

# Loss given default after default

Pomazanov<sup>1</sup> Mikhail

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics, Myasnitskaya St. 20, Moscow, 101000 Russian Federation; email: mhubble@yandex.ru

## Annotation

The proposed work shows how to determine the Loss Given Default (LGD) after default without preparing a separate model. This requires the following: LGD model before default, the calculation of the average repayment time after default, the values of the volumes and moments of repayments after default, along with the lending rate for each loan, and the recovery rate recorded in the default volume. The LGD(t) variant is proposed, which predicts recovery based on the estimation of the average posterior distribution. An analysis is conducted on recovery portfolios, demonstrating the approximate statistics of the desired quantity. The solution allows you to build an LGD model after default for any default loans, provided that you know the volumes, repayment dates, and interest rates.

**Keywords:** default; loss given default after default; LGD model; recovery period; conjugate distributions

## LGD после дефолта

### Оглавление

|                                                                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Loss given default after default .....</b>                                                                                  | <b>1</b>  |
| <b>LGD после дефолта .....</b>                                                                                                 | <b>2</b>  |
| <b>1. Введение .....</b>                                                                                                       | <b>3</b>  |
| <b>2. Модель восстановления ссуд после дефолта.....</b>                                                                        | <b>5</b>  |
| <b>3. Прогноз уровня восстановления на горизонте взыскания .....</b>                                                           | <b>7</b>  |
| <b>4. Байесовская модель оценки апостериорного восстановления .....</b>                                                        | <b>8</b>  |
| <b>5. Заключение .....</b>                                                                                                     | <b>11</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>                                                                                                        | <b>11</b> |
| <b>Приложение. Декомпозиции средних значений некоторых наиболее известных<br/>сопряженных апостериорных распределений.....</b> | <b>13</b> |

### Аннотация

В предложенной работе показано как определять LGD после дефолта без подготовки отдельной модели. Для этого требуются: модель LGD до дефолта, расчет среднего времени погашения ссуд после дефолта, значения объемов и моментов погашений после дефолта вместе со ставкой кредитования по каждой ссуде, записанная в объём дефолта ставка восстановления. Предложен вариант  $LGD(t)$ , который по оценке среднего апостериорного распределения восстановления прогнозирует это восстановление. Проведен анализ на портфелях восстановлений, демонстрирующий приближающуюся к точной статистике искомой величины. Решение дает возможность построения модели LGD после дефолта для любых дефолтных ссуд при условии знания объёмов, моментов погашений и ставки.

## 1. Введение

Убытки кредита заемщика после дефолта (LGD) является важным параметром для вопроса ожидаемых и непредвиденных потерь кредитного риска (European Banking Authority, 2017). Значение LGD моделируют на не дефолтных ссудах с учетом показателей ссуды, заемщика и экономики для расчета капитала и резервов. Модель LGD до дефолта разрабатывается с учетом многих факторов, например, как вероятность выздоровления, полного погашения кредита, частичного и т. п. (Starosta, 2020). В модели LGD для физлиц входят факторы, опирающиеся на рынок, например, CPI (Wu et al, 2024). В работе (Qi & Zhao, 2011) сравнивается шесть методов моделирования потерь при заданном значении LGD, обнаружено, что непараметрические методы (дерево регрессии и нейронная сеть) работают лучше, чем параметрические методы. В статье для корпоративных сегментов (Chalupka & Korcsni, 2009) выясняется, что основными факторами, влияющими на LGD, являются относительная стоимость обеспечения, размер кредита, а также год выдачи кредита. Можно еще долго перечислять авторов работ о разработке моделей до дефолта, например, учитывающих нетипичные методы (Ptak-Chmielewska et al, 2023), однако наша задача предложить метод учета LGD после дефолта. В работе (Ramos González et al, 2018) для двух локаций (Испания и Франция) показано существенная разница в скорости восстановления дефолтных ссуд, особенно во время кризиса. Для определения рисков после дефолта используется смешанный показатель, состоящий из ELBE<sup>1</sup> and LGD ID<sup>2</sup>, который и предлагается применять банкам. Данная статья считается рабочей для принятия собственного решения как использовать. Работа (Joubert et al, 2021) посвящена анализу перехода метрик IFRS 9 к Basel, в ней были представлены промежуточные модели после дефолта для заемщиков IFRS 9, показано, что применения методов Кокса дает устранение смещения между метриками. Авторы интересовало макроэкономическое поведение дефолтного портфеля, было показано улучшение характеристик.

В текущем исследовании мы считаем, что модель LGD до дефолта внедрена, однако после дефолта LGD будет меняться в зависимости от начисления погашения, скоростных характеристик вплоть до 100%. Последовательность изменений обсуждаем.

Для заемщика  $m = 1 \dots M$  в дефолте из выборки мощности  $M$  имеется задолженность EAD на момент дефолта  $d_m$ , равная  $E_0^m$ , а также восстановления после дефолта  $\widehat{RR}_n^m$  (денежных единиц) на каждый месяц после дефолта  $n = 1, \dots \infty$ . Имеется максимальный горизонт взыскания  $N$  (мес.), установленный для рассматриваемого сегменту кредитный требований (КТ) применения модели. Математически LGD на момент дефолта  $t = 0$  (в начале дефолта (WD)<sup>3</sup>) рассчитывается по формуле

$$\widehat{LGD}^m(0) = 1 - \frac{1}{\widehat{E}_0^m} \sum_{n=1}^N \frac{\widehat{RR}_n^m}{(1 + r_m)^{\frac{n}{12}}} \quad (1)$$

где  $r_m$  – ставка дисконтирования, мы применяем предположение неизменной ставки после дефолта. Формула (1) отвечает только за действия заемщика и стоимость денег, но стоимость взыскания следует включить в экспозицию по формуле  $\widehat{E}_0^m = E_0^m \cdot (1 + pct)$ ,  $E_0^m = E^m(0)$ , где  $pct$  – доля затрат на взыскание из бюджета Службы взыскания. Оценка ставки дисконтирования  $r_m$  не имеет единой фундаментальной основы. В работе (Scheule & Jortzik, 2020) представлены пять теоретических и эмпирических подхода к оценке  $r_m$ . Внешние регуляторы придерживаются также

---

<sup>1</sup> Expected Loss Best Estimate

<sup>2</sup> In Default

<sup>3</sup> Without Default

разных концепций. Европейская банковская ассоциация предложила (European Banking Authority, 2017) ставку дисконтирования, равную ставке межбанковского кредитования, действующей на момент дефолта, плюс 5%. Совет по стандартам финансового учета указывает (Financial Accounting Standards Board, 2016), что «если предприятие оценивает ожидаемые кредитные убытки, используя методы, которые прогнозируют будущие потоки основной суммы долга и процентов, предприятие должно дисконтировать ожидаемые потоки денежных средств по эффективной процентной ставке по финансовым активам» – это эффективная ставка кредитования или полная стоимость кредита.

