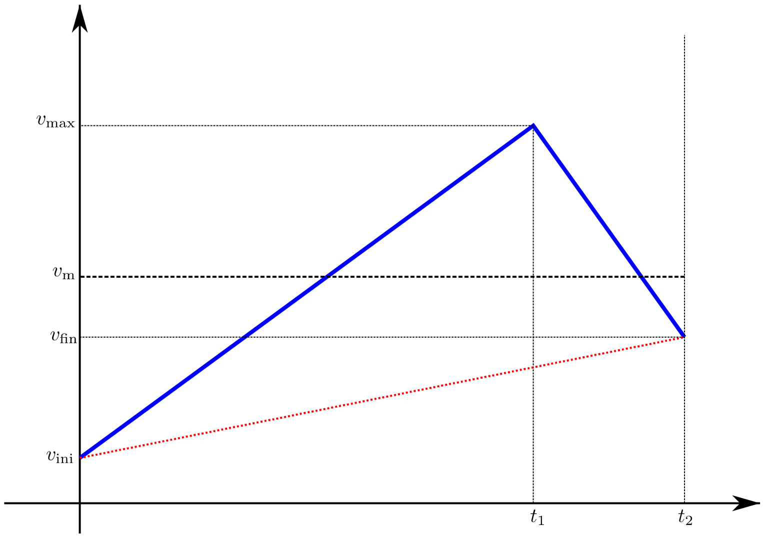
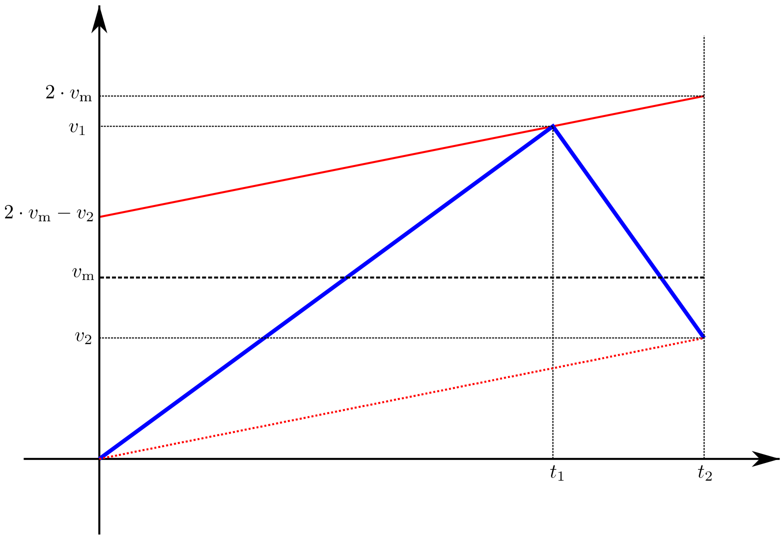
Dinámica de dos tramos:

El objeto debe cubrir una distancia *d* en un tiempo t_2, partimos de una velocidad inicial v_{ini} y tenemos que terminar a una velocidad final v_{fin}, La única restricción que tenemos es que la desaceleración debe ser proporcional a la aceleración. Es decir, si fijamos $k = 2$, si la aceleración es igual a 1 m/s^2, entonces la desaceleración será igual a 2 m/s^2. A partir de la distancia a recorrer y este tiempo, podemos determinar la velocidad media si su desplazamiento fuese a velocidad constante (aceleración y desaceleración infinita). Esa velocidad es igual a v_m., como se muestra en la figura.



En la figura podemos comprobar que el objeto parte de una velocidad inicial, acelera hasta una velocidad máxima, y desacelera, con una tasa igual a *k* veces la aceleración, hasta una velocidad final. En la figura también se marca la velocidad media a la que debería ir el objeto para cubrir la distancia en el tiempo requerido. Es decir, el área bajo la curva azul debe ser igual al área definida por la velocidad media.

