Límites y continuidad

Tema 1

Límites y continuidad

Podríamos empezar diciendo que los límites son importantes en el cálculo, pero afirmar tal cosa sería infravalorar su auténtica importancia. Sin límites el cálculo no existiría. Cualquier noción del cálculo es un límite en uno u otro sentido.

Límites y continuidad

¿Qué es la velocidad instantánea? Es el límite de las velocidades medias.

¿Qué es la pendiente de una curva? Es el límite de las pendientes de las rectas secantes.

¿Qué es la longitud de una curva? Es el límite de la longitud de los caminos poligonales.

¿Qué es la suma de una serie infinita? Es el límite de las sumas finitas.

¿Qué es el área de una región limitada por curvas? Es el límite de la suma de las áreas de las regiones delimitadas por segmentos de rectas poligonales.

Idea intiutiva de límite

Empezamos con un número c y una función f definida cerca de c aunque no necesariamente en el mismo c. El número L es el límite de f cuando x se aproxima a c, y se escribe

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

si y sólo si los valores de la función f(x) se aproximan (tienden) a L cuando x se aproxima a c.

Consideremos la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} \quad x \neq 1$

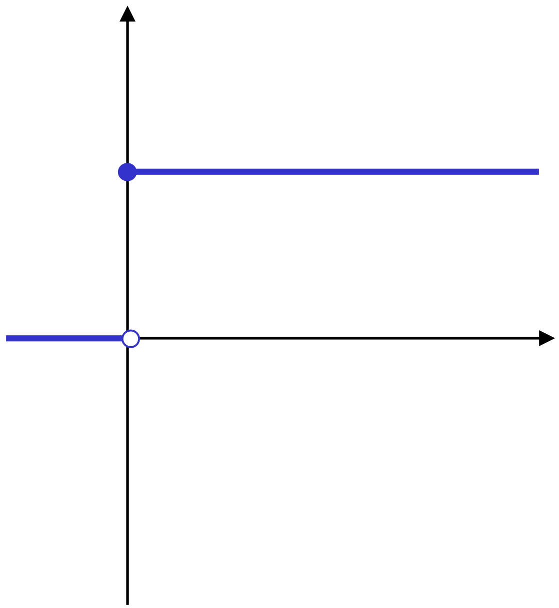
Esta función no está definida en x=1; sin embargo vamos a estudiar su comportamiento en los alrededores de x=1.

	x se acerca a 1 por la izquierda				$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	x se acerca a 1 por la derecha				
x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.999	**1**	1.001	1.01	1.1	1.25	1.5
f(x)	1.5	1.75	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1	2.25	2.5
		$f(x)$ se acerca a 2			$\longrightarrow$	$\longleftarrow$	$f(x)$ se acerca a 2				

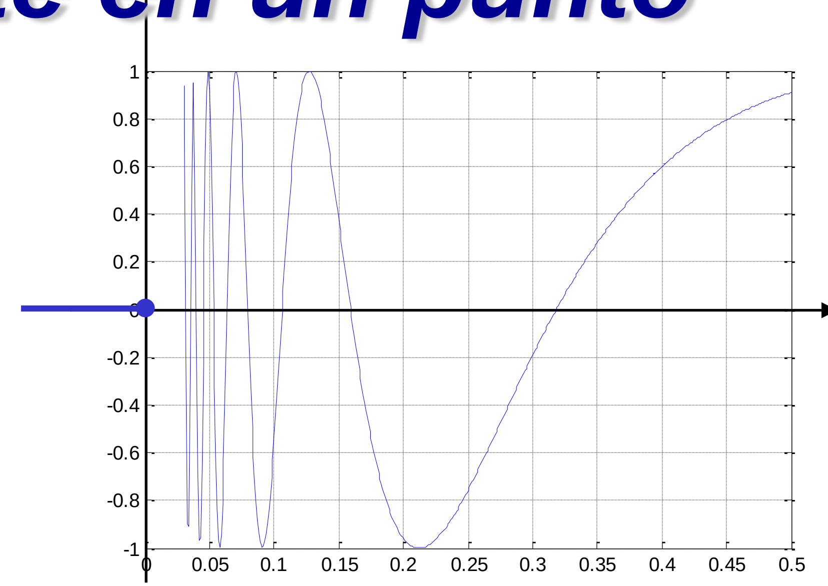
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Límites laterales $\quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$

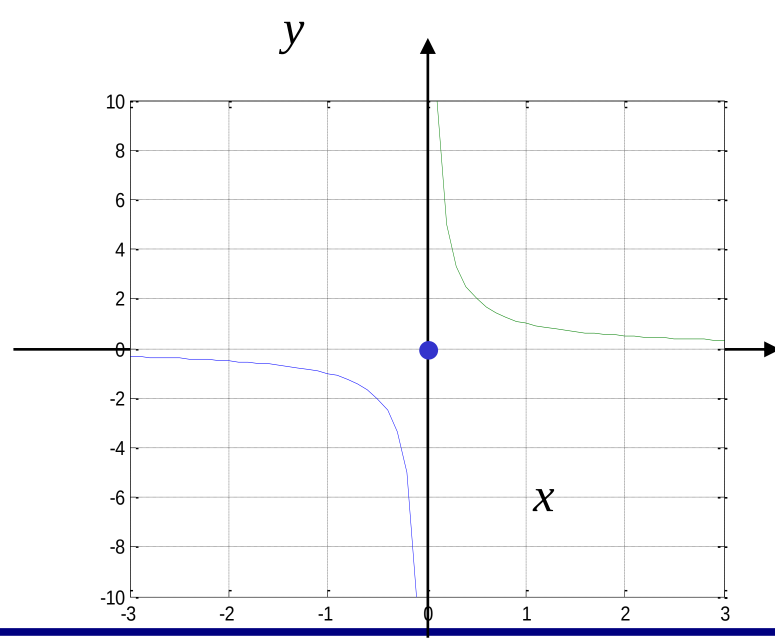
Funciones sin límite en un punto



$$b)\ y=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



$$a)\ y=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$



$$c)\ y=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$$

Definición formal de límite

Sea $f(x)$ definido sobre un intervalo abierto alrededor de x_0, excepto posiblemente en x_0. Decimos que $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a x_0 y escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si, para cada número e > 0, existe un número correspondiente d > 0 tal que para toda x

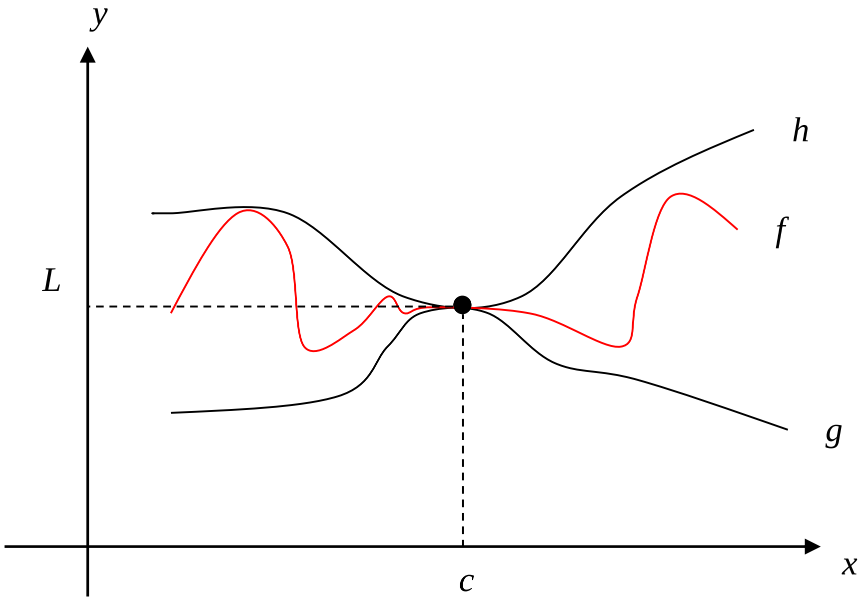
$$0 < | x - x_0 | < d \quad \Rightarrow | f(x) - L | < e$$

