Apellido y nombre: Fuentes Urfeig Pedro
N° de libreta: 1018/22
Turno: Noche
N° hojas entregadas: 5

Álgebra Lineal Computacional .UBA EXACTAS				
1	2	3	4	Calificación
B	B-	R	B-	8

Primer Parcial – 17 de mayo de 2025

Ejercicio 1.

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular una descomposición LU donde L tiene unos en la diagonal.

(b) Mostrar que si $\alpha \in \mathbb{R}$, L es como en la parte anterior y $L_\alpha = L + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ entonces $A = L_\alpha U$.

(c) Para la descomposición de la parte (a) mostrar que $\text{Nú}(A) = \text{Nú}(U)$.

(d) Calcular el espacio de soluciones de

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = 5 \\ 2x & & +6z & = 6 \\ & 4y & & = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales todos distintos entre sí, y sea $A_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz cuadrada e inversible dada por:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Sabiendo que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_{n_0} > 1$,

(a) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \text{cond}_\infty(A_n) = +\infty$.

(b) Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \text{cond}_2(A_n) = +\infty$.

Sugerencia: Recuerde que para toda matriz $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vale que $\frac{1}{\sqrt{n}}\|B\|_\infty \leq \|B\|_2 \leq \sqrt{n}\|B\|_\infty$.

Ejercicio 3.

(a) Sean $L_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y, z = 0\}$ y $L_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$. Describir $S = L_1 + L_2$ y dar una base ortonormal para dicho subespacio.

(b) Sea $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ el proyector ortogonal a S. A partir de $P\,(0,-2,5)$ calcular la distancia de $(0,-2,5)$ a S.

(c) Sea $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Probar que $(QP)^t Q = P$.

Ejercicio 4. Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$, para cada una de las siguientes afirmaciones, determinar su validez. En caso de ser falsas, dar un contraejemplo, y en caso de ser verdaderas demostrarlas:

(a) Si v es un autovector de A, y A es inversible, entonces v es un autovector de A^{-1}.

(b) Si A y B son diagonalizables, $A + B$ también lo es.

(c) Si A y B son diagonalizables, entonces AB es diagonalizable.

(d) Si A o B es inversible y AB es diagonalizable entonces BA también es diagonalizable.

Completar esta hoja con los datos personales y entregar con el resto del examen.
Para aprobar es necesario tener al menos dos ejercicios completos bien.
Justificar todas las respuestas.

Pedro Fuentes Urfeig 1088/22

Turno Noche

Hoja 1

1) a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&6\\0&4&0\end{pmatrix}$ calcular LU.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&6\\0&4&0\end{pmatrix} \quad F_2=F_2-2F_1 \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&0\\0&4&0\end{pmatrix} \quad F_3=F_3-(F_2) \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&6\\0&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

B

---

b) Si $\alpha\in\mathbb{R}$, L es como en la parte anterior y $L_\alpha=L+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\alpha\end{pmatrix}$ entonces $A=L_\alpha U$.

Veamos una LU genérica para A. $\boxed{\text{Veamos que } l_4=1+\alpha.}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&0&6\\0&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\l_1&1&0\\l_2&l_3&l_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\boxed{1=u_{11}}\\\boxed{2=u_{12}}\\\boxed{3=u_{13}}\end{cases} \qquad \begin{cases}\boxed{2=l_1}\\0=2l_1+u_{22} \iff \boxed{u_{22}=-4}\\6=2\cdot3+u_{23} \iff \boxed{u_{23}=0}\end{cases}$$

$$\begin{cases}0=l_2\cdot1 \iff \boxed{l_2=0}\\4=l_3\cdot(-4) \iff \boxed{l_3=-1}\\0=\cancel{l_2\cdot u_{13}}+l_3\cdot u_{23}+l_4\cdot u_{33}\end{cases}$$

$0=-\cancel{u_{23}}+l_4\cdot u_{33}$

$0=l_4\cdot u_{33}$

$\hookrightarrow u_{33}=0$

$\hookrightarrow l_4=0 \implies \boxed{\alpha=-1}.$

B

Vemos que, como U está igual que en la parte anterior, entonces u_{33} necesariamente es cero.

