} = R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

Dividimos todo por R para normalizar la ecuacion

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i(t) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y'(t) + \frac{1}{RC} \cdot y(t) = \frac{1}{R} \cdot x'(t)$$

Para el circuito de segundo orden:



Siguiendo con el mismo procedimiento

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$y''(t) + \frac{R}{L} \cdot y'(t) + \frac{1}{LC} \cdot y(t) = \frac{1}{L} \cdot x'$$

B

B)Usar la transformada de Laplace para sintetizar el sistema en la expresión
Primero sintetizamos la ecuacion correspondiente al circuito de primer orden

$$\mathscr{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0)$$

$$\mathscr{L}[y(t)] = Y(s)$$

$$\mathscr{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0)$$

Quedando la ecuacion

$$sY(s) - y(0) + \frac{1}{RC} \cdot Y(s) = \frac{1}{R} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s + \frac{1}{rc}) = \frac{1}{R} \cdot sX(s) - \frac{1}{R}x(0) + y(0)$$

$$Y(s) = X(s)\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{1}{(s + \frac{1}{RC})}[y(0) - x(0)\frac{1}{R}]$$

Ya nos queda sintetizado a la expresion

$$Y(s) = X(s) \cdot H(s) + F(s, CI)$$

Ahora para el circuito de segundo orden, primero debemos definir la transformada para la segunda derivada

$$\mathscr{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

Quedando la ecuacion sintetizada

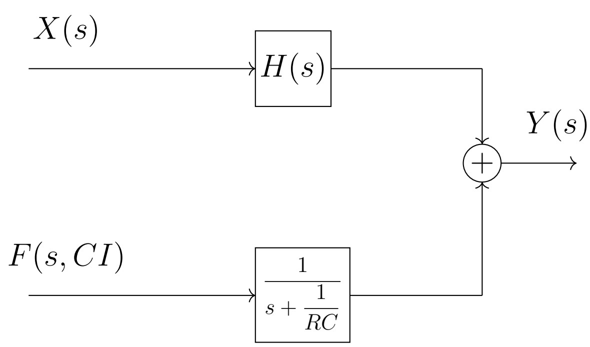
$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + \frac{R}{L}(sY(s) - y(0)) + \frac{1}{LC} \cdot Y(s) = \frac{1}{L} \cdot (sX(s) - x(0))$$

$$Y(s)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}) = X(s)\frac{s}{L} - x(0)\frac{1}{L} + sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0)$$

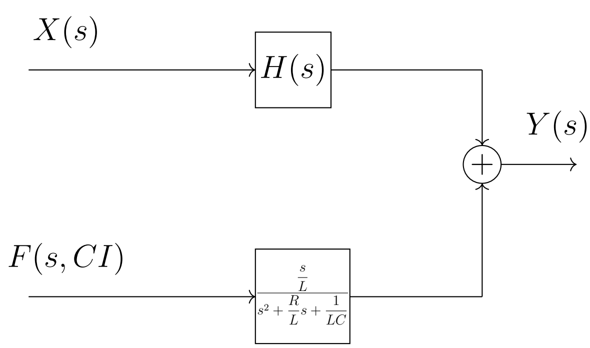
$$Y(s) = X(s)\frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} + \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}[sy(0) + y'(0) + \frac{R}{L}y(0) - x(0)\frac{1}{L}]$$

C

C) Escribir un diagrama de Bloques en la variable compleja S que determine al Sistema.
El diagrama de bloques que describe a la ecuacion de primer orden es:



