ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

Pedro G. Mattos

ATENÇÃO

ESTE LIVRO NÃO ESTÁ TERMINADO.
O PROJETO AINDA ESTÁ EM EXECUÇÃO E NÃO HÁ DATA PREVISTA PARA TÉRMINO.

Pedro G. Mattos
pedrogmattos@riseup.net
Campinas, SP, Brasil

Arte da capa: *Scuola di Atene* (1511), Raffaello Sanzio.

Versão 0.2.1. Última revisão em 7 de outubro de 2017.

Licença Creative Commons (CC BY-SA 4.0).
Este livro pode ser compartilhado e redistribuído em qualquer suporte ou formato, adaptado, transformado e reeditado sob as seguintes condições.
Atribuição — Você deve dar o crédito apropriado, prover um link para a licença e indicar se mudanças foram feitas. Você deve fazê-lo em qualquer circunstância razoável, mas de maneira alguma que sugira ao licenciante a apoiar você ou o seu uso.
Compartilha Igual — Se você reorganizar, transformar ou criar a partir do material, tem de distribuir as suas contribuições sob a mesma licença que o original.
Sem restrições adicionais — Você não pode aplicar termos jurídicos ou medidas de caráter tecnológico que restrinjam legalmente outros de fazerem algo que a licença permita.
Para mais informações sobre a licença acesse:
https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pt_BR ou
https://wiki.creativecommons.org/wiki/Brazil.

Sumário

I Conjuntos **1**

1 Os Axiomas e as Contruções Essenciais **2**
1.1 Axiomas do Vazio, da Extensão e das Partes 3
1.2 Axiomas da Especificação e do Par 5
1.3 Axioma da União 5
1.4 Axioma da Escolha 6
1.5 Axiomas do Infinito e da Fundação 8
1.6 Axioma da Substituição 8

2 Famílias e Propriedades de Conjuntos **11**
2.1 Famílias e Indexações 11
2.2 Propriedades de União e Interseção 13
2.3 Produto de Conjuntos 15
2.4 Coproduto de Conjuntos 16
2.4.1 Propriedades de Produto e Coproduto 17

3 Funções **19**
3.1 Definição e Propriedades Básicas 19
3.2 Composição de Funções 21
3.3 Função Inversa, Injetividade e Sobrejetividade 22
3.4 Imagem Inversa de Função e Propriedades 24
3.5 Propriedades de Imagem e Imagem Inversa 25

4 Relações Binárias **27**
4.1 Relações de Equivalência 27
4.2 Relações de Ordem 28
4.2.1 Ordens Parciais, Estritas e Totais 28
4.2.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados 30
4.2.3 Funções Monótonas 33
4.2.4 Cadeias e Lema de Zorn 33
4.2.5 Reticulados 33

5 Cardinalidade de Conjuntos **34**
5.1 Relações . . . 34
5.1.1 Igualdade de Cardinais . . . 34
5.1.2 Ordenação de Cardinais . . . 35
5.2 Operações . . . 36
5.2.1 Cardinalidade de Soma (ou União Disjunta) . . . 36

6 Conjuntos Numéricos **39**
6.1 Números Naturais . . . 39
6.1.1 Adição . . . 40
6.1.2 Multiplicação . . . 42
6.1.3 Ordenação . . . 45
6.2 Números Inteiros . . . 47
6.2.1 Adição e Subtração . . . 48
6.2.2 Multiplicação . . . 50
6.2.3 Ordenação . . . 50
6.3 Números Racionais . . . 51
6.3.1 Adição e Subtração . . . 51
6.3.2 Multiplicação e Divisão . . . 51
6.3.3 Ordenação . . . 51
6.4 Números Reais . . . 51
6.4.1 Adição e Subtração . . . 51
6.4.2 Multiplicação e Divisão . . . 51
6.4.3 Ordenação . . . 51
6.4.4 Completude . . . 51

7 Resto temporário **52**
7.1 Complementares e Diferença Simétrica . . . 52
7.1.1 Propriedades . . . 52
7.2 Partições . . . 53

II Álgebra **55**

8 Operações Binárias e Estruturas Básicas **56**
8.1 Operações Binárias . . . 56
8.2 Magma . . . 57
8.3 Semigrupo . . . 58
8.4 Homomorfismo de Semigrupos . . . 59
8.5 Monoide . . . 60
8.6 Homomorfismos de Monoides . . . 62

9 Grupos **64**
9.1 Construções Algébricas 64
9.1.1 Grupo e Subgrupo 64
9.1.2 Coclasses e Índice de Subgrupo 67
9.1.3 Subgrupo Normal e Grupo Quociente 70
9.1.4 Homomorfismo de Grupo 72
9.1.5 Núcleo, Imagem e Isomorfismo 74
9.1.6 Teoremas de Isomorfismo 76
9.2 Construções Categóricas 78
9.2.1 Produto de Grupos 78
9.2.2 Grupo Livre 79
9.2.3 Coproduto de Grupos 81
9.3 Construções Específicas 83
9.3.1 Grupo Simples e Subgrupo Normal Maximal 83
9.3.2 Sequência subnormal 84
9.3.3 Conjunto gerador 84
9.3.4 Grupos Simétricos e Alternados 84
9.3.5 Grupos Cíclicos 89
9.3.6 Grupos Diedrais 89
9.3.7 Ações de Grupos 90

10 Anéis **92**
10.1 Anel 92
10.2 Subanel 94
10.3 Anel de Polinômios 95
10.4 Produto de Anéis 98
10.5 Ideais e Anéis Quocientes 99
10.6 Homomorfismos de Anéis 104
10.7 Teoremas de Isomorfismo 110
10.8 Ideais Primos e Ideais Maximais 114
10.9 Domínios Euclidianos 116
10.10 Divisão e Associação em Anéis 118
10.10.1 Divisão 118
10.10.2 Relação de Associação 122
10.11 Domínios de Fatoração Única 123
10.12 Raízes de Polinômios 131

11 Corpos **133**
11.1 Extensões de Corpos 133
11.2 COISAS DA PROVA 3 136

12 Matrizes **139**
12.1 Soma de Matrizes 139
12.2 Produto de Matrizes e Produto Por Escalar 141
12.3 Matrizes Quadradas 143
12.4 Traço e Determinante 143

13 Espaços Vetoriais **145**
13.1 Espaço e Subespaço Vetoriais 145
13.2 Combinação Linear de Vetores 151
13.3 Soma de Subespaços Vetoriais 154
13.4 Bases de Espaços Vetoriais 157
13.5 Transformações Lineares 159
13.6 Espaços Vetoriais Normados 162
13.7 Produto e Coproduto de Espaços Vetoriais 163
13.7.1 Produto 163
13.7.2 Coproduto (Soma) 165

14 Álgebra Multilinear **166**
14.1 Transformações Multilineares 166
14.2 Formas Multilineares 167
14.3 Produto Exterior 170

15 Reticulados **171**
15.1 Reticulados 171
15.2 Álgebras Booleanas 172

III Topologia **175**

16 Espaços Topológicos **176**
16.1 Topologia, abertos e fechados 176
16.2 Subespaços Topológicos 178
16.3 Interior e Fecho 178
16.4 Fronteira 183
16.5 Derivado 184

17 Topologias Geradas, Bases e Sub-bases **185**
17.1 Topologias Finas e Grossas e Topologias Geradas 185
17.2 Bases e Sub-bases 186

18 Funções Contínuas **187**
18.1 Topologias Puxadas e Empurradas 188

19 Produto de Espaços Topológicos **189**

20 Axiomas de Separação **192**
20.1 Noções de Separação de Conjuntos 192
20.2 Espaços Distinguíveis 193
20.3 Espaços Acessíveis 194
20.4 Espaços Separados 195
20.5 Espaços Regulares 195
20.6 Espaços Completamente Regulares 196
20.7 Espaços Normais 197

21 Invariantes Topológicos **199**
21.1 Conexidade 199
21.2 Compacidade 199
21.3 Conjuntos Densos 199

IV Análise **201**

22 Espaços Métricos **202**
22.1 Os Espaços Métricos 202
22.1.1 Métricas 202
22.1.2 Diâmetro, Bolas Abertas e Bolas Fechadas 205
22.2 Topologia dos Espaços Métricos 206
22.2.1 Interior e Pontos Interiores 206
22.2.2 Limites e Convergência de Sequências 207
22.2.3 Fecho e Pontos Aderentes 209
22.2.4 Continuidade 210
22.2.5 Outras Definições 211
22.3 Isometrias 211
22.4 Estrutura Uniforme 212
22.4.1 Sequências Aproximantes 212
22.4.2 Continuidade Uniforme 213
22.4.3 Espaços Métricos Completos 214

23 Espaços Normados **216**
23.1 Normas 216
23.2 Espaços Normados de Dimensão Finita 218
23.3 Funções Multilineares 219
23.4 Espaço Real 220
23.4.1 Notação de Vetores e Funções 220