Resolvemos la última ecuación

$0=l_4\cdot u_{33}$

$0=(1+\alpha)\cdot0. \implies$ Vale $\forall\alpha\in\mathbb{R}!$ $\quad L_\alpha=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&-1&1+\alpha\end{pmatrix}$

D.

c) Para la LU del ej (a), mostrar que $Nu(A) = Nu(U)$.

<u>$Nu(A)$</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underbrace{\ldots}_{\text{Mismos pasos que en (a)}} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es literalmente U. Calculemos el núcleo, pero sabemos que va a ser igual.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ -4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow Nu(A) = Nu(U) = \langle (-3, 0, 1) \rangle$

---

d) Calcular el espacio de soluciones de

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 6z = 6 \\ 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z = 5 - 2 = 3 \\ x + 3z = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 3z \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{z(-3, 0, 1) + (3, 1, 0)}.$$

B

$S = S_H + S_P$

Pedro Fuentes Urfeig — Turno Noche — $1{,}5 + 0{,}5$

10/1/22 — Hoja 2.

2)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

i) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales distintos entre sí.

ii) A es cuadrada e invertible.

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\alpha_{n_0} > 1$.

a) Demostrar que $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Cond}_\infty(A_n) = +\infty$

~~Sé que $\|A\|_\infty \geq 2$, ya que hay un $\alpha_{n_0} > 1$. Luego, como $\|A\|_\infty$ es la máx suma de los elementos en módulo de las filas, $1 + \alpha_{n_0} > 2$.~~

Sé que $\|A\|_\infty = \max_i \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_i^j| \right\}$. Luego, como $\alpha_{n_0} > 1$,

$$\|A\|_\infty \geq 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_{n_0}^j| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$ pues $\alpha_{n_0} > 1$, $\sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_{n_0}^j| \geq n$

Luego, si tomamos $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 0 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$, que vemos que es singular pues tiene una columna llena de ceros ~~[illegible]~~

$\|A - H_0\| = 1$.

$$\mathrm{Cond}_\infty(A_n) \geq \sup_{H \text{ singular}} \frac{\|A\|_\infty}{\|A-H\|_\infty} \geq \underbrace{\frac{\|A\|_\infty}{\|A - H_0\|_\infty}}_{H_0 \text{ singular}} = \|A\|_\infty \geq 1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\alpha_{n_0}^j| \geq n$$

~~Si tomamos~~ Entonces, si tomamos ~~[illegible]~~ el límite de $n \to \infty$, $\mathrm{Cond}_\infty(A_n) \to \infty$.

b) Veamos lo mismo para $\mathrm{Cond}_2(A_n)$.

$$\mathrm{Cond}_2(A_n) \geq \sup_{H \text{ singular}} \frac{\|A\|_2}{\|A-H\|_2} \geq \frac{\|A\|_2}{\|A-H_0\|_2}$$

H_0 del ej anterior

Sigue

$$\frac{\|A\|_2}{\|A-H_0\|_2} \geq \frac{\|A\|_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{\|A-H_0\|_2}$$

Veamos $\|A-H_0\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|(A-H_0)x\|_2$. Pero $A-H_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$.

Entonces $(A-H_0)x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \|(A-H_0)x\|_2 = |x_1| \cdot \sqrt{n}$

Luego, el máximo $\|x\|_2=1$ va a ser el que tenga $|x_1| = 1$.

Luego, $\|A-H_0\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|(A-H_0)x\|_2 = 1$. (*)

Volvemos a la desigualdad. $\frac{\|A\|_\infty \cdot 1/\sqrt{n}}{\|A-H_0\|_2} = \|A\|_\infty \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$.