Por otro lado el que describe a la ecuacion de segundo orden

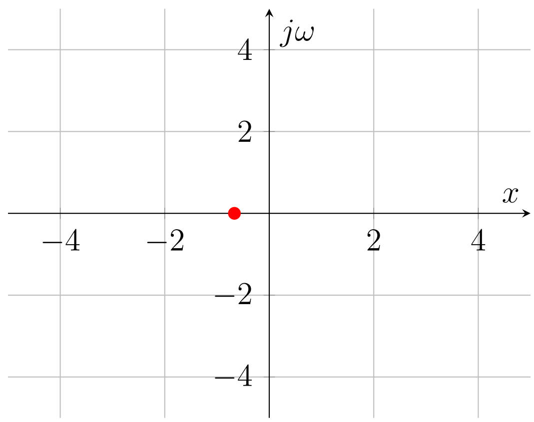


D

D) Graficar en el plano S polos y ceros de $H(s)$.
Para el caso de primer orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}}$$

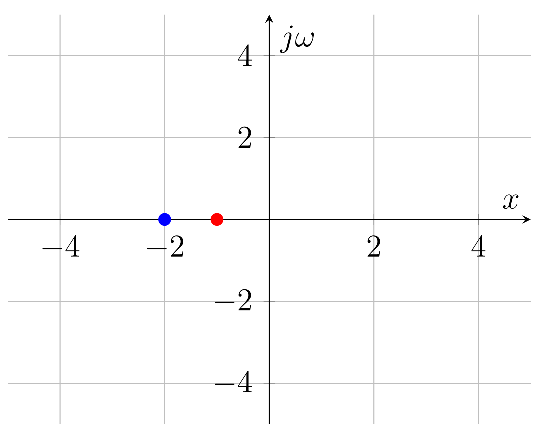
Donde el unico polo se encuentra en $s = -\frac{1}{RC}$ y el cero en $s = 0$.
$R = 3$, $C = \frac{1}{2}$, $L = 1$.
El polo con estos datos seria $s = -\frac{2}{3}$



Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Y los polos se encontrarian en $s_n = \dfrac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\frac{R}{L}^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$
Donde reemplazando con los valores previamente dados, los polos quedarian en $(-1, 0)$ y $(-2, 0)$.



E

E) Obtener la respuesta al impulso, $h(t)$, suponiendo que las CI $= 0$.

Continuaremos resolviendo primero la ecuacion de primer orden

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$$

$$\mathscr{L}^{-1}[H(s) \cdot 1] = \mathscr{L}[H(s)]$$

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s + a - a}{s + a}$$

$$H(s) = \frac{1}{R}(\frac{s + a}{s + a} - \frac{a}{s + a})$$

$$H(s) = \frac{1}{R}(1 - \frac{a}{s + a})$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{R}(1 - \frac{a}{s + a})] = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}[1 - \frac{a}{s + a}] = \frac{1}{R}(\mathscr{L}^{-1}[1] - \mathscr{L}^{-1}[\frac{a}{s + a}])$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1] = \delta(t)$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{a}{s + a}] = ae^{-at}u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{R}(\delta(t) - ae^{at}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{R}(\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{\frac{1}{RC}t}u(t))$$

$$h(t) = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9}e^{\frac{2}{3}}u(t)$$

Para la ecuacion de segundo orden

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\frac{R}{L} = a; \frac{1}{LC} = b$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{s}{s^2 + as + b}$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{L}\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}[H(s)] = \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{L}\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}]$$

$$h(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}[\frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}]$$

$$h(t) = \frac{1}{L}(-\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \mathscr{L}^{-1}(\frac{2}{s+2}))$$

$$h(t) = \frac{1}{L}(-e^{-t}u(t) + 2e^{-2t}u(t))$$

$$h(t) = \frac{1}{L}u(t)(-e^{-t} + 2e^{-2t})$$

F

F) Obtener la respuesta al escalón unitario $v(t)$, suponiendo CI $= 0$ y verificar la identidad $\frac{d}{dt}v(t) = h(t), \forall t$

Para la ecuacion de primer orden

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(H(s) \cdot \mathscr{L}(u(t)))$$

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s})$$

$$v(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}})$$

$$\frac{1}{RC} = a$$

$$v(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+a})$$

$$v(t) = \frac{1}{R}e^{-at}u(t)$$

$$v(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

En el caso de la ecuacion de segundo orden

$$v(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{L}}{s(s+1)(s+2)})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{(s+1)(s+2)})$$

