Apellido y nombre: Fuentes Urfeig Pedro
Nº de libreta: 1088/22
Turno: ☐ Mañana / ☒ Noche – Nº Orden: ~~[illegible]~~ 138
Nº hojas entregadas: ~~6~~ 7

Álgebra Lineal Computacional .UBA EXACTAS				
1	2	3	4	Calificación
B	R+	B	R	8 (ocho)

Segundo Parcial – 27 de junio de 2025

Ejercicio 1.

En la final del Mundial de Clubes de la FIFA 2025, el Inter de Miami y Benfica definen el título mediante tiros desde el punto penal. Los jugadores de cada uno de los equipos deben decidir si patear a la izquierda, al medio o a la derecha.

Basado en estudios recientes, se sabe que si un jugador j_1 eligió patear a la derecha, el siguiente en la tanda, j_2 elige patear a la derecha un 20% de las veces, al medio un 30% y a la izquierda un 50%. La situación si j_1 elige patear a la izquierda es análoga, es decir, j_2 patea a la izquierda el 20% de las veces, al medio el 30% y a la derecha el 50%. Finalmente, si j_1 patea al medio, a j_2 le parece muy obvio hacer lo mismo, así que patea al medio el 10% de las veces, y patea a los lados con igual probabilidad cada uno.

(a) Modelar el proceso mediante una matriz de Markov $\boldsymbol{P}$.

(b) Si Lionel Messi, el primer pateador, disparó al lado derecho, ¿cuáles son las probabilidades de que Fideo Di María, el cuarto pateador, patee a cada lugar?

(c) Si asumimos que la tanda de penales se hace larguísima y la gente comienza a irse del estadio del embole, decidir si existe un estado límite para las probabilidades de patear a cada lugar de cada jugador, y calcular, si existe, $\boldsymbol{P}^{\infty}$.

Ejercicio 2.

Dada la siguiente tabla de datos

x	-2	0	1	5
y	1	-13	12	4
z	27	-29	-12	26

(a) Hallar la función de la forma $z = ax + by + c$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los datos.

(b) Hallar la función de la forma $z = y + \frac{3}{ax+b}$ que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a los datos.

(c) Determinar, a partir del error cometido, cuál de los modelos se ajusta más a los datos.

Ejercicio 3.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A}$ es real entonces $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ tienen los mismos autovalores no nulos.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A}$ es real y cuadrada, $||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||_2 \geq ||\boldsymbol{x}||_2$ para todo $\boldsymbol{x}$ y $\text{máx}_{||x||_2=1}||\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{x}||_2 = 1$, entonces $\boldsymbol{A}$ es ortogonal.

Ejercicio 4. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada cuya diagonal es la identidad.

(a) Sea $\boldsymbol{B_J}$ la matriz asociada al método de Jacobi. Para cada $\omega > 0$ se define la relajación

$$\boldsymbol{B}_\omega = \omega \boldsymbol{B_J} + (1-\omega)\boldsymbol{I}.$$

Probar que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si y sólo si

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}_\omega\, \boldsymbol{x} + \omega\, \boldsymbol{b}.$$

(b) Sea $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y el método iterativo $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{B}_\omega\, \boldsymbol{x}^{(k)} + \omega \boldsymbol{b}$.

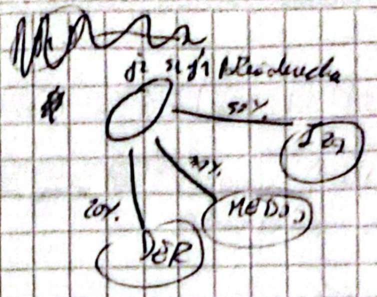
(i) Dar los valores de ω para los cuales el método converge.

(ii) ¿Qué valores de ω aseguran que el método planteado converge más rápido que Jacobi?

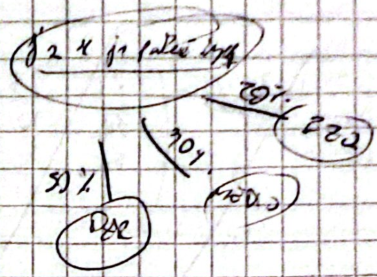
Completar esta hoja con los datos personales y entregar con el resto del examen.
Para aprobar es necesario tener al menos dos ejercicios completos bien.
Justificar todas las respuestas.