(*) $(A-H_0)e_1 = (1, \ldots, 1)$

$\|(1, \ldots, 1)\|_2 \geq \sqrt{n} > 1$ (para $n \geq 2$)

Pedro 10/8/22

Pedro Fuentes Urfeig — Hoja 3

1088/22 — Turno Noche

3) a) $L_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; \begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases} \right\}$ $\quad L_2 = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 , \; x=y=z \}$.

Describir $S = L_1 + L_2$ y dar una bon para S.

$L_1 = \langle (1,1,0) \rangle$

$L_2 = \langle (1,1,1) \rangle$.

$S = \langle (1,1,1), (1,1,0) \rangle$. Vemos que no son ortogonales. Usamos G-S para obtener $\tilde{S}$, una bon de S.

¿por qué?

G-S

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\,1\,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$

$\tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{9}$ mal normalizado ¿$\frac{\sqrt{6}}{18}$?

$$\boxed{\tilde{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{6}/9 \\ \sqrt{6}/9 \\ -2\sqrt{6}/9 \end{pmatrix} \right\} \text{ bon de } S.}$$ $\quad \tilde{S} = \{ \tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \}$.

B-

b). Sea $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ el proyector ortogonal a S. A partir de $P(0,-2,5)$, calcular la distancia de $(0,-2,5)$ a S.

Calculamos $P(0,-2,5)$. → ¿por qué son $\tilde{s}_1$ y $\tilde{s}_2$?

$P = \tilde{s}_1 \tilde{s}_1^t + \tilde{s}_2 \tilde{s}_2^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1\,1\,1) \cdot \frac{1}{3} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} (1\,1\,-2) \frac{6}{81}^{\;2/27} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{27} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

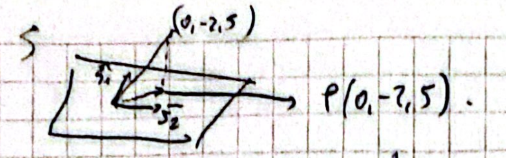
¿de dónde sale?

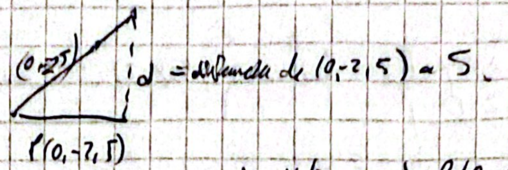
$= \begin{pmatrix} 11 & 11 & 5 \\ 11 & 11 & 5 \\ 5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \frac{1}{27}$

$P \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \left(\tilde{s}_1 \tilde{s}_1^t + \tilde{s}_2 \tilde{s}_2^t \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

$= \begin{pmatrix} 11 & 11 & 5 \\ 11 & 11 & 5 \\ 5 & 5 & 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ M

Luego, vemos lo siguiente (sigue atrás).





$d = \| (0,-2,5) - P(0,-2,5) \|_2$.

$d = (0,-2,5) - (1,1,1) = (-1,-3,4)$

$\| (1,-3,4) \|_2 = \sqrt{26}$.

M

---

c) ~~Vemos~~ $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Probar $(QP^t)Q = P$.

Vemos que las columnas de Q son una base de $\mathbb{R}^3$. Luego, Q es ortogonal. Es decir, vale que $Q^t = Q^{-1}$.

Ah! acá dice b.o.n.! ok (leí "base").

Veamos que $(QP)^t Q = P$

$P^t Q^t Q = P$

$P^t Q^{-1} Q = P$

$P^t = P$.

Como $P = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 11 & 11 & 5 \\ 11 & 11 & 5 \\ 5 & 5 & 17 \end{pmatrix}$, ¡vemos que vale!

B.

B

Pedro Fuentes Urfeig
1088/22

Turno Noche
Hoja 4

4) a) Si v es autovector de A, y A es inversible, v es autovector de A^{-1}.

