Discretização de Sistemas Contínuos

Considere o controlador de tempo contínuo *C(s)* representado no domínio *s*

$$\boxed{U(s) = C(s)E(s) = \frac{N(s)}{D(s)}E(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}E(s)}$$

Equação diferencial relacionando *u(t)* e *e(t)*

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}u(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}u(t) + \cdots + a_0 u(t) = b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e(t) + \cdots + b_0 e(t)}$$

Exemplo de Discretização

$$\frac{d}{dt}u(t) + 2u(t) = e(t) \qquad U(s) = \frac{1}{s+2}E(s) \qquad U(s) = C(s)E(s)$$

Método de Euler para aproximar a derivada:

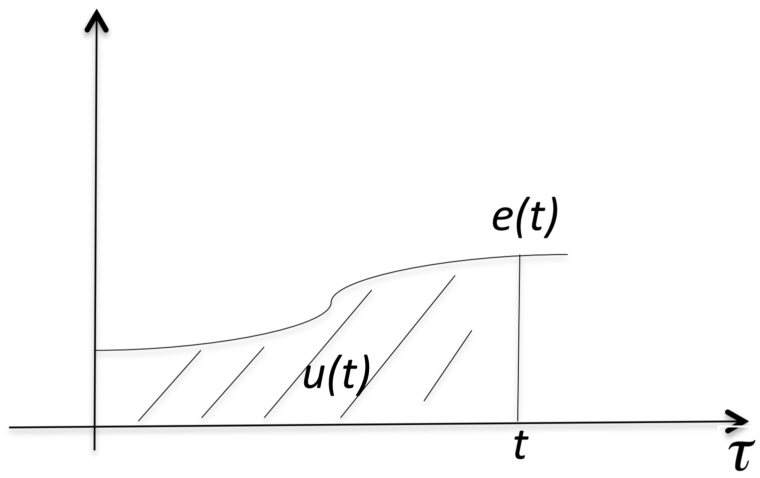
$$\frac{d}{dt}u(t) \cong \frac{u((k+1)T) - u(kT)}{T} = \frac{1}{T}[u(k+1)) - u(k)]$$

$$\boxed{U(z) = \frac{1}{(\frac{z-1}{T}) + 2}E(z)}$$

Observe que, formalmente, isso é equivalente a substituir $\boxed{s = \frac{z-1}{T} \quad \text{em } C(s)}$

Equivalente Discreto por Integração Numérica

$$U(s) = \frac{1}{s} E(s) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

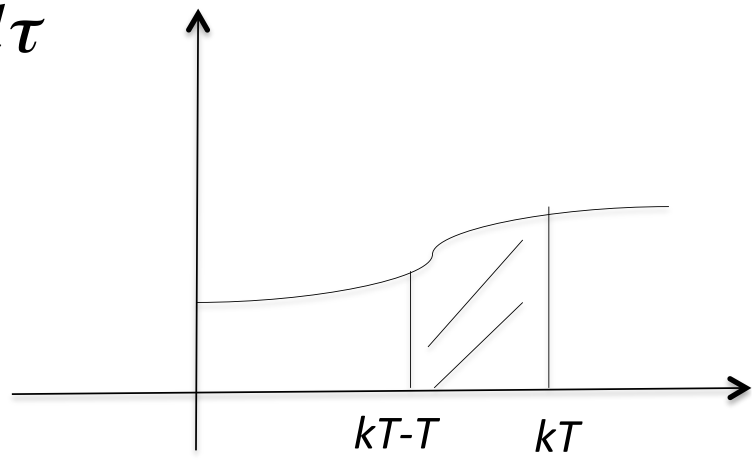


$$\boxed{u(kT) = \int_0^{kT} e(\tau)\, d\tau}$$

Equivalente Discreto por Integração Numérica

$$u(kT) = \int_0^{kT} e(\tau)\,d\tau$$

$$u(kT) = \underbrace{\int_0^{kT-T} e(\tau)\,d\tau}_{u((k-1)T)} + \int_{(k-1)T}^{kT} e(\tau)\,d\tau$$