Para simplificar el problema, podemos eliminar la velocidad inicial, y actualizar todas las velocidades restándoles esta velocidad. Como también hemos actualizado la velocidad media, la simplificación no afecta al resultado final (área definida por las curvas). Para simplificar la nomenclatura, llamaremos v_2 a la velocidad final, que se alcanza en el instante t_2, y v_1 a la velocidad máxima, que se alcanza en t_1, como se muestra en la figura.



Si suponemos un movimiento uniformemente acelerado hasta t_1, y posteriormente un movimiento uniformemente desacelerado hasta t_2, el área sobre esta curva deberá ser igual al desplazamiento total. Es fácil comprobar que cualquier punto (v_1, t_1) situado sobre la recta roja en la gráfica cumple la condición anterior. Esto es, el área entre las dos líneas rojas por debajo de la línea azul es igual al área por encima, ya que se forman 4 triángulos que son iguales dos a dos, y el área bajo la línea roja inferior es igual al área sobre la línea roja superior, por lo tanto, el área bajo la línea azul es igual a la mitad de dos veces el área definida por la velocidad media, es decir, son el mismo área.

En este problema, las incógnitas son:

- v_1 : velocidad máxima que alcanza el objeto.
- t_1: instante de tiempo en el que se alcanza la velocidad máxima.
- a_1: Aceleración hasta el instante t_1.

Y además definimos:

- $v_0 = 2\, v_m - v_2$
- $a_0 = v_2 / t_2$

Y como ya hemos mencionado, suponemos que el objeto acelera y desacelera con tasas diferentes, pero relacionadas entre sí. Por lo tanto, supondremos que la desaceleración es k veces mayor que la aceleración, es decir $a_2 = k\, a_1$, donde k puede ser mayor o menor de 1 (generalmente mayor de 1).

Como ya hemos visto, la coordenada (v_1, t_1) debe situarse sobre la línea roja superior. Por tanto, podemos obtener la siguiente expresión:

$$v_1 = 2\, v_m - v_2 + \frac{v_2}{t_2} \cdot t_1$$

Del primer tramo podemos relacionar la velocidad final con la aceleración en este tramo:

$$v_1 = a_1 \cdot t_1$$

Y del segundo tramo podemos relacionarlo con la desaceleración:

$$v_1 = v_2 + k\, a_1 (t_2 - t_1)$$

Por lo que obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, pero se trata de un sistema no lineal, ya que las aceleraciones están multiplicando al tiempo. Agrupamos las tres ecuaciones, y pasamos los términos independientes al lado izquierdo:

$$v_1 = v_0 + a_0 \cdot t_1 \qquad (1)$$
$$v_1 = a_1 \cdot t_1 \qquad (2)$$
$$v_1 = v_2 + k\, a_1\, t_2 - k\, a_1\, t_1 \qquad (3)$$

Sustituimos (2) en (1) y (3), para eliminar v_1 del sistema de ecuaciones.

$$a_1\, t_1 = v_0 + a_0 \cdot t_1 \qquad (4)$$
$$a_1\, t_1 = v_2 + k\, a_1\, t_2 - k\, a_1\, t_1 \qquad (5)$$

Despejamos t_1 de (4) y (5):

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1 - a_0} \qquad (6)$$
$$t_1 = \frac{v_2 + k\, a_1\, t_2}{a_1(1+k)} \qquad (7)$$

Igualamos (6) y (7):

$$\frac{v_0}{a_1 - a_0} = \frac{v_2 + k\, a_1\, t_2}{a_1(1+k)} \qquad (8)$$

Y despejamos a_1 de (8):

$$a_1^2 k\, t_2 + a_1\left(v_2 - k\, a_0\, t_2 - v_0(1+k)\right) - a_0\, v_2 = 0 \quad (9)$$

Es decir, obtenemos una ecuación de segundo grado para a_1:

$$b_2\, a_1^2 + b_1 a_1 + b_0 = 0$$

donde los términos son:

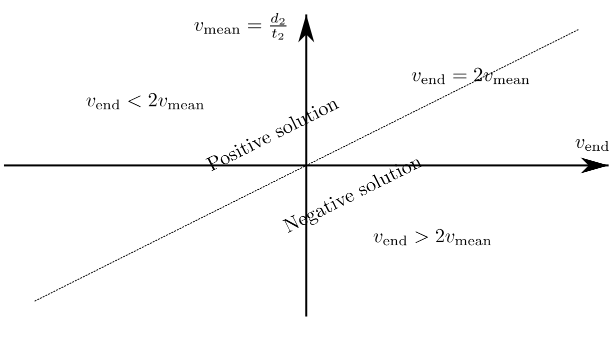
$$b_2 = k\, t_2 \qquad (10)$$
$$b_1 = v_2 - k\, a_0 t_2 - v_0(1+k) \qquad (11)$$
$$b_0 = -a_0\, v_2 \qquad (12)$$

donde:

$$a_0 = \frac{v_2}{t_2} \qquad (13)$$
$$v_0 = 2\, v_{\mathrm{m}} - v_2 \qquad (14)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para encontrar a_1. A partir de ese valor, encontramos t_1 y v_1.

El sistema tiene dos soluciones, pero sólo una es válida. La solución no válida es aquella que fija el tiempo t_1 en un valor fuera del rango $0 – t_2$, lo cual no es físicamente realizable. Para determinar qué solución debemos coger, es decir, la del discriminante positivo o negativo, nos fijamos en primer lugar en el siguiente gráfico:

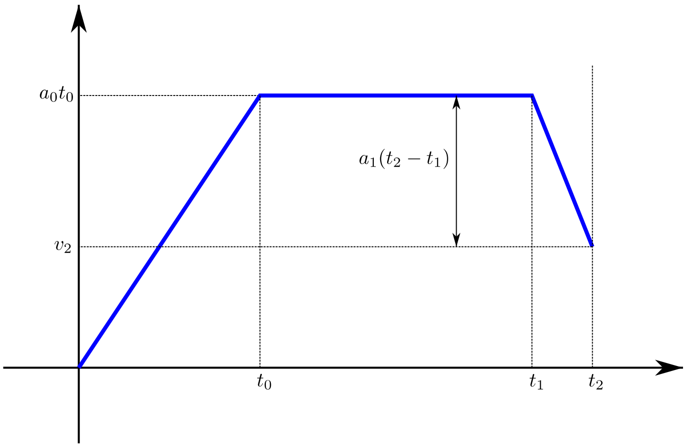


En este gráfico se representa la velocidad media y la velocidad final, una vez normalizado (es decir, eliminada la velocidad inicial de ambos valores). Del gráfico anterior, se puede ver que si la velocidad media es igual a la mitad de la velocidad final, el movimiento se puede realizar con un solo tramo, donde la aceleración coincide con el valor a_0 definido anteriormente. Este sería un caso límite, como se marca en la figura. Entonces, si la velocidad media es mayor de la mitad de la velocidad final, la solución que hay que elegir es la de discriminante positivo, y si es menor, elegimos la del discriminante negativo. Este resultado es independiente de la que la velocidad final o la velocidad media normalizadas sean positivas o negativas, o equivalentemente, mayor o menor que la velocidad inicial. No obstante, siempre que la velocidad media sea menor que la mitad de la velocidad final, el perfil es el contrario al indicado en las gráficas, es decir, primero decelerar y después acelerar.

Si los valores de aceleración y desaceleración son distintos, entonces el resultado no sería el correcto, ya que la resolución supone que el primer tramo se hace siempre con el valor de aceleración, y el segundo con el de desaceleración. Para solventar esto, basta con cambiar el valor de k siempre que detectemos que nos encontramos en la solución negativa. En este caso, simplemente cambiamos el valor de k por $1/k$ y ya tendríamos el problema resuelto.