Sé que
$$Av = \lambda v$$
$$A^{-1}.Av = A^{-1}\lambda v$$
$$v = \lambda . A^{-1} v \quad ; \quad \lambda \neq 0 \text{ puesto que } A \text{ es inversible.}$$
$$\frac{1}{\lambda} v = A^{-1} v$$

OK, justifica un poco más pero va!

Luego, v es autovector de A^{-1}. □

b) Falsa. Veamos un contraejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{es diagonalizable pues } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Veamos que A es diagonalizable.

$$\chi_A(\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$
$\hookrightarrow \lambda = 0$
$\hookrightarrow \lambda = 1$.

Como tiene dos autovalores distintos, es diagonalizable (pues $n=2$)

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ Busquemos sus autovalores para ver si es diagonalizable.

$$\chi_{A+B}(\lambda) = 0.$$
$$(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$
$\hookrightarrow \lambda = 2$ es autovalor con $ma_{A+B}(2) = 2$.

$$E_2 = Nu\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle (1,0) \rangle.$$ Vemos que $mg_{A+B}(2) = 1 \neq 2$. Luego, no es diagonalizable.

Excelente

~~A si A y B son diagonalizables, AB lo es~~

d) Si A y B inversible y AB diagonalizable $\Rightarrow$ BA diagonalizable.

~~1° caso: si B es inversible.~~

~~$ABv = \lambda v$~~

~~$A^{-1}ABv = A^{-1}\lambda v$~~

~~$Bv = \lambda A^{-1}v$~~

→ Perdón la desprolijidad...

~~Usando B inversible sin pérdida de generalidad~~

Sé que $AB = CDC^{-1}$

$$AB.B^{-1} = CDC^{-1}.B^{-1} \quad (*)$$

$$A = CDC^{-1}B^{-1}$$

$$BA = B.C\,D\,C^{-1}B^{-1}$$

$$BA = \tilde{C}\,D\,\tilde{C}^{-1}$$

·) Vemos que $\tilde{C}$ es inversible ya que $\det(\tilde{C}) = \det(C^{-1})\det(B^{-1})$.

~~·) Diagonalizable~~ ·) D diagonal por def.

Como B y C son inversibles (por def) su determinante es $\neq 0$. Luego, $\tilde{C}$ tiene determinante $\neq 0$, entonces es inversible.

Luego, llegamos a una descomposición válida para BA. Entonces es diagonalizable. $\square$

(*) Si A es inversible y B no lo es, la demostración es análoga.

$$A^{-1}AB = A^{-1}\,CDC^{-1}$$

$$BA = A^{-1}.C\,D.C^{-1}.A. \quad \dots$$

Excelente.

c) Si A y B son diagonalizables $\Rightarrow$ AB es diagonalizable.

$Bv = \lambda_B v$ [illegible]

$ABv = A\lambda_{B}v$

~~$ABv = \lambda_B Av$~~ ~~[illegible]~~

~~$ABv = \lambda_{AB}v$~~ ~~$\rightarrow$ AB es diagonalizable.~~

↗ sigue

Pedro Fuentes Urfeig
10/8/22

Hoja 5
Turno Noche

4)c) $AB\,v = \lambda_B \cdot Av$.

~~Si muestro que Av es base, quedaría demostrado que AB~~

~~Vamos que puedo escribir Av~~

~~[illegible]~~

Como A es diagonalizable, sus autovectores forman una base de $\mathbb{C}^n$

(una combinación lineal)

$V = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$, siendo $w_1 \dots w_n$ los autovectores de A

$Av = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A w_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i w_i$

Luego, vemos que podemos escribir a cualquier v como combinación lineal de autovectores de A.

Entonces, vale que $AB\,v = \lambda_B Av$, entonces AB es diagonalizable.

X Es falsa. :(

Muy bien todo el punto en gral igual
Se nota que entendiste :)