Teorema del emparedado

Supóngase que $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c, excepto posiblemente en $x = c$. Supóngase tambien que

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Entonces $\lim_{x \to c} f(x) = L$



Uso del teorema del emparedado

Calcula el límite de sen(x)/x cuando x tiende a 0

Se ve que:

$\text{sen}x \leq x \leq \tan x$

Dividiendo entre sen x :

$1 \leq x/\text{sen}x \leq \tan x/\text{sen}x = 1/\cos x$

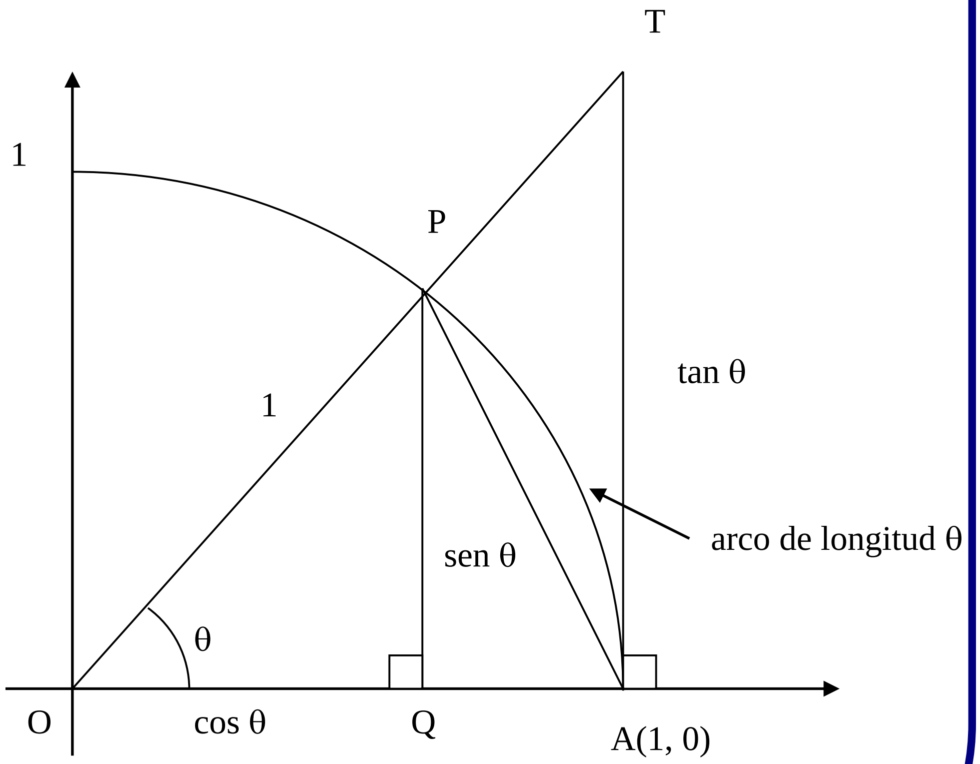
Invirtiendo cada término

$1 \geq \text{sen}x/x \geq \cos x$

Tomando límite

$\lim_{x\to 0} 1 \geq \lim_{x\to 0} \text{sen}x/x \geq \lim_{x\to 0} \cos x$

Como $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$



Por el teorema del emparedado $\lim_{x\to 0} \text{sen}x/x = 1$

Reglas para el cálculo de límites

Las reglas siguientes son válidas si $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$ (L y M son números reales)

1. *Suma*: $\lim_{x\to c} [f(x) + g(x)] = L + M$

2. *Resta*: $\lim_{x\to c} [f(x) - g(x)] = L - M$

3. *Producto*: $\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

4. Producto: $\lim_{x\to c} k\, f(x) = kL$

   por una constante

5. *Cociente*: $\lim_{x\to c} f(x) / g(x) = L / M,\ M \neq 0$

6. *Potencia*: $\lim_{x\to c} [f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

Demostración de teoremas

Regla para el límite de una suma

Dado que $\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = M$, demostrar que

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Sea e > 0, se quiere hallar un número positivo d tal que para toda x

$$0 < | x - x_0 | < d \quad \Rightarrow \quad | f(x) + g(x) - (L + M)| < e$$

Reagrupando

$$| f(x) + g(x) - (L + M)| = | (f(x) - L) + (g(x) - M)|$$
$$\leq | f(x) - L | + |g(x) - M |$$

Ya que $\lim_{x\to c} f(x) = L$, Existe $d_1 > 0$ tal que para toda x

$$0 < | x - x_0 | < d_1 \quad \Rightarrow \quad | f(x) - L | < e/2$$

Análogamente

$$0 < | x - x_0 | < d_2 \quad \Rightarrow \quad | g(x) - M| < e/2$$

Sea $d = \min(d_1, d_2)$ por lo tanto

$$| f(x) + g(x) - (L + M)| < e/2 + e/2 = e$$

Esto muestra que

$$\lim_{x\to c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

Límite de un polinomio

Los límites de polinomios pueden ser calculados por sustitución

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$, entonces

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + ... + a_0$$

Los límites de las funciones racionales pueden calcularse por sustitución si el límite del denominador no es cero.

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} P(x) / Q(x) = P(c) / Q(c)$$

Definición informal de límites laterales

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (a, b) donde $a < b$. Si $f(x)$ está arbitrariamente cerca de L cuando x tiende a a desde dentro del intervalo, decimos que L es el **límite por la derecha** de f en a, y escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo (c, a) donde $a < b$. Si $f(x)$ está arbitrariamente cerca de M cuando x tiende a a desde dentro del intervalo, decimos que M es el **límite por la izquierda** de f en a, y escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

Definición formal de límites laterales

Límite por la derecha

Decimos que *f*(*x*) tiene un límite por la derecha *L* en x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

Si para cada número e > 0 existe un número d > 0 tal que para toda *x*

$$x_0 < x < x_0 + d \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < e$$

Límite por la izquierda

Decimos que *f*(*x*) tiene un límite por la izquierda *L* en x_0, y escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Si para cada número e > 0 existe un número d > 0 tal que para toda *x*

$$x_0 - d < x < x_0 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < e$$

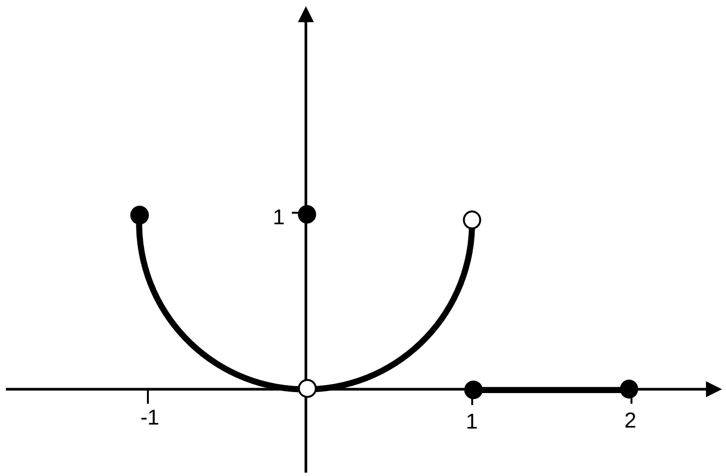
Existencia de Límite

Una función $f(x)$ tiene un limite cuando x tiende a c si y sólo si tiene límites por la derecha y por la izquierda en ese punto y éstos son iguales:

$$\mathrm{Lim}_{x\to c} f(x) = L \iff \mathrm{Lim}_{x\to c-} f(x) = L \text{ y } \mathrm{Lim}_{x\to c+} f(x) = L$$

