

UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA  
FEDERAL DO PARANÁ  
CÂMPUS TOLEDO  
ENGENHARIA DE COMPUTAÇÃO

**MODELAGEM DO CRESCIMENTO  
POPULACIONAL DE TOLEDO-PR  
COM A EQUAÇÃO LOGÍSTICA DE  
VERHULST**

Pedro Miguel Gatto Schardong  
João Antônio Pereira de Melo Tratch  
Felipe Cargnelutti Torres da Silveira

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1	Motivação e objetivo do estudo . . . . .	2
1.2	O que são equações diferenciais ordinárias (EDOs) . . . . .	2
1.3	O modelo logístico de Verhulst . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>3</b>
2.1	Coleta de dados . . . . .	3
2.2	Fundamentação teórica e resolução da equação logística . . . . .	3
2.3	Implementação computacional . . . . .	4
2.4	Crerérios de validação . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Resultados</b>	<b>4</b>
3.1	Modelo com dados censitários (IBGE) . . . . .	4
3.2	Modelo com estimativas intercensitárias (SIDRA) . . . . .	5
3.3	Análise comparativa dos modelos . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>7</b>
4.1	Síntese do estudo realizado . . . . .	7
4.2	Análise dos modelos gerados . . . . .	7
4.3	Importância da escolha dos dados . . . . .	7
4.4	Possíveis aplicações e trabalhos futuros . . . . .	7

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação e objetivo do estudo

O crescimento populacional é um fenômeno central para o planejamento urbano e a formulação de políticas públicas. Compreender como a população evolui ao longo do tempo permite prever demandas por habitação, transporte, saúde, educação, saneamento, entre outros serviços essenciais à sociedade.

A cidade de Toledo, localizada no oeste do Paraná, tem apresentado um crescimento populacional significativo nas últimas décadas. Este trabalho tem como objetivo modelar esse crescimento utilizando uma abordagem matemática fundamentada em equações diferenciais ordinárias (EDOs), em particular, a equação logística de Verhulst.

Para isso, propõem-se duas modelagens distintas: a primeira utiliza apenas os dados oficiais dos censos de 2010 e 2022, conferindo maior rigor estatístico; a segunda incorpora as estimativas anuais fornecidas pelo IBGE via SIDRA, oferecendo uma visão mais contínua da dinâmica populacional entre 2001 e 2024. Ambas as abordagens são comparadas ao final, visando avaliar a consistência e a aplicabilidade do modelo em cenários reais.

## 1.2 O que são equações diferenciais ordinárias (EDOs)

Equações diferenciais ordinárias são relações matemáticas que descrevem a taxa de variação de uma variável em função de outra. Em outras palavras, elas modelam fenômenos dinâmicos, nos quais o estado atual de um sistema depende de sua evolução ao longo do tempo.

EDOs são amplamente utilizadas em diversas áreas da ciência e engenharia, como física, química, biologia e economia. No contexto deste estudo, uma EDO é utilizada para descrever a taxa de crescimento da população de uma cidade em função do tempo.

Formalmente, uma EDO de primeira ordem pode ser escrita como:

$$\frac{dP}{dt} = f(t, P)$$

onde  $P(t)$  representa a variável de interesse (neste caso, a população) e  $\frac{dP}{dt}$  sua taxa de variação ao longo do tempo.

## 1.3 O modelo logístico de Verhulst

O modelo logístico foi proposto por Pierre-François Verhulst no século XIX como uma alternativa ao modelo exponencial de crescimento populacional. Enquanto o modelo exponencial assume recursos ilimitados e crescimento indefinido, o modelo logístico introduz o conceito de *capacidade de suporte* ( $K$ ), que representa o limite máximo sustentável de uma população dado os recursos disponíveis no ambiente.

A equação diferencial logística é dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$$

em que:

- $P(t)$ : população no tempo  $t$ ;

- $r$ : taxa intrínseca de crescimento da população;
- $K$ : capacidade de suporte ambiental.