23.5 Compactos 220

24 Diferenciabilidade no Espaço Real 222
24.1 Diferenciabilidade 222
24.1.1 Diferenciais de Ordem Superior 226
24.2 Derivadas Direcionais e a Geometria da Diferenciabilidade 228

25 Equações Diferenciais Ordinárias 230
25.1 Equações Diferenciais Ordinárias e Soluções 230
25.2 Existência e Unicidade de Soluções 231
25.3 Soluções Maximais 231

26 Teoria da Medida 232
26.1 Espaço Mensurável 232
26.1.1 Sigma-Álgebras e Sub-Sigma-Álgebras 232
26.1.2 Sigma-Álgebras Geradas 233
26.1.3 Limites de Conjuntos 234
26.2 Funções mensuráveis 235
26.2.1 Sigma-Álgebras Puxadas e Empurradas 235
26.3 Produto de espaços mensuráveis 237
26.4 Espaços Mensuráveis Topológicos 239
26.4.1 Boreliano e função mensurável em $\mathbb{R}$ 239
26.5 Medida e Espaço de Medida 240

27 Integração por Medida 241
27.1 Integral de Função Simples 241

V Geometria 246

28 Variedades 247
28.1 Estrutura Diferencial 247
28.1.1 Cartas e Atlas 247
28.1.2 Orientabilidade 250
28.2 Variedades e Topologia 250
28.2.1 Propriedades Topológicas 253
28.3 Espaço Tangente e Funções Diferenciáveis 254
28.3.1 Curvas Equivelozes e Espaço Tangente 254
28.3.2 Funções Diferenciáveis 255
28.3.3 Diferenciais e Estrutura Vetorial do Espaço Tangente 256
28.4 Exemplos de Variedades 257
28.4.1 A Esfera 257

28.4.2 O Espaço Projetivo 258
28.4.3 O Toro 259
28.4.4 Hiperboloide 259

Parte I

Conjuntos

Capítulo 1

Os Axiomas e as Contruções Essenciais

Conjunto, Pertencimento e os Símbolos da Lógica Formal

A noção de um *conjunto* é uma noção primitiva na matemática. Intuitivamente, um conjunto é um objeto que tem *elementos*. Cada elemento tem para com o conjunto em que está a relação de *pertencimento*. Abstraindo mais essa noção, pensamos que todas as propriedades de um conjunto se resumem aos elementos que a ele pertencem, de modo que um conjunto é, de fato, seus elementos. A *Teoria de Conjuntos* é uma teoria da lógica formal que procura formalizar essas ideias e estudar suas consequências. Neste livro, o tratamento da teoria de conjuntos será um tratamento informal, embora muita ênfase seja dada nos axiomas que constituem uma base para a teoria de conjuntos.

A lógica formal estuda sentenças formadas a partir de símbolos pré-determinados e fixos e as regras que dizem como essas sentenças se relacionam para formar novas sentenças. No tratamento formal da teoria de conjuntos, não há distinção entre conjunto e elemento. Ambos são somente denotados por letras de um alfabeto específico, e a relação de pertencimento é geralmente denotada pelo o símbolo $\in$. Se X e Y são conjuntos, a sentença "o conjunto X pertence ao conjunto Y" ou "o conjunto X é elemento do conjunto Y" é denotada por

$$X \in Y.$$

Para afirmar que um conjunto X não é elemento de um conjunto Y, ou seja, negar $X \in Y$, o símbolo usado é $\notin$ e se denota $X \notin Y$.

As teorias da lógica formal costumam ter axiomas, sentenças assumidas válidas a partir das quais deve-se inferir todas as outras sentenças da teoria. Axiomas, neste livro, serão enunciados, não como sentenças simbólicas, mas como sentenças em português. No entanto, alguns símbolos lógicos frequentemente facilitam e

deixam mais claros os enunciados de sentenças na matemática. Os símbolos

$$\forall \qquad \exists$$

serão usados para substituirem as expressões "para todo" e "existe", respectivamente (desconsiderando possíveis flexões gramaticais). Eles indicam que alguma propriedade vale para todo elemento de um conjunto ou que existem elementos do conjunto para o qual a propriedade vale. O símbolo $\exists!$ significa que existe e é único e o símbolo $\nexists$ que não existe. Além desses, serão usados também os símbolos

$$\Longrightarrow \qquad \Longleftarrow \qquad \Longleftrightarrow$$

para significar a implicação material em cada sentido e a equivalência lógica. Por fim, para os conectivos 'e' e 'ou' são usados os símbolos

$$\text{e} \qquad \text{ou}$$

Esse conectivos indicam, informalmente, que sentenças são ambas verdadeiras, no caso de 'e', ou ao menos uma das duas é, no caso de 'ou'. Os parênteses, que são comumente usados na lógica formal, serao substituidos por espaços, de modo que não haja ambiguidade. Mais detalhes sobre lógica formal e o uso dos símbolos lógicos serão suprimidos. Para aprofundamento em lógica e sistemas dedutivos, um livro indicado é *Introduction to Logic*, de Alfred Tarski.

1.1 Axiomas do Vazio, da Extensão e das Partes

Os conceitos definidos nesta seção são *igualdade* e *contenção* de conjuntos. O primeiro axioma a ser considerado é o que define que existe um conjunto sem nenhum elemento, o *conjunto vazio*. Esse conjunto tem um papel semelhante ao número zero. Ele é, de certo modo, um "objeto neutro" na teoria de conjuntos. Ao decorrer do desenvolvimento da teoria, essa frase sem significado matemática de fato ganhará um significado intuitivo e, em vários casos, uma definição mais precisa.

Axioma 1 (Vazio)**.** Existe o *conjunto vazio*, um conjunto que não possui elementos. Denota-se esse conjunto por $\varnothing$ simb]$\varnothing$ Conjunto vazio.

Formalmente, o axioma é $\exists x \forall y (y \notin x)$ e um conjunto vazio é um conjunto x que satisfaz $\forall y (y \notin x)$. Como o conjunto vazio não possui elementos, sempre que se conclui que existe um elemento em $\varnothing$, ou seja, que existe $x \in \varnothing$, chega-se em uma contradição e a conclusão é que o que se assumiu para chegar na contradição é falso. Essa é uma forma padrão de se demonstrarem diversas proposições na lógica e na matemática.

O segundo axioma considerado é um axioma baseado em uma dos primeiras propriedades de um conjunto quando pensado intuitivamente: a ideia de que, quando abtrai-se da realidade, um conjunto é totalmente definido pelos elementos a que ele pertencem. Esse axioma se chama axioma da extensão e é a definição de *igualdade* entre conjuntos.

Axioma 2 (Extensão)**.** Sejam X e Y conjuntos. Os conjuntos X e Y são *iguais* se, e somente se,

$$\forall x \in X \; x \in Y \quad \text{e} \quad \forall y \in Y \; y \in X.$$

Denota-se $X = Y$. Caso contrário, denota-se $X \neq Y$.

Formalmente, o axioma é $\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$. Quando se consideram conjuntos, é muito útil falar apenas de alguns de seus elementos, um conjunto desses elementos, possivelmente com alguma propriedade específica. Essa noção é a de um subconjunto, um conjunto cujos elementos pertencem todos a um outro conjunto considerado anteriormente. A definição de um subconjunto pode ser dada simplesmente a partir das noções primitivas já fornecidas, pois na ideia de subconjunto só são necessárias as noções de conunto e pertencimento, além dos símbolos lógicos.

Definição 1.1. Seja X um conjunto. Um *subconjunto* (ou uma *parte*) de X é um conjunto Y que satisfaz

$$\forall y \in Y \quad y \in X.$$

Denota-se $Y \subseteq X$ simb]$\subseteq$ Contenção de conjuntos. Caso contrário, denota-se $Y \nsubseteq X$. Um subconjunto *próprio* de X é um subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $Y \neq X$. Denota-se $Y \subset X$.

Formalmente, a definição é $\forall x \forall y (x \subseteq y \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in y))$.

Proposição 1.1. *Seja X um conjunto. Então*

1. $\varnothing \subseteq X$;
2. $X \subseteq \varnothing \quad \Longrightarrow \quad X = \varnothing$.

Demonstração. Suponha que $\varnothing$ não é subconjunto de X. Então existe $e \in \varnothing$ tal que $e \notin X$. Mas $e \in \varnothing$ é um absurdo, o que mostra que $\varnothing \subseteq X$. ■

O próximo axioma considerado é o que garante que os subconjuntos de um conjunto dado formam um conjunto.

Axioma 3 (Partes)**.** Seja X um conjunto. Então existe o *conjunto das partes* de X, o conjunto que contém todos os subconjuntos de X. Denota-se $\mathcal{P}(X)$.

Proposição 1.2. *Sejam X e Y conjuntos. Então*

$$X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(Y).$$

1.2 Axiomas da Especificação e do Par

A noção intuitiva de subconjunto está diretamente relacionada à ideia de formar, a partir de um conjunto e uma propriedade, o subconjunto dos elementos que têm essa propriedade. A existência desse subconjunto é um axioma, chamado axioma da especificação porque a propriedade dada é um especificação dos elementos do conjunto original.