Если мы учитываем потери не с момента начала взыскания после дефолта  $d_m$ , то LGD на текущую дату ID  $t = \tau - d_m$  рассчитываются по формуле, аналогичной (Joubert et al, 2021)

$$\widehat{LGD}^m(t) = 1 - \frac{1}{\widehat{E}^m(t)} \sum_{n=t+1}^N \frac{\widehat{RR}_n^m}{(1 + r_m)^{\frac{n-t}{12}}} \quad (2)$$

Слагаемое  $\widehat{E}^m(t)$  есть просроченный основной долг (в т.ч. срочные и просроченные проценты, а также комиссии, штрафы, пени и иные платежи, начисленные по условиям Кредитного договора), извлекается из учетных ИС<sup>4</sup> по состоянию на необходимую дату (это  $\tau$ , дата дефолта плюс  $t$ ), а для учета стоимости взыскания применяется техника как для  $\widehat{LGD}^m(0)$  (1). Видно, что второе слагаемое (2) состоит из дисконтированных к дате дефолта восстановлений, которые затем наращиваются по методу сложных процентов (с учетом ставки  $r_m$ ) к отчетному моменту  $t$ . Из (2) очевидно, что для не полностью взысканных ссуд при  $t \rightarrow N$ ,  $\widehat{LGD}^m(t) \rightarrow 100\%$ , а при  $t > N$ ,  $\widehat{LGD}^m(t) = 100\%$ . Максимальный горизонт взыскания  $N$  может не быть ограничен (математически  $N \rightarrow \infty$ ).

Согласно изложенному выше, для модели  $\widehat{LGD}_{ID}(0)$  требуется значение  $\widehat{LGD}_{WD}$ , а математические граничные условия для фактических (наблюдаемых) LGD для каждого заемщика имеют вид

1.  $\widehat{LGD}_{ID}(0) = \widehat{LGD}_{WD}$ ;
2.  $\widehat{LGD}_{ID}(t)$  не падает при увеличении времени  $t$ ;
3.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{LGD}_{ID}(t) = 100\%$ , где « $\infty$ » означает максимальный горизонт взыскания  $N$ .

Если  $\widehat{E}^m(t)$  учитывает основной долг и неизменные проценты на любые даты  $t$  после дефолта (взыскание без реструктуризации), то эта сумма будет оцениваться как<sup>5</sup>

$$\widehat{E}^m(t) = (1 + r_m)^{\frac{t}{12}} \cdot \left( \widehat{E}_0^m - \sum_{n=1}^t \frac{\widehat{RR}_n^m}{(1 + r_m)^{\frac{n}{12}}} \right) \quad (4)$$

Т.е. из формулы (4) следует, что к отчетному моменту  $t$  сумма восстановлений и затрат дисконтируется к дате дефолта, снижая сумму основного долга в дефолте  $\widehat{E}_0^m$ , затем, на оставшуюся сумму проценты наращиваются к отчетному моменту  $t$ .

Учитывая  $\widehat{E}_0^m > 0$ , объединяя (2), (4) и сокращая множитель  $(1 + r_m)^{\frac{t}{12}}$  получается оценка LGD ID в виде

<sup>4</sup> Информационные Системы

<sup>5</sup> Следует из очевидного разностного уравнения:  $E_t = (1 + r)^{\frac{1}{12}} \cdot E_{t-1} - \widehat{RR}_t$

$$\widehat{LGD}_{Typ}^m(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum_{n=1}^N \frac{\widehat{RR}_n^m}{(1+r_m)^{\frac{n}{12}}} \geq \widehat{E}_0^m \\ \frac{\widehat{LGD}^m(0)}{1-R^m(t)}, & R^m(t) = \frac{1}{\widehat{E}_0^m} \sum_{n=1}^t \frac{\widehat{RR}_n^m}{(1+r_m)^{\frac{n}{12}}} \end{cases} \quad (5)$$

В (5) явно отмечено, что оценка LGD располагается строго на отрезке [0,1]. Из (5) следует, что  $\widehat{LGD}^m(t)$  не убывает, а при конечном числе погашений график LGD ID выглядит как «ступеньки» на Рис.1.

