Atividade 3 - Pedro José Garcia 11846943

Pelo Teorema de Bolzano, Temos que: Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[a,b]$. Se $f(a).f(b)<0$, então existe pelo menos um ponto c, onde $c \in [a,b]$ tal que $f(c)=0$, então vamos considerar $a=1$ e $b=2$, $f(a)=\frac{a}{2}-\tan(2a)$, $f(1)=\frac{1}{2}-\tan(2)=0,5-(-2,185)=2,685$ e $f(b)=\frac{b}{2}-\tan(2b)$, $f(2)=\frac{2}{2}-\tan(4)=1-1,157=-0,157$, logo $f(a).f(b)=(2,685)(-0,157)=-0,421$, logo $f(a).f(b)<0$, portanto, existe uma raiz no intervalo $[1,2]$, da mesma forma, se considerarmos $a=1$ e $b=7$, temos que $f(b)=\frac{7}{2}-\tan(2.7)=3,5-\tan(14)=3,5-(7,244)=-3,744$ logo $f(a).f(b)=(2,685).(-3,744)=-10,052$, logo $f(a).f(b)<0$, portanto, existe uma raiz no intervalo $[1,7]$, então os intervalos que serão usados são $[1,2]$ e $[1,7]$ e vamos usar $\varepsilon=0,01$. Usando o método da Bisseção, para o intervalo $[1,2]$, temos que $\bar{x}=\frac{a+b}{2}=\frac{1+2}{2}=1,5$ e $f(\bar{x})=f(1,5)=\frac{1,5}{2}-\tan(2.1,5)=0,75-(-0,142)=0,892$, como $|0,892|>\varepsilon$, então repetimos o processo anterior, só que agora com $a=1,5$, então $\bar{x}=\frac{1,5+2}{2}=1,75$, $f(1,75)=\frac{1,75}{2}-\tan(2.1,75)=0,875-0,374=0,501$, como $|0,501|>\varepsilon$, então $\bar{x}=\frac{1,75+2}{2}=1,875$, $f(1,875)=\frac{1,875}{2}-\tan(2.1,875)=0,9375-0,6965=0,241$, como $|0,241|>\varepsilon$, então $\bar{x}=\frac{1,875+2}{2}=1,9375$, $f(1,9375)=\frac{1,9375}{2}-\tan(2.1,9375)=0,9687-0,9010=0,0677$, como $|0,0677|>\varepsilon$, então $\bar{x}=\frac{1,9375+2}{2}=1,96875$, $f(1,96875)=\frac{1,96875}{2}-\tan(2.1,96875)=0,9843-1,0212=-0,0368$, $|-0,0368|>\varepsilon$, porém, existe o critério de parada de 5 iterações, então o valor aproximado da raiz do intervalo $[1,2]$ é $1,96875$. Para o segundo intervalo, foi usado o algoritmo da bisseção do slide no matlab, então temos as seguintes tabelas:

Intervalo $[1,2]$:

Iteração	a	b	$\bar{x}$	erro
1	1	2	1,5	inf
2	1,5	2	1,75	0,25
3	1,75	2	1,875	0,125
4	1,875	2	1,9375	0,0625
5	1,9375	2	1,96875	0,03125

Intervalo $[1,7]$:

Iteração	a	b	$\bar{x}$	erro
1	1	7	4	inf
2	4	7	5,5	1,5
3	5,5	7	6,25	0,75
4	6,25	7	6,625	0,375
5	6,625	7	6,8125	0,1875

Portanto, pelo método da bissecção, a raiz do intervalo [1,2] é, aproximadamente, 1,96875 e a do intervalo [1,7] é, aproximadamente, 6,8125. Agora, usando o método da falsa posição para os mesmos intervalos ([1,2] e [1,7]), para o primeiro intervalo, temos que $f(a) = \frac{1}{2} - \tan(2.1) = \frac{1}{2} - \tan(2) = 0{,}5 - (-2{,}185) = 2{,}685$ e $f(b) = \frac{2}{2} - \tan(2.2) = 1 - \tan(4) = 1 - 1{,}157 = -0{,}157$, então $\bar{x} = \frac{(a.f(b) - b.f(a))}{(f(b) - f(a))} = \frac{1.(-0{,}157) - 2.2{,}685}{-0{,}157 - 2{,}685} = \frac{-0{,}157 - 5{,}37}{-2{,}842} = \frac{-5{,}527}{-2{,}842} = 1{,}945$, vamos fazer a primeira iteração