Axioma 4 (Especificação)**.** Sejam X um conjunto e $\phi(x)$ uma sentença lógica. Existe o conjunto dos elementos de X que satisfazem $\phi(x)$. Denota-se

$$\{x \in X \mid \phi(x)\}.$$

O próximo axioma garante, a partir da existência de dois, a existência de um novo conjunto cujos elementos são os dois conjuntos iniciais. Esse é o axioma do par. Embora a princípio sua necessidade não seja óbvia, esse axioma é importante — ao menos útil — para o desenvolvimento da teoria de conjuntos.

Axioma 5 (Par)**.** Sejam X e Y conjuntos. Existe o *par* de X e Y, o conjunto que tem como únicos elementos X e Y. Denota-se $\{X, Y\}$.

A partir do axioma do par pode-se formar o conjunto que tem como único elemento um conjunto X formando o par de X e X. Esse conjunto é o conjunto unitário com único elemento X.

Definição 1.2. Seja X um conjunto. O *conjunto unitário* de elemento X é o conjunto $\{X, X\}$. Denota-se $\{X\}$.

1.3 Axioma da União

Nesta seção são apresentadas duas das contruções mais importantes da teoria de conjutos: a união e a interseção. A união de um conjunto de conjuntos denotado C é o conjunto cujos elementos pertencem a algum conjunto que pertence C. O axioma da união afirma que esse conjunto existe.

Axioma 6 (União)**.** Seja C um conjunto. Existe a *união* de C, o conjunto dos elementos que pertencem a algum elemento de C. Denota-se $\bigcup C$. A união de um par $\{X, Y\}$ é denotada $X \cup Y$.

Pode-se denotar a conjunto $\bigcup C$ por $\{x \mid \exists X \in C \quad x \in X\}$.

Proposição 1.3. *Sejam X e Y conjuntos. Então*

1. $\bigcup \varnothing = \varnothing$;

2. $X \subseteq Y \quad \Longrightarrow \quad \bigcup X \subseteq \bigcup Y.$

Demonstração. 1. Suponha que $x \in \bigcup \varnothing$. Então $\exists X \in \varnothing$ tal que $x \in X$, o que é absurdo porque não pode existir $X \in \varnothing$.

2. Seja $x \in \bigcup X$. Então existe $C \in X$ tal que $x \in C$. Como $X \subseteq Y$, segue que $C \in Y$, portanto $x \in \bigcup Y$.

■

A interseção de um conjunto não vazio de conjuntos denotado C é o conjunto cujos elementos pertencem a todos conjuntos que pertencem C. O conjunto interseção existe por consequêcia do axioma da especificação. Como C é não vazio, basta considerar um conjunto $X \in C$ e a sentença lógica dada por

$$\forall Y \in C \quad x \in Y.$$

Desse modo, o conjunto interseção é $\{x \in X \mid \forall Y \in C \quad x \in Y\}$.

Definição 1.3. Seja C um conjunto não vazio. A *interseção* de C é o conjunto dos elementos que pertecem a todos elementos de C. Denota-se $\bigcap C$. A interseção de um par $\{X, Y\}$ é denotada $X \cap Y$.

Pode-se denotar a conjunto $\bigcap C$ por $\{x \mid \forall X \in C \quad x \in X\}$.

Proposição 1.4. *Seja C um conjunto não vazio. Então*

$$\forall X \in C \qquad \bigcap C \subseteq X \subseteq \bigcup C.$$

1.4 Axioma da Escolha

Para que o axioma da escolha seja compreensível, deve-se definir alguns conceitos antes. Essencialmente, o axioma da escolha é sobre produto de conjuntos e sobre funções. O nome escolha, de fato, vem de uma função, a função escolha. Para definir o conceito de função, é necessário primeiro definir o que é um par ordenado de elementos de dois conjuntos e o que é o conjunto de pares ordenados desses conjunto, que é chamado produto dos conjuntos. A partir desse produto de dois conjuntos, definem-se função e, a partir de função, define-se o produto de qualquer conjunto.

Pares Ordenados, Produto de Par e Função

Definição 1.4. Sejam X e Y conjuntos. O *par ordenado* com *primeira coordenada* X e *segunda coordenada* Y é o conjunto

$$(X, Y) \coloneqq \{\{X\}, \{X, Y\}\} \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(X \cup Y\right)\right).$$

Proposição 1.5. *Sejam X, Y, Z e W conjuntos. Então*

$$(X, Y) = (Z, W) \quad \Longleftrightarrow \quad X = Z \;\; e \;\; Y = W.$$

Definição 1.5. Sejam X e Y conjuntos. O *produto* de X por Y é o conjunto

$$X \times Y \coloneqq \left\{(x, y) \in \mathcal{P}\left(\mathcal{P}\left(X \cup Y\right)\right) \;\middle|\; x \in X \;\text{ e }\; y \in Y\right\}.$$

A existência desse conjunto depende da união de pares, do conjunto das partes e do axioma de especificação.

Definição 1.6. Sejam X e Y conjuntos. Uma *função* de X para Y é um conjunto $f \subseteq X \times Y$ que satisfaz

$$\forall x \in X \; \exists! y \in Y \qquad (x, y) \in f.$$

Esse y é a *imagem* de x, denotada por $f(x)$. Denotam-se $f : X \longrightarrow Y$ e $f(x) \coloneqq y$. Para qualquer conjunto $K \subseteq X$, defini-se a *imagem* de K

$$f(K) = \{y \in Y \mid \exists k \in K \quad y = f(k)\},$$

que é subconjunto de Y. Diz-se que o conjunto $f(X)$ é a *imagem* de f.

Proposição 1.6. *Seja $f : A \longrightarrow B$.*

1. $A = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad f = \varnothing.$
2. $B = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad A = \varnothing.$

Demonstração. 1. Suponhamos que $A = \varnothing$. Primeiro, notemos que $f = \varnothing$ é uma função de $\varnothing$ em B. Claramente, $f = \varnothing \subseteq \varnothing \times B$. Ainda, se f não fosse função de $\varnothing$ em B, existiria $a \in \varnothing$ tal que não existe único $b \in B$ satisfazendo $(a, b) \in f$. Mas existir $a \in \varnothing$ é um absurdo. Logo f é função. Por fim, se $g : \varnothing \times B$ é uma função, como $\varnothing \times B = \varnothing$, então $g \subseteq \varnothing \times B = \varnothing$, logo $g = \varnothing = f$.

Reciprocamente, suponhamos $f = \varnothing$. Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. Como f é função, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f = \varnothing$, o que é absurdo. Portanto $A = \varnothing$.

2. Suponhamos que $A \neq \varnothing$. Então existe $a \in A$ e, como f é função, existe único $b \in \varnothing$ tal que $(a, b) \in f$. Mas $b \in \varnothing$ é absurdo, o que mostra que $A = \varnothing$.

■

O Axioma da Escolha e Produto de Conjuntos

Definição 1.7. Seja C um conjunto. O *produto* de C é o conjunto

$$\prod C := \left\{ f : C \longrightarrow \bigcup C \;\middle|\; \forall X \in C \quad f(X) \in X \right\}.$$

$$\prod C := \left\{ f \in \left(\bigcup C\right)^C \;\middle|\; \forall X \in C \quad f(X) \in X \right\}.$$

Proposição 1.7. *Seja C um conjunto. Então*

1. $C = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \prod C = \{\varnothing\}$;
2. $\varnothing \in C \quad \Longrightarrow \quad \prod C = \varnothing$.

Demonstração. 1. Como $C = \varnothing$, então $\bigcup \varnothing = \varnothing$. A função $\varnothing : \varnothing \longrightarrow \varnothing$ é uma função em $\prod C$, pois satisfaz por vacuidade que $\forall X \in C \quad f(X) \in X$. Se não satisfizesse, existiria $X \in \varnothing$ tal que $f(X) \notin X$, o que é contradição. Isso mostra que $\varnothing \in \prod \varnothing$. Agora, seja $f \in \prod \varnothing$ função de $\varnothing$ em $\varnothing$. Como o domínio de f é $\varnothing$, segue que $f = \varnothing$.

2. Suponha que existe $f \in \prod C$. Então $f : C \longrightarrow \bigcup C$ satisfaz que $\forall X \in C \quad f(X) \in X$. Como $\varnothing \in C$, existe $f(\varnothing) \in \bigcup C$ e, pela propriedade, $f(\varnothing) \in \varnothing$, contradição. Portanto $\prod C = \varnothing$.

■

Axioma 7 (Escolha)**.** Seja C um conjunto tal que $\varnothing \notin C$. Então $\prod C \neq \varnothing$.

1.5 Axiomas do Infinito e da Fundação

Definição 1.8. Seja X um conjunto. O *sucessor* de X é o conjunto

$$X^+ := X \cup \{X\}.$$

Axioma 8. Existe um *conjunto indutivo*, um conjunto que contém $\varnothing$ e contém o sucessor de cada um de seus elementos.