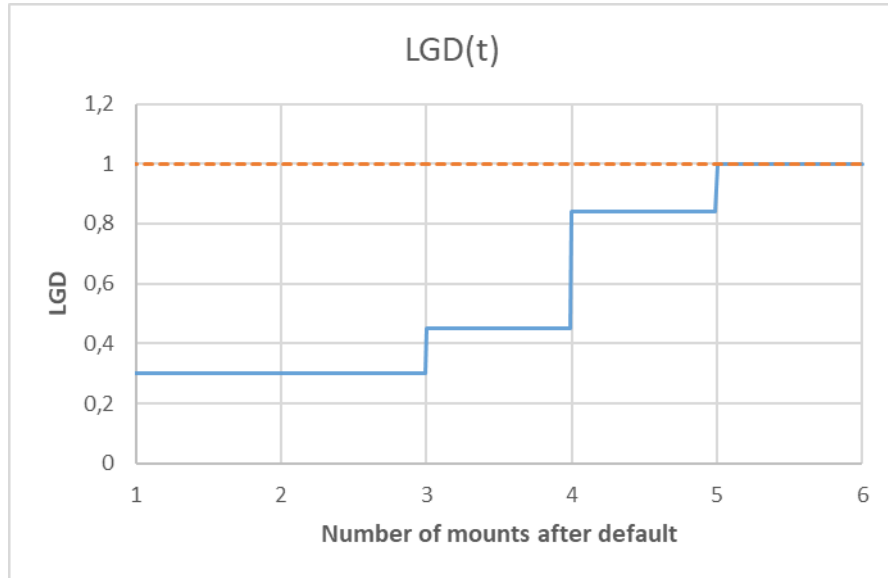


Рисунок 1. Зависимость (5)  $LGD(t)$  от срока  $t$  после дефолта

В случае достаточно крупной суммы (например, ипотека) Банк подает на заемщика в суд (специфика «Tribunal») с требованием взыскания основного долга и процентов, накопившихся к моменту  $t_{trbn}$  обращения, причем после принятия обращения задолженность фиксируется. Получается, что по формуле (3) для  $t > t_{trbn}$  проценты на возвращенные средства, дисконтированные к дате дефолта, продолжают начисляться, однако  $E^m(t)$  наращенные на оставшиеся суммы проценты учитывать перестает. Это нарушает баланс активов и пассивов в сделке, поскольку экономически восстановительные платежи идут на погашение задолженности, на остаток которой начисление процентов останавливается с момента  $t_{trbn}$ . Это приводит к падению  $\widehat{LGD}^m(t)$  по (2) на участках «ступенек» после возврата заемщиком части КТ в отсутствие еще каких-либо фактических действий. Специфика «Tribunal» является поблажкой для должника, она не приводит к изменению учета задолженности внутри банка, поэтому формулы (4), (5) остаются в силе.

## 2. Модель восстановления ссуд после дефолта

В основе модели динамики восстановления после дефолта – эмпирический двухпараметрический закон динамики восстановления. Он подтвержден на практике для большого числа портфелей дефолтов в разных сегментах КТ разных банков (De Almeida Filho et all, 2010), (Pomazanov, 2021). Закон справедлив для суммы  $\hat{R}(t) = \sum_{n=0}^t RR_n$

$$\hat{R}(t) \approx R(t) = R_{\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (6)$$

где  $RR_n = \frac{\hat{R}_n}{(1+r)^{12}}$ ,  $T$  – средний срок восстановления (мес.),  $R_\infty \leq 100\%$  предельный уровень восстановления.

Формула (6) подчиняется дифференциальному управлению

$$T \cdot R'(t) + R(t) = R_\infty \quad (7)$$

где  $R'(t)$  (7) оценивается как  $R'(t) \cong \frac{\hat{R}(t) - \hat{R}(t-1)}{1} = RR_t$ .

Пусть известны  $\hat{R}_n \cong R(n) < R_\infty$  для  $n = 1 \dots N$ , где  $N$  – горизонт взыскания (мес.).

Положим  $R_\infty(\theta) = \hat{R}_N + \theta \cdot (1 - \hat{R}_N)$ , где  $0 < \theta < 1$ ,  $\sum_{n=1}^N p_n = 1$ ,

$$T_n(\theta) = -\frac{n}{\ln\left(1 - \frac{\hat{R}_n}{R_\infty(\theta)}\right)}, \quad T(\theta) = \sum_{n=1}^N p_n \cdot T_n(\theta), \quad \sigma^2(\theta) = \sum_{n=1}^N p_n \cdot (T_n(\theta) - T(\theta))^2.$$

Проводится оптимизация  $\sigma^2(\theta)$ , получается оптимальное значение  $\theta^* = \arg \min_{0 < \theta < 1} \sigma^2(\theta)$ .

Оптимальное решение

$$T = T(\theta^*), \quad \sigma T = \sqrt{\sigma^2(\theta^*)}, \quad R_\infty = \hat{R}_N + \theta^* \cdot (1 - \hat{R}_N) \quad (8)$$

Рассматриваются возможные варианты вероятностей (8):

1. Равновероятное погашение  $p_n = \frac{1}{N}$ ;
2. Вероятность  $p_n = \frac{2(N-n)}{N \cdot (N+1)}$  учитывает преимущество веса восстановлений за начальные периоды;
3. Вероятность  $p_n = \frac{2 \cdot n}{N \cdot (N+1)}$  учитывает преимущество веса восстановлений за конечные периоды.

Для применения на практике выбирается наиболее консервативный вариант, т.е. имеющий минимальную оценку  $R_\infty$ .

Для сопоставительной оценки строятся графики  $\hat{R}(t)$  и  $R(t|T, R_\infty)$  на основе параметров (8) и оценивается MAD-погрешность

$$MAD = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |\hat{R}(n) - R(n|T, R_\infty)| \quad (9)$$

Рассматриваются примеры с первым вариантом восстановления из предыдущего пункта.

**Пример 2.1.** Дефолты ссуд ипотека от одного из банков, за 7 лет.

Расчеты метрики MAD (9) и показателей по формулам (8) дает результат в Таблице 1. Выбрано погашение равновероятное.

Таблица 1. Оценки параметров модели восстановления для Примера 2.1.

| Сегмент | Дефолты, $M$ , шт. | MAD   | $T(\theta^*)$ , мес. | $\sigma T(\theta^*)$ , мес | $R_N$ | $R_\infty(\theta^*)$ | $\theta^*$ |
|---------|--------------------|-------|----------------------|----------------------------|-------|----------------------|------------|
| Ипотека | 370                | 0,44% | 23,47                | 1,3                        | 36,1% | 39,6%                | 0,0549     |

Графики  $T_n(\theta^*)$  и кривых восстановления представлены на Рис. 2.

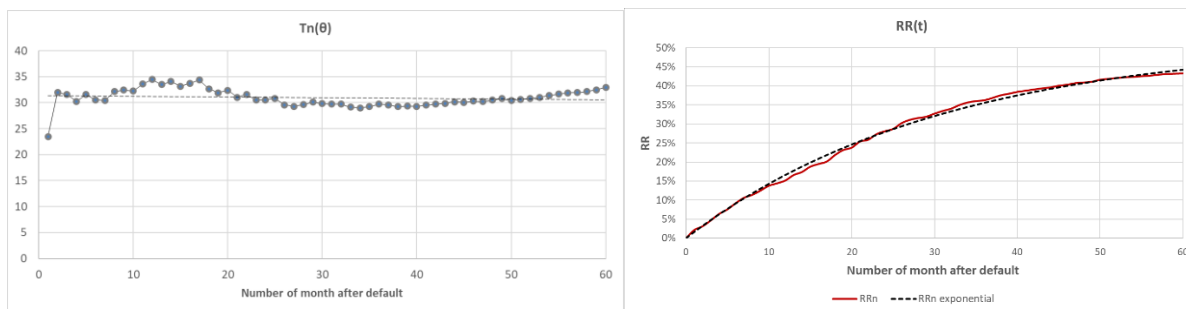


Рисунок 2. Графики  $T_n(\theta^*)$  и кривых восстановления для сегмента ипотека.

