# 1 Ejercicio I.15

Definir las compuertas **And** y **Or**.

And := $\lambda x.\lambda y.match(x, w.match(y, a.inl(*), b.inr(*)), z.inr(*))$

Or := $\lambda x.\lambda y.match(x, a.inr(*), b.match(y, c.inl(*), d.inr(*)))$

# 2 Ejercicio I.16

Dar el tipo de **And** y **Or**.

## 2.1 Tipo de And

El tipo de **And** es: Bool $\to$ Bool $\to$ Bool, donde Bool $= \top \lor \top$. Tomé $\Gamma = x : \text{Bool}, y : \text{Bool}$.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \top \lor \top}\,ax
\qquad
\dfrac{
\dfrac{}{\Gamma \vdash y : \top \lor \top}\,ax
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, a : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma, a : \top \vdash inl(*) : \top \lor \top}\,\lor_{i_1}
\quad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, b : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma, b : \top \vdash inr(*) : \top \lor \top}\,\lor_{i_2}
}{\Gamma \vdash match(y, a.inl(*), b.inr(*)) : \text{Bool}}\,\lor_e
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, z : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma, z : \top \vdash inr(*) : \text{Bool}}\,\lor_{i_2}
}{\dfrac{\Gamma \vdash match(x, w.match(y, a.inl(*), b.inr(*)), z.inr(*)) : \text{Bool}}{x : \text{Bool} \vdash \lambda y.match(x, w.match(y, a.inl(*), b.inr(*)), z.inr(*)) : \text{Bool} \to \text{Bool}}\,\to_i}\,\lor_e
}{\vdash \lambda x.\lambda y.match(x, w.match(y, a.inl(*), b.inr(*)), z.inr(*)) : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}}\,\to_i
$$

## 2.2 Tipo de Or

El tipo de **Or** es: $\text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}$, donde $\text{Bool} = \top \lor \top$. Tomé $\Gamma = x : \text{Bool}, y : \text{Bool}$ y $\Gamma_1 = \Gamma, b : \top$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \top \lor \top}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, a : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma, a : \top \vdash inr(*) : \top \lor \top}\,\lor_{i_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash y : \top \lor \top}\,ax \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, c : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma_1, c : \top \vdash inl(*) : \top \lor \top}\,\lor_{i_1} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1, d : \top \vdash * : \top}\,\top_i}{\Gamma_1, d : \top \vdash inr(*) : \top \lor \top}\,\lor_{i_2}}{\Gamma_1 \vdash match(y, c.inl(*), d.inr(*)) : \text{Bool}}\,\lor_e}{\Gamma \vdash match(x, a.inr(*), b.match(y, c.inl(*), d.inr(*))) : \text{Bool}}\,\lor_e}{x : \text{Bool}, y : \text{Bool} \vdash match(x, a.inr(*), b.match(y, c.inl(*), d.inr(*))) : \text{Bool}}\,\to_i}{x : \text{Bool} \vdash \lambda y.match(x, a.inr(*), b.match(y, c.inl(*), d.inr(*))) : \text{Bool} \to \text{Bool}}\,\to_i}{\vdash \lambda x.\lambda y.match(x, a.inr(*), b.match(y, c.inl(*), d.inr(*))) : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}}\,\to_i
$$

# 3 Ejercicio II.5

Demostrar el teorema 4.12. En **Set**, los epimorfismos son las funciones sobreyectivas. Osea, toda flecha $f : A \to B$ cumple que $\forall b \in B, \exists a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Ida: f es un epimorfismo $\implies$ f es sobreyectiva. Vamos a demostrarlo por el contrarrecíproco. Es decir f no es sobreyectiva $\implies$ f no es un epimorfismo. Entonces, quiero buscar $g : B \to C, h : B \to C$ con $g \neq h$ pero $g \circ f = h \circ f$.

La idea es que $g(b_0) \neq h(b_0)$ para algún $b_0 \in B$, pero que tengan el mismo comportamiento sobre la imagen de $f$.

Por simpleza tomemos $g(b) = 0$ y $h(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq b_0 \\ 1 & \text{si } b = b_0 \end{cases}$

De este modo, $g(b_0) \neq h(b_0)$, por ende $g \neq h$.

Veamos ahora $g \circ f = h \circ f \iff (g \circ f)(a) = (h \circ f)(a) \forall a \in A$. Vemos que $f(a) \neq b_0 \forall a \in A$. Luego,

- $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = 0$, pues $g$ es constante y $f(a) \in Dom(g)$
- $(h \circ f)(a) = h(f(a)) = 0$, pues $f(a) \neq b_0$ por hipótesis.

Luego, vemos que $g \circ f = h \circ f$ para todo $a \in A$, pero no vale que $g = h$, por ende $f$ no es un epimorfismo.

Vuelta: f es sobreyectiva $\implies$ f es un epimorfismo. Quiero ver que $g \circ f = h \circ f \implies g = h$, para $g : B \to C, h : B \to C$. Como asumo que $f$ es sobreyectiva, sé que toda su imagen $B$ está alcanzada por un $f(a)$, con $a \in A$.

Vamos a demostrarlo por absurdo. Asumamos que $g(b_1) \neq h(b_1)$ para algún $b_1 \in B$. Luego, como $b_1 \in B$, sabemos que existe un $a_1 \in A$ tal que $f(a_1) = b_1$.

Entonces, como sabemos que $g \circ f = h \circ f$, tenemos que:

$$(g \circ f)(a_1) = (h \circ f)(a_1)$$
$$g(f(a_1)) = h(f(a_1))$$
$$g(b_1) = h(b_1)$$

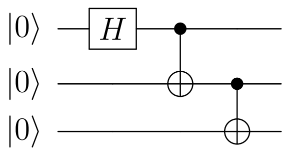
Absurdo! Pues habíamos asumido que $g(b_1) \neq h(b_1)$. Luego, $g = h$. Entonces, $f$ es un epimorfismo.

$\square$

# 4 Ejercicio III.15

Dar un circuito que genere el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ a partir de la entrada $|000\rangle$.

Un circuito que cumple es el siguiente:




Veamos que esto es correcto. Comenzamos con el estado $|\psi_0\rangle = |000\rangle$, que es lo mismo que $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. Vemos que al aplicar Hadamard al primer qubit obtenemos lo siguiente:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$$

Luego, al aplicar el CNOT con el control en el primer qubit y el target en el segundo, tenemos lo siguiente:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$$

Esto es porque el control es el primer qubit. Entonces, si el primer qubit es 0, no hace nada (entonces queda en 0 el segundo). Pero si el primero es 1, se cambia el segundo qubit a 1.

Luego, al aplicar el CNOT con el control en el segundo qubit y el target en el tercero, sucede lo mismo pero en el tercer qubit.

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Que es lo mismo que $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$.