Ejemplo

Contesta verdadero o falso



a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe*

d) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

e) $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

f) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *no existe*

g) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

h) $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)$

i) $\lim_{x\to 0} f(x)=0$

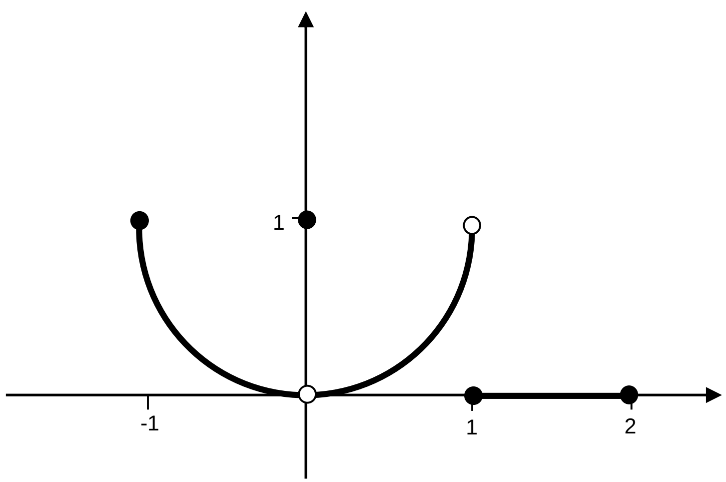
j) $\lim_{x\to 1} f(x)=1$

k) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=2$

l) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=2$

Ejemplo

Contesta verdadero o falso



a) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ✗

b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ ✗

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe* ✓

d) $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ✗

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$ ✗

f) $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *no existe* ✗

g) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ ✓

h) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ ✓

i) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ✓

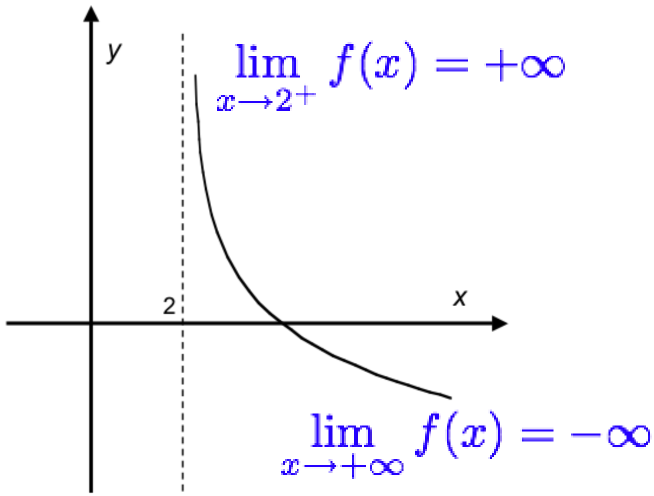
j) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ ✗

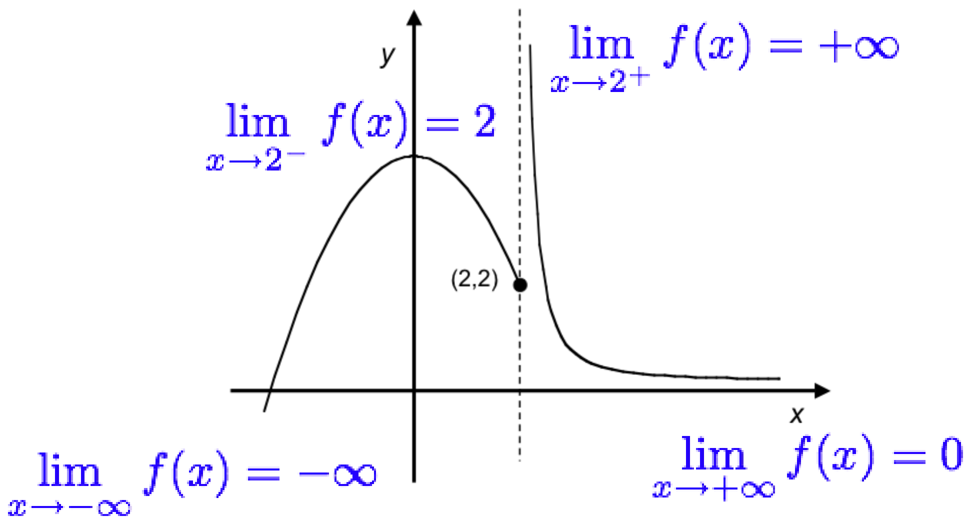
k) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$ ✗

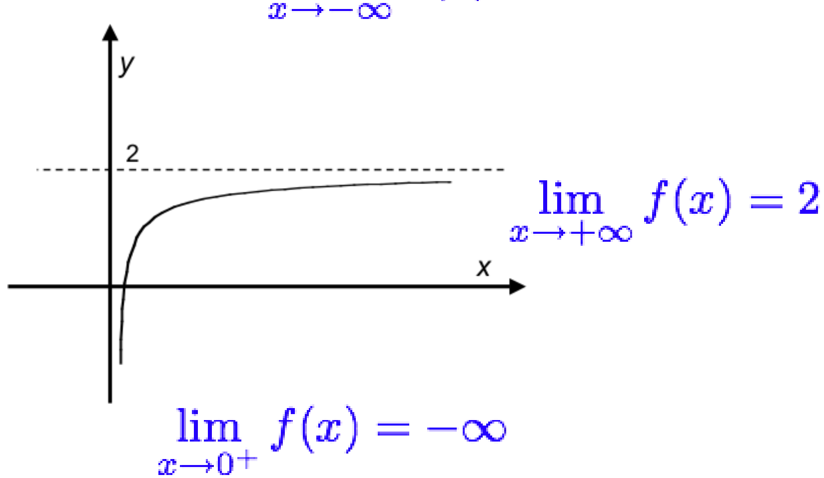
l) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$ ✗

Límites infinitos y límites en el infinito

Si f(x) crece indefinidamente cuando el valor de x tiende a a, se dice que su límite es infinito (+∞ o –∞). Análogamente, también es posible definir límites de una función cuando el valor de x tiende a + ∞ o a – ∞.







