Atividade 05 - Pedro José Garcia 11846943

1)

Resolvendo o exercício 9, temos $y=\sin(\pi x)$, logo temos que $y_0=\sin(\pi 0)$, $y_0=0$, $y_1=\sin(\pi \cdot \frac{1}{6})=\sin(\frac{\pi}{6})=0{,}5$, $y_2=\sin(\pi \cdot \frac{1}{2})=\sin(\frac{\pi}{2})=1$, logo temos a seguinte tabela:

x	0	1/6	1/2
y	0	0,5	1

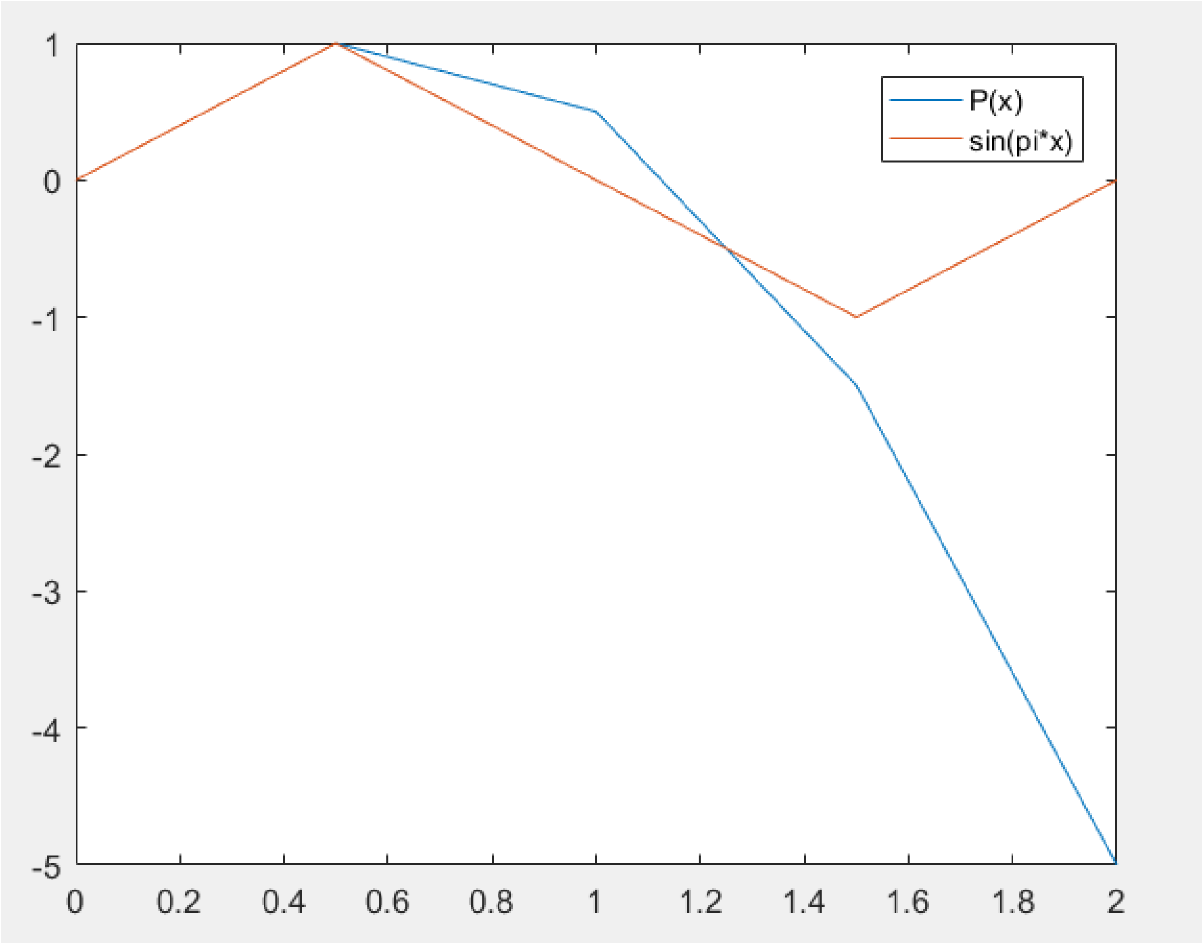
, vamos utilizar o metodo de Lagrange para encontrar o polinômio de interpolação, por ele sabemos que $P(x)$ possui a seguinte forma, $P(x)=y_0 \cdot L_0(x)+y_1 \cdot L_1(x)+y_2 \cdot L_2(x)$, logo $P(x)=0 \cdot L_0(x)+0{,}5 \cdot L_1(x)+1L_2(x)=0{,}5L_1(x)+L_2(x)$, vamos calcular $L_1(x)$,