Dinámica de 3 tramos:

Eliminamos la velocidad inicial, como en el caso anterior, para simplificar el problema. Eso supone restar dicha velocidad de todas las velocidades implicadas:



Obtenemos la relación entre la velocidad intermedia y la velocidad final v_2:

$$v_2 = a_0 t_0 - a_1 (t_2 - t_1) \qquad (1)$$

Calculamos el área sobre la curva azul:

$$d = \frac{a_0 t_0^2}{2} + a_0 t_0 (t_1 - t_0) + \frac{a_0 t_0 + v_2}{2} (t_2 - t_1) \qquad (2)$$

Despejamos t_1 de (1):

$$t_1 = \frac{v_2 - a_0 t_0 + a_1 t_2}{a_1} = \frac{v_2}{a_1} - \frac{a_0}{a_1} t_0 + t_2 \qquad (3)$$

Multiplicamos por 2 en (2), y desarrollamos la expresión:

$$2d = a_0 t_0^2 + 2 a_0 t_0 t_1 - 2 a_0 t_0^2 + a_0 t_0 t_2 - a_0 t_0 t_1 + v_2 t_2 - v_2 t_1 \quad (4)$$

Simplificamos (4) y sacamos factor común a t_1:

$$2d = -a_0 t_0^2 + a_0 t_0 t_2 + v_2 t_2 + (a_0 t_0 - v_2) t_1 \qquad (5)$$

Sustituimos (3) en (5):

$$2d = -a_0 t_0^2 + a_0 t_0 t_2 + v_2 t_2 + (a_0 t_0 - v_2)\left(\frac{v_2}{a_1} - \frac{a_0}{a_1} t_0 + t_2\right) \quad (6)$$

Desarrollamos el paréntesis:

$$2d = -a_0 t_0^2 + a_0 t_0 t_2 + v_2 t_2 + \left(\frac{a_0 v_2 t_0}{a_1} - \frac{a_0^2 t_0^2}{a_1} + a_0 t_0 t_2 - \frac{v_2^2}{a_1} + \frac{a_0 v_2 t_0}{a_1} - v_2 t_2\right) \quad (7)$$

Obtenemos una ecuación de segundo grado para t_0. Agrupamos los términos:

$$t_0^2\left(-a_0-\frac{a_0^2}{a_1}\right)+t_0\left(2a_0t_2+2\frac{a_0v_2}{a_1}\right)-\frac{v_2^2}{a_1}-2d=0 \quad (8)$$

Tenemos una ecuación de segundo grado, con los siguientes coeficientes:

$$b_2t_1^2+b_1t_1+b_0=0$$

donde los términos son:

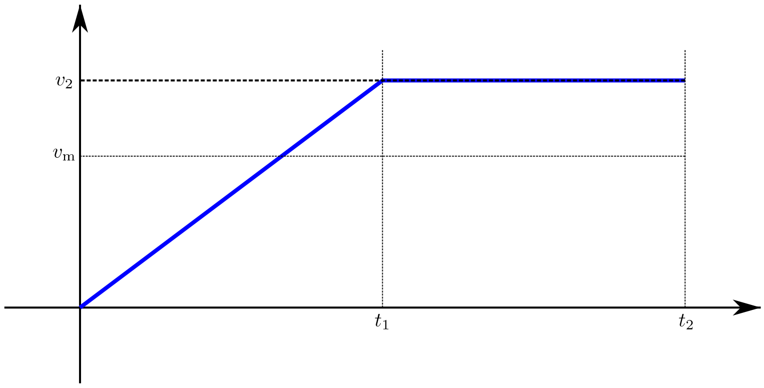
$$b_2=-a_0-\frac{a_0^2}{a_1}=-\frac{a_0}{a_1}(a_1+a_0) \quad (9)$$

$$b_1=2a_0\left(t_2+\frac{v_2}{a_1}\right) \quad (10)$$

$$b_0=\frac{-v_2^2}{a_1}-2d \quad (11)$$

Con t_0, calculamos t_1 a partir de (3). Si el tramo debe ser a la inversa, es decir, primero desacelerar y luego acelerar, lo único que cambia es el signo de d en (8), lo que se traduce en cambiar el signo de d en (11), y al calcular las respuestas, las aceleraciones cambian de signo.

Dinámica de 1 tramo:



Una vez normalizadas las velocidades, si calculamos el área bajo la curva azul:

$$d=\frac{v_2 t_1}{2}+v_2(t_2-t_1)$$

Despejando, tenemos el valor de t_1:

$$t_1=2\frac{v_2 t_2-d}{v_2}$$