Видно, что погрешность аппроксимации как кривой восстановления, так и среднего периода восстановления мала,  $MAD = 0.44\%$ ,  $\sigma T = 1.3$  мес. (при средней  $T \cong 23$  мес.) соответственно.

**Пример 2.2.** Дефолты потребительских ссуд (ПС) от одного из банков, за 7 лет.

Расчеты метрики MAD (9) и показателей по формулам (8) дает результат в Таблице 2. Выбрано погашение равновероятное.

Таблица 2. Оценки параметров модели восстановления для Примера 2.2.

| Сегмент | Дефолты, $M$ , шт. | MAD   | $T(\theta^*)$ , мес. | $\sigma T(\theta^*)$ , мес | $R_N$ | $R_\infty(\theta^*)$ | $\theta^*$ |
|---------|--------------------|-------|----------------------|----------------------------|-------|----------------------|------------|
| ПС      | 29500              | 0,14% | 11,3                 | 0,6                        | 21,5% | 21,6%                | 0,00139    |

Графики  $T_n(\theta^*)$  и кривых восстановления представлены на Рис. 3.

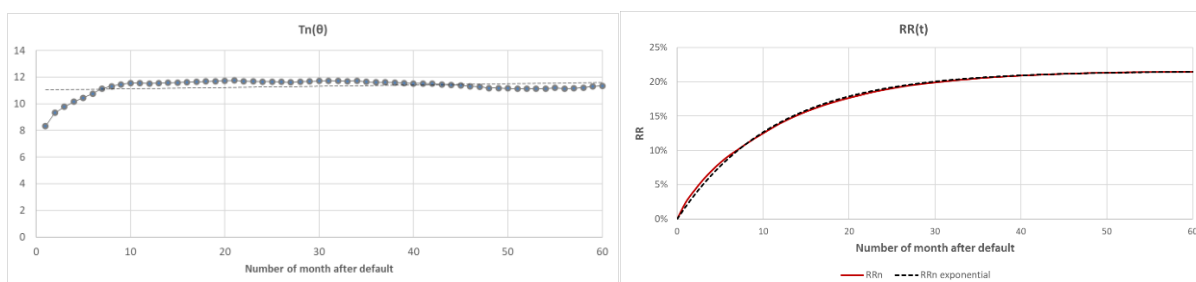


Рисунок 3. Графики  $T_n(\theta^*)$  и кривых восстановления для сегмента ПС.

Видно, что погрешность аппроксимации как кривой восстановления, так и среднего срока восстановления мала,  $MAD = 0.14\%$ ,  $\sigma T = 0.6$  мес. (при средней  $T \cong 11$  мес.) соответственно.

Приведенные примеры констатируют высокий уровень сходимости для представленной зависимости и верный выбор средних.

### 3. Прогноз уровня восстановления на горизонте взыскания

Полагается, что оценен параметр  $T$  среднего срока восстановления (6) на уровне обучающей выборки. В основе модели лежит допущение, что среднее восстановление для  $m$ -го КТ подчиняется уравнению (6) с постоянным параметром  $T$  и индивидуальным для  $m$ -го КТ параметра  $R_\infty$ , который в рамках предлагаемого подхода подлежит апостериорному уточнению.

При интегрировании (7) по аргументу  $\tau \in [0, t]$  получается тождество

$$\hat{R}_\infty(t) = \frac{1}{t} \left( T \cdot \hat{R}(t) + \int_0^T \hat{R}(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{t} \left( T \cdot \hat{R}(t) + t \cdot \hat{R}(t) - \int_0^T \hat{R}'(\tau) \tau d\tau \right).$$

Учитывая (7),  $\hat{R}'(t) = RR_t$  и  $\hat{R}(t) = \sum_{n=0}^t RR_n$ , получается апостериорная оценка

$$\hat{R}_\infty(t) = \sum_{n=0}^t RR_n + \frac{1}{t} \sum_{n=0}^t RR_n \cdot (T - n) \quad (10)$$

**Лемма.** Оценка (10) является состоятельной<sup>6</sup>.

Требуется доказать, что  $\hat{R}_N = \sum_{n=0}^N RR_n + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N RR_n \cdot (T - n) \rightarrow R_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N RR_n$ .

Имеем,  $RR_n \geq 0$ ,  $\hat{R}_N = \left(1 + \frac{T}{N}\right) \cdot \sum_{n=0}^N RR_n - \sum_{n=0}^N RR_n \cdot \frac{n}{N}$ . Для доказательства того, что  $\hat{R}_N \rightarrow R_\infty$  при  $N \rightarrow \infty$  достаточно показать, что  $\sum_{n=0}^N RR_n \cdot \frac{n}{N} = S_N \rightarrow 0$ .

Положим  $n_*(N) = N^{\frac{1}{1+\gamma}}$  для некоторого  $\gamma > 0$ ,  $S_N = P_N + Q_N$ , где  $P_N = \sum_{n=0}^{n_*(N)} RR_n \cdot \frac{n}{N}$ ,  $Q_N = \sum_{n=n_*(N)+1}^N RR_n \cdot \frac{n}{N}$ . Очевидно,  $P_N < \sum_{n=0}^{n_*(N)} RR_n \cdot \frac{n_*(N)}{N} = N^{-\frac{\gamma}{1+\gamma}} \cdot \sum_{n=0}^{n_*(N)} RR_n \leq \frac{R_\infty}{N^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . Второе слагаемое,  $Q_N \leq \sum_{n=n_*(N)+1}^N RR_n \leq \sum_{n=n_*(N)+1}^\infty RR_n \rightarrow 0$ , поскольку ряд  $\sum_{n=0}^\infty RR_n$  сходится, а нижняя граница  $n_*(N) + 1 \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ . Значит доказано, что  $S_N \rightarrow 0$ .