A solução analítica dessa equação, obtida por separação de variáveis, permite modelar a evolução de  $P(t)$  ao longo do tempo. Com isso, torna-se possível projetar o crescimento populacional de Toledo a partir de dados históricos confiáveis.

## 2 Metodologia

Esta seção apresenta os procedimentos adotados na modelagem do crescimento populacional da cidade de Toledo-PR. Descrevem-se as fontes de dados utilizadas, a fundamentação matemática do modelo adotado, a resolução da equação diferencial e as ferramentas computacionais empregadas para simulação, ajuste e análise dos resultados.

### 2.1 Coleta de dados

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos a partir de duas fontes oficiais:

- **Censos Demográficos (IBGE)**: dados oficiais da população de Toledo-PR nos anos de 2010 e 2022, extraídos do portal Cidades do IBGE.
- **Estimativas Intercensitárias (SIDRA/IBGE)**: estimativas anuais da população do município entre 2001 e 2024, obtidas na Tabela 6579 do Sistema IBGE de Recuperação Automática (SIDRA).

Ambas as bases foram utilizadas de forma independente para calibrar e comparar os modelos gerados.

### 2.2 Fundamentação teórica e resolução da equação logística

O modelo adotado neste trabalho é a equação logística de Verhulst, uma equação diferencial ordinária de primeira ordem e separável. A forma geral é:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)$$

onde  $P(t)$  representa a população no tempo  $t$ ,  $r$  é a taxa de crescimento e  $K$  a capacidade de suporte ambiental. Para resolver essa equação, aplicou-se o método de separação de variáveis:

$$\frac{dP}{P(K - P)} = \frac{r}{K} dt$$

A integral do lado esquerdo é resolvida por decomposição em frações parciais:

$$\int \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{K - P} \right) dP = \int r dt$$

Integrando:

$$\ln \left( \frac{P}{K - P} \right) = rt + C$$

Aplicando exponencial:

$$\frac{P}{K - P} = Ce^{rt}$$

Isolando  $P$ :

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}$$

onde  $P_0$  é a população inicial no tempo  $t = 0$ . Essa é a solução analítica da equação logística de Verhulst, utilizada para ajuste dos dados e projeções futuras.

## 2.3 Implementação computacional

A modelagem foi realizada em ambiente Python, utilizando bibliotecas científicas amplamente adotadas na comunidade acadêmica. As principais ferramentas foram:

- **Pandas**: para leitura e manipulação dos dados em formato CSV.
- **NumPy**: para cálculos numéricos e vetoriais.
- **Matplotlib**: para geração dos gráficos de comparação e projeção.
- **SciPy (curve\_fit)**: para ajuste dos parâmetros  $r$  e  $K$  do modelo logístico via minimização do erro quadrático.

Os códigos foram organizados em um Jupyter Notebook, permitindo a análise interativa e a visualização instantânea dos resultados. Foram realizados dois ajustes distintos: um utilizando apenas os dados dos censos e outro utilizando as estimativas intercensitárias completas.

## 2.4 Critérios de validação

A qualidade dos modelos ajustados foi avaliada visualmente pela sobreposição dos valores reais com as curvas projetadas. Além disso, a coerência entre os parâmetros estimados (crescimento  $r$  e suporte  $K$ ) e os dados históricos serviu como base para julgar a plausibilidade das projeções.

# 3 Resultados

## 3.1 Modelo com dados censitários (IBGE)

A primeira modelagem considerou exclusivamente os dados dos censos demográficos de 2010 e 2022, fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Os valores utilizados foram:

- 2010: 119.313 habitantes
- 2022: 150.470 habitantes

Com base nesses dois pontos e utilizando a equação logística de Verhulst, foi realizado o ajuste dos parâmetros por meio da função `curve_fit`, resultando nos seguintes valores:

- Taxa de crescimento:  $r = \mathbf{0,01899}$
- Capacidade de suporte estimada:  $K = \mathbf{163.245}$  habitantes

A Tabela 1 apresenta as projeções da população de Toledo até o ano de 2035 com base nesse modelo:

Observa-se que o modelo aponta para uma estabilização da população próxima a 163 mil habitantes nas próximas décadas. No entanto, o crescimento projetado entre 2022 e 2035 é de apenas cerca de 5 mil pessoas, o que pode indicar uma limitação do modelo quando baseado em um conjunto reduzido de dados.

