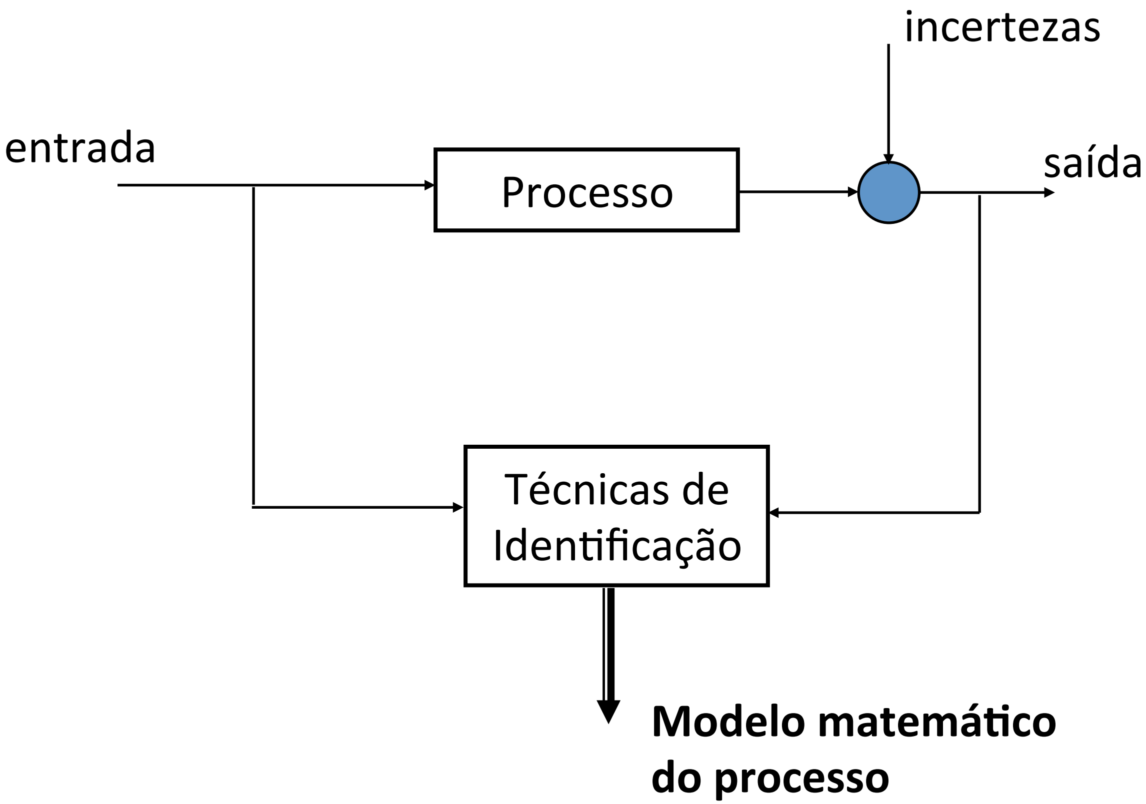
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

"É a determinação, com base em entradas e saídas, de um sistema em uma classe de sistemas especificados, ao qual o sistema em teste é equivalente".



Para processos industriais, o modelo pode ser obtido a partir do tratamento das medidas coletadas através de uma realização experimental

Etapas

- **Planejamento Experimental**
  - o sinal de entrada deve excitar todos os modos do sistema
  - um bom método de identificação deve ser insensível às características do sinal de entrada
- **Seleção da Estrutura do Modelo**
  - pode ser feita a modelagem usando leis físicas
  - a modelagem pode ser do tipo **caixa preta**, quando não se tem nenhum conhecimento sobre o processo
  - pode ser **caixa cinza**, quando se tem algum conhecimento
- **Estimação de Parâmetros**
  - baseada em: dados de entrada e saída do processo, uma classe de modelos e um critério
- **Validação**
  - verificação da adequação do modelo escolhido

Procedimentos

Diferentes procedimentos para a geração do sinal de entrada, medição da saída e armazenamento dos dados:

