Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação
Avaliação Parcial 2 de Métodos Numéricos
Prof. Dr. João Paulo do Vale Madeiro

9,0

Nome: Pedro Leimos Falcão Cunha

Matrícula: 542114

1) (TEÓRICA) Resolva o seguinte sistema pelo método da decomposição LU (2,0 pontos).

$Ax = B \rightarrow L(\underbrace{Ux}_{y}) = B$ $\quad Ux = y$

$Ly = B$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 = -30 \end{cases}$$

2) (TEÓRICA) Dos seguintes três conjuntos de equações lineares, identifique qual(is) conjunto(s) não pode(m) ser resolvido(s) usando um método iterativo como o de Gauss-Seidel. Mostre, utilizando qualquer número de iterações, que necessariamente sua solução não converge (3,0 pontos).

Conjunto Um	Conjunto Dois	Conjunto Três
$9x + 3y + z = 13$	$7x + y + 6z = 8$	$-3x + 4y + 5z = 6$
$-6x + 8z = 2$	$x + 5y - z = 5$	$-2x + 2y - 3z = -3$
$2x + 5y - z = 6$	$4x + 2y - 2z = 4$	$2y - z = 1$

3) (PRÁTICA) Aplique o método da eliminação de Gauss ou a decomposição LU (à sua escolha) para obter a inversa da matriz (3,0 pontos):

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A \cdot x =$

4) Uma companhia de eletrônica produz transistores, resistores e chips de computador. Cada transistor usa quatro unidades de cobre, uma unidade de zinco e duas unidades de vidro. Cada resistor usa três, três e uma unidade de cada material, respectivamente, e cada chip de computador usa duas, uma, e três unidades desses materiais, respectivamente. Colocando essa informação em uma tabela, tem-se:

Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Computação
Avaliação Parcial 2 de Métodos Numéricos
Prof. Dr. João Paulo do Vale Madeiro

	Componente	Cobre (m_1)	Zinco (m_2)	Vidro (m_3)
x_1	Transistor	4	1	2
x_2	Resistor	3	3	1
x_3	Chip	2	1	3

O fornecimento desses materiais varia de semana para semana. Assim, a companhia precisa determinar uma meta de produção diferente para cada semana. Por exemplo, em uma semana, a quantidade total de materiais disponíveis era 960 unidades de cobre, 510 unidades de zinco e 610 unidades de vidro. Determine o sistema de equações que modela essa meta de produção e use o algoritmo de Gass-Jordan para determinar a solução (2,0 pontos).

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ Cu: & 4 & 3 & 2 \\ Zn: & 1 & 3 & 1 \\ Ar: & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\uparrow ?} = \begin{bmatrix} 960 \\ 510 \\ 610 \end{bmatrix} \begin{array}{l} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{array}$$

Al: Pedro Leinos Falcão Cunha //542114

1)

i) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1}}_{= X} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix}_{3\times1}$; $Ax = B$; $A = LU$

$LUx = B$

ii) $\begin{cases} Ly = B & \text{I} \\ Ux = y & \text{II} \end{cases}$

iii) P/ I:

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0,2 & 0,5625 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{= Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 50 \\ 10 \\ -30 \end{bmatrix}}_{= B} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 20 \\ -51,25 \end{bmatrix}}$

P/ II:

$U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3,2 & -0,8 \\ 0 & 0 & 10,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}}$

② Utilizando troca de linhas e o critério das linhas p/ convergência do método de Gauss-Seidel, chega-se aos conjuntos:

i) Conj. 1: $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow 9 > 3+1 ✓ \\ \longrightarrow 5 > 2+(-1) ✓ \\ \longrightarrow 8 > -6 ✓ \end{array}$ ✓

Logo, conj. 1 converge p/ uma solução: (3,0)

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

ii) Conj. 2: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$ $\begin{array}{l} \longrightarrow 4 > 2+(-2) ✓ \\ \longrightarrow 5 > 1+(-1) ✓ \\ \longrightarrow 6 > 1+1 ✓ \end{array}$

Logo, conj. 2 NÃO converge p/ uma solução: X

$$\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

iii) Conj. 3: não há troca de linhas que satisfaça o critério das linhas

Supondo $\begin{bmatrix} x_3^{(0)} & y_3^{(0)} & z_3^{(0)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3^{(k)} \\ y_3^{(k)} \\ z_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_3^{(k+1)} = (6 - 4y_3^{(k)} - 5z_3^{(k)})/-3 \\ y_3^{(k+1)} = (-3 + 2x_3^{(k+1)} + 3z_3^{(k)})/2 \\ z_3^{(k+1)} = (1 - 2y_3^{(k+1)})/-1 \end{array}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} X_3^{(1)} & Y_3^{(1)} & Z_3^{(1)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & -7/2 & -8 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} X_3^{(2)} & Y_3^{(2)} & Z_3^{(2)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -20 & -67/2 & -68 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} X_3^{(3)} & Y_3^{(3)} & Z_3^{(3)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -160 & -\frac{517}{2} & \cdots \end{bmatrix}$$

$\vdots$

visto que as soluções estão se distanciando das anteriores, conclui-se que não há convergência da solução pelo método de Gauss-Seidel.