### 3.2 Modelo com estimativas intercensitárias (SIDRA)

Na segunda abordagem, utilizou-se a série de estimativas anuais da população de Toledo, disponibilizada pela Tabela 6579 do SIDRA/IBGE, abrangendo o período de 2001 a 2024. O uso de uma série mais longa permitiu um ajuste mais detalhado da curva logística por meio de técnicas de regressão não linear.

Os parâmetros ajustados nesse modelo foram:

- Taxa de crescimento:  $r = \mathbf{0,022105}$
- Capacidade de suporte estimada:  $K = \mathbf{1.000.000}$  habitantes

Embora a equação logística tenha sido aplicada com sucesso, o valor elevado de  $K$  indica que o modelo não projeta uma estabilização populacional dentro do horizonte temporal analisado (até 2035). Isso ocorre porque os dados do SIDRA não apresentam evidências de desaceleração no crescimento populacional, condição essencial para que o modelo logístico manifeste sua característica sigmoide.

Consequentemente, a curva ajustada assume uma forma semelhante ao crescimento exponencial, com projeções que continuam em ascensão até o fim do período considerado. Neste contexto, o valor de  $K$  deve ser interpretado como um limite teórico e distante, e não como uma estimativa realista de capacidade de suporte para o município no curto ou médio prazo.

A projeção da população até 2035 com base nesse modelo é apresentada na Tabela 2.

Este modelo apresentou um crescimento mais acentuado, mais condizente com a tendência observada nos últimos anos, estimando um aumento de mais de 40 mil habitantes entre 2022 e 2035.

### 3.3 Análise comparativa dos modelos

A Figura 1 ilustra os dois modelos ajustados, permitindo uma comparação visual entre a curva gerada com dados censitários e aquela baseada nas estimativas intercensitárias.

Enquanto o modelo baseado no censo projeta uma estabilização rápida da população, o modelo baseado nas estimativas do SIDRA prevê um crescimento contínuo até meados da década de 2030, sem indícios de desaceleração significativa, refletindo um comportamento ainda próximo ao crescimento exponencial.

Tabela 1: Projeção populacional com dados censitários (IBGE)

Ano	População projetada
2023	151.493
2025	153.143
2030	155.635
2035	156.794

Tabela 2: Projeção populacional com estimativas intercensitárias (SIDRA)