Por fracciones simples

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s+1}\frac{B}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) - \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+2})$$

$$v(t) = \frac{1}{L}(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$L = 1$$

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

Ahora para ambos casos vamos a verificar que $\frac{dv(t)}{dt} = h(t)$

En ambos casos vamos a usar que $\frac{d}{dt}[f(t)u(t)] = f(0)\delta(t) + f'(t)u(t)$, siendo para el la ecuacion de primer orden

$$v(0) = \frac{1}{3}$$

$$v'(t) = \frac{-2}{9}e^{-\frac{2}{3}}$$

Quedando

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\delta(t)}{3} - \frac{2}{9}e^{-\frac{2}{3}}u(t)$$

Por lo cual se verifica para la primera ecuacion, por otro lado para la segunda ecuacion

$$v(0) = e^{-0} - e^{0} = 1 - 1 = 0$$

$$v'(t) = e^{-t} + 2e^{-2t}$$

Lo cual aplicando lo explicado anteriormente

$$\frac{dv(t)}{dt} = 0\delta(t) + e^{-t} + 2e^{-2t}u(t)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = e^{-t} + 2e^{-2t}u(t) = h(t)$$

G

G) Obtener la respuesta a la rampa.
Primero transformamos la integral del escalon

$$\mathscr{L}(\int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau)$$

$$\mathscr{L}(\int_{-\infty}^{0} 0d\tau + \int_{0} t1d\tau)$$

$$\mathscr{L}(t)$$

$$\mathscr{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

Entonces para calcular la respuesta a la rampa con la ecuacion de primer orden

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(H(s)\frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{R}}{s+\frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+\frac{1}{RC})})$$

$$\frac{1}{RC} = \frac{2}{3} = a$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+a})$$

$$A = \frac{1}{a}; B = -\frac{1}{a}$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}(\mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s} - \mathscr{L}^{-1}\frac{1}{s+a})$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\frac{1}{a}(u(t) - e^{-at}u(t))$$

$$y(t) = \frac{1}{aR}u(t)(1 - e^{-at})$$

$$y(t) = Cu(t)(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

$$y(t) = \frac{1}{2}u(t)(1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Para el caso de la ecuacion de segundo orden, recordamos que

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \frac{1}{s^2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s(s+1)(s+2)})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}\mathscr{L}^{-1}(\frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2})$$

$$y(t) = \frac{1}{L}[\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s}) - \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+1}) + \frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{s+2})]$$

$$y(t) = \frac{1}{L}[\frac{1}{2}u(t) - e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-2t}u(t)]$$

$$y(t) = \frac{1}{L}u(t)[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}]$$

$L = 1$

$$y(t) = u(t)[\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}]$$

Vamos a completar este ejercicio realizando al verificacion de los calculos mediante la siguiente igualdad $y(t) = \int_{-\infty}^{t} v(\tau)d\tau$.

Manteniendo el orden de realizacion de ejercicios, comenzamos con la ecuacion de primer orden

$$v(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

$$\int_{-infty}^{t} v(t) = \frac{1}{3}\int_{0}^{t} e^{-\frac{2}{3}\tau}d\tau = y(t)$$

$a = \frac{-2}{3}$

$$y(t) = \frac{1}{3}[\frac{1}{a}e^{at}\Big|_{0}^{t}]$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}t} - \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\frac{2}{3}t})$$

Verificando correctamente para la primera ecuacion, ahora correspondemos con la de segundo orden

$$v(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = y(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = \int_{0}^{t}(e^{-\tau} - e^{-2\tau})d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = \int_{0}^{t} e^{-} - \tau d\tau - \int_{0}^{t} e^{-2\tau}d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = -e^{-\tau}\Big|_{0}^{t} - (-\frac{1}{2}e^{-2\tau}\Big|_{0}^{t})$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = -(e^{-t} - 1) - (-\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2})$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = 1 - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

Su forma causal

$$\int_{-\infty}^{t} v(t) = u(t)[\frac{1}{2} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}]$$

Por lo cual se verifica todo lo calculado anteriormente.