Definición formal de límites infinitos

Límites infinitos

Decimos que $f(x)$ se aproxima a infinito cuando x tiende a x_0, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

Si para cualquier número real positivo B existe un número d > 0 tal que para toda x

$$0 < | x - x_0 | < d \Rightarrow \quad f(x) > B$$

Decimos que $f(x)$ se aproxima a menos infinito cuando x tiende a x_0, y se escribe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Si para cualquier número real negativo $-B$ existe un número d > 0 tal que para toda x

$$0 < | x - x_0 | < d \Rightarrow \quad f(x) < -B$$

Definición formal de límites en el infinito

Límites en el infinito

Decimos que *f*(*x*) se aproxima a L cuando *x* tiende a más infinito

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Si para todo d > 0 existe un número real positivo B tal que para todo x se cumple que

$$x > B \quad \Rightarrow \quad 0 < | f(x) - L | < d$$

Decimos que f(x) se aproxima a L cuando x tiende a menos infinito

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Si para todo d > 0 existe un número real negativo B tal que para todo x se cumple que

$$x < B \quad \Rightarrow \quad 0 < | f(x) - L | < d$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$$

Ejemplo 1

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=x-1.$$

$$\lim_{x\to 2}\ \frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1.$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + 3x^2 + 5x + 2}$$

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2}$$

$$\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2}=\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}\xrightarrow[x\to\infty]{}1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^3+3x^2+5x+2}=\frac{1}{1}=1$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$$

Ejemplo 3

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$$

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

Por tanto $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

Ejemplo 4

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}}$$

Ejemplo 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}$$

$$\frac{2x}{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}}=$$

$$\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}$$

$$=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{\left(\sqrt{2x^2+x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2}=\frac{2x\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x^2+4x}$$

$$\frac{2\left(\sqrt{2x^2+x+1}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)}{x+4}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{2\left(\sqrt{1}+\sqrt{+1}\right)}{4}=1$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{6x}$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{6x}$$

Sabemos que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(kx)}{kx} = 1,\ con\ k > 0$

$$\frac{\operatorname{sen}(3x)}{6x} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}$$

Como $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 1$, se concluye que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{6x} = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 6

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}=\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

como $\lim_{a\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a)}{a}=1.$

Se aplicó primero al sustituir $a=\operatorname{sen}(x)$.

Por tanto $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)}=1.$

Indeterminaciones

En el cálculo de límites, se dice que hay una indeterminación cuando el límite de la función no se obtiene directamente de los límites de las funciones que la componen.

Las indeterminaciones son:

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\cdot\infty \qquad \infty-\infty$$

$$1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

En algunos casos, simplificando las expresiones u obteniendo expresiones equivalentes a las iniciales, se puede resolver la indeterminación y calcular el límite. En otros casos, se requerirá el uso de otras herramientas más potentes.

Cálculo de límites

Infinito entre infinito: si se trata de funciones polinómicas, se divide el numerador y el denominador por el término de mayor grado. Si las funciones presentan radicales, se multiplican el denominador y el numerador por el conjugado de la expresión que contiene el radical.

Cálculo de límites

Cero entre cero: si se trata de funciones polinómicas, se factorizan el numerador y el denominador y se simplifican los polinomios iguales resultantes. En funciones con radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cálculo de límites

Cero por infinito: si f(x) tiende a 0, y g(x) tiende a infinito, la expresión f(x) · g(x) se puede sustituir por f(x) / (1 / g(x)), que es del tipo 0 / 0. También podemos sustituir f(x) · g(x) por g(x) / (1 / f(x)) que es una indeterminación del tipo infinito entre infinito.

Cálculo de límites

Infinito menos infinito: si se trata de una diferencia de funciones, se realiza la operación de manera que se obtenga una expresión como cociente de funciones, para después calcular el límite. Si aparecen radicales, se multiplica y se divide por la expresión conjugada de la que contiene el radical.

Cálculo de límites

Uno elevado a infinito: se resuelve transformando la expresión en una potencia del número e, teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Si f(x) tiende a 1 cuando x tiende a c (real o infinito) y g(x) tiende a infinito cuando x tiende a c, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to c} \left(1 + f(x) - 1\right)^{g(x)} = \lim_{x \to c} \left[1 + \frac{1}{1/\left(f(x) - 1\right)}\right]^{\frac{1}{f(x)-1} \cdot [f(x)-1]g(x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to c} [f(x)-1]g(x)}$$

Cálculo de límites

Infinito elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to c} g(x) \ln f(x)}$$

Cálculo de límites

Cero elevado a cero: teniendo en cuenta que el logaritmo de un límite es el límite del logaritmo,

$$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to c} g(x)\ln f(x)}$$

Ejemplo. Indeterminación L/0, L $\neq$ 0

En estos casos el límite si existe es $+\infty$ o $-\infty$ dependiendo del signo de la función a izquierda y derecha del valor al cual tiende la variable.

- $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} \text{ no existe}$$

- $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$
- $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Ejemplo. Indeterminación 0/0

$$\lim_{x\to 3}\frac{-18+21x-8x^2+x^3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{-18+33x-20x^2+4x^3}{9-12x+4x^2} = \lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{(x-2)(2x-3)^2}{(2x-3)^2} = \lim_{x\to\frac{3}{2}}(x-2) = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{0}{0}$$

Ejemplo. Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-2x^3+3x-5}{-x^3-2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{-1-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

Ejemplo. Indeterminación ∞ -∞

$$\lim_{x\to\infty} (x^3 - x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2(x-1) = \infty \cdot \infty = \infty$$

$\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty} [\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}] = \lim_{x\to\infty} \frac{[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}]\,[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}]}{[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}]} =$$

$\infty - \infty$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}]} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Ejemplo. Indeterminación ∞^0, 0^0

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

$$0^0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$$

$$(+¥)^0$$

Ejemplo. Indeterminación 1^∞

Para resolver estas indeterminaciones resulta útil muchas veces recordar la expresión de e^a como límite, combinada con un cambio de variable.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)^{2} = e^2$$

Indet 1^∞

$$\frac{1}{2x^2+x^4} = y$$

$$\lim_{x\to 0}(1+2x^2+x^4)^{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x^2+x^4}}\right)^{\frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x^2+x^4}}\right)^{\frac{1}{2x^2+x^4}}\right)^{(2x^2+x^4)\frac{4}{x^2}} =$$

Indet 1^∞

$$= \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{4(2x^2+x^4)}{x^2}} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}(8+4x^2)} = e^8$$

Continuidad

En el lenguaje coloquial, decir que algo es “continuo” equivale a decir que transcurre sin interrupción y sin cambios abruptos. En el lenguaje matemático, la palabra “continuo” tiene, en gran parte, el mismo significado.

La idea básica es la siguiente: supongamos dados una función f y un número c. Se calculan (cuando sea posible) los valores:

$$\lim_{x \to c} f(x) \qquad \text{y} \qquad f(c)$$

y se comparan los resultados. La función f es continua en c si y sólo si estos dos valores coinciden:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Continuidad

OBSERVACIÓN.- Recordar que en la definición de "límite de f en c" no exigimos que f esté definida en el propio c. Por el contrario, la definición de "continuidad en c" requiere que f esté definida en c. Así, de acuerdo con esta definición, una función f es continua en un punto si y sólo si:

f está definida en c

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

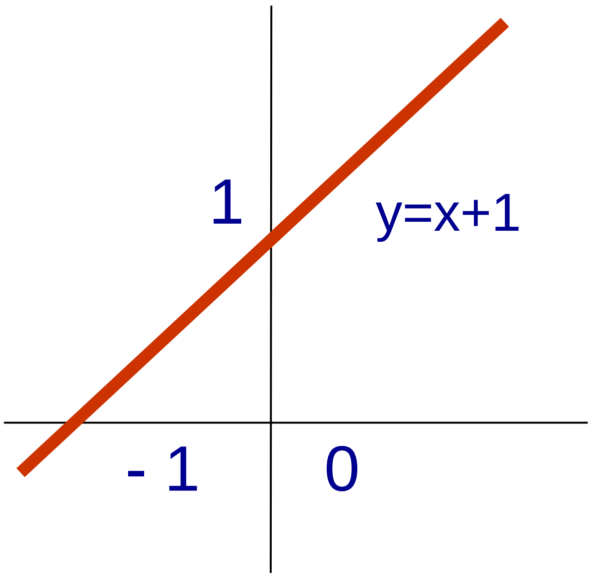
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

Se dice que una función f es discontinua en c si no es continua en ese punto.