para o segundo intervalo, $f(a) = \frac{1}{2} - \tan(2.1) = 0{,}5 - \tan(2) = 0{,}5 - (-2{,}185) = 2{,}685$ e $f(b) = \frac{7}{2} - \tan(2.7) = 3{,}5 - \tan(14) = 3{,}5 - (7{,}244) = -3{,}744$, logo $\bar{x} = \frac{(a.f(b) - b.f(a))}{(f(b) - f(a))} = \frac{(1.(-3{,}744) - 7(2{,}685))}{-3{,}744 - (2{,}685)} = \frac{-3{,}744 - 18{,}795}{-6{,}429} = \frac{-22{,}539}{-6{,}429} = 3{,}506$, o resto das iterações foram feitos no algoritmo no matlab e mostrados nas tabelas abaixo:

Intervalo [1,2]:

Iteração	a	b	$\bar{x}$	erro
1	1	2	1,945	inf
2	1,945	2	1,957	0,012
3	1,957	2	1,9581	0,0011
4	1,9581	2	1,9582	0,0001
5	1,9582	2	1,9582	0

Intervalo [1,7]:

Iteração	a	b	$\bar{x}$	erro
1	1	7	3,506	inf
2	3,506	7	4,159	0,653
3	4,159	7	5,639	1,480
4	5,639	7	6,490	0,851
5	6,490	7	6,708	0,218

Portanto, pelo método da falsa posição, a raiz do intervalo [1,2] é, aproximadamente, 1,9582 e a do intervalo [1,7] é, aproximadamente, 6,708. Agora, usando o teorema da secante, considerando $x_0 = 4$ e $x_1 = 7$, vamos calcular $f(x_0)$ e $f(x_1)$, $f(x_0) = f(4) = \frac{4}{2} - \tan(2.4) = 2 - \tan(8) = 2 - (-6{,}799) = 8{,}799$ e $f(x_1) = \frac{7}{2} - \tan(2.7) = 3{,}5 - \tan(14) = 3{,}5 - (7{,}244) = -3{,}744$, logo $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$,

$x_2 = 7 - \frac{(-3{,}744)(7-4)}{(-3{,}744) - (8{,}799)} = 7 - \frac{(-3{,}744)(3)}{-12{,}543} = 7 - \frac{(-11{,}232)}{(-12{,}543)} = 7 - 0{,}895 = 6{,}105$, vamos fazer agora para $x_0=15$ e $x_1=16$, $f(x_0)=f(15)=\frac{15}{2}-\tan(2.15)=7{,}5-(-6{,}405)=13{,}905$ e $f(x_1)=f(16)=\frac{16}{2}-\tan(2.16)=8-(0{,}661)=7{,}339$, logo $x_2=16-\frac{(7{,}339)(1)}{(7{,}339)-(13{,}905)}=16-\frac{7{,}339}{(-6{,}566)}=$ $16-(-1{,}117)=17{,}117$, as outras iterações foram feitas no algoritmo no matlab e mostrados nas tabelas abaixo:

Para $x_0=4$ e $x_1=7$:

iteração	$\bar{x}$	erro
1	6,105	0,895
2	6,532	0,427
3	8,187	1,655
4	1,183	9,370
5	1,834	3,018

Para $x_0=15$ e $x_1=16$:

iteração	$\bar{x}$	erro
1	17,117	1,117
2	10,720	6,397
3	2,371	13,091
4	8,779	11,150
5	6,697	2,081