Actividad 2

A

Circuito RC
De la Ley de Voltajes de Kirchhoff y la relación del capacitor:

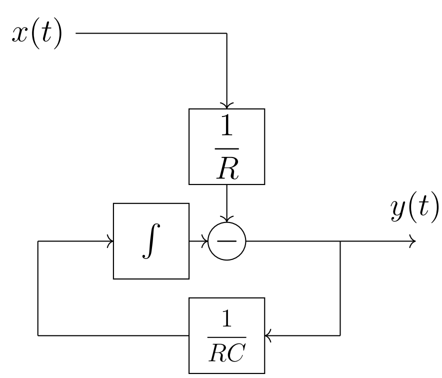
$$v(t) = Ri(t) + v_C(t), \qquad i(t) = C\, v_C'(t) \quad \Rightarrow \quad v_C'(t) = \frac{1}{C}y(t).$$

La ecuación diferencial queda:

$$y'(t) + \frac{1}{RC}\, y(t) = \frac{1}{R}\, x'(t)$$

$$Dy(t) + \frac{1}{RC}\, y(t) = \frac{1}{R}Dx(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\, x(t) - D^{-1}\left(\frac{1}{RC}\, y(t)\right)$$



Circuito RLC
De la Ley de Voltajes de Kirchhoff y la relación de los elementos (RLC):

$$x(t) = R\,i(t) + L\,i'(t) + v_C(t), \qquad i(t) = C\,v_C'(t).$$

La ecuación diferencial queda:

$$y''(t) + \frac{R}{L}\,y'(t) + \frac{1}{LC}\,y(t) = \frac{1}{L}\,x'(t).$$

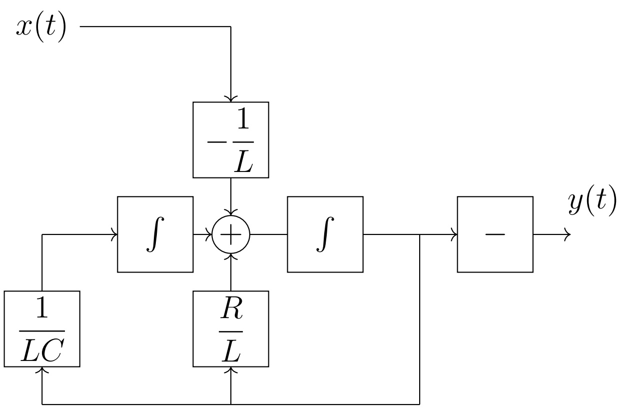
$$D^2 y(t) + D\left[\frac{R}{L}\,y(t)\right] + \frac{1}{LC}y(t) = D\left[\frac{1}{L}x(t)\right]$$

$$D^2 y(t) = D\left[\frac{1}{L}\,x(t) - \frac{R}{L}\,y(t)\right] - \frac{1}{LC}y(t)$$

$$y(t) = D^{-1}\left[\frac{1}{L}\,x(t) - \frac{R}{L}\,y(t)\right] - D^{-2}\frac{1}{LC}y(t)$$

$$y(t) = D^{-1}\left[\frac{1}{L}\,x(t) - \frac{R}{L}\,y(t) - D^{-1}\left(\frac{1}{LC}y(t)\right)\right]$$

$$-y(t) = D^{-1}\left[-\frac{1}{L}\,x(t) + \frac{R}{L}\,y(t) + D^{-1}\left(\frac{1}{LC}y(t)\right)\right]$$



B

Circuito RC
Función de transferencia e impulso

$$H(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}}.$$

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{R}\Big[\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}u(t)\Big].$$