Proposição 1.8. *Seja I um conjunto indutivo e C o conjunto dos subconjuntos de I que são indutivos. Então $\bigcap C$ é um conjunto indutivo.*

1.6 Axioma da Substituição

Os axiomas da especificação e do par são consequência do axioma da substituição.

Propriedades Gerais

Contenção

Proposição 1.9. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então*

1. $X \subseteq X$;
2. $X \subseteq Y$ *e* $Y \subseteq X \iff X = Y$;
3. $X \subseteq Y$ *e* $Y \subseteq Z \implies X \subseteq Z$.

Demonstração. 1. Se $X = \varnothing$, então $\varnothing \subseteq X = \varnothing$. Logo $X \subseteq X$. Caso contrário, seja $x \in X$. Então $x \in X$. Logo $X \subseteq X$.

2. $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ se, e somente se, $\forall x \in X \; x \in Y$ e $\forall y \in Y \; y \in X$, o que é equivalente a $X = Y$ pelo axioma da extensão.

3. Se $X = \varnothing$, então $X \subseteq Z$. Caso contrário, seja $x \in X$. Então, como $X \subseteq Y$, $x \in Y$ e, como $Y \subseteq Z$, $x \in Z$. Logo $X \subseteq Z$.

■

União e Interseção

Proposição 1.10. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então*

1. $X \cup \varnothing = X$;
2. $X \cup Y = Y \cup X$;
3. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$;
4. $X \cup X = X$;
5. $X \subseteq Y \iff X \cup Y = Y$.

Proposição 1.11. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então*

1. $X \cap \varnothing = \varnothing$;
2. $X \cap Y = Y \cap X$;
3. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$;
4. $X \cap X = X$;
5. $X \subseteq Y \iff X \cap Y = X$.

Proposição 1.12. *Sejam X, Y e Z conjuntos. Então*

1. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$;
2. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Capítulo 2

Famílias e Propriedades de Conjuntos

2.1 Famílias e Indexações

Os axiomas já foram todos enunciados no capítulo anterior e as bases da teoria de conjuntos clássica está construída. Sendo assim, é necessário mudar a linguagem com que muitas das operações sobre conjuntos são tratadas, entre elas a união, a interseção e o produto. O conceito de uma família será definido nesta seção. Embora inicialmente a notação do capítulo anterior seja mais simples, eventualmente a notação de famílias com índices será necessária, por dois motivos principais. O primeiro é que esse conceito facilitará muito os enunciados de várias propriedades e teoremas na matemática eventualmente. O segundo é que tradicionalmente os matemáticos usam famílias e índices para denotar uniões, interseções, produtos e muitas outras noções. A ideia básica de uma família é a seguinte. Quando se define a união de um conjunto C na teoria de conjuntos, a ideia intuitiva por trás da definição é que se estão unindo os conjuntos que são elementos de C. A união de um par $\{X, Y\}$ é denotada $X \cup Y$ não por acaso, essa notação indica um conjunto que está sendo formado com os elementos de X e Y, não com os elementos dos elementos de C, como no caso de $\bigcup C$.

Generalizando essa ideia, a união de três conjuntos X_1, X_2, X_3 pode ser denotada $X_1 \cup X_2 \cup X_3$ e o mesmo pode ser feito para qualquer quantidade finita de conjuntos. Mas para fazer o mesmo para uma quantidade qualquer de conjuntos, não é possível escrever esses conjuntos numa lista. Por isso surgiu a ideia de *indexar* os conjuntos de C que se pretende unir, usando a notação $(X_i)_{i \in I}$, sendo que cada X_i é um elemento de C e i seu índice. Em seguida, indica-se na parte inferior do símbolo de união que os conjuntos indexados estão sendo unidos, de modo que

$\bigcup C$ é denotado

$$\bigcup_{i \in C} X_i.$$

Essa notação tem a vantagem de estar mais próxima da intuição e também permite trabalhar com duplas uniões mais facilmente. As mesmas ideias são aplicadas para interseções e produtos. No entanto, ainda resta um problema, o problema principal. Tendo já especificada qual é a notação que pretende-se aplicar, ainda falta definir o que é uma família somente a partir dos conceitos da teoria de conjuntos. Essa definição vem a seguir.

Definição 2.1. Sejam C e I conjuntos não vazios. Uma *família* de elementos de C indexados por I é uma função $F : I \longrightarrow C$. O conjunto I é o *conjunto de índices* da família. Denota-se isso por $(F_i)_{i \in I}$ e a imagem de $i \in I$ por F é denotada F_i e chamada de *i-ésimo membro* da família. Uma *sequência* é uma família em que $I = \mathbb{N}$, e uma *sequência finita* é uma família em que $I \in \mathbb{N}$ (ou seja, $I = \{0, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, e nesse caso diz-se n-sequência).

Vale notar que uma família é vazia se, e somente se, $I = \varnothing$. Uma família é uma função e, portanto, quando se afirma que uma família, afirma-se que uma função é vazia, ou que é a função vazia. Mas isso ocorre se, e somente se, seu domínio, no caso o conjunto de índices, é vazio.

Definição 2.2. Seja X um conjunto não vazio. Uma *indexação* de X é uma família bijetiva $(x_i)_{i \in I}$ de elementos de X. Nesse caso, X é um conjunto indexado por I e denota-se $X = \{x_i\}_{i \in I}$.

A noção de uma família é, de fato, mais motivada por notação do que por um conceito teórico, já que uma família é simplesmennte uma função sem nenhuma restrição, e a única diferença entre uma família é uma função é o contexto. Uma pergunta relevante, ainda, é se todo conjunto pode ser indexado por meio de uma família. Essa pergunta tem uma resposta óbvia e uma não óbvia, e ambas afirmam que sim. A resposta óbvia é que, para se indexar um conjunto C basta considerar a função $F : C \longrightarrow C$ definida para todo $X \in C$ por $F(X) = X$. Desse modo, essa é uma indexação do conjunto X. Mas essa resposta não satisfaz a tradição de indexar um quantidade finita de conjuntos $\{X, Y\}$ com números naturais. A resposta menos óbvia é que todo conjunto pode ser bem ordenado e, dessa forma, existe uma função de um número ordinal para o conjunto, logo uma indexação desse conjunto por um número ordinal. Os números naturais são os números ordinais finitos, o que significa que essa resposta menos óbvia condiz com a idexação que se faz usualmente de uma quantidade finita de conjuntos. Esse tópicos, no entanto, não serão abordados nesse capítulo.

2.2 Propriedades de União e Interseção

A partir da definição de família, pode-se definir a união e a interseção de uma família de conjuntos a partir da imagem do conjunto de índices I pela função C, o conjunto $C(I) = \{C_i \mid i \in I\}$. No entanto, um problema teórico se manifesta para se definir uma família de conjuntos. Se uma família é uma função de um conjunto de índices em um conjunto de elementos, para se definir uma família de conjuntos deveria existir um conjunto de todos conjuntos para fazer o papel de contradomínio de uma família. Esse conjunto, no entanto, não existe na teoria de conjuntos abordada neste livro, o que sugere que a definição de uma família de conjuntos depende, de fato, de um conjunto cujos elementos são os conjuntos da família de conjuntos. A existência desse conjunto de conjuntos é suposta, mas ele não é o conjunto de todos os conjuntos. Sendo assim, sempre que se enunciar uma família de conjuntos, essas ressalvas serão assumidas.

Definição 2.3. A *união* de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de conjuntos é o conjunto

$$\bigcup_{i\in I} C_i \coloneqq \bigcup C(I).$$

A *interseção* de uma família não vazia $(C_i)_{i\in I}$ de conjuntos é o conjunto

$$\bigcap_{i\in I} C_i \coloneqq \bigcap C(I).$$

Quando I for finito, pode-se denotar

$$C_1 \cup \cdots \cup C_n \coloneqq \bigcup_{i\in I} C_i \qquad \text{e} \qquad C_1 \cap \cdots \cap C_n \coloneqq \bigcap_{i\in I} C_i.$$

Proposição 2.1. *Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos. Então*

1. $\forall i \in I \quad C_i = \varnothing \qquad \Leftrightarrow \qquad \bigcup_{i\in I} C_i = \varnothing.$
2. $\exists i \in I \quad C_i = \varnothing \qquad \Rightarrow \qquad \bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing.$

Proposição 2.2. *Sejam X um conjunto e $(C_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de subconjuntos de X. Então*

1. $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} (C_i)^{\complement}$
2. $\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} (C_i)^{\complement}$

Demonstração. 1. Para isso, basta notar que $c \in \left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^{\complement}$ se, e somente se, $c \notin \bigcap_{i\in I} C_i$. Mas isso ocorre se, e somente se, existe $i \in I$ tal que $c \notin C_i$. Essa afirmação é equivalente a $c \in (C_i)^{\complement}$ que, por sua vez, é equivalente a $c \in \bigcup_{i\in I}(C_i)^{\complement}$.

