Atividade 1 - Pedro Garcia 11846943

4) Sabendo que a matriz A é quadrada de ordem n, porque satisfaz as hipóteses da decomposição LU, então ela possui a seguinte forma: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, logo pode ser decomposta na forma $A=LDL^T$, conforme o enunciado do exercício, L e D tem estas formas: $L=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, logo $L^T=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ e $D=\begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$.

Portanto, $A=LDL^T$, $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$,

resolvendo primeiro $L.D$, temos que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}.d_{11} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31}.d_{11} & l_{32}.d_{22} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}.d_{11} & l_{n2}.d_{22} & l_{n3}.d_{33} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}$$
, considerando C a nova matriz obtida, ou seja, $C=L.D$, então $A=LDL^T$ é equivalente a $A=C.L^T$, resolvendo essa equação, temos que:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21}.d_{11} & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31}.d_{11} & l_{32}.d_{22} & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1}.d_{11} & l_{n2}.d_{22} & l_{n3}.d_{33} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & l_{13} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & 1 & l_{23} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$a_{11}=d_{11}$, $a_{12}=d_{11}.l_{12}$, $a_{13}=d_{11}.l_{13}$, $a_{1n}=d_{11}.l_{1n}$, $a_{21}=l_{21}.d_{11}$, $a_{22}=l_{12}.l_{21}.d_{11}+d_{22}=l_{21}^2.d_{11}+d_{22}$, $a_{23}=l_{13}.l_{21}.d_{11}+d_{22}.l_{23}$, $a_{2n}=l_{21}.d_{11}.l_{1n}+d_{22}.l_{2n}$, $a_{31}=l_{31}.d_{11}$, $a_{32}=l_{31}.d_{11}.l_{12}+l_{32}.d_{22}$, $a_{33}=l_{31}^2 d_{11}+l_{32}^2 d_{22}+d_{33}$,

$a_{3n} = l_{31}.d_{11}.l_{1n} + l_{32}d_{22}.l_{2n} + d_{33}.l_{3n}$, $a_{n1} = l_{n1}.d_{11}$, $a_{n2} = l_{n1}.d_{11}.l_{12} + l_{n2}.d_{22}$, $a_{n3} = l_{n1}.d_{11}.l_{13} + l_{n2}.d_{22}.l_{23} + l_{n3}.d_{33}$, $a_{nn} = l_{n1}^2.d_{11} + l_{n2}^2.d_{22} + l_{n3}^2.d_{33} + \ldots + d_{nn}$, logo podemos reescrever as matrizes D e L, nos coeficientes da matriz A da seguinte forma:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{(a_{12})^2}{a_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \ldots - \dfrac{(a_{n1})^2}{a_{11}} - \left(a_{n2} - \dfrac{a_{n1}.a_{12}}{a_{11}}\right)\left(\dfrac{a_{n2}.a_{11} - a_{n1}.a_{12}}{a_{22}.a_{11} - (a_{12})^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{a_{12}}{a_{11}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & \dfrac{a_{n2}.a_{11} - a_{n1}.a_{12}}{a_{22}.a_{11} - (a_{12})^2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Além disso, com base nas equações acima, podemos obter fórmulas gerais para determinar os valores de l e de d, observando primeiro as equações: $a_{11} = d_{11}$, $a_{22} = l_{21}^2.d_{11} + d_{22}$, $a_{33} = l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22} + d_{33}$ e $a_{nn} = l_{n1}^2 d_{11} + l_{n2}^2 d_{22} + l_{n3}^2.d_{33} + \ldots + d_{nn}$, nota-se uma relação geral, que pode ser escrita assim: $a_{nn} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 d_{kk}\right) + d_{nn}$, logo $d_{nn} = a_{nn} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2 d_{kk}\right)$. Do mesmo modo, observando as seguintes equações: $a_{12} = d_{11}.l_{12}$, $a_{13} = d_{11}.l_{13}$, $a_{n1} = l_{n1}.d_{11}$, $a_{23} = l_{13}.l_{21}d_{11} + d_{22}.l_{23}$, $a_{n2} = l_{n1}.d_{11}.l_{12} + l_{n2}.d_{22}$ e $a_{n3} = l_{n1}.d_{11}.l_{13} + l_{n2}.d_{22}.l_{23} + l_{n3}.d_{33}$, nota-se uma relação geral que pode ser escrita assim: $a_{nj} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} d_{kk} l_{jk}\right) + l_{nj}.d_{nn}$, logo $l_{nj} = \dfrac{a_{nj} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk} d_{kk}.l_{jk}\right)}{d_{nn}}$, portanto, as fórmulas gerais para obter l e d são: $d_{nn} = a_{nn} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2.d_{kk}\right)$ e $l_{nj} = \dfrac{a_{nj} - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}.d_{kk}.l_{jk}\right)}{d_{nn}}$

