Matemáticas 1- ÁLGEBRA

T3: Matrices y Sistemas

- **Matrices Elementales.**
- **Rango e Inversa de una matriz.**
- **Factorización LU.**

OBJETIVOS

- Obtener la inversa de una matriz como producto de matrices elementales
- Resolver un SL, $Ax=b$, mediante la resolución de $LUx=b$, considerando la factorización LU de A

Recuerda: El sistema $Ax = b$ se puede resolver si A es invertible, y su solución será $x = A^{-1} b$

CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ COMO PRODUCTO DE MATRICES

Sea **A** una matriz cuadrada.

Estudiaremos si **A** se puede transformar en la matriz **I**

Veremos que en ese caso

la matriz **A es invertible** y que $\mathbf{A^{-1}}$ se puede escribir

como **producto de matrices**

A dichas matrices se les conoce como **matrices elementales:** $\mathbf{E_i}$

Demostraremos que si

$$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I \quad \text{y} \quad A E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$$

entonces

$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$ y por lo tanto $A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1$

¿ QUÉ ES UNA MATRIZ ELEMENTAL ?

Una **matriz elemental** (ME) nxn es aquella que se obtiene al realizar una **única** OE/**fila** sobre una matriz identidad **I** n×n.

Hay 3 tipos de **OE/fila** que dan lugar a 3 tipos de **ME/fila**:

1) $\mathbf{P^{(n)}_{ij}}$ se obtiene aplicando a la matriz **I** la OE/fila: $\mathbf{Fi} \leftrightarrow \mathbf{Fj}$

2) $\mathbf{E^{(n)}_{i}(\alpha)}$ se obtiene aplicando a **I** la OE/fila: $\mathbf{Fi} \leftarrow \alpha\, \mathbf{Fi}$ $(\alpha \neq 0)$

3) $\mathbf{E^{(n)}_{ij}(\beta)}$ se obtiene aplicando a **I** la OE/fila: $\mathbf{Fi} \leftarrow \mathbf{Fi} + \beta\, \mathbf{Fj}$

***OjO: en las ME se** omitirá el exponente (n) que representa el orden de la matriz I.*

EJEMPLO

Son matrices elementales/fila de tipo 1: $\mathbf{P_{ij}}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Si en I se hace OE/fila F1 $\leftrightarrow$ F2 se obtiene ME: $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Con F1 $\leftrightarrow$ F3 se obtiene la ME: $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Con F2 $\leftrightarrow$ F3 se obtiene la ME: $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

EJEMPLO

Son matrices elementales/fila de tipo 2: $E_i(\alpha)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si en I se hace OE/fila **F1 ← (5)F1** **s**e obtiene la ME:

$E_1(5) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Con F3 ← (2/5)F3:

$E_3(2/5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$

Con F2 ← (-7)F2:

$E_2(-7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EJEMPLO

Son matrices elementales/fila de tipo 3: $E_{ij}(\beta)$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Con F1 $\leftarrow$ F1 + (1/3)F2 : $E_{12}(1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Con F2 $\leftarrow$ F2 + (-5)F3 : $E_{23}(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EJEMPLO

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ La matriz **A No** es ME puesto que resulta de aplicarle a I dos OE/filas

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Con la 1ª OP/fila: $F1 \leftrightarrow F2$, se obtiene $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Con la 2ª OP/fila: $F2 \leftarrow (-5)F1 + F2$, se obtiene A

TODA MATRIZ ELEMENTAL ES INVERTIBLE

1: Si se obtuvo por Fi $\leftrightarrow$ Fj : P_{ij}^{-1}

2: Si se obtuvo por Fi $\leftarrow \alpha$ Fi : ME : $E_i(\alpha)^{-1}$

3: Si se obtuvo por Fi $\leftarrow$ Fi+β Fj : $E_{ij}(\beta)^{-1}$

- $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $E_i^{-1}(\alpha) = E_i(1/\alpha)$
- $E_{ij}^{-1}(\beta) = E_{ij}(-\beta)$

EJEMPLO Calcular la inversa de P_{12} mediante la reducción de $[P_{12}|I]$:

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La inversa de P_{12} es:

$$P_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO Calcular la inversa de E mediante la reducción de [E|I]:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$E = E_2(-4)$

La inversa de $E_2(-4)$ es:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO Calcular la inversa de E mediante la reducción de [E|I]:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$E = E_{12}(-3)$

La inversa de $E_{12}(-3)$ es:

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Más ejemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CALCULAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ ELEMENTAL

EJEMPLOS

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Comprobar para cada E_i $(i=1,2,3)$ que E_i^{-1} es la inversa de E_i

Multiplicación por la izquierda de

una matriz elemental E

por una matriz A

EA

PRODUCTO EA

EJEMPLO

Calcular : $\mathbf{P_{12} A}$ (3x4)

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P_{12}\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Al aplicar a A la OE/fila: F1 $\leftrightarrow$ F2 se obtiene también la matriz: $P_{12}\,A$

Es decir, si multiplico la matriz elemental P_{12} (es decir, la matriz identidad intercambiando las filas 1 y 2) por una matriz A, obtengo otra matriz que es como la A, pero intercambiando las filas 1 y 2.