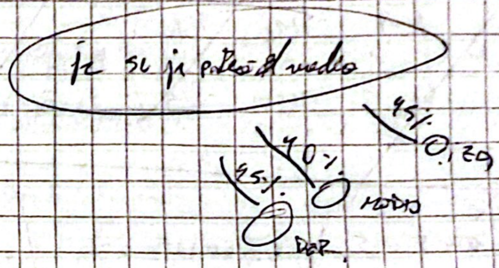
Pedro Fuentes Urfeig 1088/22	Hoja 1

1) a) $P =$



$$\begin{array}{c|ccc} & IZQ & MEDIO & DER \\ IZQ & & & \\ MEDIO & & & \\ DER & & & \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0.2 & 0.45 & 0.5 \\ 0.3 & 0.10 & 0.3 \\ 0.5 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}$$





b) Si el primer pateador, lanzara a la derecha, que probabilidad hay de que el cuarto patee a cada lugar?

Es decir, $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, queremos ver v_4. NO. V_3

Vamos a diagonalizar P, ya que lo vamos a necesitar para P^∞.

Buscamos autovalores de P.

$$\chi_P(\lambda) = 0 \iff \begin{vmatrix} 0.2-\lambda & 0.45 & 0.5 \\ 0.3 & 0.1-\lambda & 0.3 \\ 0.5 & 0.45 & 0.2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (0.2-\lambda)\left[(0.1-\lambda)(0.2-\lambda) - 0.135\right] - 0.3\left[0.45(0.2-\lambda) - 0.2\ldots\right.$$

$$+ 0.5\left[0.135 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\lambda\right)\right] = 0$$

$$\iff \left(\frac{1}{5}-\lambda\right)\left[-0.115 + \lambda^2 - \frac{3}{10}\lambda\right] - \frac{3}{10}\left[-0.135 - \frac{9}{20}\lambda\right] + \frac{1}{2}\left[0.085 + \frac{1}{2}\lambda\right] = 0$$

$$-0.023 + \frac{\lambda^2}{5} - \frac{3}{50}\lambda + 0.115\lambda - \lambda^3 + \frac{3}{10}\lambda^2 + 0.0405 + 0.135\lambda + 0.0425 + \frac{1}{4}\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) + \lambda\left(\overset{-\frac{3}{50}+}{0.115} + 0.135 + \frac{1}{4}\right) + 0.06 = 0.$$

$$-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{11}{25}\lambda + 0{,}06 = 0.$$

Luego como sé que 1 es autovalor, lo puedo dividir por $(\lambda-1)$

queda
$$(\lambda-1)\left(\lambda+1/5\right)\left(\lambda+3/10\right)=0. \implies \text{La matriz es diagonalizable}$$

Luego, como $ma_p(1)=1$, uno sigue ... la dimensión de $E_1 = 1$. (por ser diagonalizable).

Busquemos el autovector asociado.

E_1
$$\begin{pmatrix} -0.8 & 0.45 & 0.5 \\ 0.3 & -0.9 & 0.3 \\ 0.5 & 0.45 & -0.8 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3(-0.8)-\frac{1}{2}F_1]{F_2(-0.8)-F_1\cdot 0.3} \begin{pmatrix} 0.8 & 0.45 & 0.5 \\ 0 & 117/200 & -39/100 \\ \cancel{0} & \cancel{117/200} & \cancel{39/100} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\frac{117}{200}y = \frac{39}{100}z$$

$$y = \frac{2}{3}z.$$

$$0.8x + 0.45\cdot\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}z = 0. \implies z\left(-1,\ 2/3,\ 1\right).$$

$$x = -z$$

Normalizado queda

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

b) Vemos que nos piden $v_3 = P^3 v_0$

$$v_3 = P^3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37/80 \\ 63/250 \\ 721/2000 \end{pmatrix}$$

calculadora

(me dijo Feli que vale)

calculadora

Pedro Fuentes 1088/22 | Hoja 2

~~1b) Verificar que $v_4 = P^4 v_0$~~

1) c) Nos piden P^∞. Sabemos por propiedad que si hay un único autovalor de ~~mód~~ $\lambda = 1$ con v_1 como autovector asociado, P^∞ será $\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_1 & v_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

Luego, $P^\infty = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix}$.

