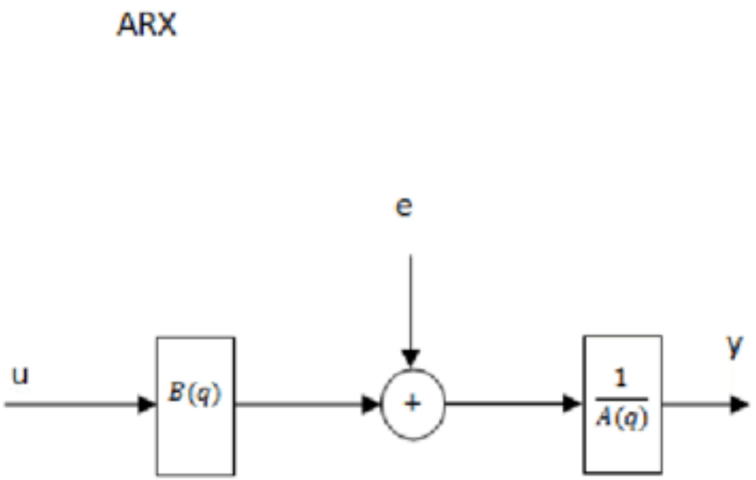
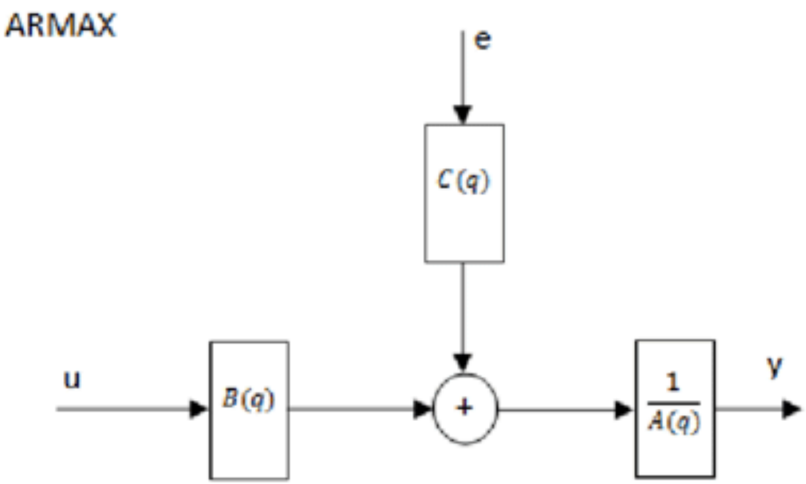
Modelos de Processos e de Perturbação





Modelos para Descrição de Sistemas Lineares

- Modelo Auto-Regressivo (modelo AR)
- Modelo Média Móvel (modelo MA)
- Modelo Auto-Regressivo com entrada eXógena (extra) (modelo ARX)
- Modelo Auto-Regressivo Média Móvel (modelo ARMA)
- Modelo Auto-Regressivo Média Móvel com entrada eXógena (modelo ARMAX)

Modelos para Descrição de Sistemas Lineares

Cada um dos modelos citados tem uma equação para descrever a relação entre a entrada, a saída e erro.

- Alguns modelos têm muita liberdade na descrição da entrada.
- Alguns têm liberdade para descrever o erro.
- Outros têm liberdade para descrever a saída.
- Alguns modelos descrevem, com liberdade, a entrada, saída e erro.

Modelos para Descrição de Sistemas Lineares

- Com base nas condições da planta, um modelo específico pode ser escolhido.
- A escolha de um modelo adequado para a planta é muito importante, uma vez que os parâmetros a serem estimados depende do modelo escolhido.
- Bastante cuidado deve ser tomado na escolha do modelo para a descrição da planta.