2. Como, para todo conjunto C, $(C^{\complement})^{\complement} = C$, segue do item anterior que

$$\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)^{\complement} = \left(\bigcup_{i\in I}((C_i)^{\complement})^{\complement}\right)^{\complement} = \left(\left(\bigcap_{i\in I}(C_i)^{\complement}\right)^{\complement}\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I}(C_i)^{\complement}.$$

■

Proposição 2.3. *Seja (C_{ij}) uma família não vazia de conjuntos. Então*

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} C_{ij}\right) \subseteq \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} C_{ij}\right)$$

Proposição 2.4. *Seja (C_{ij}) uma família não vazia de conjuntos. Então*

1. $\displaystyle\bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(C_i) = \mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)$;

2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(C_i) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$.

2.3 Produto de Conjuntos

Definição 2.4. Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos. O *produto* de $(C_i)_{i\in I}$ é o conjunto

$$\prod_{i\in I} C_i := \{(c_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \quad c_i \in C_i\}.$$

As famílias $(c_i)_{i\in I}$ são de elementos em $\bigcup_{i\in I} C_i$.

Definição 2.5. Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos e $i \in I$. A *projeção canônica* de $\prod_{i\in I} C_i$ em C_i é a função

$$\begin{aligned} \pi_i : \prod_{i\in I} C_i &\longrightarrow C_i \\ (c_i)_{i\in I} &\longmapsto c_i. \end{aligned}$$

Proposição 2.5 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos, X um conjunto e, para todo $i \in I$, $f_i : X \longrightarrow C_i$ uma função. Então existe uma única função $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd} & \prod_{i\in I} C_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ X \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & C_i \end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow \prod_{i\in I} C_i \\ x &\longmapsto (f_i(x))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Para todo $x \in X$ e para todo $i \in I$,

$$\pi_i \circ f(x) = \pi_i(f(x)) = \pi_i((f_i(x))_{i\in I}) = f_i(x).$$

Portanto $\pi_i \circ f = f_i$. Isso mostra a existência da f. Para a unicidade, seja $\overline{f} : X \longrightarrow \prod_{i\in I} C_i$ função tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ \overline{f} = f_i$. Seja $x \in X$. Como $\overline{f}(x) \in \prod_{i\in I} C_i$, $\overline{f}(x) = (x_i)_{i\in I}$. Da propriedade comutativa de $\overline{f}$, segue que, para todo $i \in I$,

$$x_i = \pi_i \circ \overline{f}(x) = f_i(x).$$

Como $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$, isso mostra que $\overline{f}(x) = f(x)$. Portanto $\overline{f} = f$. ■

2.4 Coproduto de Conjuntos

Definição 2.6. Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de conjuntos. O *coproduto* de $(C_i)_{i\in I}$ é o conjunto

$$\bigsqcup_{i\in I} C_i := \{(i,c) \mid i \in I \ \text{ e } \ c \in C_i\}.$$

Definição 2.7. Seja $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos e $i \in I$. A *inclusão canônica* de C_i em $\bigsqcup_{i\in I} C_i$ é a função

$$\begin{aligned} \iota_i : C_i &\longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} C_i \\ c &\longmapsto (i,c). \end{aligned}$$

Proposição 2.6 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(C_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos, X um conjunto e, para todo $i \in I$, $f_i : C_i \longrightarrow X$ uma função. Então existe uma única função $f : \bigsqcup_{i\in I} C_i \longrightarrow X$ tal que, para todo $i \in I$, $f \circ \iota_i = f_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd} \bigsqcup_{i\in I} C_i \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ C_i \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "f_i"'] & X \end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} f : \bigsqcup_{i\in I} C_i &\longrightarrow X \\ (i,c) &\longmapsto f_i(c). \end{aligned}$$

Seja $i \in I$ e $c \in C_i$. Então

$$f \circ \iota_i(c) = f(\iota_i(c)) = f(i,c) = f_i(c).$$

Portanto $f \circ \iota_i = f_i$. Isso mostra a existência da f. Para a unicidade, seja $\overline{f} : \bigsqcup_{i\in I} C_i \longrightarrow X$ função tal que, para todo $i \in I$, $\overline{f} \circ \iota_i = f_i$. Seja $x \in \bigsqcup_{i\in I} C_i$. Existem $i \in I$ e $c \in C_i$ tais que $x = (i,c)$. Da propriedade comutativa de $\overline{f}$, segue que

$$\overline{f}(x) = \overline{f}(i,c) = \overline{f}(\iota_i(x)) = \overline{f} \circ \iota_i(c) = f_i(c) = f(i,c) = f(x).$$

Isso mostra que $\overline{f} = f$. ■

2.4.1 Propriedades de Produto e Coproduto

Proposição 2.7. *Seja $(C_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ uma família de conjuntos. Então*

1. $\bigcup_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} C_{ij}\right) \subseteq \prod_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} C_{ij}\right)$;

2. $\bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} C_{ij}\right) = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} C_{ij}\right)$.

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned} c \in \bigcup_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} C_{ij}\right) &\implies \exists j \in J \left(c \in \prod_{i\in I} C_{ij}\right) \\ &\implies \exists j \in J\ \forall i \in I\,(c_i \in C_{ij}) \\ &\implies \forall i \in I \left(c \in \bigcup_{j\in J} C_{ij}\right) \\ &\implies c \in \prod_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J} C_{ij}\right). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} c \in \bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} C_{ij}\right) &\iff \forall j \in J \left(c \in \prod_{i\in I} C_{ij}\right) \\ &\iff \forall j \in J\ \forall i \in I\,(c_i \in C_{ij}) \\ &\iff \forall i \in I\ \forall j \in J\,(c_i \in C_{ij}) \\ &\iff \forall i \in I \left(c_i \in \bigcup_{j\in J} C_{ij}\right) \\ &\iff c \in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} C_{ij}\right). \end{aligned}$$

■

Notemos que a inclusão contrária no primeiro item nao vale. Suponhamos que para um $j_0 \in J$, todos os C_{ij_0} são vazios, mas para todos outros $j \in J$, os C_{ij} não são vazios. Então o produto desses C_{ij} será sempre vazio, pois sempre tem um dos elementos do produto vazio, e então a união desses produtos será vazia; no entanto, a união desses C_{ij} não será nenhuma vazia e, então, o produto não seráa vazio (pelo axioma da escolha).

Proposição 2.8. *Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos, $(S_i)_{i\in I}$ uma família de subconjutos de $(Y_i)_{i\in I}$, $f : X \longrightarrow \prod_{i\in I} Y_i$ uma função e, para todo $i \in I$, $f_i \coloneqq \pi_i \circ f$. Então*

$$f^{-1}\left(\prod_{i\in I} S_i\right) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(S_i).$$

Demonstração. Note que $x \in f^{-1}(\prod_{i\in I} S_i)$ é equivalente a $f(x) \in \prod_{i\in I} S_i$, que por sua vez ocorre se, e somente se, para todo $i \in I$, $\pi_i(f(x)) \in S_i$. Como $f_i(x) = \pi_i(f(x)) \in S_i$, isso é equivalente a, para todo $i \in I$, $x \in f_i^{-1}(S_i)$. ■

Notação alternativa

$$\prod_{i\in I} C_i = \{\lceil c_i \rceil_{i\in I} \mid \forall i \in I \; c_i \in C_i\}$$

$\lceil c_i \rceil_{i\in I} = c : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} C_i$

$$\bigsqcup_{i\in I} C_i = \{\lfloor c \rfloor_i \mid i \in I, c \in C_i\}$$

$\lfloor c \rfloor_i = (i, c)$

Capítulo 3

Funções

Definição 3.1. Sejam X e Y conjuntos. Uma *relação* R de X para Y é um subconjunto de $X \times Y$. Os conjuntos X e Y são, respectivamente, o *domínio* e o *contradomínio* de R. Denota-se $x\ R\ y$ para $(x, y) \in R$.

Definição 3.2. Seja R uma relação de X em Y. A *relação inversa* de R é a relação R^{-1} de Y em X definida por

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y \qquad x\ R\ y \Leftrightarrow y\ R^{-1}\ x.$$

3.1 Definição e Propriedades Básicas

Definição 3.3. Sejam A e B conjuntos. Uma *função* de A para B é uma relação f de A para B que satisfaz

$$\forall a \in A\ \exists! b \in B \qquad (a, b) \in f.$$

Denota-se $f : A \longrightarrow B$. A *imagem* de $a \in A$ é o único $b \in B$ que satisfaz $(a, b) \in f$. Denota-se $b = f(a)$. Ambas informações podem ser denotadas por

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b. \end{aligned}$$

O conjunto das funções de A para B é denotado B^A.