Пусть дефолтный заемщик  $m$  в месячные периоды  $t_k^m < t$  обеспечил дисконтированные восстановления  $RR_{t_k^m}$ . Наступивший срок  $t$  после дефолта заемщика  $d_m$  соответствует поколению  $\tau = d_m + t$  с начала  $\tau = 0$  наблюдения выборки  $m = 1 \dots M$ , установлен средний срок восстановления  $T$  (8). Будем предполагать, что  $T$  является постоянным. Формула (10) дает реализуемый на практике алгоритм оценки апостериорного (по результатам наблюдений)  $\hat{R}_\infty$  для заемщика  $m$ , который переписывается в виде:

$$\hat{R}_\infty^m(t) = \sum_{t_k^m \leq t} RR_{t_k^m} + \frac{1}{t} \cdot \sum_{t_k^m \leq t} RR_{t_k^m} \cdot (T - t_k^m), k = 1, 2, \dots \quad (11)$$

$$RR_{t_k^m} = \frac{\bar{R}_{t_k^m} / E_0^m}{(1+r_m)^{\frac{t_k^m}{12}}}, t_0^m = 1$$

Очевидно, что оценка (11) будет существенно волатильна на ранних стадиях  $t$  погашений (или ожидания таковых) дефолтного КТ, поэтому требуется использовать априорные WD-оценки восстановления из начала дефолта. Априорной оценкой уровня погашения  $R_{\infty WD}^m$  может быть модельная оценка  $R_{\infty WD}^m = 1 - LGD_{WD}^m$ .

#### 4. Байесовская модель оценки апостериорного восстановления

С позиции байесовского подхода к оценке апостериорного распределения случайной величины при наличии ограниченного количества измерений  $n$ , разумно ожидать, что средние значения апостериорного распределения  $\hat{\mu}_n$  будет декомпозироваться по формуле<sup>7</sup>

$$\hat{\mu}_n = w_n \cdot \mu_0 + (1 - w_n) \cdot \mu_n \quad (12)$$

<sup>6</sup> Состоятельная оценка в математической статистике — это точечная оценка, сходящаяся по вероятности к оцениваемому параметру.

<sup>7</sup> Для некоторых наиболее известных сопряженных априорных распределений декомпозиции средних значений представлены в Приложении.



где  $\mu_0$  матожидание априорного распределения,  $w_n \in (0,1]$  - вес, такой, что  $w_0 = 1, w_n \rightarrow 0$ , при  $n \rightarrow \infty$ , а  $\mu_n$  – апостериорная оценка по результатам наблюдений восстановления  $\hat{R}_\infty^m(t)$  (11). Полная модель апостериорного значения  $\tilde{R}_\infty^m$  для ссуды  $m$  в дефолте строится по формуле из пункта №1 Таблицы Приложения о Байесовском подходе

$$\tilde{R}_\infty^m(t) = \frac{1}{1+t/T} \cdot (1 - LGD_{WD}^m) + \frac{t/T}{1+t/T} \cdot \hat{R}_\infty^m(t) \quad (13)$$

В качестве  $w_n, \mu_0, \mu_n$  выступают  $\frac{1}{1+t/T}, 1 - LGD_{WD}^m, \hat{R}_\infty^m(t)$  соответственно, значение  $T$  берется из оценки (8). При этом значение суммарного восстановления в период  $t$ , согласно базисной модели (6), вычисляется как

$$\tilde{R}^m(t) = \tilde{R}_\infty^m(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (14)$$

Значение LGD\_ID моделируется по формуле Байеса в общепринятой интерпретации LGD Risk<sup>8</sup> (как вероятность потерь после дефолта), которая эквивалентна (5), а входящие параметры (13), (14)

$$\widetilde{LGD}^m(t) = \begin{cases} \frac{1 - \tilde{R}_\infty^m(t)}{1 - \tilde{R}^m(t)}, & \text{при } \tilde{R}_\infty^m(t) < 1 \\ 0, & \text{в ином случае} \end{cases} \quad (15)$$

Очевидно, что для предложенного подхода построения модели LGD после дефолта выполнение граничных условий (3) обеспечено, поскольку  $\widetilde{LGD}^m(0) = LGD_{WD}^m, \widetilde{LGD}^m(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow \infty$ , а возрастание обеспечивается максимальным изменением  $\tilde{R}_\infty^m(t)$ , которое меньше экспоненты от срока восстановления.

Предложенный байесовский сценарий не требует построения отдельной модели LGD ID на основе детерминантов. Для этого достаточно построения удачной консервативной модели LGD WD, расчета базового срока восстановления по сегменту и переоценки предельного уровня восстановления  $\hat{R}_\infty^m(t)$  на текущий отчетный период  $t$  после дефолта на основе наблюдаемого ряда погашений.

Для практического примера рассмотрим результат применение прогноза к метрикам дефолтных кредитов. В качестве первого – рассмотрим десятилетний опыт взыскания по ипотеке одного крупного банка с количеством случаев  $N_{mort} > 6000$ , в качестве второго примера – десятилетний опыт взыскания по потребительскому кредитованию с количеством случаев  $N_{cl} > 200\,000$ . Данные по каждому кредиту: объем ссуд взыскания, ставка по ссуде, объемы погашения в каждый месяц после дефолта на протяжении 124 месяцев (предельный срок). Таким образом мы рассчитываем приведенные погашения (11) и объем погашения для каждой ссуды, сокращая, если он будет больше 100%. В качестве среднего объема погашения возьмем среднее по объёму уровень погашения, для ипотеки  $RR_{mort} = 28\%$ , для потребительского кредита получается  $RR_{cl} = 13.2\%$ . Эти данные мы используем в качестве основных, не учитывая, например, другие виды погашения (по ипотеке - через продажу жилья). Затраты на взыскание учитывать не будем, их учет не даст принципиального изменения результатов, поскольку он просто повышает кредитную нагрузку до 5 процентов, не приводя к расхождению в расчетах. Точные значения LGD(t) после дефолта рассчитываются по формуле (5), зная все восстановления в моменты после дефолта. Прогнозные значения после дефолта  $LGD(t)$  и восстановлений  $RR(t)$  для каждой ссуды рассчитывается по (13), (14) и (15), где в качестве значений  $T$  берутся модели восстановления ссуд

<sup>8</sup> Например, в интерпретации [https://www.openriskmanual.org/wiki/LGD\\_Risk](https://www.openriskmanual.org/wiki/LGD_Risk) «LGD Risk означает риск того, что после события неисполнения обязательств контракты не выполнившей обязательства организации не могут быть выполнены в полном объеме, что приведет к финансовым потерям для кредитора».

по (8). В качестве опоры расчетов используются также средние значения восстановлений по формуле

$$RR_i(t) = RR_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_i}}\right) \quad (16)$$

где  $i = mort, cl$ . Используем усредненное значение по входящим объемам ссуд,

тип:  $\langle r \rangle = \frac{\sum_{i=1}^N r_i \cdot \hat{E}_0^i}{\sum_{i=1}^N \hat{E}_0^i}$ , применяя его также к  $LGD(t)$  и далее.