Para relacionar a decomposição LDL^T com a decomposição de Cholesky ($A=HH^T$), temos a seguinte fórmula geral, para calcular a diagonal de H: $h_{ii} = (a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2)^{1/2}$, então substituindo a_{ii} pela fórmula $a_{mm} = d_{mm} + (\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}^2 . d_{kk})$, temos que $h_{ii} = [d_{ii} + (\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 . d_{kk}) - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}^2]^{1/2}$, $h_{ii} = [d_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik}^2 . d_{kk} - h_{ik}^2)]^{1/2}$; para calcular fora da diagonal de H, temos essa fórmula: $h_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} h_{jk}}{h_{jj}}$, logo substituindo a_{ij} pela fórmula:

$a_{mj} = l_{mj}.d_{mm} + \sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}.d_{kk}.l_{jk}$, temos que $h_{ij} = \frac{l_{ij}.d_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}.d_{ii}.l_{jk} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} h_{jk}}{h_{jj}}$, portanto, a relação entre a decomposição LDL^T e a decomposição de Cholesky é dada pelas fórmulas $h_{ii} = [d_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik}^2 . d_{kk} - h_{ik}^2)]^{1/2}$ e $h_{ij} = \frac{l_{ij}.d_{ii} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}.d_{ii}.l_{jk} - \sum_{k=1}^{j-1} h_{ik} h_{jk}}{h_{jj}}$. Temos que $Ax=b$, sabendo que

$A=LDL^T$, então substituindo na equação, temos que $LDL^Tx=b$, assumindo que $y=DL^Tx$, logo $Ly=b$, resolvendo esta equação, temos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$y_1 = b_1$, $l_{21}.y_1 + y_2 = b_2$, $l_{m1}.y_1 + l_{m2}.y_2 + \dots + y_m = b_m$, logo podemos escrever uma fórmula geral para encontrar os valores de y:

$l_{m1}.y_1 + l_{m2}.y_2 + \dots + y_m = b_m$, $\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}.y_k + y_m = b_m$, logo $y_m = b_m - (\sum_{k=1}^{m-1} l_{mk}.y_k)$ é a fórmula geral encontrada; assumindo que $DL^T = Z$, vamos descobrir o valor de Z,

$$D.L^T = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & l_{12} & \cdots & l_{1m} \\ 0 & 1 & \cdots & l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

, portanto,

$$Z = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}.l_{12} & \cdots & d_{11}.l_{1m} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{22}.l_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}$$

, como $Z = D.L^T$, podemos substituir na equação $y = DL^Tx$, ficando $y = Zx$, portanto, resolvendo essa equação, temos que:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{11}.l_{12} & \cdots & d_{11}.l_{1n} \\ 0 & d_{22} & \cdots & d_{22}.l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= d_{11}.x_1 + d_{11}.l_{12}x_2 + \ldots + d_{11}l_{1n}x_n = y_1$, $d_{22}.x_2 + \ldots + d_{22}l_{2n}.x_n = y_2$, $d_{nn}.x_n = y_n$, então podemos construir uma fórmula geral para encontrar os valores de x, analisando as equações, temos que $d_{11}.x_1 + d_{11}.l_{12}.x_2 + \ldots + d_{11}l_{1n}x_n = y_1$ e $d_{22}.x_2 + \ldots + d_{22}.l_{2n}.x_n = y_2$, possuem uma relação de somatória, logo conseguimos fazer a seguinte fórmula geral: $y_i = \left(\sum_{k=1}^{n-1} d_{ii}.x_k.l_{ik}\right) + d_{nn}.x_n$, nela podemos substituir y_i pela fórmula encontrada na relação $y = DL^T x$: $y_n = b_n - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}.y_k\right)$, logo temos que $b_i - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{ik}.y_k\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} d_{ii}.x_k.l_{ik}\right) + d_{nn}.x_n$, isolando o x_n na equação, temos que $x_n = \dfrac{b_i - \left(\sum_{k=1}^{n-1} l_{ik}.y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} d_{ii}.x_k.l_{ik}\right)}{d_{nn}}$, juntando os somatórios, temos que $x_n = \dfrac{b_i - \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(l_{nk}.y_k - d_{ii}.x_k.l_{ik}\right)\right]}{d_{nn}}$, portanto, podemos encontrar os valores de x através dessa fórmula, logo resolvemos um sistema linear $Ax = b$.