Continuidad gráfica

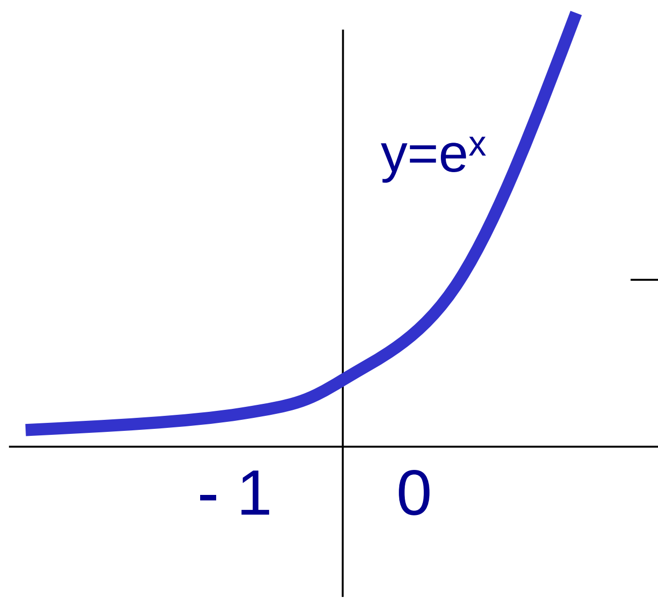
Una función se dice que es continua en todo su dominio cuando podamos ser capaces de dibujarla de un solo trazo continuo, sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo 1



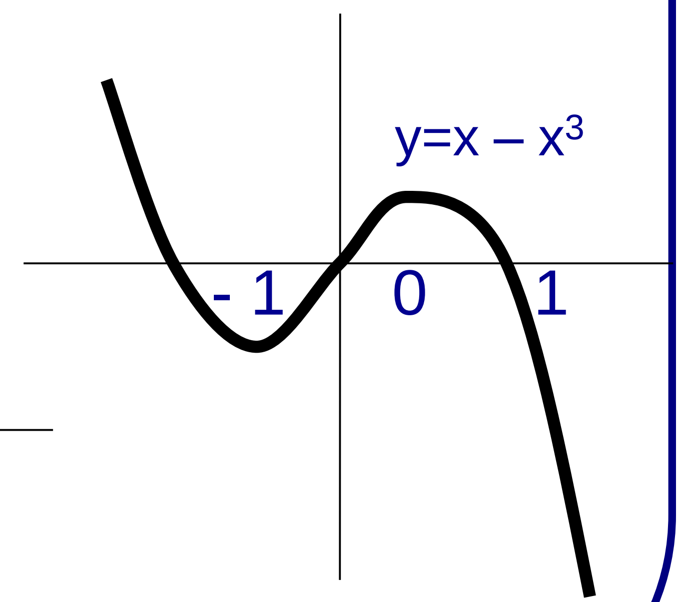
Función continua en R

Ejemplo 2



Función continua en R

Ejemplo 3



Función continua en R

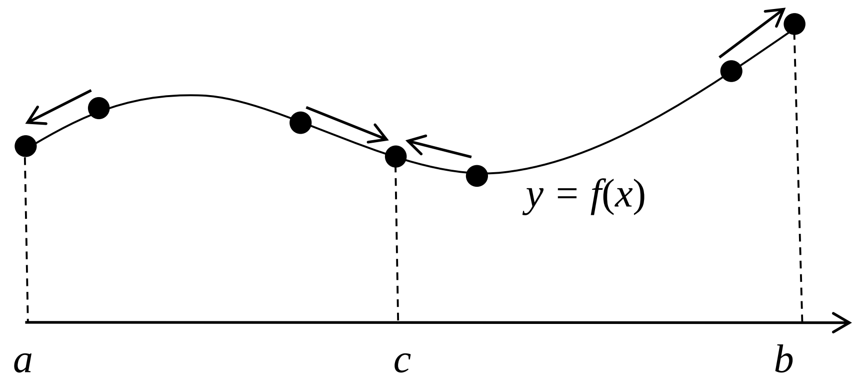
Continuidad en los extremos

Una función *f* es continua en el extremo izquierdo *x* = *a* de su dominio, si

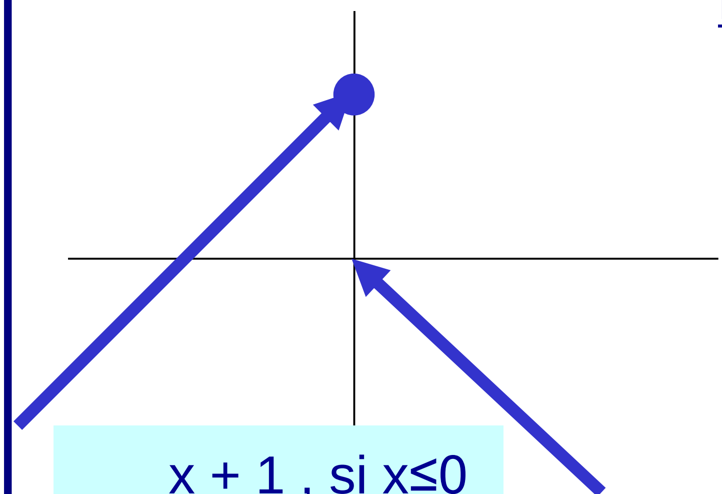
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Una función *f* es continua en el extremo derecho *x* = *b* de su dominio, si

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$



Discontinuidad gráfica



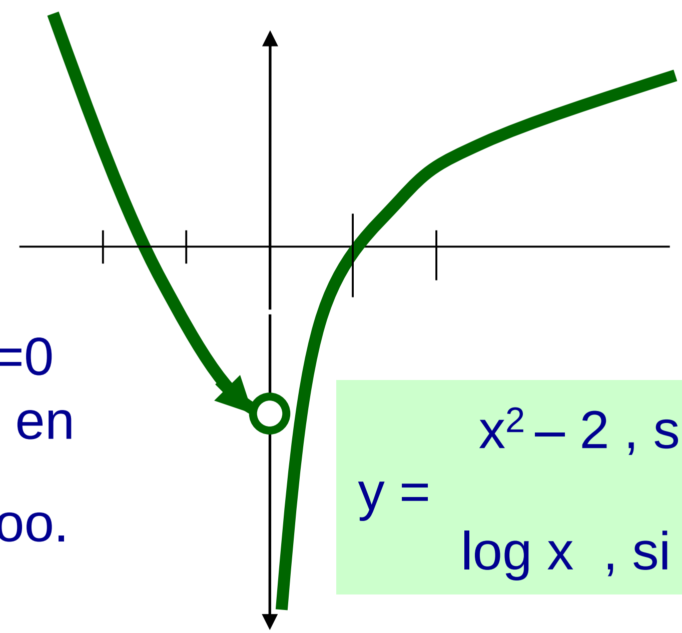
$$y = \begin{cases} x + 1 \ , \text{ si } x \leq 0 \\ -x \quad , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1

Función continua en R, excepto en x=0
En x=0 la función existe y vale 1.
Pero a la izquierda de 0 la función vale 1 (y=1) y a la derecha del 0 la función vale 0 (y=0).
Hay una discontinuidad en x=0, un salto finito.