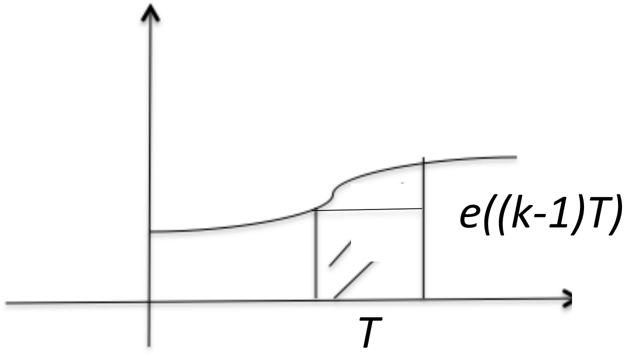
$$u(kT) = u((k-1)T) + \Lambda$$

Λ é a área sob a curva de $e(t)$ entre o k-ésimo instante de amsostragem e o instante anterior

Método de *Forward* Euler

$$\Lambda = Te((k-1)T)$$

$$u(kT) = u((k-1)T) + Te((k-1)T)$$



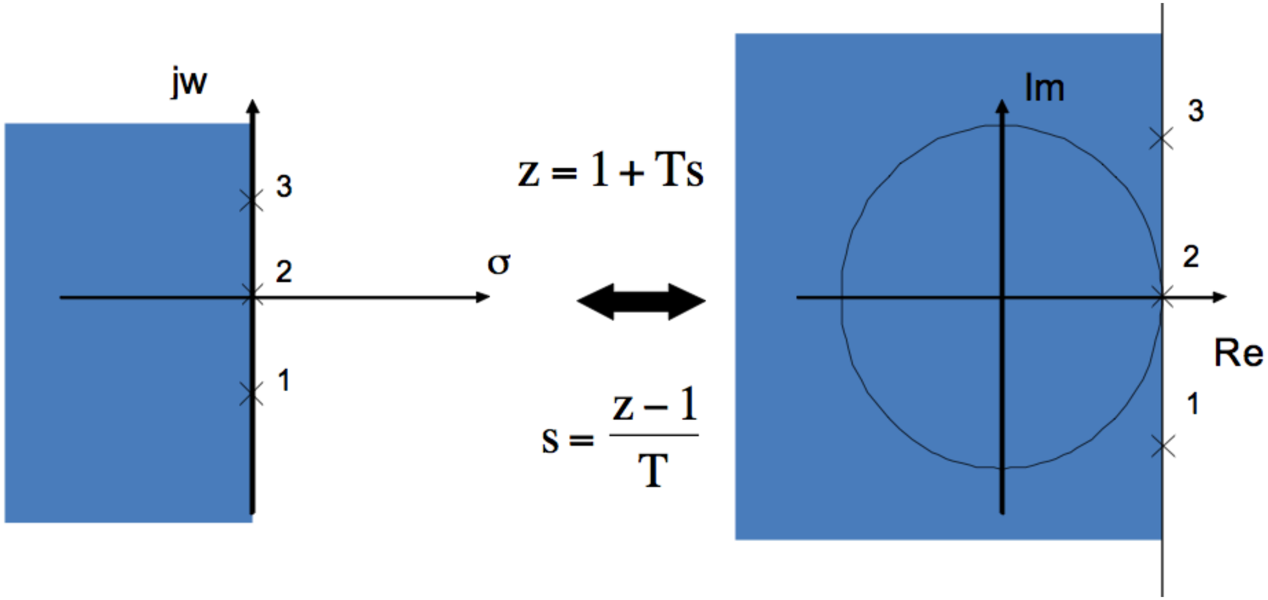
z representa o operador deslocamento unitário $zu(k) = u(k+1)$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + Tz^{-1}E(z) \quad \Rightarrow \begin{cases} U(z) = \dfrac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}E(z) \\[2ex] U(z) = \dfrac{T}{z-1}E(z) \end{cases}$$

Método de *Forward* de Euler

$$C(s) = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad C(z) = \frac{T}{z-1}$$

Observe que, formalmente, isso é equivalente a: $\boxed{C(z) = C(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}}$



Mapeamento do método de *discretização forward*

Método de *Forward* de Euler

Um sistema estável no plano *s* pode se tornar instável quando mapeado para *z* por este método

Exemplo:

$$C(s) = \frac{1}{Ts+4} \qquad \text{com:} \quad \text{i)}\ T = 1 \qquad \text{ii)}\ T = 0{,}1$$