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1/2)}{(1/6-0)(1/6-1/2)}=\frac{x^2-\frac{x}{2}}{(\frac{1}{6})(\frac{-2}{6})}=\frac{x^2-\frac{x}{2}}{\frac{-2}{36}}=\frac{\frac{2x^2-x}{2}}{\frac{-1}{18}}=\frac{36x^2-18x}{-2}=$$

$$\frac{2(18x^2-9x)}{-2}=-18x^2+9x$$, logo $L_1(x)=-18x^2+9x$, vamos calcular $L_2(x)$,

$$L_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-1/6)}{(1/2-0)(1/2-1/6)}=\frac{x^2-\frac{x}{6}}{(\frac{1}{2})(\frac{2}{6})}=\frac{\frac{6x^2-x}{6}}{\frac{1}{6}}=6x^2-x$$, logo

$P(x)=0{,}5(-18x^2+9x)+6x^2-x=-9x^2+\frac{9x}{2}+6x^2-x=-3x^2+\frac{7x}{2}$, portanto, $P(x)=-3x^2+\frac{7x}{2}$. Vamos calcular $P(0{,}4)$, $P(0{,}4)=-3(0{,}4)^2+\frac{7(0{,}4)}{2}=-0{,}48+1{,}4$, logo $P(0{,}4)=0{,}92$. Agora, vamos calcular $P(1)$, $P(1)=-3(1)^2+\frac{7(1)}{2}=-3+3{,}5=0{,}5$, logo $P(1)=0{,}5$. Sobre a precisão de $P(x)$ para $x=0{,}4$, temos que calcular $y=\sin(\pi \cdot 0{,}4)=0{,}951$, $P(0{,}4)=0{,}92$, logo $P(x)$ foi muito precisa, já que a diferença para o valor correto é de 0,031, agora para $x=1$, temos que calcular $y=\sin(\pi \cdot 1)=0$, $P(1)=0{,}5$, logo $P(x)$ foi pouco precisa, já que a diferença para o valor correto é de 0,5, uma forma de melhorar a precisão para $x=1$ é fazer a tangente de $P(1)$, uma vez que, $\tan(0{,}5)=0{,}008$, ou seja, bem próxima de 0, contudo, isso pode piorar a aproximação para outros casos.



P(x)
sin(pi*x)
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2

2)

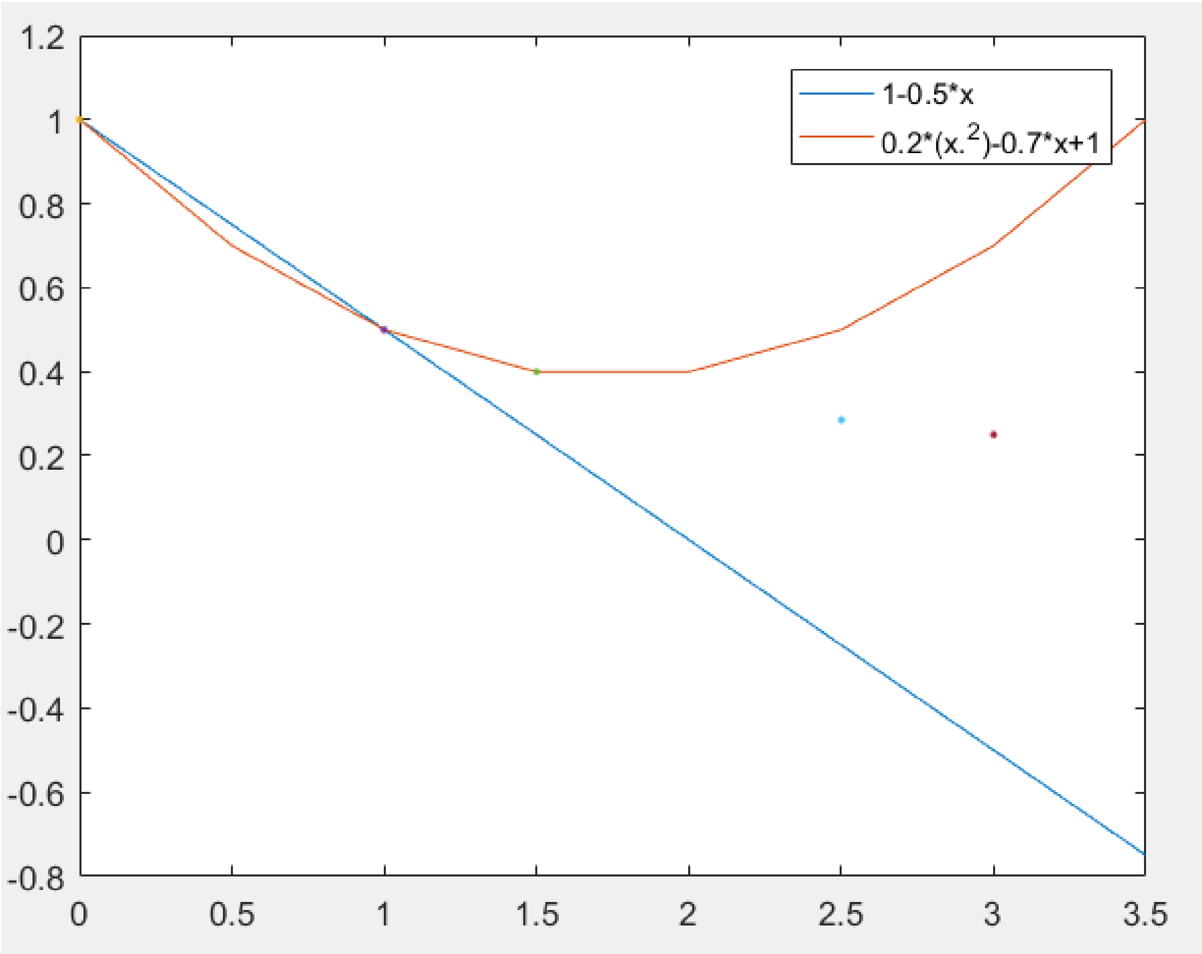
Resolvendo o exercício 11 a, temos que $P(x) = d_0 + d_1(x - x_0)$, vamos calcular d_0 e d_1, $d_0 = f(x_0)$, $d_0 = f(0) = 1$, $d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$,