Proposição 3.1. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Então*

1. $A = \varnothing \quad \Longleftrightarrow \quad f = \varnothing.$
2. $B = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad A = \varnothing.$

Demonstração. 1. Suponhamos que $A = \varnothing$. Primeiro, notemos que $f = \varnothing$ é uma função de $\varnothing$ em B. Claramente, $f = \varnothing \subseteq \varnothing \times B$. Ainda, se f não fosse função de $\varnothing$ em B, existiria $a \in \varnothing$ tal que não existe único $b \in B$ satisfazendo $(a, b) \in f$. Mas existir $a \in \varnothing$ é uma contradição. Logo f é função. Por fim, se $g : \varnothing \times B$ é uma função, como $\varnothing \times B = \varnothing$, então $g \subseteq \varnothing \times B = \varnothing$, logo $g = \varnothing = f$.

Reciprocamente, suponhamos $f = \varnothing$. Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. Como f é função, existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f = \varnothing$, o que é contradição. Portanto $A = \varnothing$.

2. Suponhamos que $A \neq \varnothing$. Então existe $a \in A$ e, como f é função, existe único $b \in \varnothing$ tal que $(a, b) \in f$. Mas $b \in \varnothing$ é absurdo, o que mostra que $A = \varnothing$.

■

Proposição 3.2. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : A' \longrightarrow B'$. Então*

$$f = g \quad \Longleftrightarrow \quad A = A' \;\; e \;\; \forall a \in A \quad f(a) = g(a).$$

Demonstração. Suponhamos que $f = g$. Se $A = \varnothing$, então $f = \varnothing$ e $g = f = \varnothing$, o que implica $A' = \varnothing$. Ainda, para todo $a \in A$, $f(a) = g(a)$ pois, se isso fosse falso, existiria $a \in \varnothing$ tal que $f(a) \neq g(a)$, mas existir $a \in \varnothing$ é absurdo. Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. Então existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ e, como $f = g$, $(a, b) \in g$. Isso implica $a \in A'$ e concluímos que $A \subseteq A'$. Por outro lado, seja $a \in A'$. Então existe $b \in B'$ tal que $(a, b) \in g$ e, como $f = g$, $(a, b) \in f$. Isso implica $a \in A$ e concluímos que $A' \subseteq A$. Portanto $A = A'$. Agora, seja $a \in A$. Então existem $f(a) \in B$ e $g(a) \in B'$. Como $(a, f(a)) \in f$ e $f = g$, então $(a, f(a)) \in g$. Como f é função, existe único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$, o que implica $f(a) = g(a)$.

Reciprocamente, suponhamos que $A = A'$ e que, para todo $a \in A$, $f(a) = g(a)$. Se $A = \varnothing$, então $f = \varnothing$ e $g = \varnothing$, logo $f = g$. Se $A \neq \varnothing$, então seja $p \in f$. Existe $a \in A$ tal que $p = (a, f(a))$. Como $f(a) = g(a)$, então $p = (a, g(a))$; mas $(a, g(a)) \in g$, o que implica $p \in g$ e, portanto, $f \subseteq g$. Agora, seja $p \in g$. Existe $a \in A'$ tal que $p = (a, g(a))$. Como $f(a) = g(a)$, então $p = (a, f(a))$; mas $(a, f(a)) \in f$, o que implica $p \in f$ e, portanto, $f \subseteq g$. Assim, concluímos que $f = g$. ■

Definição 3.4. Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função e $C \subseteq A$ um conjunto. O *conjunto imagem* de C sob f é

$$f(C) = \{y \in Y \mid \exists c \in C \quad y = f(c)\}.$$

O conjunto $f(A)$ é o *imagem* de f.

Proposição 3.3. *Seja $f : A \longrightarrow B$. Então $f : A \longrightarrow f(A)$.*

Definição 3.5. Sejam $f : A \longrightarrow B$ uma função e $A' \subseteq A$ um conjunto. A *restrição* de f a A' é a função

$$\begin{aligned} f|_{A'} : A' &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a). \end{aligned}$$

Proposição 3.4. *Sejam $f : A \longrightarrow B$, $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$. Então a restrição $f|_{A'}$ é uma função de A' em B' se, e somente se, $f(A') \subseteq B'$.*

Demonstração. Se que $f|_{A'}$ é uma função de A' em B', então o contradomínio de $f_{A'}$ é B', o que significa que, para todo $a \in A'$, $f(a) = f|_{A'}(a) \in B'$, logo $f(A') \subseteq B$. Reciprocamente, se, para todo $a \in A'$, $f(a) \in B'$, então $f|_{A'}$ é uma função de A' em B'. ■

3.2 Composição de Funções

Definição 3.6. Sejam $f : A \longrightarrow B'$ e $g : B \longrightarrow C$ funções tais que $B' \subseteq B$. A *função composta* de g com f é a função

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\longrightarrow C \\ a &\longmapsto g(f(a)). \end{aligned}$$

Proposição 3.5. *Sejam $f : A \longrightarrow B'$, $g : B \longrightarrow C'$ e $h : C \longrightarrow D$ funções tais que $B' \subseteq B$ e $C' \subseteq C$. Então*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Demonstração. Primeiro, notemos que $g \circ f$ é uma função de A em C', o que implica que $h \circ (g \circ f)$ é uma função de A em D. Anda, notemos que $h \circ g$ é uma função de B em D, o que implica que $(h \circ g) \circ f$ é uma função de A em D. Logo os domínios de $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$ são iguais. Se $A = \varnothing$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = \varnothing$. Suponhamos, então, que $A \neq \varnothing$ e seja $a \in A$. Então

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a),$$

o que mostra que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. ■

Proposição 3.6. *Seja $f : A \longrightarrow B$. Então*

1. $f \circ \varnothing = \varnothing$;

2. $\varnothing \circ f = \varnothing$.

Demonstração. Para a primeira igualdade, notemos que $f \circ \varnothing$ é uma função de $\varnothing$ em B e, portanto, $f \circ \varnothing = \varnothing$. Para a segunda igualdade, notemos que $\varnothing \circ f$ é uma função de A em $\varnothing$ e, portanto, $A = \varnothing$, o que é equivalente a $\varnothing \circ f = \varnothing$. ■

Definição 3.7. Seja A um conjunto não vazio. A *função identidade* em A é a função

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : A &\longrightarrow A \\ a &\longmapsto a. \end{aligned}$$

Proposição 3.7. *Seja* $f : A \longrightarrow B$ *uma função. Então*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f \quad e \quad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Demonstração. Primeiro, notemos que $f \circ \mathrm{id}_A$ e $\mathrm{id}_B \circ f$ são funções de A em B e, portanto, têm o mesmo domínio de f. Se $A = \varnothing$, então $f : \varnothing \longrightarrow B$ e, portanto, $f = \varnothing$. Notemos que $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$. De fato, $\varnothing$ é função e, se não fosse identidade de $\varnothing$ em $\varnothing$, existiria $a \in \varnothing$ tal que $f(a) \neq a$; mas $a \in \varnothing$ é absurdo. Assim, $f \circ \mathrm{id}_A$ é uma função de $\varnothing$ em B e, portanto, $f \circ \mathrm{id}_A = \varnothing = f$. Ainda, $\mathrm{id}_B \circ f$ é uma função de $\varnothing$ em B e, portanto, $\mathrm{id}_B \circ f = \varnothing = f$. Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. Então $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a) = \mathrm{id}_B(f(a)) = (\mathrm{id}_B \circ f)(a)$. ■

3.3 Função Inversa, Injetividade e Sobrejetividade

Definição 3.8. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função. Uma *função inversa* de f é uma função $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{e} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B.$$

Definição 3.9. Uma *função injetiva* (ou *injeção*) é uma função $f : A \longrightarrow B$ que satisfaz

$$\forall a_1, a_2 \in A \qquad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Definição 3.10. Uma *função sobrejetiva* sobre um conjunto B é uma função $f : A \longrightarrow B$ que satisfaz $f(A) = B$.

Definição 3.11. Sejam A e B conjunto. Uma *bijeção* entre A e B é uma função injetiva $f : A \longrightarrow B$ que é sobrejetiva sobre B.

Proposição 3.8. *Seja $f : A \longrightarrow B$. Então f é injetiva se, e somente se, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.*

Demonstração. Suponhamos que f é injetiva. Se $A = \varnothing$. Então $f = \varnothing$ e, portanto, tomando $g = \mathrm{id}_B$, temos que $g \circ f = \mathrm{id}_B \circ \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$. Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. ■

Proposição 3.9. *Seja $f : A \longrightarrow B$. Então f é sobrejetiva sobre B se, e somente se, existe $g : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$.*

Demonstração. Suponhamos que f é sobrejetiva sobre B. Então $B = f(A)$; ou seja, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$ e, portanto, definimos a função $g : B \longrightarrow A$ para cada elemento de B como $g(b) := a$. Assim, segue que $g \circ f = \mathrm{id}_B$. ■

Proposição 3.10. *Seja $f : A \longrightarrow B$. Se $g : B \longrightarrow A$ e $g' : B \longrightarrow A$ são funções inversas de f, então $g = g'$.*

Demonstração. Primeiro, notemos que os domínios de g e g' são os mesmos. Agora, se $A = \varnothing$, então $f = \varnothing$. Mas isso significa que $\mathrm{id}_A = \varnothing$ e, como g e g' são inversas de f, segue que g (NÃO SEI SE ROLA COM A=0).

