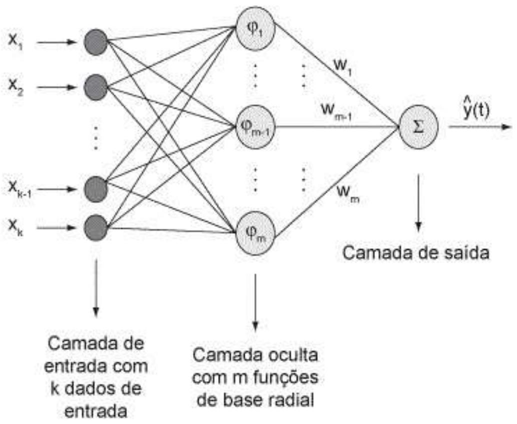
PARTE I

1. Na Figura seguinte está representada a estrutura de uma rede RBF. Os nós da camada escondida são constituídos por funções de base radial, designada por $\phi(r)$, como função de ativação não-linear. Esta camada mapeia a variável de entrada com uma transformação não-linear. Por fim a camada de saída agrega linearmente estas transformações num novo espaço, apresentando uma resposta na saída. Seja $\varphi_i(\vec{x}) = \phi_i(\vec{x}) \Big/ \sum_{j=1}^{m} \phi_j(\vec{x})$ com $\phi_i(\vec{x}) = \phi(\vec{x} - \vec{c}_i)$, $i = 1, \cdots, m$, onde $\phi_i(\vec{x})$ é uma função radial triangular de centro em $\boldsymbol{c_i}$.

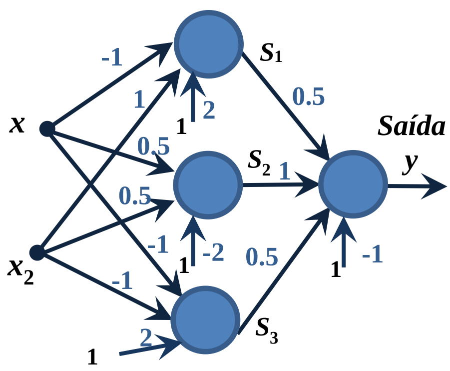


O procedimento de aprendizagem de uma RBF é sintetizado em três etapas: (i) selecionar o número de funções radiais; (ii) escolher os valores dos seus centros; e (iii) ajustar os pesos. Para esta última tarefa considere possuir uma tabela com *n* valores de entrada-saída desejados para a rede RBF, $\{(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{d_i}),\ i = 1, \ldots, n\}$.

a) Indique a função de transferência desta rede, considerando a utilização de funções radiais triangulares.

b) **(opcional com 2b)** Apesente um método de otimização dos pesos da rede ***W*** baseado no algoritmo de minimização da soma do erro quadrático (*Least Square Estimation*- LSE).

2. Na figura está representado uma rede neuronal de três camadas. A camada intermédia é compostas por neurónios com função de ativação linear, funções de ativação Heaviside e pesos assinalados. O neurónio da camada de saída tem função de activação linear.



a) Determine a função de transferência da rede neuronal: $y = f(x_1, x_2)$, apresentando os valores de saída para cada região do domínio.

b) **(opcional com 1b)** Considere possuir uma tabela com n valores de entrada-saída validados experimentalmente. Apesente um método de otimização baseado no algoritmo PSO (*Particule Swarm Optimization*) capaz de ajustar os pesos da rede e melhorar a correspondência da resposta da rede com os dados de treino.

3. (**opcional com 4**) O algoritmo ***k-means*** é um método de análise de agrupamentos (*clustering*) utilizado na partição de *n* observações em *c* agrupamentos (*clusters*), atribuindo cada observação um grau de pertença de valor tais que $u_{ik} \in \{0,1\}$. Seja um conjunto de observações (x_1, x_2, ..., x_n). O algoritmo *k-means* particiona as *n* observações em *c* conjuntos (com $c \leq$ n), $S = \{S_1, S_2, ..., S_c\}$, de modo a minimizar a seguinte função: $J = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{c} u_{ik}^{m} \left\| x_k - c_i \right\|^2$ com a restrição $\sum_{i=1}^{c} u_{ik} = 1$, onde c_i é o centroide do agrupamento *i* e *m* é um parâmetro de fuzificação.

a) Apresente o algoritmo padrão deste método e explique cada um dos seus passos.

b) Tendo como base o seguinte exemplo, mostre a evolução do algoritmo para as duas primeiras iterações: $D = \{(0,0);(0,1);(1,0),(10,10);(10,11),(11,11)\}$ e centros inicialmente em (4,4) e (6,6), para um par de agrupamentos.