На Рис. 4 поставим три значения  $\langle LGD(t) \rangle$  на ось времени после дефолта — это точное, прогнозное и среднее, как представлено выше. Первый рисунок — это ипотека, второе — потребительский кредит.

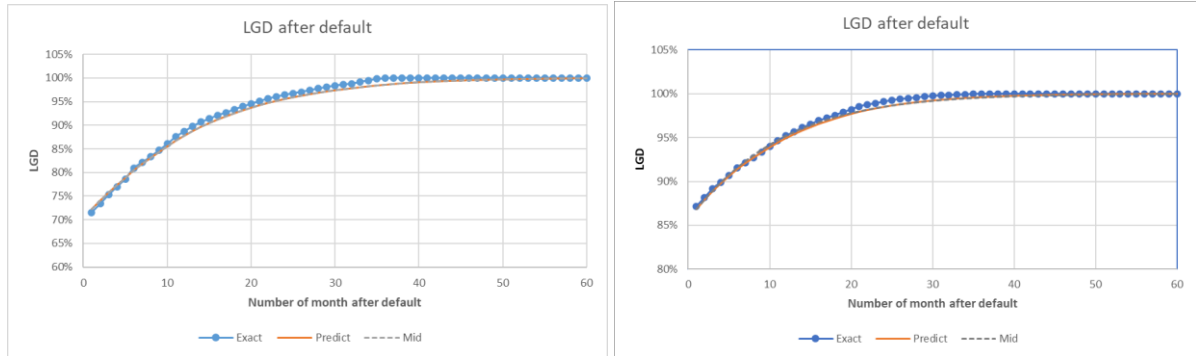


Рисунок 4. Значение  $LGD(t)$  для точного расчета (синий), а также для прогнозный значений (коричневый) и средних значений (серый). Первый рисунок — ипотека, второй рисунок — потребительское кредитование.

Поведение рассчитанных точных последовательностей LGD аналогично расчетам (Ramos González et al, 2018) ELBE для метрик нескольких стран. Однако видно, что расчетное значение  $LGD(t)$  очень близко между точным и рассчитанным по прогнозу. Расчет практически не дает разницы между прогнозной и средней значениями.

Чтобы показать, что прогнозное значение существенно лучше среднего, мы возьмем две метрики на основании восстановлений:

первое — это разница значений  $r_1 = |\tilde{R}^m(t) - R^m(t)|$ , а второе  $r_2 = |RR^m(t) - R^m(t)|$ . Здесь прогноз  $\tilde{R}^m(t)$  из формулы (14), а  $R^m(t)$  точное значение (5),  $RR^m(t)$  усредненное значение (16), которое берется без учета восстановлений. На Рис.5 показано как ведут себя метрики  $\langle r \rangle$  для двух портфелей (первый рисунок — ипотека, второй — потребительское).

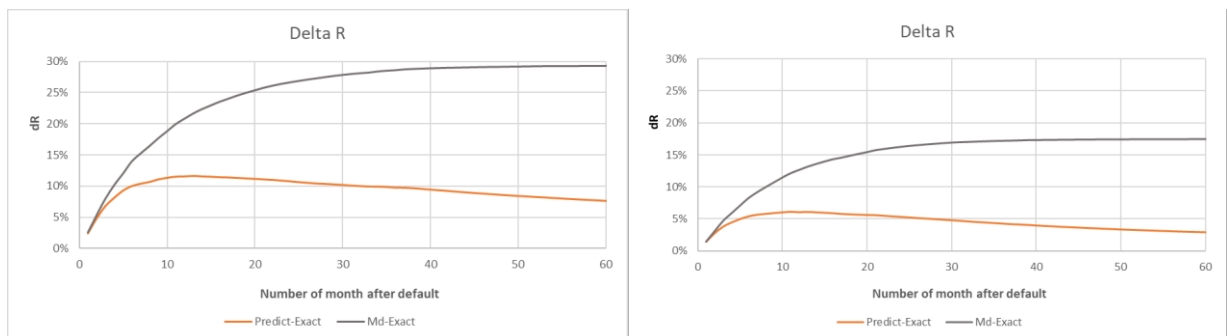


Рисунок 5. Значение усредненных метрик модуля разницы восстановлений прогнозного/точного (коричневый) и среднего/точного (серый). Первый рисунок — ипотека, второй рисунок — потребительское кредитование

По рисункам видно, что метрика разницы с точным от средней сильно отстает от метрики разницы с точным от прогнозный, поэтому представленную прогнозную метрику имеет прямой смысл вставлять в модель. По Рис. 4 между прогнозной и средней разницы нет, в рамках усредненной

метрики  $LGD(t)$  портфеля, однако по индивидуальным показателям разница существенная Рис. 5. Совокупность рисунков показывает работоспособность предложенной модели. Возможно, модель (10) удастся расширить, чтобы получить еще более близкие к точным данные на выходе, но мы остановимся на том, что предложили.

## 5. Заключение

В предложенной работе показано как определять LGD после дефолта без подготовки отдельной модели. Для этого требуются:

1. Изящная модель LGD до дефолта;
2. Расчет среднего времени для экспоненциального погашения ссуд после дефолта;
3. Значения объемов и моментов погашений после дефолта вместе со ставкой кредитования по каждой ссуде;
4. Ставка восстановления по каждой дефолтной ссуде, записанная в объём кредита.

При рассмотрении модели LGD после дефолта требуется соблюдение граничных условий (3). Значение среднего периода для погашения ссуд после дефолта рассчитывается для искомого сегмента по формулам (8). С использованием модели LGD WD определяется уровень бесконечного восстановления после дефолта в заданный момент  $t$ , для этого используется прогноз по модели восстановления после дефолта (11), затем с помощью метода оценки апостериорного восстановления (13) определяется искомое. Восстановление в период  $t$  после дефолта определяется по (14). Объем  $\bar{LGD}^m(t)$  по каждой ссуде определяется по (15). Проведено исследование на многих подручных портфелях дефолтов, достоверно показаны сходимости для среднего времени экспоненциального погашения. При применении апостериорного распределения получены портфельные условия  $\langle LGD(t) \rangle$  практически совпадающее с точным, но при оценке сходимости на индивидуальных уровнях представлены существенные улучшения для апостериорного распределения, которое и рекомендуется применять.