Respuesta al escalón
Entrada:

$$x(t) = u(t), \quad X(s) = \frac{1}{s}.$$

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}.$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\,e^{-t/(RC)}u(t).$$

Verificación con convolución en tiempo:

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^t h(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{1}{R}\left(\int_0^t \delta(\tau)\,d\tau - \frac{1}{RC}\int_0^t e^{-\tau/(RC)}\,d\tau\right) \\ &= \frac{1}{R}\left(1 - \left(1 - e^{-t/(RC)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{R}\,e^{-t/(RC)}u(t). \end{aligned}$$

Respuesta a la rampa
Entrada:

$$x(t) = t\,u(t), \quad X(s) = \frac{1}{s^2}.$$

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{R}\,\frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})}.$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}}.$$

$$Y(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}}\right).$$

$$y(t) = C\big(1 - e^{-t/(RC)}\big)u(t).$$

Ciruito RLC
Función de transferencia e impulso

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{L}\,\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Con

$$s_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}; \quad s_1 \neq s_2$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{s_1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_1} - \frac{s_2}{s_1 - s_2} \cdot \frac{1}{s - s_2}$$

$$h(t) = \frac{1}{L} \left(\frac{s_1}{s_1 - s_2} e^{s_1 t} - \frac{s_2}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \right) u(t)$$

Respuesta al escalón
Entrada:

$$x(t) = u(t), \quad X(s) = \frac{1}{s}.$$

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{L(s_1 - s_2)} \left(\frac{1}{s - s_1} - \frac{1}{s - s_2} \right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L(s_1 - s_2)} \Big(e^{s_1 t} - e^{s_2 t} \Big) u(t)$$

Respuesta a la rampa
Entrada:

$$x(t) = t\,u(t), \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s) = H(s)\,X(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

Descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

Determinando coeficientes:

$$A = \frac{1}{s_1 s_2} = LC \qquad B = \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} \qquad C = \frac{1}{s_2(s_2 - s_1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{L} \left(\frac{LC}{s} + \frac{1}{s_1(s_1 - s_2)} \frac{1}{s - s_1} + \frac{1}{s_2(s_2 - s_1)} \frac{1}{s - s_2} \right)$$

$$y(t) = C\,u(t) + \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right) u(t)$$

Numéricamente
Si $R = 3,\ L = 1,\ C = \frac{1}{2}$, entonces $s_1 = -1,\ s_2 = -2$. Se obtiene:

$$h(t) = (-e^{-t} + 2e^{-2t})u(t)$$
$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$
$$y(t) = \left(\tfrac{1}{2} - e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t}\right) u(t)$$

C

Circuit RC
Datos:

$$H(s) = \frac{\frac{s}{R}}{s + \frac{1}{RC}}, \qquad h(t) = \frac{1}{R}\Big[\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}u(t)\Big]$$

Entrada escalón: $x(t) = u(t),\ X(s) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \ \Rightarrow\ y(t) = \frac{1}{R}e^{-t/(RC)}u(t)$$

TVI/TVF en s:

$$\text{TVI:} \quad y(0^+) = \lim_{s\to\infty} \big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{R\,(s + \frac{1}{RC})} = \frac{1}{R}$$

$$\text{TVF:} \quad y(\infty) = \lim_{s\to 0} \big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to 0} \frac{s}{R\,(s + \frac{1}{RC})} = 0$$

Verificación en t:

$$y(0^+) = \frac{1}{R}e^0 = \frac{1}{R}, \qquad y(\infty) = \frac{1}{R}e^{-\infty} = 0$$

Conclusiónes: Se comprobó que los resultados obtenidos con el TVI y el TVF en el dominio de Laplace coinciden con los límites directos de las soluciones en el dominio temporal. - Para una **entrada escalón**, la corriente arranca en $\frac{1}{R}$ y decae a cero, mostrando que el capacitor bloquea el paso en estado estacionario (comportamiento de circuito abierto en DC). - Para una **entrada rampa**, la salida arranca en cero y tiende a un valor constante C, reflejando la acumulación de carga en el capacitor y confirmando el rol de éste como integrador de señales de baja frecuencia.