Instável

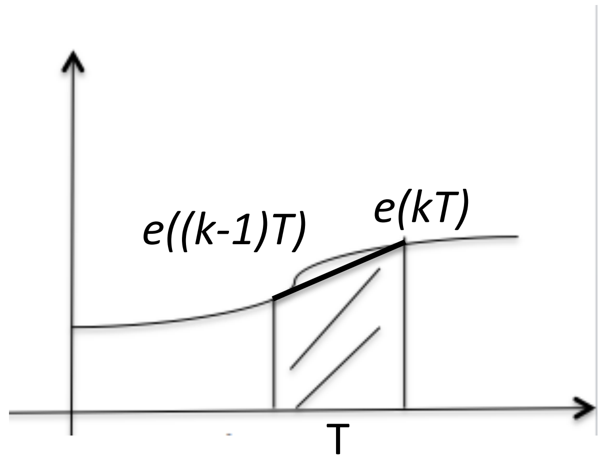
$$\text{i)}\ \ s = \frac{z-1}{T} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{z-1}{1} \quad \text{logo: } C(z) = \frac{1}{z-1+4} \Rightarrow C(z) = \frac{1}{z+3}$$

$$\text{ii)}\ \ s = \frac{z-1}{T} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{z-1}{0{,}1} \quad \text{logo: } C(z) = \frac{1}{10z-10+4} \Rightarrow C(z) = \frac{0{,}1}{z-0{,}6}$$

Estável

Método de Tustin (Trapezoidal)

$$\Lambda = \frac{T}{2}[e((k-1)T) + e(kT)]$$



$$u(kT) = u((k-1)T) + \frac{T}{2}[e((k-1)T) + e(kT)]$$

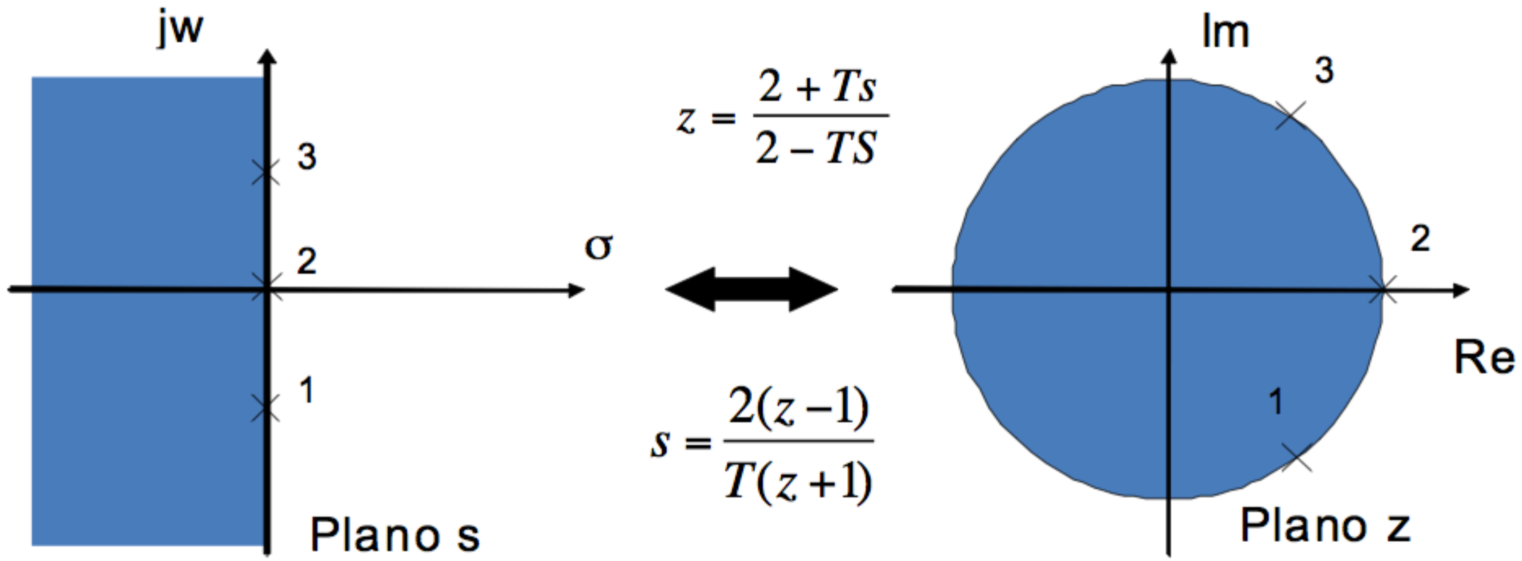
z representa o operador deslocamento unitário $z^{-1}u(k) = u(k-1)$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}E(z) + \frac{T}{2}z^{-1}E(z) \quad \Rightarrow \begin{cases} U(z) = \dfrac{T}{2}\dfrac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}E(z) \\ U(z) = \dfrac{T}{2}\dfrac{z+1}{z-1}E(z) \end{cases}$$