## ЛИТЕРАТУРА

- Aivazian, S. (2008) Bayesian Methods in Econometrics, Applied Econometrics, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), vol. 9(1), pages 93-130 (in Russian) URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/bayesovskiy-podhod-v-ekonometricheskom-analize> (data: 21.08.2025), <https://ideas.repec.org/a/ris/apltrx/0062.html>
- De Almeida Filho, A.T. & Mues, C. & Thomas, L.C. (2010) Optimizing the Collections Process in Consumer Credit. Production and Operations Management, 19: 698-708. URL: <https://doi.org/10.1111/j.1937-5956.2010.01152.x>
- European Banking Authority (2017) Guidelines on PD estimation, LGD estimation and the treatment of defaulted exposures. Report EBA/GL/2017/16, EBA, Paris. URL: [https://www.eba.europa.eu/sites/default/files/documents/10180/2033363/6b062012-45d6-4655-af04-801d26493ed0/Guidelines%20on%20PD%20and%20LGD%20estimation%20\(EBA-GL-2017-16\).pdf](https://www.eba.europa.eu/sites/default/files/documents/10180/2033363/6b062012-45d6-4655-af04-801d26493ed0/Guidelines%20on%20PD%20and%20LGD%20estimation%20(EBA-GL-2017-16).pdf)
- Financial Accounting Standards Board (2016) Accounting Standards update, financial instruments: credit losses (Topic 326). Update 2016-13, June, FASB, Norwalk, CT. URL: [https://www.fasb.org/page/ShowPdf?path=ASU\\_2016-13.pdf&title=UPDATE%202016-](https://www.fasb.org/page/ShowPdf?path=ASU_2016-13.pdf&title=UPDATE%202016-)

[13%E2%80%94FINANCIAL%20INSTRUMENTS%E2%80%94CREDIT%20LOSSES%20\(TOPIC%20326\):%20MEASUREMENT%20OF%20CREDIT%20LOSSES%20ON%20FINA](#)

Joubert, M. & Verster, T. & Raubenheimer, H., & Schutte, W. D. (2021) Adapting the Default Weighted Survival Analysis Modelling Approach to Model IFRS 9 LGD. *Risks*, 9(6), 103, <https://doi.org/10.3390/risks9060103>

Qi, M. & Zhao, X. (2011) Comparison of modeling methods for Loss Given Default. *Journal of Banking & Finance*, 35(11), 2842–2855, <http://dx.doi.org/10.1016/j.jbankfin.2011.03.011>

Pomazanov, M. (2021) Loss Given Default Estimations in Emerging Capital Markets. In: Karminsky, A.M., Mistrulli, P.E., Stolbov, M.I., Shi, Y. (eds) *Risk Assessment and Financial Regulation in Emerging Markets' Banking*. Advanced Studies in Emerging Markets Finance. Springer, Cham. URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-69748-8\\_6](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-69748-8_6)

Ptak-Chmielewska, A. & Kopciuszewski, P. & Matuszyk, A. (2023) Application of the kNN-Based Method and Survival Approach in Estimating Loss Given Default for Unresolved Cases, *Risks*, MDPI, vol. 11(2), pp. 1-14, <https://doi.org/10.3390/risks11020042>

Chalupka, R. & Kopeckni, J. (2009) Modeling Bank Loan LGD of Corporate and SME Segments: A Case Study, *Czech Journal of Economics and Finance (Finance a uver)*, Charles University Prague, Faculty of Social Sciences, vol. 59(4), pages 360-382, URL: <http://ideas.repec.org/a/fau/fauart/v59y2009i4p360-382.html>

Ramos González, M. & Partal-Ureña, A. & Gómez-Fernández-Aguado, P. (2018) Proposal on ELBE and LGD In-Default: Tackling Capital Requirements after the Financial Crisis. ECB Working Paper No. 2165, Available at SRN: <https://ssrn.com/abstract=3202618> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.3202618>

Scheule, H. & Jortzik, S. (2020). Benchmarking loss given default discount rates. *The Journal of Risk Model Validation*. 14. <http://dx.doi.org/10.21314/JRMV.2020.225>

Starosta, W. (2021) Loss given default decomposition using mixture distributions of in-default events, *European Journal of Operational Research*, V. 292, Issue 3, 1187-1199, <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.11.034>

Wu, Y. & Arora, G. & Mei, X. (2024) Using CPI in Loss Given Default Forecasting Models for Commercial Real Estate Portfolio, Papers 2402.15498, arXiv.org, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.15498>

## Приложение.

### Декомпозиции средних значений некоторых наиболее известных сопряженных апостериорных распределений

В байесовском подходе оптимальным образом используется информация из двух источников:

- априорная информация о моделируемом объекте (информация, полученная из предыдущих исследований или теоретических предположений)
- статистическая информация, содержащаяся в результатах наблюдений.

Обновленная информация (апостериорная вероятность) - результат применения формулы Байеса:

$$p(\theta|Y) = \frac{p(\theta) \cdot L(Y|\theta)}{\int L(Y|\theta)p(\theta)dp(\theta)}$$

Где  $Y$  - вектор реализации случайных значений,  $p(\theta)$  – плотность априорного распределения,  $L(Y|\theta)$  – функция правдоподобия, как плотность вероятности реализаций  $Y$  при заданном параметре  $\theta$ ,  $\int L(Y|\theta)p(\theta)dp(\theta)$  - полная вероятность, выполняющая роль нормирующего множителя и не зависящая от вектора параметров  $\theta$ .

Искомая  $p(\theta|Y)$  - апостериорная функция плотности вероятности, включающая как априорную (через априорную плотность распределения вектора параметров), так и (через функцию правдоподобия) апостериорную информацию. Полученную апостериорную функцию плотности вероятности можно охарактеризовать мерами центральной тенденции (математическим ожиданием или модой), дисперсии и скошенности.

Общая логическая схема байесовского оценивания значения параметров распределения представлена на следующем рисунке



Рисунок. Общая логическая схема байесовского подхода

Если апостериорное распределение  $p(\theta|Y)$  принадлежит тому же семейству вероятностных распределений, что и априорное распределение  $p(\theta)$  (т.е. имеет тот же вид, но с другими параметрами), то это семейство распределений называется **сопряжённым** семейству функций правдоподобия  $L(Y|\theta)$ . **При этом распределение  $p(\theta)$  называется сопряжённым априорным распределением к семейству функций правдоподобия  $L(Y|\theta)$ .** Семейство сопряженных распределений не многочисленно. В Таблице представлены некоторые известные сопряженные распределения из (Aivazian, 2008), выданы соответствующие значения  $w_n, \mu_0, \mu_n$  для средних значений апостериорного распределения  $\hat{\mu}_n = w_n \cdot \mu_0 + (1 - w_n) \cdot \mu_n$ .