~~Sabemos que~~ ⊛

⊛ Sabemos que P^∞ existe pues el ~~su~~ único autovalor de módulo 1 es el 1. Entonces, ~~[illegible]~~ para cualquier estado inicial v_0 existe $v_\infty = P^\infty v_0$

En particular, nos piden v_∞ para el v_0 del ítem b. Entonces,

$$v_\infty = \begin{pmatrix} 3/8 & 3/8 & 3/8 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 3/8 & 3/8 & 3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/4 \\ 3/8 \end{pmatrix}.$$

Pedro Fuentes Urfeig | Hoja 3

90/1/22

2)

X	-2	0	1	5
y	1	-13	12	4
Z	27	-29	-12	26

a) Hallar la función $Z = \underline{a}x + \underline{b}y + \underline{c}$ que mejor aproxima en el sentido de CM.

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = Z$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^t A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -13 & 12 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -13 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 4 \\ 30 & 330 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^t \cdot b = A^t \begin{pmatrix} 27 \\ -29 \\ -12 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 364 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Planteamos las ecuaciones normales.

$$\begin{pmatrix} 30 & 30 & 4 \\ 30 & 330 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 364 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 30 & 4 & 64 \\ 30 & 330 & 4 & 364 \\ 4 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{F_3}{4} - \frac{F_1}{30}]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 30 & 30 & 4 & 64 \\ 0 & 300 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & \frac{13}{15} & \frac{13}{15} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $c = 1$, $b = 1$. y $30a + 30 + 4 = 64$, $a = 1$

Luego la función final es

$$Z = x + y + 1.$$

Para el punto c) calculamos su error como

$$e = \sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i + 1 - z_i)^2 = (-27)^2 + (17)^2 + (26)^2 + (-16)^2 = 1950.$$

~~Pedro~~ Pedro Fuentes Urfeig
108f/22

Hoja 4

2)b). $z = y + \frac{3}{ax+b}$ — La linealizo.

$z(ax+b) - y(ax+b) = 3$.

$a(x(z-y)) + b(z-y) = 3$. Sea $w_i = z_i - y_i$

NO es el despeje más feliz

El sistema a resolver es

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Con } A = \begin{pmatrix} x_1w_1 & w_1 \\ x_2w_2 & w_2 \\ x_3w_3 & w_3 \\ x_4w_4 & w_4 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} x_1w_1 & x_2w_2 & x_3w_3 & x_4w_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}$$

W	26	-42	-24	22
XW	-52	0	-24	110.

Luego, planteamos las ecuaciones normales $A^TA\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^T\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -52 & 0 & -24 & 110 \\ 26 & -42 & -24 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -52 & 26 \\ 0 & -42 \\ -24 & -24 \\ 110 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -52 & 0 & -24 & 110 \\ 26 & -42 & -24 & 22 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

NO

$$\begin{pmatrix} 15380 & 1644 \\ 1644 & 3900 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 102 \\ -54 \end{pmatrix}$$

NO

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15380 & 1644 & 102 \\ 1644 & 3500 & -54 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 \cdot 15380 - F_1 \cdot 1644} \left(\begin{array}{cc|c} 15380 & 1644 & 102 \\ 0 & 51127264 & -998208 \end{array}\right)$$

Luego ~~[illegible]~~

$$b = \frac{-998208}{51127264} \approx -0{,}02$$

Arrastrás error

$$15380\,a + 1644 \cdot \frac{-998208}{51127264} = 102$$

~~[illegible]~~ $a \approx 5{,}48$.

Luego, la función queda ~~$axw + bw = 3$~~

$5,48\,xw - 0,02\,w = 3$

xw	-52	0	-24	110
w	26	-42	-24	22

Calculemos el error

$$\sum_{i=1}^{4} \left(a x_i w_i + b w_i - 3\right)^2 = \left(5,48\cdot(-52) - 0.02\cdot 26 - 3\right)^2 + \left(5,48\cdot 0 + 0.02\cdot 42 - 3\right)^2 + \dots$$

$$\dots \left(5,48\cdot(-24) + 0.02\cdot 24 - 3\right)^2 + \left(5,48\cdot 110 - 0,02\cdot 22 - 3\right)^2$$

$$\approx 83220,71 + 4,67 + 17966,72 + 359232$$

$$\approx 460424,7$$

c) Vemos que este error es mucho más grande que el calculado en el inciso ⓐ. Entonces, el modelo del inciso ⓐ se ajusta mejor a los datos.

No. Querés comparar el ajuste en Z si no la comparación no tiene sentido.

Pedro Fuentes Urfeig | Hoja 5

10/8/22

3) a) A real $\Rightarrow A^tA$ y AA^t tienen los mismos autovalores no nulos.