Modelo Auto-Regressivo (AR)

O modelo Auto-Regressivo é dado pela equação:

$$A(q) * y(t) = e(t)$$

onde,

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

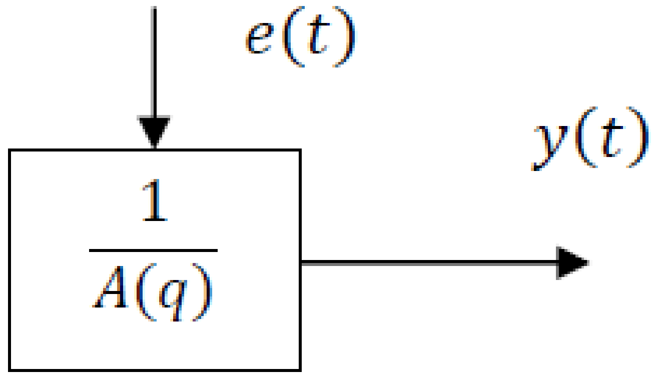
$y(t)$ *Saída*

$e(t)$ *Ruído Branco*

$$\left(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}\right) y(t) = e(t)$$

$$\Rightarrow y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots \ldots \ldots + a_{n_a} y(t - n_a) = e(t)$$

- Este modelo descreve apenas uma relação entre a saída e erro.
- A liberdade na descrição da saída é maior do que a do erro.
- Este modelo é usado para descrever uma planta onde a entrada não é descrita, no entanto ele é geralmente mais usado em combinação com outros modelos.
- A representação do diagrama de bloco de modelo AR é dada por:



O vetor de parâmetros a ser estimado neste modelo é:

$$\hat{\theta} = \left[a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n_a}\right]^T$$

Modelo Média Móvel (MA)

O modelo média móvel é dado pela equação

$$y(t) = C(q) * e(t)$$

onde

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$y(t)$ *Saída*

$e(t)$ *Ruído Branco*

Modelo Média Móvel (MA)

$$y(t) = \left(1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}\right) e(t)$$

$$\Longrightarrow y(t) = \mathrm{e}(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots \dots \dots + c_{n_c} e(t - n_c)$$

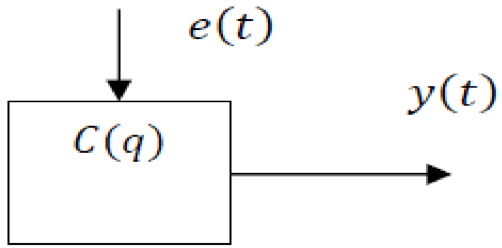
- Este modelo descreve apenas uma relação entre a saída e erro.

- Este modelo é chamado Média Móvel porque o valor médio do erro é expresso como uma média móvel do ruído branco.

- Há mais liberdade para a descrição de erro do que para a saída.

- Este modelo é raramente usado para descrever uma planta quando a entrada não é descrita, mas geralmente é usado em combinação com outros modelos.

- A representação do diagrama de bloco de modelo MA é dada por:



O vetor de parâmetros a ser estimado neste modelo é:

$$\hat{\theta} = [c_1\ c_2\ c_3 \ldots \ldots \ldots \ldots . c_{n_c}]^T$$

Modelo Auto-Regressivo com Entrada Exógena (modelo ARX)

- Dado pela equação:

$$A(q) * y(t) = B(q) * u(t) + e(t)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$
$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$u(t)$ *Entrada*