Таблица. Семейство законов распределения вероятностей (ЗРВ), сопряженные априорные и апостериорные распределения, а также параметры декомпозиции средних значений  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $\bar{g} = (\prod_{i=1}^n x_i)^{\frac{1}{n}}$ .

| No | LPD of the observed population                                                                                                                                   | Conjugate apriority LPD $p(\theta)$ , expressions for $E\theta$ и $D\theta$                                                                                                                                                                                                                                     | Posterior LPD $p(\theta x_1, x_2, \dots, x_n)$ and expressions for its parameters                                                                                                                      | Decomposition parameters of medium values: $w_n, \mu_0, \mu_n$ for posterior distribution                                                                                          |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | $(\theta; \sigma^2)$ – normal,<br>$f(x \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}$ (the variance value $\sigma^2$ is known)       | $(\theta_0; \sigma_0^2)$ – normal,<br>$E\theta = \theta_0; D\theta = \sigma_0^2$<br>$(\theta_0 \text{ and } \sigma_0^2 \text{ are set})$                                                                                                                                                                        | $(\theta'_0; \sigma'^2_0)$ – normal,<br>where $\theta'_0 = \frac{\bar{x} + \gamma\theta_0}{1+\gamma}$ ,<br>$\sigma'^2_0 = \frac{\sigma^2}{n(1+\gamma)}$ and<br>$\gamma = \frac{\sigma^2}{n\sigma_0^2}$ | $w_n = \frac{1}{1+1/\gamma}$<br>$\mu_0 = \theta_0$<br>$\mu_n = \bar{x}$                                                                                                            |
| 2  | Exponential<br>$f(x \theta) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$                                                          | $p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, (\theta > 0)$<br>are gamma distribution;<br>$E\theta = \frac{\alpha}{\beta}; D\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}$<br>$(\alpha, \beta \text{ are set})$                                                                        | Gamma distribution with parameters<br>$\alpha' = \alpha + n$<br>$\beta' = \beta + n \cdot \bar{x}$                                                                                                     | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{\bar{x}}{\beta}}$<br>$\mu_0 = \frac{\alpha}{\beta}$<br>$\mu_n = \frac{1}{\bar{x}}$                                                                 |
| 3  | $[0; \theta]$ are uniform distribution<br>$f(x \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 \leq x \leq \theta \\ 0, & x \notin [0; \theta] \end{cases}$        | $p(\theta) = \begin{cases} \frac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$<br>$(\theta > 0)$ are Pareto distribution;<br>$E\theta = \frac{\alpha\theta_0}{\alpha-1}; D\theta = \frac{\alpha\theta_0^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$<br>$(\alpha, \theta_0 \text{ are set})$ | Pareto distribution with parameters<br>$\alpha' = \alpha + n$<br>$\theta'_0 = \max\{\theta_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$                                                                                  | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{1}{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{1-\alpha \frac{\theta'_0 - \theta_0}{\theta'_0}}$<br>$\mu_0 = \frac{\alpha\theta_0}{\alpha-1}$<br>$\mu_n = \theta'_0$ |
| 4  | Poisson distribution<br>$P\{\xi = x\} = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta},$ $x = 0, 1, 2, \dots$                                                                   | $p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, (\theta > 0)$<br>are Gamma distribution;<br>$E\theta = \frac{\alpha}{\beta}; D\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}$<br>$(\alpha, \beta \text{ are set})$                                                                        | Gamma distribution with parameters<br>$\alpha' = \alpha + n \cdot \bar{x}$<br>$\beta' = \beta + n$                                                                                                     | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{1}{\beta}}$<br>$\mu_0 = \frac{\alpha}{\beta}$<br>$\mu_n = \bar{x}$                                                                                 |
| 5  | The binomial distribution<br>$P\{\xi = x\} = C_N^x \theta^x (1-\theta)^{N-x}$ (parameter value N is known)                                                       | $p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}$<br>$(0 \leq \theta \leq 1)$ are Beta distribution;<br>$E\theta = \frac{a}{a+b}; D\theta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$<br>$(a, b \text{ are set})$                                                                             | Betta distribution with parameters<br>$a' = a + n \cdot \bar{x}$<br>$b' = b + nN - n \cdot \bar{x}$                                                                                                    | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{N}{a+b}}$<br>$\mu_0 = \frac{a}{a+b}$<br>$\mu_n = \frac{\bar{x}}{N}$                                                                                |
| 6  | Negative binomial distribution<br>$P\{\xi = x\} = C_{x-1}^{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$ (parameter value k is known)<br>$x = k, k+1, \dots$                   | $p(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}$<br>$(0 \leq \theta \leq 1)$ are Beta distribution;<br>$E\theta = \frac{a}{a+b}; D\theta = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$<br>$(a, b \text{ are set})$                                                                             | Betta distribution with parameters<br>$a' = a + kn$<br>$b' = b + n \cdot \bar{x} - kn$                                                                                                                 | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{\bar{x}-k}{a+b}}$<br>$\mu_0 = \frac{a}{a+b}$<br>$\mu_n = \frac{k}{\bar{x}-k}$                                                                      |
| 7  | Pareto distribution<br>$f(x \theta) = \begin{cases} \frac{\theta x_0^\theta}{x^{\theta+1}}, & x \geq x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$ (parameter $x_0$ is known) | $p(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, (\theta > 0)$<br>are Gamma distribution;<br>$E\theta = \frac{\alpha}{\beta}; D\theta = \frac{\alpha}{\beta^2}$<br>$(\alpha, \beta \text{ are set})$                                                                        | Gamma distribution with parameters<br>$\alpha' = \alpha + n$<br>$\beta' = \beta + n \cdot \ln\left(\frac{\bar{g}}{x_0}\right)$                                                                         | $w_n = \frac{1}{1+n \cdot \frac{\ln(\bar{g}/x_0)}{\beta}}$<br>$\mu_0 = \frac{\alpha}{\beta}$<br>$\mu_n = \frac{1}{\ln(\bar{g}/x_0)}$                                               |