Ejemplo 2

Función continua en R, excepto en x=0
En x=0 hay una discontinuidad, pues en ese punto no existe la función y a la izquierda del 0 su valor baja hasta – oo.
x=0 no forma parte del dominio.



$$y = \begin{cases} x^2 - 2 \ , \text{ si } x < 0 \\ \log x \quad , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Tipos de discontinuidades

Para estudiar la continuidad de una función hay que hacerlo en todo su dominio de definición. En aquellos puntos singulares del dominio o en aquellos puntos que no pertenezcan al dominio de la función, estudiaremos detenidamente la función y determinaremos el tipo de discontinuidad que pueda presentar.

1) EVITABLE , que es cuando no existe la función en dicho punto, pero sí el límite.

2) DE 1ª ESPECIE , cuando el valor de la función en dicho punto no coincide con el límite.

3) DE 2ª ESPECIE SALTO FINITO , cuando no existe el límite, al no coincidir el límite derecho con el izquierdo.

4) DE 2ª ESPECIE SALTO INFINITO , cuando uno de los límites derecho o izquierdo, o los dos, son más o menos infinito.

Reglas de continuidad

Si las funciones *f* y *g* son continuas en x = *c*, entonces las siguientes funciones son continuas:

1. $f + g$ y $f - g$

2. $f\,g$

3. kf, donde k es cualquier número

4. f/g (si $g(c) \neq 0$)

5. $(f(c))^{m/n}$ (si $f(x)$ está definida en un intervalo que contenga a c, y m y n son enteros)

Continuidad de polinomios

Todo polinomio es continuo en cualquier punto de la recta real. Toda función racional es continua en todo punto donde el denominador sea distinto de cero.

Ejemplo:

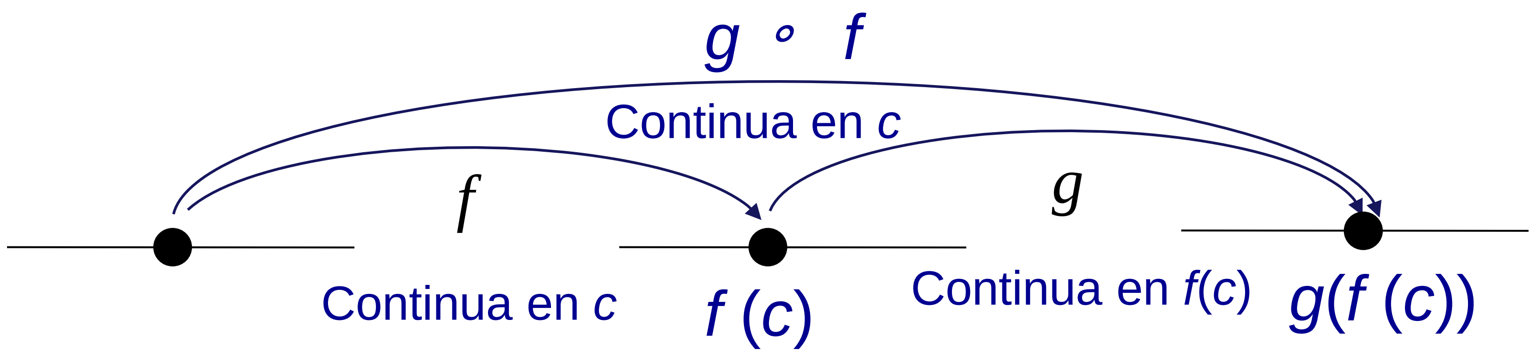
$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 + 20}{5x(x-2)}$$

Es continua para toda x, excepto en x = 0 y x = 2.

La función $f(x) = |\,x\,|$ es continua dado que $f(x) = x$ (un polinomio) si $x>0$ y $f(x) = -x$ (un polinomio) si $x < 0$ y además $\lim_{x\to 0} |\,x\,| = 0$.

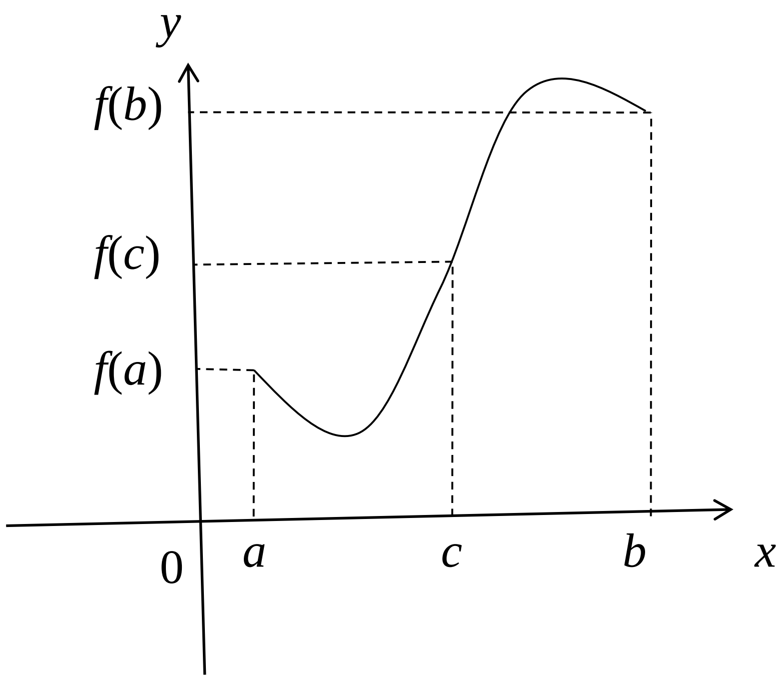
Continuidad de la composición

Si f es continua en c, y g es continua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es continua en c.



Teorema del valor intermedio

Suponga que $f(x)$ es continua en un intervalo I, y que a y b son dos puntos en I. Entonces, si y_0 es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un número c entre a y b tal que $f(c) = y_0$.



Consecuencias del teorema del valor intermedio

Conexa

La gráfica de una función continua no debe tener salto, debe ser conexa, una curva ininterrumpida.

Búsqueda de raíces

Una raíz es una solución a la ecuación $f(x) = 0$. Si el valor de la función $f(x)$ cambia de signo en algún intervalo, entonces debe tener una raíz dentro del intervalo.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = \begin{cases} x - 4 \quad , \quad \text{si} \quad x < 2 & \rightarrow \text{Función lineal} \\ -2 \quad , \quad \text{si} \quad x \geq 2 & \rightarrow \text{Función constante} \end{cases}$

A la izquierda de x=2 (función lineal) es continua.
A la derecha de x=2 (función constante) es continua.

Miramos si es continua en el punto x=2

1) $f(2) = 2 - 4 = -2$
Es decir, x = 2 es un punto del dominio de la función.

2) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 2 - 4 = -2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2$

El límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha, luego existe dicho límite y vale - 2.

3) $f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \rightarrow -2 = -2$
La función es también continua en x = 2. Es continua en R

Ejemplo 2

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & , \text{ si } x < 3 \\ x - 3 & , \text{ si } x > 3 \end{cases}$ → Función cuadrática / → Función lineal

A la izquierda de x=3 (función cuadrática) es continua.
A la derecha de x=3 (función lineal) es continua.

Miramos si es continua en el punto x=3

1) f(3) = NO existe.
Es decir, x=3 no es un punto del dominio de la función.

2) $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 3^2 - 9 = 0$ $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 - 3 = 0$

El límite por la izquierda coincide con el límite por la derecha, luego existe dicho límite y vale 0.