– Teste de resposta ao degrau

– Teste de resposta em freqüência

– ***Off-line***

– *On-line*

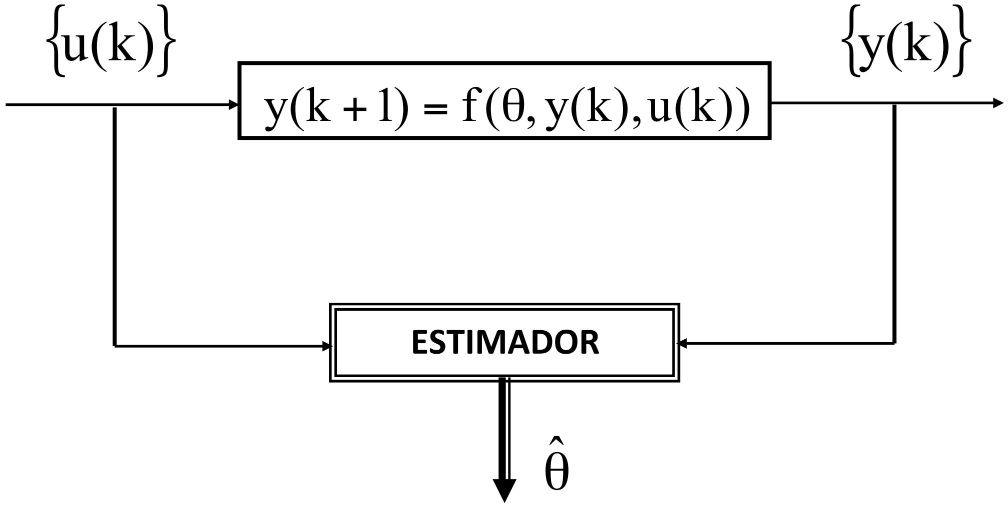
Procedimentos

Identificação *off-line*:

- Excita-se o processo e armazenam-se as medidas de entrada e saída para aplicação e avaliação a posteriori dos algoritmos não recursivos

- É necessário o conhecimento da estrutura do modelo, envolvendo ordem e atraso de transporte

Estimação de Parâmetros



Serão considerados modelos ARMAX:

$$\boxed{y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \ldots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \ldots + b_m u(k-m) + e(k)}$$

Gauss e Legendre

- O método dos mínimos quadrados foi publicado pela primeira vez por Legendre em 1805 e por Gauss em 1809.
- Embora o trabalho de Legendre tenha sido publicado anteriormente, Gauss alega que ele tinha o método desde 1795.
- Os dois matemáticos aplicaram o método para determinar as órbitas dos corpos em volta do sol.
- Gauss passou a publicar ainda mais o desenvolvimento do método em 1821.

IDENTIFICAÇÃO OFF-LINE DE SISTEMAS

Os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático devem ser escolhidos de tal forma que:

Somatório dos quadrados da diferenças entre os valores medidos e os valores verdadeiros, multiplicado por números que medem o grau de precisão , seja mínimo

Método dos Mínimos Quadrados

Supondo que foram feitas N medidas de entrada e saída:

$$\{u(0), u(1), \ldots, u(N)\} \qquad \{y(0), y(1), \ldots, y(N)\}$$

Definindo:

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ \ldots \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} -y(0) & \ldots & -y(1-n) & \vdots & u(0) & \cdots & u(1-m) \\ -y(1) & \cdots & -y(2-n) & \vdots & u(1) & \cdots & u(2-m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & \ldots & -y(N-n) & \vdots & u(N-1 & \ldots & u(N-m) \end{bmatrix}$$

Tem-se:

$$\boxed{Y = X\theta + e}$$

Exemplo

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k)$$

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ -y(N-1) & u(N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{Y = X\theta + e}$$

Método dos Mínimos Quadrados

- **Problema a ser resolvido:**
  - Dados Y e X, obter θ
- **Solução:** utilizar método dos mínimos quadrados. Escolher θ que minimize a função erro J:

$$J = \sum_{k=1}^{N} e^2(k) = e^T e$$

$$J = (Y - X\theta)^T (Y - X\theta)$$

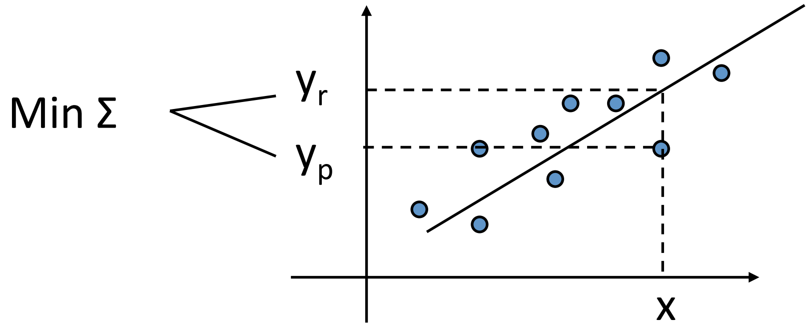
Mínimo quando: $$\left.\frac{\partial J}{\partial \theta}\right|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Y^T Y - Y^T X\theta - \theta^T X^T Y + \theta^T X^T X\theta\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2X^T Y + 2X^T X\hat{\theta} = 0$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y}$$ *Equações normais*