Portanto, as duas raízes encontradas usando o método da secante são 1,834 e 6,697. Agora, pelo método de Newton, considerando $x_0=1$, vamos calcular $f'(x)$, pela regra da derivação $\frac{d(f+g)}{dx}=\frac{d(f)}{dx}+\frac{d}{dx}(g)$, temos que $f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{d}{dx}(\tan(2x))$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{1}{2}$, $\frac{d}{dx}(\tan(2x))$, pela regra da cadeia $\frac{d}{dx}(f(g))=\frac{d}{dg}(f(g))\cdot\frac{d}{dx}(g)$, em que $g=2x$, temos que $\frac{d}{dx}(\tan(2x))=\frac{d}{dg}(\tan(g))\cdot\frac{d}{dx}(2x)=\sec(g)^2\cdot 2$, logo $\frac{d}{dx}(\tan(2x))=2\sec(2x)^2$, logo $f'(x)=0{,}5-2\sec(2x)^2$, portanto, $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}=1-\frac{f(1)}{f'(1)}$, $f(1)=\frac{1}{2}-\tan(2)$, $f(1)=0{,}5-(-2{,}185)=2{,}685$, $f'(1)=0{,}5-2\sec(2)^2=0{,}5-2(-2{,}403)^2=-11{,}048$, logo $x_1=1-\frac{2{,}685}{(-11{,}048)}=1+0{,}243=1{,}243$, vamos fazer agora para $x_0=7$, $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_1=7-\frac{f(7)}{f'(7)}$, $f(7)=\frac{7}{2}-\tan(2.7)=3{,}5-\tan(14)=3{,}5-(7{,}244)=-3{,}744$, $f'(7)=0{,}5-2\sec(14)^2$, $f'(7)=0{,}5-2(7{,}313)^2=-106{,}459$, logo $x_1=7-\left(\frac{-3{,}744}{-106{,}459}\right)=7-(0{,}0352)=6{,}9648$, as outras iterações foram feitas no algoritmo no matlab e mostrados nas tabelas abaixo:

Para $x_0=1$:

iteração	$\bar{x}$	erro
1	1,243	0,243
2	1,761	0,518
3	2,025	0,264
4	1,968	0,057
5	1,959	0,009

Para $x_0=7$:

iteração	$\bar{x}$	erro
1	6,9648	0,0352
2	6,9376	0,0272
3	6,9287	0,0089
4	6,9289	0,0006
5	6,9281	0

Portanto, as duas raízes encontradas usando o método de Newton são 1,959 e 6,9281. Agora, pelo método do ponto fixo, vamos considerar os intervalos $[1,2]$ e $[1,7]$, considerando $x_0=1,25$ e $x=g(x)$ como $x=2\tan(2x)$, $\bar{x}=2\tan(2.1,25)=2\tan(2,5)=2(-0,747)=-1,494$, e para $x_0=5,2$, $\bar{x}=2\tan(2.5,2)=2\tan(10,4)=2(1,475)=2,95$, as outras iterações foram feitas no matlab e mostrados nas tabelas abaixo:

Para $x_0=1,25$:

iteração	$\bar{x}$	erro
1	-1,494	-2,744
2	0,309	1,803
3	1,424	1,115
4	-0,603	2,027
5	-5,228	4,625

Para $x_0=5,2$

iteração	$\bar{x}$	erro
1	2,95	2,25
2	-0,8	3,76
3	68,386	69,186
4	-17,669	86,055
5	-1,984	15,685

Vamos usar o teste da convergência para provar que, em ambos os casos ocorreram divergência, como calculado anteriormente a derivada de $f(x)$ é $f'(x)=0,5-2\sec(2x)^2$, vamos calcular $|f'(-5,228)|$, $f'(-5,228)=0,5-2\sec(2(-5,228))^2=0,5-2\sec(-10,456)^2=0,5-2(-1,946)^2=0,5-7,573=-7,073$, logo $|f'(-5,228)|=7,073$, vamos calcular $|f'(-1,984)|$, $f'(-1,984)=0,5-2\sec(2(-1,984))^2=0,5-2\sec(-3,968)^2=0,5-2(-1,476)^2=0,5-4,357=-3,857$, logo $|f'(-1,984)|=3,857$, portanto, conforme o teorema da convergência, em ambos os casos ocorreram divergência uma vez que $|f'(-5,228)|>1$ e $|f'(-1,984)|>1$.

Em relação ao número de iterações, os métodos do ponto fixo e da secante precisam de mais iterações do que os outros métodos para entrar na faixa de tolerância (<0,01). Como a velocidade de convergência é uma consequência do número de iterações, então os métodos do ponto fixo e da secante são mais lentos do que os outros métodos. Sobre a facilidade de implementação, os métodos da bissecção e da falsa posição são mais fáceis de implementar, uma vez que, é necessário somente codificar a fórmula matemática no matlab, o método de Newton tem mais gasto computacional já que precisa calcular a derivada. A diferença entre o método da bissecção e da falsa posição, é que o primeiro vai calculando o ponto médio do intervalo até encontrar a raiz, e o segundo vai calculando pontos cada vez mais próximos da raiz, dentro do intervalo fornecido, até encontrá-la, esses dois métodos são intervalares, já o da secante é necessário dois chutes iniciais, ele também é mais lento do que os outros dois métodos. Uma representação gráfica para f(x):