Entrada rampa: $x(t) = t\,u(t),\ X(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{s\,(s + \frac{1}{RC})} = \frac{1}{R}\left(\frac{RC}{s} - \frac{RC}{s + \frac{1}{RC}}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{R}\big(RC\,u(t) - RC\,e^{-t/(RC)}u(t)\big) = C\big(1 - e^{-t/(RC)}\big)u(t)$$

TVI/TVF en s:

$$\text{TVI:}\quad y(0^+) = \lim_{s\to\infty}\big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to\infty} C\Big(1 - \frac{s}{s+\frac{1}{RC}}\Big) = 0$$

$$\text{TVF:}\quad y(\infty) = \lim_{s\to 0}\big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to 0} C\Big(1 - \frac{s}{s+\frac{1}{RC}}\Big) = C$$

Verificación en t:

$$y(0^+) = C(1-1) = 0, \qquad y(\infty) = C(1-0) = C.$$

Circuito RLC
Datos:

$$H(s) = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{L}\,\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)} \qquad s_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}$$

$$h(t) = \frac{1}{L}\left(\frac{s_1}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)u(t)$$

(Suponemos estabilidad: $\Re\{s_1\}, \Re\{s_2\} < 0$.)

Entrada escalón: $x(t) = u(t),\ X(s) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{L(s_1-s_2)}\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{L(s_1-s_2)}\big(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\big)u(t)$$

TVI/TVF en s:

$$\text{TVI:}\quad y(0^+) = \lim_{s\to\infty}\big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{L}\cdot\frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = 0$$

$$\text{TVF:}\quad y(\infty) = \lim_{s\to 0}\big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to 0}\frac{s}{L}\cdot\frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = 0$$

Verificación en t:

$$y(0^+) = \frac{1}{L(s_1-s_2)}(1-1) = 0, \qquad y(\infty) = \frac{1}{L(s_1-s_2)}(0-0) = 0.$$

Entrada rampa: $x(t) = t\,u(t),\ X(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s\,(s-s_1)(s-s_2)}$$

Reordenando:

$$\frac{1}{s\,(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

$$A = \frac{1}{s_1 s_2} = LC \qquad B = \frac{1}{s_1(s_1-s_2)} \qquad C = \frac{1}{s_2(s_2-s_1)}$$

Entonces

$$Y(s) = \frac{1}{L}\left(\frac{LC}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}\right) \Rightarrow y(t) = C\,u(t) + \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)u(t)$$

TVI/TVF en s:

$$\text{TVI:}\quad y(0^+) = \lim_{s\to\infty}\big[s\,Y(s)\big] = \lim_{s\to\infty}\frac{s}{L}\cdot\frac{1}{s^3+\cdots} = 0$$

$$\text{TVF:}\quad y(\infty) = \lim_{s\to 0}\big[s\,Y(s)\big] = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{(0-s_1)(0-s_2)} = \frac{1}{L\,s_1 s_2} = C$$

Verificación en t:

$$y(0^+) = C + \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) = C - \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s_1 s_2} = C - C = 0$$

$$y(\infty) = C + \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s_1-s_2}\left(\frac{0}{s_1} - \frac{0}{s_2}\right) = C.$$

Conclusiónes: También se verificó que los valores de TVI y TVF en el dominio s coinciden con los obtenidos a partir de las expresiones en el tiempo. - Para una **entrada escalón**, tanto el valor inicial como el final de la salida resultan nulos, lo que significa que, en régimen permanente, la corriente en el lazo desaparece (el capacitor se opone en DC y el inductor en régimen inicial). - Para una **entrada rampa**, la salida comienza en cero y tiende al valor C, mostrando que la combinación RLC termina limitando el crecimiento de la corriente y fijando un valor estacionario dependiente de la capacitancia.