~~$A^tA = U\Sigma V^t$~~

~~$A^tA = UDU^t$~~

~~Vemos que por $A = U\Sigma V^t$, $A^tA = V\Sigma^t \underbrace{U^t U}_{I} \Sigma V^t = V \underbrace{\Sigma^t\Sigma}_{n\times n} V^t$ $\overset{\text{por ser } A^tA \text{ simétrica real}}{=} VDV^t$~~

~~$AA^t = U\Sigma V^t V \Sigma^t U^t = U \underbrace{\Sigma\Sigma^t}_{m\times m} U^t$ $\overset{\text{por ser } AA^t \text{ simétrica real}}{=} UDU^t$~~

$A = U\Sigma V^t$.

$A^tA = V\Sigma^t\Sigma V^t$

$AA^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$

~~Como A^tA y AA^t son cuadradas, simétricas y reales, ...~~

Vemos que $\Sigma\Sigma^t$ y $\Sigma^t\Sigma$ son diagonales, ~~pero~~ $\Sigma\Sigma^t$ es $m\times m$ y $\Sigma^t\Sigma$ es $n\times n$.

Pero como
$$\Sigma\Sigma^t = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \ddots 0 \\ \hline & & 0 & \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 \ddots 0 & \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}$$

($m \geq n$) análogo para $n \geq m$

$$\Sigma^t\Sigma = \left(\begin{array}{cccc|c} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \sigma_r & & \\ & & & 0 \ddots 0 & \end{array}\right) \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \ddots 0 \\ \hline & & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix}$$

~~Vemos que es autovalores ... con A^tA~~

Vemos que sus autovalores $\lambda_1 \dots \lambda_r$ son los mismos! No así los nulos, ya que una tendrá multiplicidad $m-r$ y otra $n-r$, siendo r la cantidad de autovalores no nulos.

B!

D.

3) b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\Longrightarrow$ A es ortogonal

$\|Ax\|_2 \geq \|x\|_2 \ \forall x$

$\max_{\|x\|_2=1} \|AA^t x\|_2 = 1$.

Veamos que A es ortogonal $\Leftrightarrow$ $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \ \forall x$. Veamos de llegar a eso con nuestras hipótesis

Ya tenemos $\|Ax\|_2 \geq \|x\|_2$. Si probamos $\|Ax\|_2 \leq \|x\|_2$ ¡genial!

·) La 3ra hipótesis nos dice que $\max_{\|x\|_2=1} \|AA^t x\|_2 = 1 \Leftrightarrow \|AA^t\|_2 = 1$.

es decir, el valor singular máximo de AA^t es 1.

Tomo $A = U\Sigma V^t$. Luego, $AA^t = U\Sigma V^t V \Sigma U = U\Sigma^2 U^t$. Esta es una descomposición SVD válida para AA^t ya que ~~ya que~~ U, V, Σ son cuadradas.

Entonces, vemos que en Σ^2 hay algo de la pinta $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots \sigma_k^2 & \\ 0 & & & \sigma_{n-1} \end{pmatrix}$, tomando $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \sigma_2 \ddots & \\ 0 & & \sigma_{n-1} \end{pmatrix}$

~~[illegible]~~

Veamos entonces $\|AA^t x\|_2 = \|U\Sigma^2 \underbrace{U^t x}_{y}\|_2 = \|U \underbrace{\Sigma^2 y}_{w}\|_2 = \|Uw\|_2 = \|w\|_2 = \|\Sigma^2 y\|_2 \ldots$

U ortogonal

$\ldots \leq \|\Sigma^2\|_2 \|y\|_2 = \|\Sigma^2\|_2 \|x\|_2$

U^t ortogonal.

lo podías hacer directamente con $AA^t x$

$\|AA^t x\|_2 \leq \|AA^t\|_2 \|x\|_2$

Busquemos $\|\Sigma^2\|_2$. Sabemos que la norma 2 es el ~~[illegible]~~ valor singular máximo de la matriz.

Luego, podemos escribir la SVD de Σ^2 como

$\Sigma^2 = I \Sigma^2 I^t$. Entonces, el valor singular máximo es 1.

Luego, $\|\Sigma^2\|_2 = 1$. Entonces queda demostrado que

$\|AA^t x\|_2 \leq \|x\|_2$. que era lo que se quería ver.