Método dos Mínimos Quadrados

$$\boxed{\hat{\theta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y}$$



Observações:

- A solução existe se $(X^T X)^{-1}$, a chamada pseudo-inversa, for não-singular
- A seqüência escolhida de entradas {u(k)} deve garantir a existência da não-singularidade
- Se não houver a presença de incertezas (ruídos) podemos achar $\hat{\theta}$ em N=n+m passos
- A matriz X cresce a medida que N cresce

Exemplo

$$y(k) + 0.8y(k-1) = u(k-1)$$

Suponha y(0)=0 e que foi aplicada a seguinte entrada:
u(0)=1 e u(1)=-1

Logo: y(1)= -0.8y(0)+u(0)= 1
y(2)= -0.8y(1)+u(1)= -1.8

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.8 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad X^T X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Propriedades Estatísticas do Estimador

- Assumindo que e(k) é uma variável aleatória independente, gaussiana com média zero e variância σ^2, ou seja,

$$E\{e(k)\} = 0 \qquad E\{e(i)e(j)\} = \sigma^2 \delta_{ij}$$

1) **Média**

$$\hat{\theta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \left(X\theta + e\right) = \left(X^T X\right)^{-1} \left(X^T X\right)\theta + \left(X^T X\right)^{-1} X^T e$$

$$\hat{\theta} = \theta + \left(X^T X\right)^{-1} X^T e \qquad E\{\hat{\theta}\} = E\{\theta\} + E\left\{\left(X^T X\right)^{-1} X^T\right\} E\{e\}$$

Mas $E\{e\} = 0$

Logo: $\boxed{E\{\hat{\theta}\} = \theta}$

Propriedades Estatísticas do Estimador

2) **Covariância**

$$\Psi = E\left\{\left(\hat{\theta} - \theta\right)\left(\hat{\theta} - \theta\right)^T\right\}$$

$$\Psi = E\left\{\left[\left(X^T X\right)^{-1} X^T e\right]\left[\left(X^T X\right)^{-1} X^T e\right]^T\right\}$$

$$\Psi = \left(X^T X\right)^{-1} X^T E\left\{ee^T\right\} X\left(X^T X\right)^{-1}$$

Assim,

$$\boxed{\Psi = \left(X^T X\right)^{-1} \sigma^2 I}$$

Os elementos da diagonal de Ψ representam as variâncias de cada parâmetro que compõe o vetor de parâmetros θ

Propriedades Estatísticas do Estimador

Para N observações: $$\Psi = \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{X^T X}{N}\right)^{-1}$$

Calculando: $$\lim_{N\to\infty}\Psi = \lim_{N\to\infty}\frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{X^T X}{N}\right)^{-1}$$

Se o estimador for consistente: $$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{X^T X}{N}\right)^{-1} = \Gamma$$

em que Γ é uma matriz constante não-singular

Então, $$\lim_{N\to\infty}\Psi = 0$$

Propriedades Estatísticas do Estimador

Conclusão:

Se $E\{\hat{\theta}\} = \theta$ e $\lim_{N \to \infty} \Psi = 0$

Então $\hat{\theta} \to \theta$ quando $N \to \infty$

O estimador é consistente

Seleção da Estrutura do Modelo

O critério é utilizado da seguinte maneira:

– inicia-se com a utilização de um modelo de baixa ordem, $n=m=1$, por exemplo;

– aumenta-se a ordem do modelo estimado e o critério é avaliado para cada incremento na ordem, utilizando um determinado conjunto de medidas;

– A escolha da estrutura adequada é baseada na menor taxa de variação do critério.