$y(t)$ *Saída*

$e(t)$ *Ruído Branco*

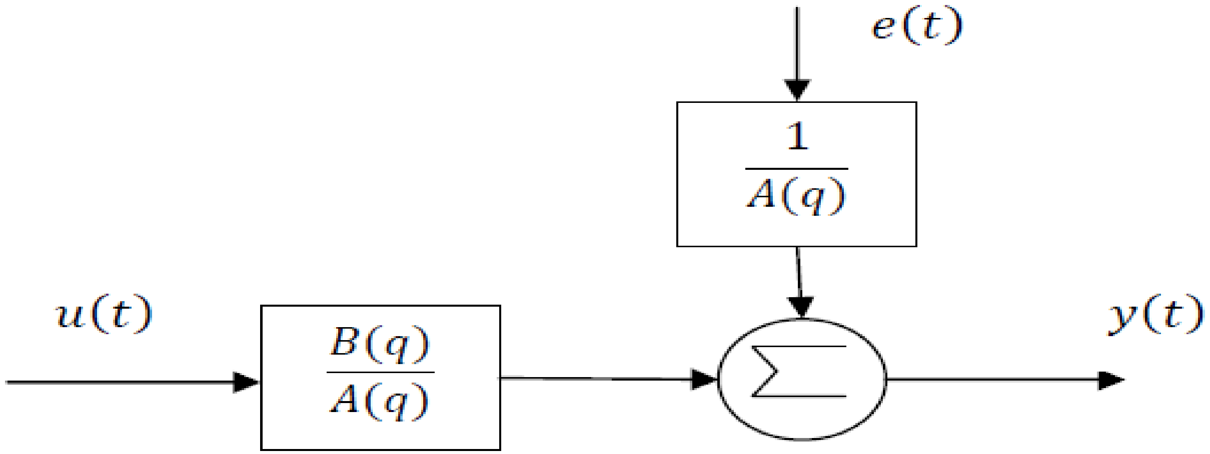
$$\left(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}\right) y(t) = \left(b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}\right) u(t) + e(t)$$

$$\Rightarrow y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots \ldots \ldots + a_{n_a} y(t - n_a)$$
$$= b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \cdots \ldots \ldots + b_{n_b} u(t - n_b) + e(t)$$

- Este modelo descreve uma relação entre a entrada, erro e saída.
- Além disso, a entrada e saída podem ser descritas com mais liberdade em relação ao erro.

- Este modelo pode ser usado para descrever as plantas onde a maior liberdade não é necessária para a descrição de erros.

- A representação do diagrama de blocos do modelo ARX é:



O vetor de parâmetros a ser estimado neste modelo é:

$$\hat{\theta} = [a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n_a} b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ldots\ldots\ldots b_{n_b}]'$$

Modelo Auto-Regressivo Média Móvel (Modelo ARMA)

- Dado pela equação:

$$A(q) * y(t) = C(q) * e(t)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$y(t)$ *Saída*

$e(t)$ *Ruído Branco*

$$\left(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}\right) y(t) = \left(1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}\right) e(t)$$

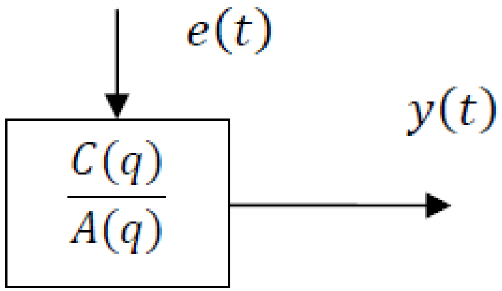
$$\Rightarrow y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots \ldots \ldots + a_{n_a} y(t-n_a) = e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots \ldots \ldots + c_{n_c} e(t-n_c)$$

- Este modelo é uma combinação do modelo Auto-Regressivo (AR) e o modelo Média Móvel (MA).

- Este modelo fornece uma relação entre a saída e o erro. Tanto a saída e o erro são descritos com mais liberdade.

- Este modelo não é muitas vezes usado para descrever as plantas quando a entrada não é considerada.