Pedro Fuentes Urfeig 10/08/22
(Perdón, uso la hoja al revés). Hoja 6

4) A cuadrada con diagonal $= I$

~~a) $\omega > 0$ $B_\omega = \omega B_J + (1-\omega) I$.~~

~~Probar que $Ax = b \Rightarrow x = B_\omega x + \omega b$.~~

b). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad x_{k+1} = B_\omega x_k + \omega b$.

Dar w tq el método converge. Queremos ver los autovalores de la matriz que gobierna la iteración B_ω.

$B_J = -\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Luego, $B_\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{w}{2} \\ -\frac{w}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-w & 0 \\ 0 & 1-w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w-1 & -w/2 \\ -w/2 & w-1 \end{pmatrix}$.

Veamos sus autovalores.

$$\begin{vmatrix} w-1-\lambda & -\frac{w}{2} \\ -\frac{w}{2} & w-1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (w-1-\lambda)^2 - \frac{w^2}{4} = 0.$$

$$|w-1-\lambda| = \frac{|w|}{2}$$

Como sabemos $|w| > 0$, $(w > 0)$

$|w-1-\lambda| = \frac{w}{2}$

$\hookrightarrow w-1-\lambda = -\frac{w}{2} \iff \lambda = w-1+\frac{w}{2} = \frac{3w}{2}-1$

$\hookrightarrow w-1-\lambda = \frac{w}{2} \iff \lambda = \frac{w}{2}-1$.

Tenemos que pedir $\rho(B_\omega) < 1$ para que converja el método.

i) $\left|\frac{3w}{2}-1\right| < 1 \iff -1 < \frac{3w}{2}-1 < 1 \iff 0 < \frac{3w}{2} < 2 \iff 0 < 3w < 4 \iff 0 < w < 4/3$.

ii) $\left|\frac{w}{2}-1\right| < 1 \iff -1 < \frac{w}{2}-1 < 1 \iff 0 < \frac{w}{2} < 2 \iff 0 < w < 1$ 4

Luego, basta con pedir $0 < w < 1$ para que el método converja.

OJO con el despeje.

ii) Qué valores planteados de w aseguran que el método converge más rápido que Jacobi?

Busquemos el radio espectral de Jacobi

$\rho(B_J)$, $B_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Buscamos los autovalores de la matriz.

$\begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 \\ -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 = \frac{1}{4} \iff |\lambda| = \frac{1}{2}$. Luego, $\rho(B_J) = \frac{1}{2}$. 4

Entonces, para que el otro método converja más rápido que Jacobi, tenemos que pedir ~~...~~ ⊛ (sigue en hoja 7, perdón pero me di cuenta sobre el final ii)

---

i) ~~...~~ q.v.q. $Ax=b \iff x = B_w x + wb$.

Veamos que ~~...~~ $B_J = -N$, siendo $A = \overset{I}{M} + N$, entonces $B_J = \underset{I}{-M^{-1}} \cdot N = -N$.

Luego, $B_w = -wN + (1-w)I$.

$Ax = b \iff x = -M^{-1}Nx + M^{-1}b \iff x = -Nx + b$.

Ahora, q.v.q.

$$-Nx + b = B_w x + wb$$

$$\iff -Nx+b = (-wN + (1-w)I)x + wb.$$

$$\iff b - wb = (-wN + (1-w)I + N)x$$

~~...~~

$$(1-w)b = ((1-w)N + (1-w)I)x$$

$$(1-w)b = (1-w)(N+I)x$$

$$w \neq 1 \quad b = (N+I)x$$

$$b = Nx + x$$

$$\iff \boxed{-Nx + b = x} \quad \boxed{\text{como se quería}}.$$

Es el N de Jacobi!

$N = L + U$.

Pedro Fuentes Urfeig ~~Pedro Fuentes U~~ Hoja 7

10/1/22

4) b) Tenemos que pedir $\rho(B_w) < 1/2$.

Entonces tenemos que $\rho(B_w) = \max\left\{ \left|w - \frac{1}{2}\right|, \left|\frac{w}{2} - 1\right| \right\} < 1/2$.

Veamos qué valores pueden para que ambos elementos se cumplan

.) $\left|\frac{w}{2} - 1\right| < 1/2$

$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < \frac{w}{2} - 1 < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{w}{2} < \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 1 < w < 3$

Aquí había un error.

Pero habíamos pedido que $0 < w < 1$ para que el método converja. Entonces, vemos que no hay ningún valor de w que haga que el método converja más rápido que Jacobi.