Exemplo

Considere um sistema estático em que se deseja obter o modelo mais adequado às seguintes medidas:

$$\begin{array}{lll} t = 1: & u(1) = 0 & y(1) = 0 \\ t = 2: & u(2) = 1 & y(2) = 0.9 \\ t = 3: & u(3) = 2 & y(3) = 2.1 \end{array}$$

Considere inicialmente um modelo constante[1], isto é:

$$y(t) = \theta_0$$

Nesse caso tem-se:

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.9 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

O estimador dos Mínimos Quadrados de θ_0 é dado por:

$$\hat{\theta}_0 = [U^T U]^{-1} U^T \mathbf{y}$$

$$\hat{\theta}_0 = 3^{-1}(0 + 0.9 + 2.1) = 1.0$$

que corresponde à média aritmética das medidas. O custo associado à obtenção desse modelo é dado por:

$$\boxed{J = \tilde{y}^T \tilde{y} = 1 + 0.1^2 + 1.1^2 = 2.22}$$

Vamos a seguir considerar um modelo linear e verificar se ele representa melhor os dados. Seja então:

$$y(t) = \theta_0 + \theta_1 u(t)$$

ou

$$y(t) = \left[\begin{array}{cc} 1 & u(t) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \theta_0 \\ \theta_1 \end{array} \right]$$

Nesse caso a matriz U é dada por:

$$U = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right]$$

O estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left[\begin{array}{c} -0.05 \\ 1.05 \end{array} \right]$$

O custo associado a esse modelo é $J = 0.015$, que é significativamente menor que aquele associado ao modelo anterior, indicando que esse modelo representa melhor os dados fornecidos.

Considere agora um modelo (não linear) de segunda ordem, isso é:

$$y(t) = \theta_0 + \theta_1 u(t) + \theta_2 u^2(t)$$

que pode ser rescrito como:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & u(t) & u^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

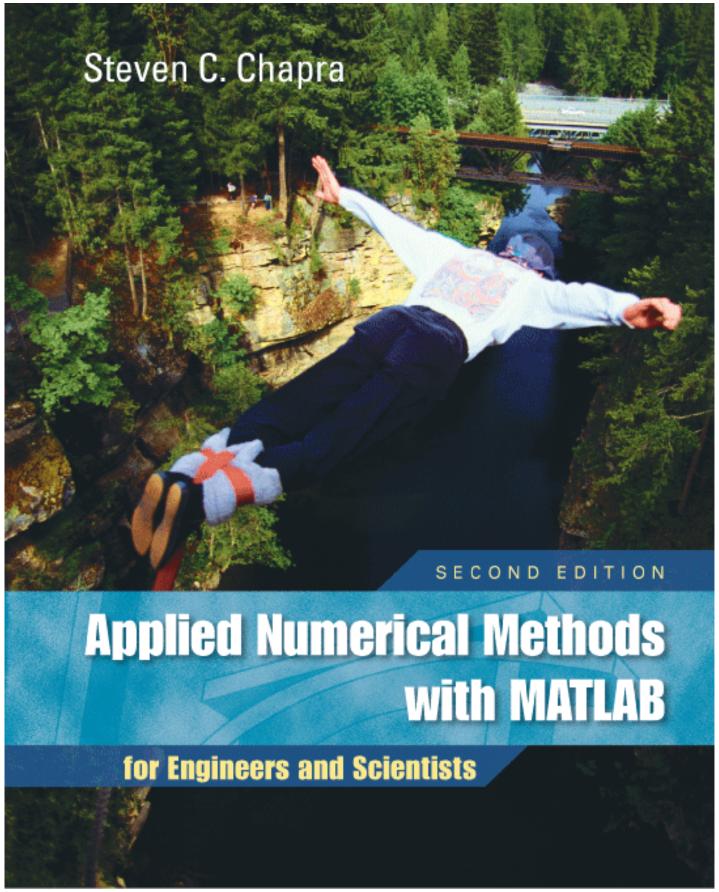
$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Nesse caso $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é dado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix} \qquad J = 0.0$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.75 \\ 0.15 \end{bmatrix}$$

O custo associado a esse modelo é $J = 0.0$ que é o menor valor que pode ser obtido para esses dados. Essa condição ocorre quando o número de medidas é igual ao número de parâmetros a serem estimados e a matriz U é não singular. Na validação do modelo também deve-se incluir uma medida


Steven C. Chapra
SECOND EDITION
Applied Numerical Methods with MATLAB
for Engineers and Scientists