- A representação do diagrama de blocos do modelo ARMA é:



O vetor de parâmetros a ser estimado neste modelo é:

$$\hat{\theta} = \left[a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots.\ a_{n_a} c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots\ldots\ldots.\ c_{n_c}\right]^T$$

Modelo Auto-Regressivo Média Móvel com entrada exógena (ARMAX)

- Dado pela equação

$$A(q) * y(t) = B(q) * u(t) + C(q) * e(t)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$u(t)$ *Entrada*

$y(t)$ *Saída*

$e(t)$ *Ruído Branco*

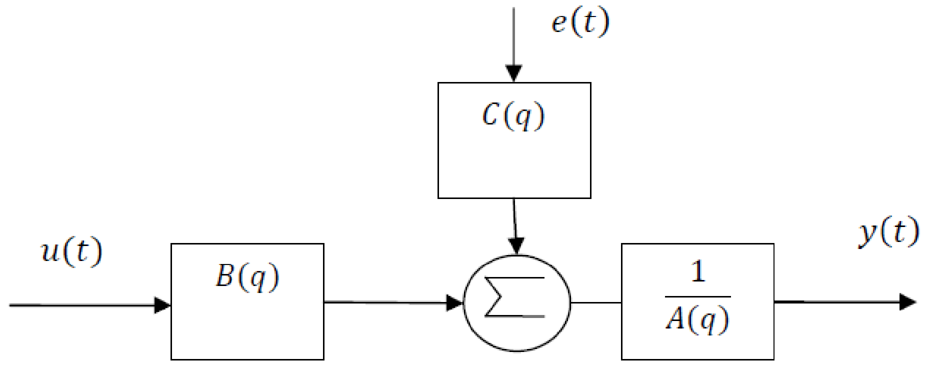
$$\left(1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}\right) y(t) = \left(b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}\right) u(t) + \left(1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}\right) e(t)$$

$$\Rightarrow y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \cdots \ldots \ldots + a_{n_a} y(t - n_a) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + \cdots \ldots + b_{n_b} u(t - n_b) + e(t) + c_1 e(t-1) + c_2 e(t-2) + \cdots + c_{n_c} e(t - n_c)$$

- Uma extensão do modelo ARMA, onde uma entrada extra (*u(t)*) é incluído no modelo.

- Utilizado para representar a planta, quando este modelo descreve a entrada, saída e erro com total liberdade.

- A representação do diagrama de blocos do modelo ARMAX é:



O vetor de parâmetros a ser estimado neste modelo é:

$$\hat{\theta} = \left[a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n_a} b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ldots\ldots\ldots b_{n_b} c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots\ldots\ldots c_{n_c}\right]^T$$

Nota

Considere o modelo *ARMAX* :

$$\boxed{A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t)}$$

- Quando $B(q) = 0$ e $C(q) = 1$ tem-se o modelo AR
- Quando $A(q) = 1$ e $B(q) = 0$ tem-se o modelo MA
- Quando $C(q) = 1$ tem-se o modelo ARX
- Quando $B(q) = 0$ tem-se o modelo ARMX

Exemplo: Considere circuito resistor-capacitor

$$RC\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$RC\,\frac{y(t+1) - y(t)}{\Delta} + y(t) = u(t)$$