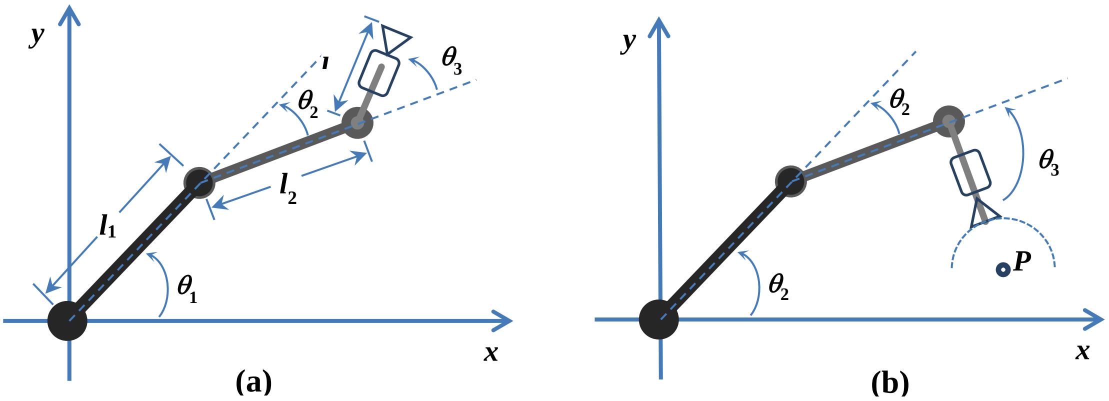
4. (**opcional com 3**) Uma Spline cúbica será usada para aproximar a função logarítmica $y = \log(x)$, no intervalo $x \in [0,1]$, usando os seguintes nós interpoladores: $N = \left\{(1,0);\left(e^{1/3},\frac{1}{3}\right);\left(e^{2/3},\frac{2}{3}\right);(e,1)\right\}$

a) Apresente o método que determina os coeficientes das Splines (polinómios cúbicos).

b) Tomando como precisa a aproximação da curva (x,y) pela Spline da função de derivada de 1ª ordem, determine o vetor velocidade de um robô que percorre essa trajetória em duas situações distintas: com velocidade horizontal constante de valor $\boldsymbol{v_h}$ e com velocidade constante de valor $\boldsymbol{v_V}$.

PARTE II

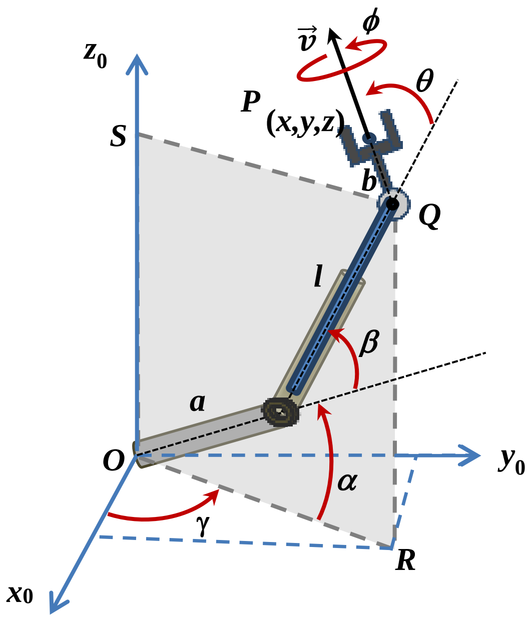
1. O manipulador robótico da figura tem como tarefa orientar uma câmara de vídeo, acoplada à sua extremidade (ver figuras). Os seus braços têm os comprimentos $l_1 = l_2 = 1$ m e $l_3 = 0{,}5$ m.



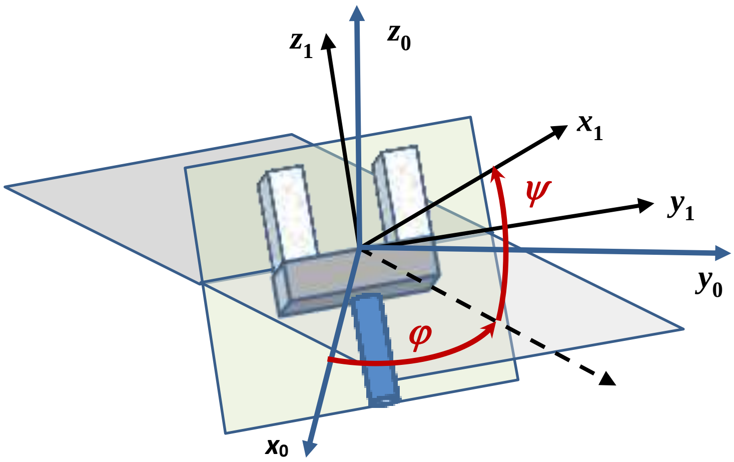
a) Deduza as expressões cinemáticas da câmara de vídeo, função dos ângulos e comprimentos dos braços robóticos.

b) Apresente o modelo cinemático inverso do robô e com base nele apresente um método de ajuste das variáveis internas do robô para garantir um movimento semicircular superior de raio 0.25 m da camara em redor do ponto ***P*** situado situado em (1 ; 0,5) m.

2. A figura seguinte apresenta um esquema de um robô 3D.



a) Estabeleça as relações entre as variáveis internas (γ, α, β, θ, ϕ e l) e as variáveis externas (**x, y, z, φ, ψ**), onde (x,y,z) são as coordenadas cartesianas do ponto terminador ***P*** no referencial 0 e o par de ângulos (**φ, ψ**) correspondem à orientação da garra de acordo com a figura.



b) (**opcional com c**) Determine o modelo inverso do robô.

c) (**opcional com b**) Construa o modelo incremental do robô.