PRODUCTO EA

EJEMPLO

Calcular : $\mathbf{E_{23}(-2)A}$ (3x4)

$$E_{23}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{23}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -4 & -6 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Al aplicar a A la OE/fila: $F2 \leftarrow F2 + (-2)F3$ se obtiene también la matriz: $E_{23}(-2)A$

Es decir, si multiplico la matriz elemental $E_{23}(-2)$ (es decir, la matriz identidad pero sumando a la fila 2 la fila 3 multiplicada por -2) por una matriz A, obtengo otra matriz que es como la A, pero sumando a la fila 2 la fila 3 multiplicada por -2 .

CONCLUSIÓN DEL PRODUCTO POR LA IZQUIERDA (EA)

Si **A** (mxn) y **E** (mxm) elemental/fila (de cualquier tipo) entonces

la matriz **EA** es la misma que se obtiene

si **aplicamos a A** la **misma** OE/ **fila**

que se le aplica a **I** para obtener **E**

Se dice que **B** es **equivalente por filas** a la matriz **A,** o viceversa (y se representa: $A \equiv_F B$) **si:**

B es el resultado de multiplicar por la **izquierda** la matriz **A** por **k-matrices** elementales. Es decir:

$$E_k\ E_{k-1}\ \ldots\ E_2\ E_1A = B$$

Propiedades:

(a) $A \equiv_F A$
(b) Si $A \equiv_F B$, entonces $B \equiv_F A$
(c) Si $A \equiv_F B$ y $B \equiv_F C$ entonces $A \equiv_F C$

MATRICES EQUIVALENTES POR FILAS

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F2 \leftarrow F2-3F1$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$A \equiv_F B$ ya que $B = E_1 A$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F2 \leftarrow (-1/2)F2$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B \equiv_F C$ ya que $C = E_2 B$

$A \equiv_F C$ ya que $C = E_2 E_1 A$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$F1 \leftarrow F1 -2F2$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C \equiv_F D$ ya que $D = E_3 C$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y por tanto $A \equiv_F D$ ya que $D = E_3 E_2 E_1 A$

MATRICES EQUIVALENTES **POR FILAS**

Del ejemplo anterior es fácil deducir que:

Toda matriz **escalonada** y **escalonada reducida** de una matriz **A** es **equivalente por filas** a A

El rango de A, **rg(A), es el número de 1 principales de su matriz reducida.**

→ Todas las matrices equivalentes por filas tienen el **mismo rango**

Una aplicación de calcular el rango de una matriz es la discusión de los sistemas de ecuaciones lineales.

Teorema de Rouché-Frobeniüs

El sistema Ax = b con A de tamaño m x n es **compatible** si, y sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada [A|B], es decir, rg([A | b]) = rg(A) y en éste caso:

- Si rg(A) = n **Determinado**
- Si rg(A) < n **Indeterminado**

OJO: Esto en realidad ya lo vimos en el tema 1, expresado de otra forma:

Incompatible: Hay 1 principales en la última columna → rg(A|b) != rg(A)
Compatible Determinado: nº 1 principales = nº incógnitas → rg(A) = n
Compatible Indeterminado: nº 1 principales < nº incógnitas → rg(A) < n

PRODUCTO POR LA DERECHA (AE)

Multiplicación por la derecha de una matriz elemental E por una matriz A (AE)

En este caso, el producto afecta a las columnas de A (en lugar de a las filas como sucede con la multiplicación por la izquierda).