$d_1 = \frac{0{,}5 - 1}{1 - 0} = -0{,}5$, logo $P(x) = d_0 + d_1(x - x_0) = 1 - 0{,}5(x - 0) = 1 - 0{,}5x$,

vamos calcular $P(0{,}5)$, $P(0{,}5) = 1 - 0{,}5 . 0{,}5 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Resolvendo o exercício 11b, temos que $P(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1)$, vamos calcular d_0, d_1 e d_2, $d_0 = f(x_0)$; $d_0 = f(0) = 1$; $d_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, $d_1 = \frac{0{,}5 - 1}{1 - 0} = -0{,}5$,

$$d_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - (-0{,}5)}{1{,}5 - 0} = \frac{\frac{0{,}4 - 0{,}5}{1{,}5 - 1} + 0{,}5}{1{,}5} = \frac{\frac{-0{,}1}{0{,}5} + 0{,}5}{1{,}5} = 0{,}2,$$

logo $P(x) = 1 - 0{,}5(x - 0) + 0{,}2(x - 0)(x - 1) = 1 - 0{,}5x + 0{,}2x^2 - 0{,}2x = 0{,}2x^2 - 0{,}7x + 1$, portanto, $P(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}7x + 1$, vamos calcular $P(0{,}5)$, $P(0{,}5) = 0{,}2(0{,}5)^2 - 0{,}7(0{,}5) + 1$, $P(0{,}5) = 0{,}2 . 0{,}25 - 0{,}35 + 1 = 0{,}7$. O polinômio $P(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}7x + 1$ gera uma aproximação melhor para $f(x)$, uma vez que, foi usado mais pontos de $f(x)$ para gerá-lo, podemos testar a aproximação usando o ponto 2,5, para $1 - 0{,}5x$, $1 - 0{,}5(2{,}5) = -0{,}25$, para $0{,}2(2{,}5)^2 - 0{,}7(2{,}5) + 1 = 0{,}2 . 6{,}25 - 1{,}75 + 1 = 0{,}5$, $f(2{,}5) = 0{,}286$, $|0{,}5 - 0{,}286| = 0{,}214$, $|-0{,}25 - 0{,}286| = +0{,}536$, $0{,}214 < 0{,}536$, logo $P(x) = 0{,}2x^2 - 0{,}7x + 1$ tem melhor aproximação do que $P(x) = 1 - 0{,}5x$. Se continuarmos a acrescentar pontos, os polinômios gerados se aproximarão mais de f do que os gerados com grau 1 e 2, uma vez que, serão usados mais pontos de $f(x)$ para gerá-los.


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
1-0.5*x
0.2*(x.^2)-0.7*x+1