Se $A \neq \varnothing$, seja $a \in A$. Então $g \circ f = \mathrm{id}_B$ ■

Proposição 3.11. *Sejam $f : A \longrightarrow B'$ e $g : B \longrightarrow C$ funções tais que $B' \subseteq B$. Se f e g são funções injetivas, então $g \circ f$ é uma função injetiva.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2)$. Então $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Como g é injetiva, então $f(a_1) = f(a_2)$ e, como f é injetiva, então $a_1 = a_2$. Portanto $g \circ f$ é injetiva. ■

Proposição 3.12. *Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ funções. Se f e g são funções sobrejetivas, então $g \circ f$ é uma função sobrejetiva.*

Demonstração. Como f é sobrejetiva, então $f(A) = B$. Ainda, como g é sobrejetiva, então $g(B) = C$. Então $g \circ f(A) = g(f(A)) = g(B) = C$. Portanto $g \circ f$ é sobrejetiva. ■

Proposição 3.13. *Sejam $f : D \longrightarrow C$ uma função, $X \subseteq D$ e $Y \subseteq C$. Então*

1. *$X \subseteq f^{-1}(f(X))$.*
2. *$X = f^{-1}(f(X))$ se f é injetiva.*
3. *$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.*
4. *$f(f^{-1}(Y)) = Y$ se f é sobrejetiva.*

Demonstração. 1. Seja $x \in X$. Então $f(x) \in f(X)$, o que implica que $x \in f^{-1}(f(X))$.

2. Seja $x \in f^{-1}(f(X))$. Então $f(x) \in f(X)$. Portanto existe $x' \in X$ tal que $f(x) = f(x')$. Da injetividade, segue que $x = x' \in X$.

3. Seja $y \in f(f^{-1}(Y))$. Então existe $x \in f^{-1}(Y)$ tal que $f(x) = y$. Mas então $f(x) \in Y$, portanto $y \in Y$.

4. Seja $y \in Y$. Da sobrejetividade, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y \in Y$. Isso implica que $x \in f^{-1}(Y)$ e, portanto, $y = f(x) = f(f^{-1}(Y))$.

■

3.4 Imagem Inversa de Função e Propriedades

Definição 3.12. Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e $B' \subseteq B$. A *imagem inversa* de B sob f é o conjunto

$$f^{-1}(B') \coloneqq \{a \in A \mid f(a) \in B'\}.$$

Proposição 3.14. *Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função, $B' \subseteq B$ e $(B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(B)$ uma família de subconjuntos de B. Então*

1. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$;

2. $f^{-1}(B) = A$;

3. $f^{-1}\left((B')^{\complement}\right) = (f^{-1}(B'))^{\complement}$;

4. $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$;

5. $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

Demonstração. 1. Suponha, por absudo, que existe $a \in f^{-1}(\varnothing)$. Então $f(a) \in \varnothing$, o que é absurdo, e conclui-se $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

2. Seja $a \in A$. Como f é função de A em B, então existe $b \in B$ tal que $f(a) = b$, o que implica $a \in f^{-1}(B)$ e, então, $a \subseteq A$. Como a inclusão contrária vale por definição, então$f^{-1}(B) = A$.

3. Seja $a \in f^{-1}((B')^{\complement})$. Então $f(a) \in (B')^{\complement}$. Mas isso implica $a \notin f^{-1}(B')$, pois, caso contrário, seguiria que $f(a) \in B'$, o que contradiz a hipótese. Portanto $a \in (f^{-1}(B'))^{\complement}$; ou seja, $f^{-1}((B')^{\complement}) \subseteq (f^{-1}(B'))^{\complement}$. Reciprocamente, seja $a \in (f^{-1}(B'))^{\complement}$. Se, por absurdo, $f(a) \in B'$, então $a \notin f^{-1}(B')$, o que contradiz a hipótese. Portanto $f(a) \in (B')^{\complement}$, o que implica $a \in f^{-1}((B')^{\complement})$. Assim conclui-se que $(f^{-1}(B'))^{\complement} \subseteq f^{-1}((B')^{\complement})$ e, portanto, $f^{-1}((B')^{\complement}) = (f^{-1}(B'))^{\complement}$.

4. Seja $a \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$. Então $f(a) \in \bigcup_{i\in I} B_i$. Isso significa que exite $i \in I$ tal que $f(a) \in B_i$. Portanto $a \in f^{-1}(B_i)$, e segue que $a \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; ou seja, $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Reciprocamente, seja $a \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Então existe $i \in I$ tal que $a \in f^{-1}(B_i)$. Então $f(a) \in B_i$. Mas isso implica que $f(a) \in \bigcup_{i\in I} B_i$. Portanto $a \in f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$; ou seja, $\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)$. Assim, conclui-se que $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

5. Seja $a \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Então $f(a) \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Isso significa que, para todo $i \in I$, $f(a) \in B_i$. Portanto, para todo $i \in I$, $a \in f^{-1}(B_i)$, e segue que $a \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$; ou seja, $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Reciprocamente, seja $a \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Então, para todo $i \in I$, $a \in f^{-1}(B_i)$. Então, para todo $i \in I$, $f(a) \in B_i$, o que implica que $f(a) \in \bigcap_{i\in I} B_i$. Portanto $a \in f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$; ou seja, $\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i) \subseteq f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Assim, conclui-se que $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. ■

3.5 Propriedades de Imagem e Imagem Inversa

Proposição 3.15. *Sejam $f : D \longrightarrow C$ uma função e $(C_i)_{i\in I}$ uma família de subconjuntos de C. Então*

1. $f(\varnothing) = \varnothing$;
2. $f(D) \subseteq C$;
3. $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(C_i)$;

Demonstração. 1. Suponha, por absurdo, que existe $c \in f(\varnothing)$. Nesse caso, existe $d \in \varnothing$ tal que $f(d) = c$, o que é absurdo. Logo $f(\varnothing) = \varnothing$.

2. Se$f(D) = \varnothing$, então vale a proposição. Caso contrário, seja $c \in f(D)$. Então existe $d \in D$ tal que $f(d) = c \in C$.

3. Se $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \varnothing$, então $\bigcup_{i\in I} C_i = \varnothing$. Assim, segue que, para todo $i \in I$, $C_i = \varnothing$ e temos que $f(C_i) = \varnothing$. Portanto $\bigcup_{i\in I} f(C_i) = \varnothing$. Caso contrário,

seja $d \in f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$. Então existe $c \in \bigcup_{i\in I} C_i$ tal que $f(c) = d$ e, consequentemente, existe $i \in I$ tal que $c \in C_i$. Assim, segue que $d = f(c) \in f(C_i) \subseteq \bigcup_{i\in I} f(C_i)$.

Reciprocamente, se $\bigcup_{i\in I} f(C_i) = \varnothing$, então, para todo $i \in I$, $f(C_i) = \varnothing$, o que implica $C_i = \varnothing$. Assim, segue que $\bigcup_{i\in I} C_i = \varnothing$ e, portanto, $f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \varnothing$. Caso contrário, seja $d \in \bigcup_{i\in I} f(C_i)$. Então existe $i \in I$ tal que $d \in f(C_i)$ e, consequentemente, existe $c \in C_i$ tal que $f(c) = d$. Assim, segue que $c \in \bigcup_{i\in I} C_i$ e, portanto, que $d \in f\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right)$.

■

Capítulo 4

Relações Binárias

Definição 4.1. Seja A um conjunto não vazio. Uma *relação binária* R em A é uma relação R de A em A.

Definição 4.2. Seja A um conjunto não vazio e R uma relação binária em A. Definem-se as seguintes propriedades de R:

1. (Reflexividade) $\forall a \in A \qquad aRa$;
2. (Irreflexividade) $\nexists a \in A \qquad aRa$;
3. (Simetria) $\forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1Ra_2 \Leftrightarrow a_2Ra_1$;
4. (Antissimetria) $\forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1Ra_2 \;\text{ e }\; a_2Ra_1 \Rightarrow a_1 = a_2$;
5. (Transitividade) $\forall a_1, a_2, a_3 \in A \qquad a_1Ra_2 \;\text{ e }\; a_2Ra_3 \Rightarrow a_1Ra_3$;
6. (Totalidade) $\forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1Ra_2 \;\text{ ou }\; a_2Ra_1$.

Uma relação que satisfaz as propriedades acima é, respectivamente, reflexiva, simétrica, antissimátrica, transitiva e total.

4.1 Relações de Equivalência

Definição 4.3. Seja A um conjunto não vazio. Uma *relação de equivalência* $\sim$ em A é uma relação binária que é reflexiva, simétrica e transitiva.

Costumamos denotar uma relação de equivalência com símbolos $\sim, \simeq, \approx, \equiv$ ou outros símbolos semelhantes.