Si **A** (mxn) y **E** (nxn) elemental/columna (de cualquier tipo) entonces

la matriz **AE** es la misma que se obtiene

si **aplicamos a A** la **misma** OE/ **columna**

que se le aplica a **I** para obtener **E**

EJEMPLO

Calcular : **AP_{12}**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\,P_{12} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

AL aplicar a A la OE/**columna**: C1 $\leftrightarrow$ C2 se obtiene también la matriz: $A\,P_{12}$

Si a una matriz **A** se le aplican sucesivas OE por **filas/columnas** se obtiene una matriz equivalente a B: $\boxed{A \equiv B}$

$$\boxed{E_k \ldots E_1\, A\, Ec_1 \ldots Ec_m = B}$$

Si $A \equiv_F B \rightarrow A \equiv B$,
no viceversa

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C3 \leftarrow C3 + (-2)C1} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C3 \leftarrow C3 + (-2)C2} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \not\equiv_F C$$

INVERSA DE UNA MATRIZ COMO **PRODUCTO** DE MATRICES ELEMENTALES

Vamos a comprobar que si

$$E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 A = I \quad \text{y} \quad AE_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1 = I$$

entonces

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_{k-1}^{-1}\, E_k^{-1}$$

y por lo tanto

$$A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \dots E_2\, E_1$$

Es necesario que la matriz A sea cuadrada

Ya habíamos estudiado que:

1: Toda matriz elemental es invertible.

2: Sean Ai matrices nxn (i=1,…n) invertibles. Su producto es invertible y la inversa es: $(A1A2\ldots Ar)^{-1} = Ar^{-1} \ldots A2^{-1} A1^{-1}$.

3: A (nxn) es invertible si su matriz reducida por filas es la matriz identidad I(n), y en este caso la secuencia de OE/fila que permitan obtener I(n) a partir de A, permitirán obtener A^{-1} a partir de la matriz identidad I(n).

Ahora vamos a ver que:

También podemos obtener A^{-1} a partir del producto de las matrices elementales correspondientes a las OE/fila aplicadas sobre la matriz identidad.

Obtención de la inversa de A mediante productos de ME

En el tema anterior vimos que podíamos obtenerla reduciendo la matriz C=[A|I]. Y si en la parte izquierda conseguíamos la matriz identidad, en la parte derecha tendríamos la inversa de A

En realidad, el método para poder expresar A^{-1} como un producto de matrices elementales también se basa en la reducción mediante operaciones elementales (pero en este caso únicamente de la matriz A), pero ahora, cada vez que realicemos una operación elemental, aplicaremos esa misma operación a la matriz identidad. La idea es que debemos ir guardando las sucesivas matrices elementales (E_i) que surgirían si aplicásemos esas mismas operaciones elementales a la matriz identidad, para poder expresar la matriz inversa así:

$$\mathbf{A^{-1} = E_k\, E_{k-1} \ldots E_2\, E_1}$$

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F2 ← F2-3F1

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F2 ← (-1/2)F2

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

F1 ← F1+(-2)F2

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar que $E_3\ E_2\ E_1\ A = I$, y que por tanto $A^{-1} = E_3\ E_2\ E_1$

EJEMPLO (cont)

$$E_3\, E_2\, E_1\, A = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $A^{-1} = E_3\, E_2\, E_1$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Realiza el producto y comprueba que efectivamente $A\, A^{-1} = I$

EJEMPLO **Obtener la inversa de A mediante productos de ME**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

En el tema anterior vimos que podíamos obtenerla reduciendo la matriz C=[A|I]. En este ejemplo la reducción conllevaría 7 operaciones elementales, y se obtendría:

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad rref(C) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad A' & \qquad\qquad B \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & -3/2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

Donde $A^{-1} = B$ ya que $A' = I$

Para hacerlo con este otro método, debemos registrar las matrices elementales que surgen de aplicar las mismas 7 operaciones elementales a la matriz identidad, de esta forma:

CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA POR GAUSS-JORDAN

SI EXISTE A^{-1} ESCRIBIRLA COMO PRODUCTO DE ME

EJEMPLO (cont)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

ME relacionadas con las OE/filas aplicadas a [A|I] para obtener C:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2 + (-2)F1} \quad E1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3 \leftarrow F3 + (-1)F1} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA POR GAUSS-JORDAN

SI EXISTE A^{-1} ESCRIBIRLA COMO PRODUCTO DE ME

EJEMPLO (cont)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\xrightarrow{F3 \leftarrow F3 + (-1)F2}$ $E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2 + (3)F3}$ $E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + F3}$ $E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{F1 \leftarrow F1 + (-2)F2}$ $E_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

CÁLCULO DE MATRIZ INVERSA POR GAUSS-JORDAN

SI EXISTE A^{-1} ESCRIBIRLA COMO PRODUCTO DE ME

EJEMPLO (cont)

4º: Escribir A^{-1} como producto de ME.

$$A^{-1} = E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cómo se escribía A como producto de ME ?

$$\mathbf{A = E_1^{-1}E_2^{-1} \dots E_7^{-1}}$$

Tema 3: FACTORIZACIÓN LU para RESOLVER SL

El método consiste en obtener **2** matrices triangulares:L (Lower) y U (upper), de forma que A sea igual al producto de L y U.

$$A = LU$$

Así, en lugar de resolver Ax = b, resolveremos **(LU)x = b,** o lo que es lo mismo **L(Ux) = b**

Si al producto **Ux** lo llamamos **y**, entonces el sistema quedará **Ly = b**,

¿Por qué hacemos esto? Porque los sistemas así son más sencillos de resolver al ser L y U matrices triangulares.