3) $f(3) \neq \lim_{x \to 3} f(x)$, al no existir f(3)

La función en x=3 presenta una DISCONTINUIDAD EVITABLE.

Ejemplo 3

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{si } x \leq 1 \\ e^x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$\rightarrow$ Función cuadrática
$\rightarrow$ Función exponencial

A la izquierda de x=1 (función cuadrática) es continua.
A la derecha de x=1 (función exponencial) es continua.

Miramos si es continua en el punto x=1

1) $f(1) = 1^2 - 2 = 1\text{-}2 = -1$
   Es decir, x=1 es un punto del dominio de la función.

2) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = e^1 = e$

El límite por la izquierda NO coincide con el límite por la derecha, luego NO existe límite.

3) No se puede cumplir al no existir límite.

La función en x=1 presenta una DISCONTINUIDAD de 2ª ESPECIE CON SALTO FINITO.

Ejemplo 4

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 \quad , \quad \text{si} \quad x \leq 1 & \rightarrow \text{Función cuadrática} \\ \ln(x-1) \quad , \quad \text{si} \quad x > 1 & \rightarrow \text{Función logarítmica} \end{cases}$

A la izquierda de x=1 (función cuadrática) es continua.
A la derecha de x=1 (función logarítmica) es continua.

Miramos si es continua en el punto x=1

1) $f(1) = 1^2 - 2 = 1-2 = -1$
   Es decir, x=1 es un punto del dominio de la función.

2) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln(1-1) = \ln 0^+ = -\infty$
   El límite por la izquierda NO coincide con el límite por la derecha, luego NO existe límite.

3) $f(1) <> \lim_{x \to 1} f(x)$, al no existir límite.

La función en x=1 presenta una DISCONTINUIDAD de 2ª ESPECIE CON SALTO INFINITO.

Ejemplo 5

Hallar el valor de k para que la función sea continua en todo R

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & , \text{ si } x \le 2 \\ x - k & , \text{ si } x > 2 \end{cases}$

A la izquierda de x=2 (función cuadrática) es continua.
A la derecha de x=1 (función lineal) es continua.

Miramos si es continua en el punto x=2

1) $f(2) = 2^2 - 2 = 4-2= 2$

Es decir, x=2 es un punto del dominio de la función.

2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 - k$

Para que exista el límite ambos límites laterales deben ser iguales: $2 = 2 - k \rightarrow$ Luego, en este caso k debe ser 0.

3) Si k = 0 $f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$, pues 2 = 2

Si k = 0, la función también es continua en x=2, y por tanto en todo R.

Funciones de varias variables

Conceptos básicos

El volumen de una caja rectangular de dimensiones: x, y, z vale xyz; este es un ejemplo de una función real de tres variables reales, que simbolizamos $f(x, y, z) = xyz$.

En general, una función real de n variables reales es una correspondencia que asigna a cada $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, un único valor $u=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ejemplo:
$f(x, y) = x + y^2$, que es una función de dos variables.
Algunos valores son: $f(0,-2) = 4$, $f(-2, 3) = 7$.

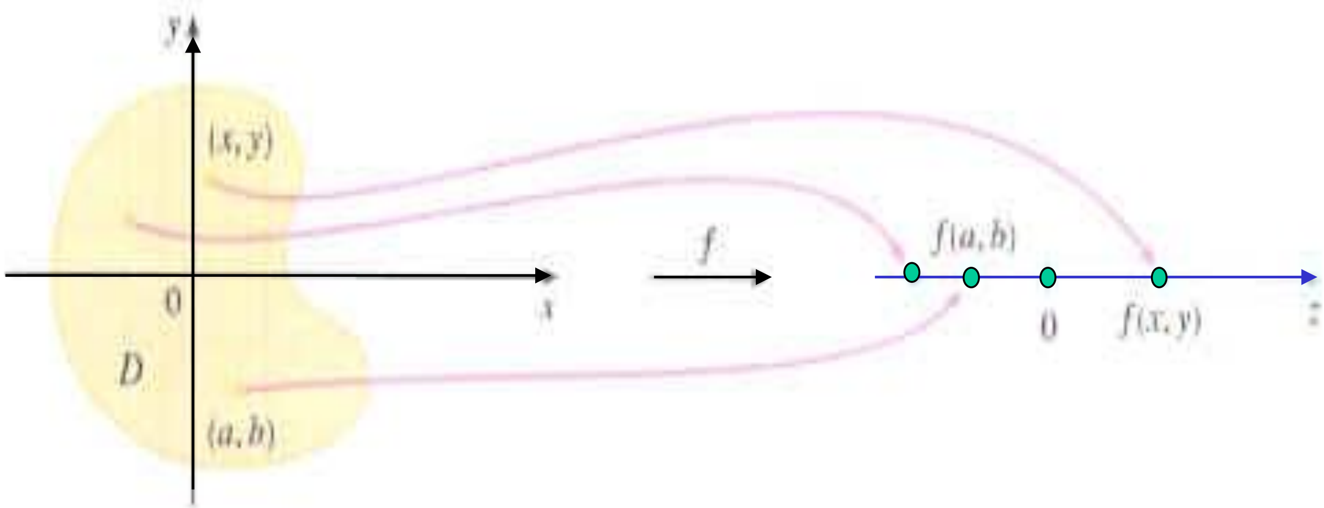
Conceptos básicos

Los conceptos conocidos para funciones de una variable tienen su equivalente para funciones de n variables.

Conceptos básicos

Una **función *f* de dos variables** es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) de un conjunto ***D***, un número real único denotado por $f(x,y)$.

El conjunto ***D*** es el **Dominio** de *f* y su **imagen** es el conjunto de valores que toma *f*.



Conceptos básicos

Ejemplo 1:

Dominio de $z=f(x,y)=\dfrac{3x-5y}{y-x^2} \Rightarrow D=\left\{(x,y)\in R^2 / y-x^2 \neq 0\right\}$.

El dominio es todo el plano R^2 excepto los puntos de la parábola $y = x^2$.

Ejemplo 2:

Dominio de $z=f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2} \Rightarrow D=\left\{(x,y)\in R^2 / 9-x^2-y^2 \geq 0\right\}$.

Como $x^2+y^2=9$, es la ecuación de una circunferencia de centro el origen y radio 3, D representa el interior y la frontera de dicha circunferencia.

Conceptos básicos

Las funciones de varias variables pueden operarse de igual forma que las de una variable, ya sea con suma, producto, cociente o composición de funciones.

Gráfica de una función de dos variables

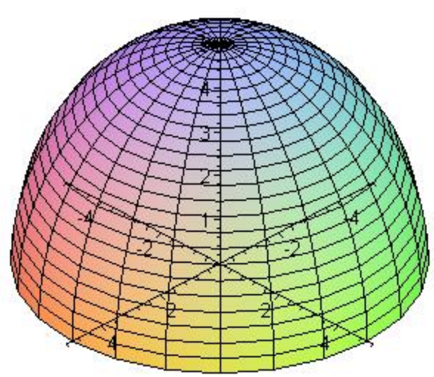
Definición: Si *f es* una función de dos variables con dominio *D*, entonces la **gráfica** de *f* es el conjunto de los puntos (x, y, z) de R^3 tales que $z = f(x,y)$ y (x,y) está en *D*.

.