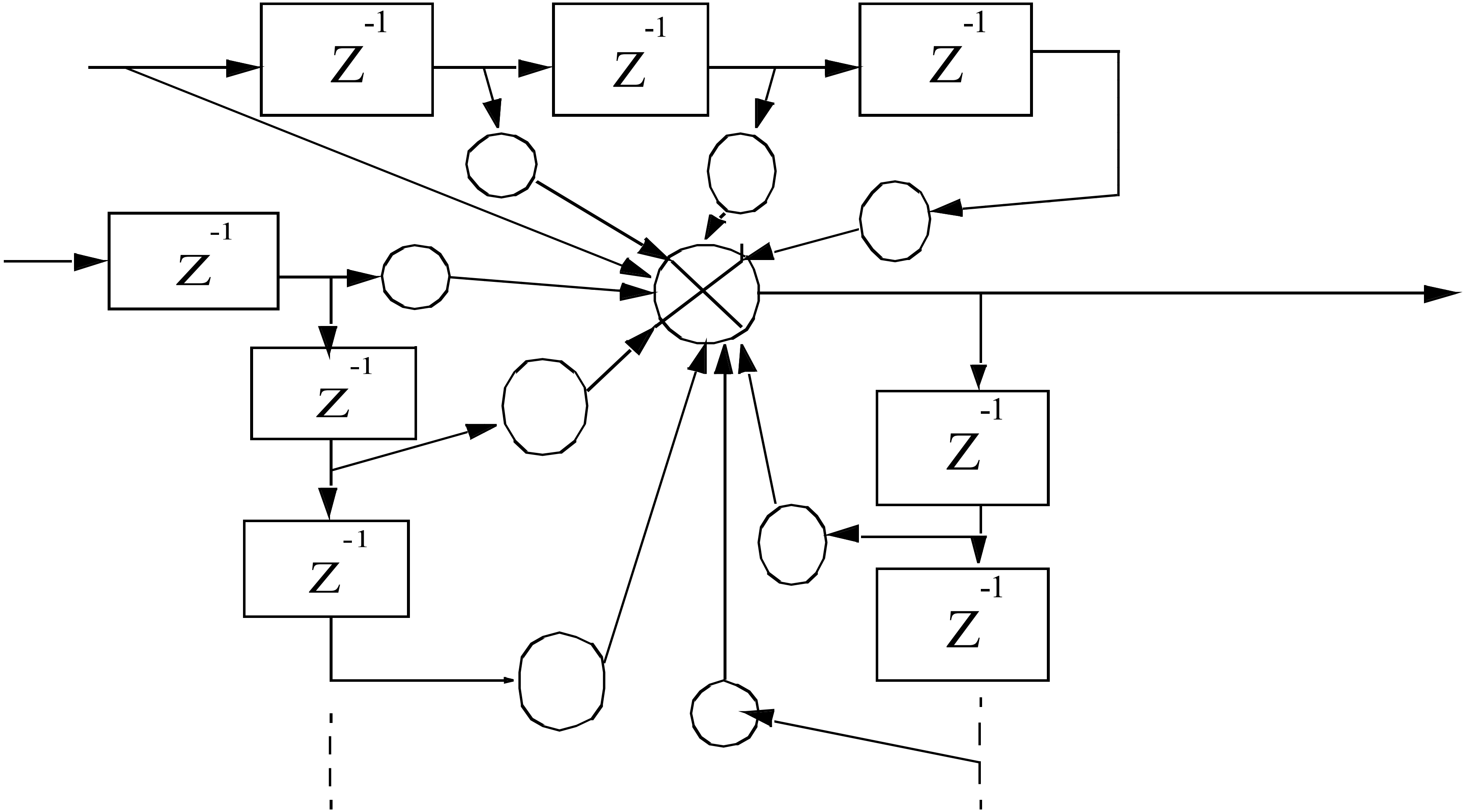
$$y(t) + \left(\tfrac{\Delta}{RC} - 1\right) y(t-1) = \tfrac{\Delta}{RC}\, u(t-1)$$

q^{-1} denota o operador deslocamento para trás $q^{-1}y\,(t) = y\,(t\text{-}1)$, então tem-se

$$A(q)\,y(t) = B(q)\,u(t)$$

$$A(q) = 1 + \left(\tfrac{\Delta}{RC} - 1\right) q^{-1} \qquad\qquad B(q) = \tfrac{\Delta}{RC}\, q^{-1}$$

Nota sobre a transformada Z



Pode-se usar a transformada Z do modelo ARMAX e suas variantes para especificar a função de transferência do domínio Z como

Nota sobre a transformada Z – Modelo ARMAX

$$A(z^{-1})y_i = B(z^{-1})u_i + C(z^{-1})e_i$$

onde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{sa} z^{-sa}$$

$$B(z^{-1}) = b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{sb} z^{-sb}$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \cdots c_{sc} z^{-sc}$$

Equação a diferença sem o erro

$$y(k) = -a_3\, y(k-1) - a_2\, y(k-2) - a_1\, y(k-3) - a_0\, y(k-4) + \\ + b_3\, u(k-1) + b_2\, u(k-2) + b_1\, u(k-3) + b_0\, u(k-4)$$