Por tanto, el método para resolverlo será:

1º: Resolver el SL: **Ly = b**

2º: Resolver el SL: **Ux = y**, donde los valores del vector **y** de términos independientes son los obtenidos en el paso 1.

Resolución del Sistema lineal: **Ly = b**

L (mxm)

Cuadrada

Triangular inferior

Invertible

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Como L invertible, el SL es Compatible Determinado y se resuelve por **sustitución progresiva**.

Resolución del Sistema lineal: **Ux = y**

U (mxn)

Triangular superior

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Como U es invertible, el SL es Compatible Determinado y se resuelve por **sustitución regresiva**.

EJEMPLO

$$
\begin{aligned}
2x_1 &+ 2x_2 - 6x_3 = -8\\
-x_1 &+ x_2 - 3x_3 = -8\\
x_1 &+ x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Encontrar la solución del SL usando la siguiente descomposición LU de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1º.- Se resuelve Ly = b

$$
\begin{aligned}
2y_1 &= -8\\
-y_1 + 3y_2 &= -8\\
y_1 - y_2 \quad y_3 &= 3
\end{aligned}
\xrightarrow{\text{SCD}}
\boxed{\begin{aligned} y_1 &= -4\\ y_2 &= -4\\ y_3 &= 3\end{aligned}}
$$

2º.- Se resuelve Ux= y

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -4\\
+ x_2 - 2x_3 &= -4\\
x_3 &= 3
\end{aligned}
\xrightarrow{\text{SCD}}
\boxed{\begin{aligned} x3 &= 3\\ x2 &= 2\\ x1 &= 1\end{aligned}}
$$

Solución del SL:
x = (x1,x2,x3)
= (1 2 3)

CÁLCULO DE LAS MATRICES **L** y **U**

1ª forma: a partir de las ME que han transformado A en una escalonada de A

2ª forma: obteniendo L en cada paso de escalonar A

3ª forma: a partir de la definición de L y U

Para calcular LU no se permiten OE/filas de tipo 1 (permutación filas)

1ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U con ME

Sea A (mxn) → L triangular inferior (mxm)
U triangular superior (mxn)

U se obtiene escalonando A (con op. elementales que no sean de tipo 1)

Para obtener L: $$L = (E_k \cdot E_{k-1} \cdots E_1)^{-1}$$

donde Ei son las matrices elementales obtenidas al aplicar a la matriz identidad las mismas operaciones que se han realizado para escalonar A

EJEMPLO

1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow F2-3F1} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow F2-3F1} E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2} C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F2 \leftarrow (-1/2)F2} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos las inversas de las E_i :

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

C es escalonada de A → C es la matriz U, por tanto $E_2\, E_1\, A = U$ →
$A = (E_2\, E_1)^{-1}\, U$ → como $A = LU$ → $L = (E_2\, E_1)^{-1}$ → $L = E_1^{-1}\, E_2^{-1}$

$$L = E_1^{-1}\, E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

2ª forma de calcular L y U

- Se van obteniendo las columnas de L en cada paso en el que se escalona A.
- U es la escalonada de A.
- No es necesario calcular las matrices elementales

2ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U AL ESCALONAR A

Sea A (mxn) → L triangular inferior (mxm)
U triangular superior (mxn)

- Partimos de la matriz A y de un valor inicial de la matriz $L = I_m$

- Ahora se trata de ir escalonando la matriz A, pero justo antes de hacer cada uno principal, se copiará un trozo de la columna en la que está el uno principal sobre la matriz L, de la siguiente forma:

- Para cada fila *k* de A, antes de hacerle el uno principal, se identifica el valor X que se va a convertir en un uno principal, y se copia verticalmente el trozo de columna que va desde el valor X hasta el final de la columna, sobre la columna k de la matriz L.

2ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U AL ESCALONAR A

Ejemplo: Cálculo de la factorización LU de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Busquemos la forma escalonada de A. Inicialmente tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El primer uno principal se consigue dividiendo la primera fila de A por 2; pero antes de hacerlo copiamos la primera columna de A desde el 2 hasta el final (es decir ,toda) en la primera columan de L y ahora dividimos por 2 la primera fila de A, quedando

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U AL ESCALONAR A

Ahora hacemos ceros en la primera columna de A (la matriz L no se modifica)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El candidato a segundo uno principal es el elemento $(2,2)$ que es 3; por tanto, antes de dividir por 3 la segunda fila copiamos desde el 3 hasta el final en la segunda columna de L

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

2ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U AL ESCALONAR A

Dividimos ahora la segunda fila por 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Hacemos ceros en la segunda columna

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Y en este caso ya hemos terminado pues el elemento (3, 3) ya es uno principal. Si por ejemplo fuera 7, pondríamos L(3; 3) = 7 y después dividiríamos la tercera la por 7.

CÁLCULO DE L y U AL ESCALONAR A

OTRO EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

A(3X4)

L (3X3)

U (3X4)

$$L = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalonamos A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

Primero identificamos el valor de la primera fila que queremos convertir en uno principal, en este caso, -2

Ahora copiamos sobre la primera columna de L, el trozo de columna de A desde el -2 hacia abajo (en este caso, como estamos en la fila 1, se copia toda la columna)

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OTRO EJEMPLO

Ahora convertimos el -2 en un uno principal y hacemos ceros debajo de él, sin tocar la matriz L

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow{F1 \leftarrow (-1/2)F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F2 \leftarrow F2+(-1)F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F3 \leftarrow F3+(-2)F1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO

CÁLCULO DE L y U AL ESCALONAR A

Ahora identificamos el valor de la segunda fila (pivote) que queremos convertir en un uno principal, en este caso el -1, y copiamos sobre la segunda columna de L el trozo de columna de A que va desde el -1 hasta abajo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$F2 \leftarrow (-1)F2$

$F3 \leftarrow F3 + (-3)F2$

Y ahora convertimos el -1 en un uno principal y le hacemos ceros debajo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora identificamos el valor de la tercera fila que queremos convertir en un uno principal, en este caso el 4, y copiamos sobre la tercera columna de L, el trozo de columna de A desde el 4 hasta abajo

$F3 \leftarrow (1/4)F3$

Finalmente convertimos el 4 en un uno principal, obteniendo la matriz U

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OBSERVACIONES a la segunda forma de calcular L y U

Para calcular LU <u>no se permiten</u> OE/filas de tipo 1 (permutación filas)

La 1ª columna de L es la 1ª columna de A, salvo si esta es nula.

Si A es una matriz invertible, cuya forma escalonada se obtiene sin intercambio de filas, existe la descomposición LU y es única fijados los unos principales en la matriz U ó en L.

OBSERVACIONES

Con el método que hemos utilizado, los 1 principales aparecen en U.

Si quisiésemos que apareciesen en L en lugar de U, habría que :

- **Dividir** cada columna de L por su elemento diagonal
- **Multiplicar** cada fila de U correspondiente por dicho elemento

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$l_{i1} = l_{i1}/(-2)$ | $l_{i2} = l_{i2}/(-1)$ | $l_{i3} = l_{i3}/4$

$u_{1j} = u_{1j}*(-2)$ | $u_{2j} = u_{2j} * (-1)$ | $u_{3j} = u_{3j}*4$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3ª forma de calcular L y U

A partir de la definición de L y U

3ª forma: CÁLCULO DE LAS MATRICES L y U POR DEFINICIÓN

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

A(3X3)

L (3X3)

U (3X3)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2a & a + x & 7a + y \\ 2b & b + cx & 7b+cy+z \end{pmatrix}$$

a = 2;
b = 1;
c = 0;
x = 1;
y = -9;
z = -1;

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1:

3 Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 7 \\ 3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) (1'25 puntos) Hallad una factorización LU de la matriz A

(b) (1'25 puntos) Usad dicha factorización para resolver el sistema

$$Ax = [-4 \ \ -4 \ \ -16]^T$$

Recordad que Ax=b lo resolvemos así…

1º: Resolver el SL: **Ly = b**

2º: Resolver el SL: **Ux = y**, donde los valores del vector **y** de términos independientes son los obtenidos en el paso 1.

Ejercicio 2:

4 Hallad una descomposición LU de la matriz A *(1'25 puntos)* para resolver el sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ *(1'25 puntos)* donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Recordad que Ax=b lo resolvemos así…

1º: Resolver el SL: **Ly = b**

2º: Resolver el SL: **Ux = y**, donde los valores del vector **y** de términos independientes son los obtenidos en el paso 1.

Ejercicio 3: Obtener una factorización LU de A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Deberías haber obtenido esto….

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & -5 & 1 & 0 \\ -6 & -9 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$