Ano	População projetada
2023	152.547
2025	158.350
2030	173.642
2035	190.078

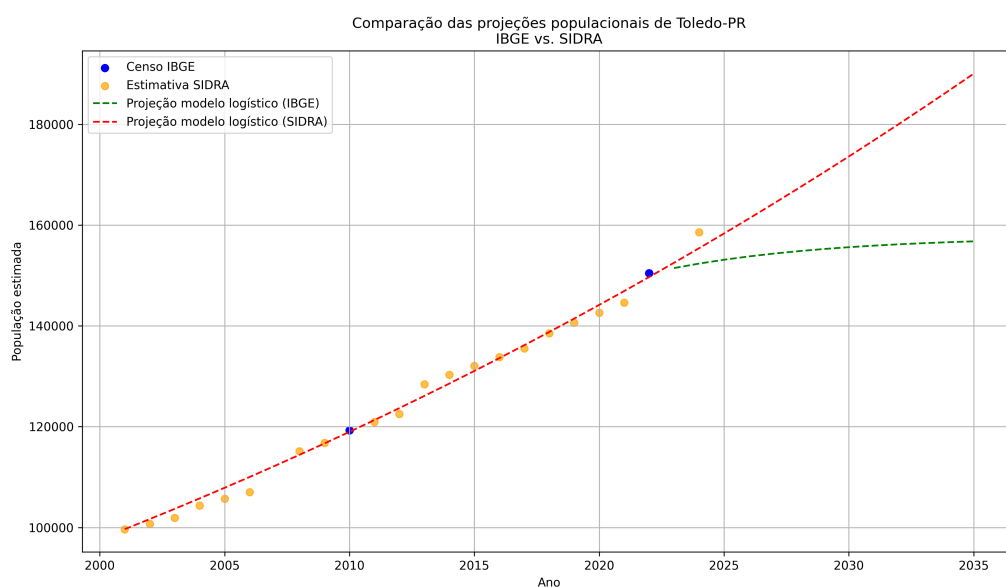


Figura 1: Comparação entre os modelos: IBGE (verde) e SIDRA (vermelho)

## 4 Conclusão

### 4.1 Síntese do estudo realizado

Este trabalho teve como objetivo modelar o crescimento populacional da cidade de Toledo-PR utilizando a equação logística de Verhulst. A partir da solução analítica da equação diferencial e da aplicação de técnicas de ajuste numérico, foi possível construir modelos de projeção com base em dados reais da população local.

Dois conjuntos de dados distintos foram utilizados: os valores dos censos oficiais do IBGE (2010 e 2022) e as estimativas anuais do SIDRA (2001 a 2024). Isso permitiu a construção de duas modelagens diferentes, proporcionando uma análise comparativa entre abordagens com diferentes níveis de granularidade e confiabilidade.

### 4.2 Análise dos modelos gerados

O primeiro modelo, baseado exclusivamente nos censos, gerou uma curva com crescimento inicial compatível com os dados, mas com projeção mais conservadora entre 2022 e 2035, sugerindo uma estabilização rápida da população. Isso se deve à limitação natural de se trabalhar com apenas dois pontos, o que reduz a flexibilidade do ajuste da curva.

Por outro lado, o segundo modelo, construído a partir das estimativas intercensitárias do SIDRA, apresentou uma taxa de crescimento mais elevada e uma projeção populacional mais robusta até 2035, com maior aproximação à tendência observada nas últimas décadas. Contudo, deve-se destacar que essas estimativas são baseadas em projeções estatísticas e não em contagens reais.

### 4.3 Importância da escolha dos dados

A comparação entre os modelos evidencia a importância crítica da escolha da base de dados na modelagem matemática. Dados censitários oferecem maior confiabilidade, mas menor resolução temporal. Estimativas anuais, embora úteis para preencher lacunas, exigem cautela na interpretação dos resultados. Idealmente, o modelo mais realista deve equilibrar confiabilidade e continuidade temporal.

### 4.4 Possíveis aplicações e trabalhos futuros

O modelo logístico de Verhulst aplicado à população de Toledo-PR pode ser uma ferramenta valiosa para o planejamento urbano e a gestão pública, auxiliando na previsão de demanda por serviços essenciais.

Como proposta de continuidade, sugere-se:

- A incorporação de novos censos e projeções futuras para reavaliar os parâmetros do modelo.
- O uso de modelos mais complexos, como sistemas de EDOs ou modelos com múltiplas variáveis (migração, natalidade, mortalidade).
- A adaptação do modelo para análise de outros municípios da região oeste do Paraná.

Dessa forma, este estudo demonstra como a aplicação de conceitos matemáticos clássicos pode contribuir significativamente para a compreensão e o planejamento de fenômenos sociais complexos como o crescimento populacional.



## Referências

- [1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- [2] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Cidades — Toledo (PR)*. Disponível em: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pr/toledo/panorama>.
- [3] INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). *Tabela 6579 - População residente, por situação do domicílio e sexo — municípios: 2001 a 2024*. SIDRA - Sistema IBGE de Recuperação Automática. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6579>.