Método de *Tustin*

$$C(s) = \frac{1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad C(z) = \frac{T(z+1)}{2(z-1)}$$

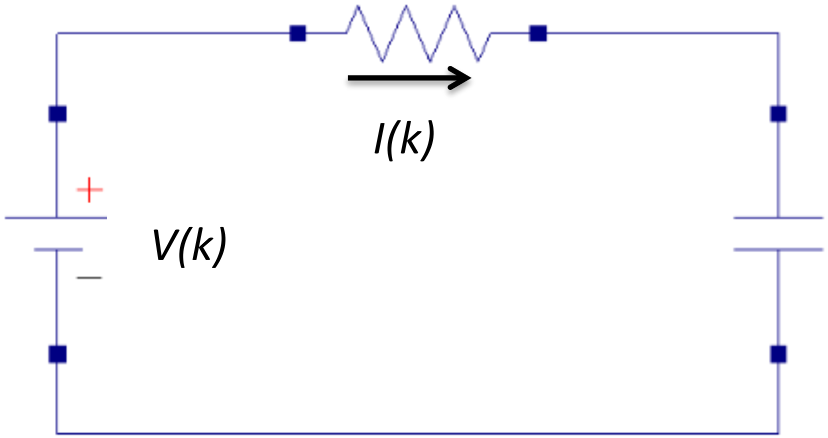
Observe que, formalmente, isso é equivalente a: $\boxed{C(z) = C(s)\Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}}}$



Mapeamento do método de *discretização Tustin*

Exemplo

Obter uma fórmula recursiva da corrente em função da tensão para o equivalente digital do circuito RC, considerando nulas as condições iniciais.



1. Domínio do tempo:

$$v(t) - R.i(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = 0$$

2. Domínio da variável s:

$$v(t) \Leftrightarrow V(s)$$
$$i(t) \Leftrightarrow I(s)$$

$$V(s) - R.I(s) - \frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt\right] = 0$$

$$\boxed{V(s) - \left[R + \frac{1}{Cs}\right] I(s) = 0}$$

Exemplo

Obter uma fórmula recursiva da corrente em função da tensão para o equivalente digital do circuito RC, considerando nulas as condições iniciais.

3. Domínio da variável z

$$V(s) \Leftrightarrow V(z) \qquad I(s) \Leftrightarrow I(z) \quad com \qquad s = \frac{2(z-1)}{T(z+1)}$$

$$V(z) - \left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}\right] I(z) = 0$$

$$zV(z) - V(z) - \left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right] zI(z) + \left[R - \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right] I(z) = 0$$

Exemplo

4. Domínio do tempo discreto k

$$z^n V(z) \Leftrightarrow v(k+n) \qquad z^n I(z) \Leftrightarrow i(k+n)$$

$$v(k+1) - v(k) - \left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right] i(k+1) + \left[R - \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right] i(k) = 0$$

$$i(k+1) = \frac{1}{\left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]}(v(k+1) - v(k)) + \frac{\left[R - \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]}{\left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]} i(k)$$

Seja $a_1 = \frac{\left[R - \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]}{\left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]}$ $\qquad a_2 = \frac{C}{\left[R + \frac{1}{C}\frac{T}{2}\right]}$

$$i(k+1) = a_2(v(k+1) - v(k)) + a_1 i(k)$$

Nota: *i(k)=0* e *v(k)=0* para *k < 0*