Ejemplo

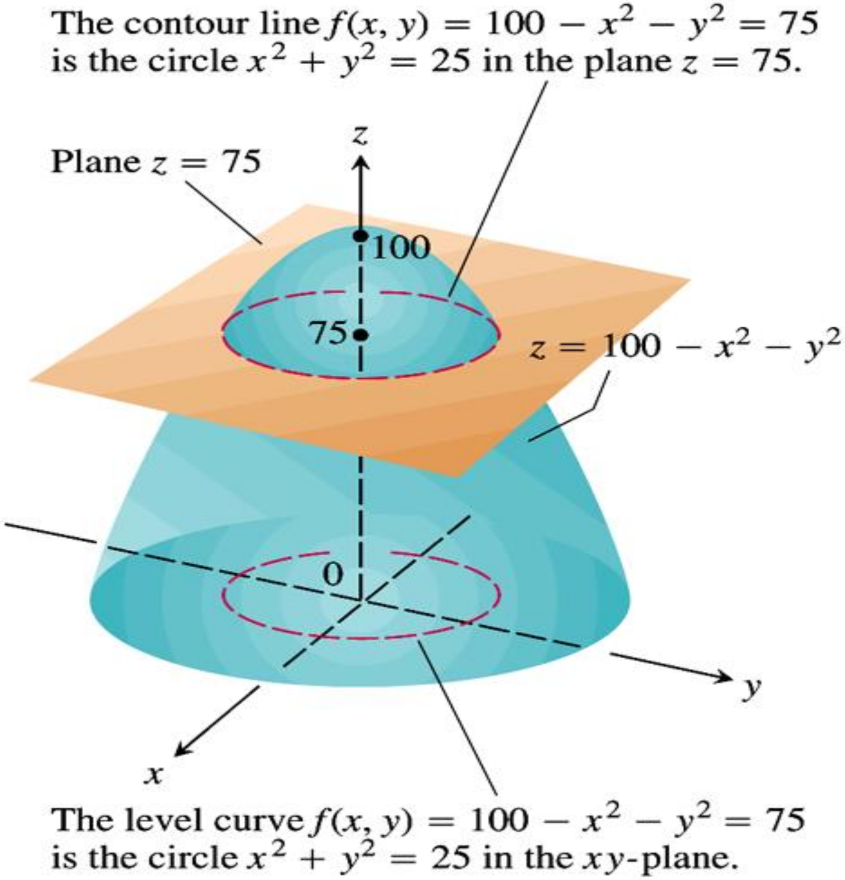
Gráfica de $f(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2}$

Haciendo $z=f(x,y)=\sqrt{49-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=49-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=49,$
que representa una esfera de centro el origen y radio7.
Como la función es positiva, su gráfica es la semiesfera positiva.



Curvas de nivel

Definición: Las curvas de nivel de una función *f* de dos variables, son las curvas con ecuaciones *f*(*x*,*y*)=*k*, donde *k* es una constante (que pertenece a la imagen de *f*).

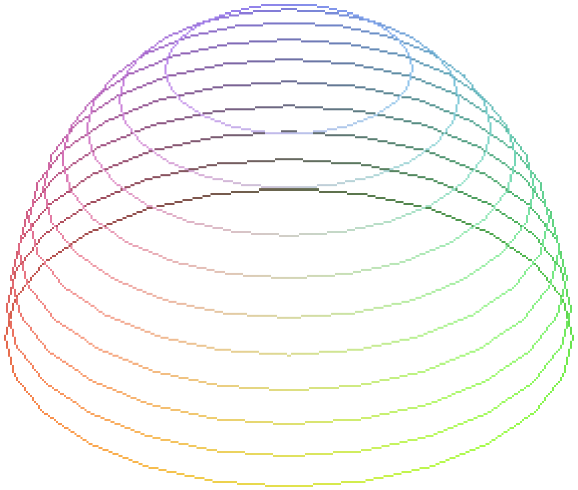


Curvas de nivel

Ejemplo

Obtener las curvas de nivel de $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}$

Haciendo z = c $c^2 = 100 - x^2 - y^2$ $x^2 + y^2 = 100 - c^2$, que son circunferencias de centro el origen para c<10. Para c = 10 representa el punto (0, 0), y para c>10 no tienen significado geométrico.



Mapa de contorno

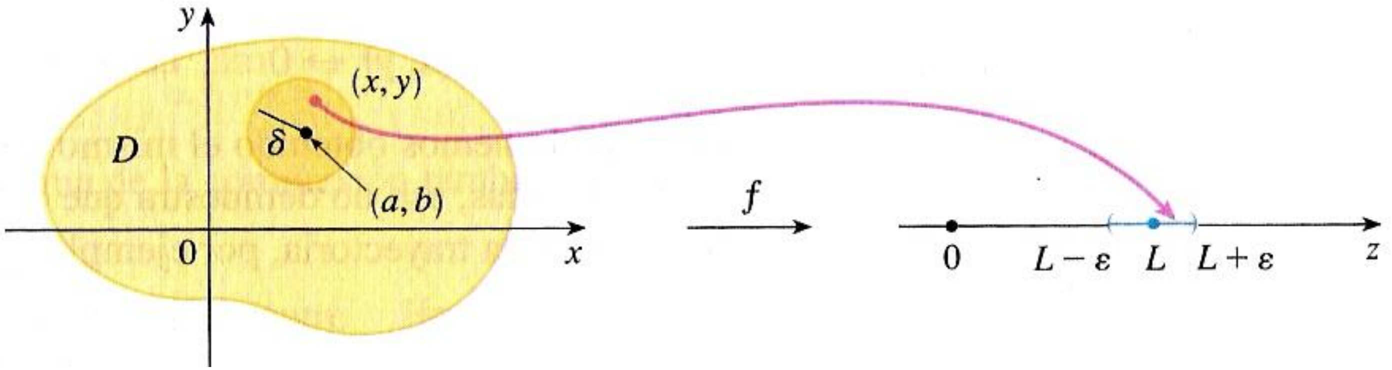
Límites

Definición: Sea *f* una función de dos variables cuyo dominio *D* incluye puntos arbitrariamente cercanos a (*a*,*b*). Entonces decimos que el límite de *f*(*x*,*y*) cuando (x,y) se aproxima a (*a*,*b*) es L y escribimos.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta_{\varepsilon} > 0 \qquad \left|f(x,y) - L\right| < \varepsilon$$

$$(x,y) \in D \qquad 0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$



Continuidad

Definición: Una función *f* de dos variables, se denomina **continua en** (*a*,*b*) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Decimos que *f* es **continua** en *D* si *f* es continua en todo punto (*a*,*b*) de D

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left[x^2 + xy + y^2\right]$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Continuidad

Propiedades de las funciones continuas:

Si c es un número real y f, g son funciones continuas en (a, b), entonces las funciones siguientes son continuas en (a, b).

1) Producto por un número cf
2) Producto de dos funciones fg
3) Suma o diferencia f+g o f-g
4) Cociente f/g, siendo g(a, b) distinto de 0

Para la composición de funciones continuas se tiene:

Si h es una función de dos variables, continua en (a, b) y, g es una función de una variable continua en h(a, b), entonces la función compuesta (g h)(a, b) = g(h(a, b)) es continua en (a, b).

Continuidad

Ejemplos:

1)La función $f(x, y)=e^{\sqrt{x^2+y^2}}$ es continua en todo R^2 por ser composición de las funciones: $g(x) = e^x$ y $h(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$

2) La función f(x, y) = cos(log(x+y)), es continua en el semiplano x+y>0, por ser composición de las funciones: g(x) = cos x , h(x, y) = log(x + y).