D

Circuit RC
Partiendo de la ED del circuito RC en serie:

$$y'(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = \frac{1}{R}\,x'(t).$$

Ecuación característica: Considerando la ecuación homogénea asociada (es decir, $x(t) = 0$):

$$y'(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = 0.$$

La solución característica se obtiene de:

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{1}{RC}.$$

Orden del sistema: La ecuación característica es un polinomio de primer grado en s. Por lo tanto, el sistema tiene un único polo real negativo, y es un sistema de **primer orden**.

Coeficiente de amortiguamiento ξ: El coeficiente de amortiguamiento ξ se define a partir de la forma canónica de un sistema de **segundo orden**:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0,$$

donde aparecen dos polos que pueden ser reales o complejos. En el caso RC, como solo existe un polo, no es posible definir ξ.

Parámetro característico del sistema: En lugar de ξ, el RC queda caracterizado por su constante de tiempo:

$$\tau = RC,$$

la cual determina tanto la velocidad de respuesta como la localización del polo:

$$s = -\frac{1}{\tau}.$$

Conclusión: El circuito RC es de primer orden, posee un único polo real negativo y se describe completamente mediante su constante de tiempo RC. El coeficiente de amortiguamiento ξ solo aplica en sistemas de segundo orden, por lo que no se puede definir para este caso.

Circuito RLC Partiendo de la ecuación diferencial normalizada obtenida:

$$y''(t) + \frac{R}{L}\,y'(t) + \frac{1}{LC}\,y(t) \;=\; \frac{1}{L}\,x'(t),$$

la ecuación característica es

$$s^2 + \frac{R}{L}\,s + \frac{1}{LC} = 0.$$

Comparando con la forma estándar de segundo orden

$$s^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,s + \omega_n^2 = 0,$$

se identifica

$$\omega_n \;=\; \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad 2\,\xi\,\omega_n \;=\; \frac{R}{L}.$$

Luego, el **coeficiente de amortiguamiento** resulta

$$\boxed{\xi \;=\; \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Clasificación según ξ:

$$\begin{aligned} \xi < 1 &\quad \text{subamortiguado (polos complejos conjugados, } \Re\{s\} < 0) \\ \xi = 1 &\quad \text{críticamente amortiguado (polo doble real negativo)} \\ \xi > 1 &\quad \text{sobreamortiguado (dos polos reales negativos distintos)} \end{aligned}$$

Numéricamente (como en A1/B): si $R = 3$, $L = 1$, $C = \frac{1}{2}$:

$$\xi \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \;\approx\; 1.0607 \;>\; 1$$

lo cual coincide con el caso *sobreamortiguado* y con los polos reales distintos $s_1 = -1$, $s_2 = -2$.

E

Circuito RC El circuito es de **primer orden**; por lo que no posee frecuencia natural ω_n contrastando con el inciso anterior se deduce tal afirmación. El parámetro característico es la constante de tiempo

$$\tau = RC,$$

Interpretación de $1/\tau$ en un circuito RC. En un sistema de primer orden (como RC) la ecuación característica es

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; s = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau \equiv RC.$$

Aquí no existe una "frecuencia natural" oscilatoria ω_n (propia de sistemas de *segundo orden*), porque sólo hay un modo exponencial real. El parámetro $\frac{1}{\tau}$ tiene unidades de s^{-1} y representa la *tasa de decaimiento exponencial* (también llamada razón de amortiguamiento), es decir, cuán rápido desaparece el transitorio y pasa a ser estacionario.

Físicamente, esto refleja que el capacitor se comporta como *abierto* en régimen estacionario (DC): tras el transitorio de carga/descarga, $i(t) \to 0$ y $v_C(t) \to V$. Por lo tanto, $\frac{1}{\tau}$ no es una frecuencia de oscilación sino la distancia del polo al origen sobre el eje real negativo (la rapidez con la que el sistema "olvida" su estado inicial).

Circuito RLC Del inciso anterior podemos extraer que:

$$\boxed{\omega_n^2 = \frac{1}{LC}} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

Ejemplo numérico (valores usados antes): si $R = 3$, $L = 1$, $C = \frac{1}{2}$,

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot \frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\;\text{ rad/s } \approx 1.414 \text{ rad/s}$$

F

RC (serie)

Partimos de la respuesta al impulso

$$h(t) = \frac{1}{R}\Big[\delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-t/(RC)}u(t)\Big]$$

1) Transformada de Laplace de $h(t)$

$$H(s) = \mathscr{L}\{h(t)\} = \frac{1}{R}\Big[1 - \frac{\frac{1}{RC}}{s+\frac{1}{RC}}\Big] = \frac{1}{R}\cdot\frac{s}{s+\frac{1}{RC}}$$

2) Relación $Y(s) = H(s)X(s)$ **y ecuación en** s

$$Y(s) = H(s)X(s) \implies \Big(s + \tfrac{1}{RC}\Big)Y(s) = \tfrac{1}{R}\, s\, X(s)$$

3) Volver al dominio del tiempo (ED) Usando $\mathscr{L}^{-1}\{sY(s)\} = y'(t)$ y $\mathscr{L}^{-1}\{sX(s)\} = x'(t)$:

$$y'(t) + \frac{1}{RC}\,y(t) = \frac{1}{R}\,x'(t)$$

(Ecuación diferencial lineal de **primer orden** con coeficientes constantes.)

Circuito RLC
Partimos de la respuesta al impulso (raíces distintas $s_1 \neq s_2$**)**

$$h(t) = \frac{1}{L}\left(\frac{s_1}{s_1-s_2}e^{s_1 t} - \frac{s_2}{s_1-s_2}e^{s_2 t}\right)u(t) \quad \Re\{s_1\}, \Re\{s_2\} < 0$$

1) Transformada de Laplace de $h(t)$

$$H(s) = \frac{1}{L}\left(\frac{s_1}{s_1-s_2}\frac{1}{s-s_1} - \frac{s_2}{s_1-s_2}\frac{1}{s-s_2}\right) = \frac{1}{L}\cdot\frac{s}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

2) Relación $Y(s) = H(s)X(s)$ **y ecuación en** s

$$Y(s) = H(s)X(s) \implies \big[(s-s_1)(s-s_2)\big]\,Y(s) = \frac{1}{L}\,s\,X(s)$$

Expandiendo el denominador:

$$(s-s_1)(s-s_2) = s^2 - (s_1+s_2)s + s_1 s_2$$

Por lo tanto:

$$\Big(s^2 - (s_1+s_2)s + s_1 s_2\Big)Y(s) = \frac{1}{L}\,s\,X(s)$$

3) Volver al dominio del tiempo (ED)

$$y''(t) - (s_1+s_2)\,y'(t) + s_1 s_2\,y(t) = \frac{1}{L}\,x'(t)$$

Identificando con el circuito RLC (de la Actividad 1):

$$s_1 + s_2 = -\frac{R}{L}, \qquad s_1 s_2 = \frac{1}{LC}$$

queda

$$y''(t) + \frac{R}{L}\, y'(t) + \frac{1}{LC}\, y(t) = \frac{1}{L}\, x'(t),$$

que es la ecuación diferencial lineal de **segundo orden** con coeficientes constantes.

Observación (caso en que $s_1 = s_2 = -a$): Si $H(s) = \frac{1}{L}\,\frac{s}{(s+a)^2}$, entonces

$$h(t) = \frac{1}{L}\big(e^{-at} - a\,t\,e^{-at}\big)u(t),$$

y el mismo procedimiento lleva a

$$y''(t) + 2a\, y'(t) + a^2\, y(t) = \frac{1}{L}\, x'(t),$$

que coincide con la forma estándar al identificar $a = \frac{R}{2L}$ y $a^2 = \frac{1}{LC}$.