Definição 4.4. Seja A um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência em A. A *classe de equivalência* de $a \in A$ é o conjunto

$$[a] \coloneqq \{b \in A \mid b \sim a\}.$$

O *conjunto quociente* de A por $\sim$ é o conjunto

$$A/\sim \coloneqq \{[a] \mid a \in A\}.$$

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental das Relações de Equivalência)**.** *Seja A um conjunto não vazio. Se $\sim$ é uma relação de equivalência em A, então $A/\sim$ é uma partição de A. Reciprocamente, se P é uma partição de A, então existe uma relação de equivalência $\sim$ em A tal que $P = A/\sim$.*

Demonstração. Seja $\sim$ uma relação de equivalência em A e $P \coloneqq A/\sim$. Claramete, $\varnothing \nsubseteq P$. Ainda, para todo $a \in A$, como $a \sim a$, então $a \in [a]$. Logo

$$\bigcup_{[a]\in P} [a] = A.$$

Por fim, sejam $[a_1], [a_2] \in P$ tais que $[a_1] \neq [a_2]$. Se existir $a \in [a_1] \cap [a_2]$, então, para todo $b \in [a_1]$, $b \sim a_1$ e $a_1 \sim a$, o que implica $b \sim a$. Ainda, $a \sim a_2$. Então $b \in [a_2]$; ou seja, $[a_1] \subseteq [a_2]$. Por outro lado, $b \sim a_2 \sim a \sim a_1$, o que implica $[a_2] \subseteq [a_1]$. Isso implica $[a_1] = [a_2]$, absurdo. Logo $[a_1] \cap [a_2] = \varnothing$. Assim, concluímos que P é uma partição de A.

Seja P uma partição de A. A relação binária $\sim$ em A, definida por

$$\forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1 \sim a_2 \Leftrightarrow \exists Q \in P \quad a_1, a_2 \in Q,$$

é uma relação de equivalência. Claramente, para todo $a \in A$, existe $Q \in P$ tal que $a \in Q$, pois $\bigcup_{R\in P} R = A$. Então $a \sim a$, o que mostra a reflexividade. Ainda, a simetria é trivial pela definição da relação $\sim$. Por fim, para $a_1, a_2, a_3 \in A$, se $a_1 \sim a_2$ e $a_2 \sim a_3$, existem conjuntos $Q, R \in P$ tais que $a_1, a_2 \in Q$ e $a_2, a_3 \in R$. Como $a_2 \in Q \cap R$, pela definição de partição $Q = R$. Então $a_1 \sim a_3$, o que mostra a transitividade. Logo $\sim$ é uma relação de equivalência em A. ■

4.2 Relações de Ordem

4.2.1 Ordens Parciais, Estritas e Totais

Definição 4.5. Seja X um conjunto não vazio. Uma *ordem parcial* $\leq$ em X é uma relação binária que é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Uma *ordem total* é uma relação de ordem parcial que é total.

Costumamos denotar uma relação de ordem com símbolos $\leq, \preceq, \subseteq, \trianglelefteq$ ou outros símbolos semelhantes.

Exemplo 4.1. *Seja A um conjunto. Então a relação $\subseteq$ entre elementos de $\mathcal{P}(A)$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}(A)$.*

Exemplo 4.2. *Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos naturais. Então a relação divide $|$, definida por*

$$a|b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \qquad an = b$$

é uma relação de ordem parcial nos naturais.

Proposição 4.2. *Seja X um conjunto não vazio e $\leq$ uma ordem parcial em X. Então a relação binária $\geq$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por*

$$x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow x_2 \leq x_1,$$

é uma ordem parcial em X.

Demonstração. Vamos mostrar que valem as três propriedades de ordem parcial. Sejam $x_1, x_2, x_2 \in X$. Como $x_1 \leq x_1$, então $x_1 \geq x_1$. Agora suponha que $x_1 \geq x_2$. Por definição, temos $x_2 \leq x_1$, o que implica $x_1 \leq x_2$, que por sua vez implica $x_2 \geq x_1$. Por fim, suponha $x_1 \geq x_2$ e $x_2 \geq x_3$. Então $x_2 \leq x_1$ e $x_3 \leq x_2$, o que implica $x_3 \leq x_1$ e, portanto, $x_1 \geq x_3$. ■

Definição 4.6. Seja X um conjunto não vazio e $\leq$ uma ordem parcial em X. A *ordem dual de* $\leq$ é a ordem parcial $\geq$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por

$$x_1 \geq x_2 \Leftrightarrow x_2 \leq x_1.$$

O conceito de dualidade é um conceito importante na teoria de ordem. De fato, toda definição ou teorema tem uma definição ou teorema dual, que consiste em trocar a ordem parcial $\leq$ por sua ordem dual $\geq$.

Definição 4.7. Seja X um conjunto não vazio. Uma *ordem estrita* $<$ em X é uma relação binária que é irreflexiva e transitiva.

Costumamos denotar uma relação de ordem estrita com símbolos $<, \prec, \subset, \lhd$ ou outros símbolos semelhantes.

Exemplo 4.3. *Seja A um conjunto. Então a relação $\subset$ entre elementos de $\mathcal{P}(A)$ é uma relação de ordem estrita em $\mathcal{P}(A)$.*

Proposição 4.3. *Seja X um conjunto não vazio e $\leq$ uma ordem parcial em X. Então a relação binária $<$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por*

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \quad e \quad x_1 \neq x_2,$$

é uma ordem estrita em X.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2, x_3 \in X$. Claramente, $<$ é irreflexiva por definição pois, se $x_1 < x_2$, então $x_1 \neq x_2$. Consideremos agora a transitividade de $<$. Se $x_1 < x_2$ e $x_2 < x_3$, então $x_1 \leq x_2$ e $x_2 \leq x_3$, e também $x_1 \neq x_2$ e $x_2 \neq x_3$. Pela transitividade de $\leq$, temos $x_1 \leq x_3$. Ainda, $x_1 = x_3$ implica $x_1 \leq x_2$ e $x_2 \leq x_1$ e, da antissimetria de $\leq$, temos $x_1 = x_2$, absurdo. Concluímos que $x_1 \neq x_3$ e, portanto, $x_1 < x_3$. ■

Definição 4.8. Seja X um conjunto não vazio e $\leq$ uma ordem parcial em X. A *ordem estrita associada a* $\leq$ é a ordem estrita $<$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \ \text{ e } \ x_1 \neq x_2.$$

Proposição 4.4. *Seja X um conjunto não vazio e $<$ uma ordem estrita em X. Então a relação binária $\leq$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por*

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \ \text{ ou } \ x_1 = x_2,$$

é uma ordem parcial em X.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração da proposição anterior. ■

Definição 4.9. Seja X um conjunto não vazio e $<$ uma ordem estrita em X. A *ordem parcial associada a* $<$ é a ordem parcial $<$ em X, definida para todos $x_1, x_2 \in X$ por

$$x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \ \text{ ou } \ x_1 = x_2.$$

4.2.2 Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definição 4.10. Um *conjunto parcialmente ordenado* é um par $(X, \leq)$ em que X é um conjunto não vazio e $\leq$ é uma relação de ordem parcial em X.

Definição 4.11 (Maior e menor elementos)**.** Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um *maior elemento* de Y é um elemento $m \in Y$ que satisfaz

$$\forall y \in Y \qquad y \leq m.$$

Dualmente, um *menor elemento* de Y é um elemento $m \in Y$ que satisfaz

$$\forall y \in Y \qquad m \leq y.$$

Proposição 4.5. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Se existe maior elemento de Y, ele é único. Dualmente, se existe menor elemento de Y, ele é único.*

Demonstração. Seja m um maior elemento de Y. Então, se $n \in Y$ é um maior elemento de Y, então $m \leq n$. Mas, como m é um maior elemento de Y, então $n \leq m$ e, como $\leq$ é antissimétrica, $m = n$. A mesma demonstração vale para um menor elemento de Y, considerando a ordem parcial $\geq$, dual de $\leq$. ■

Notação. Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Se existirem, o maior e menor elementos de Y são denotados $\max Y$ e $\min Y$, respectivamente.

Proposição 4.6. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então*

1. *$\varnothing$ não tem maior nem menor elemento.*
2. $\forall x \in X \qquad \min\{x\} = \max\{x\} = x.$

Proposição 4.7. *Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e Y e Z conjuntos tais que $Z \subseteq Y \subseteq X$. Então, se Y e Z têm maior elemento,*

$$\max Y = \max(\{\max Z\} \cup (Y \setminus Z)).$$

Dualmente, se Y e Z têm menor elemento,

$$\min Y = \min(\{\min Z\} \cup (Y \setminus Z)).$$

Demonstração. Vamos mostrar que $\max Y \in \{\max Z\} \cup (Y \setminus Z)$. Como $\max Y \in Y$, $\max Y \notin (Y \setminus Z)$ implica que $\max Y \in Z$. Portanto $\max Y \leq \max Z$; por outro lado, como $Z \subseteq Y$, então $\max Z \leq \max Y$, o que implica $\max Y = \max Z$ e, assim, concluímos que $\max Y \in \{\max Z\} \cup (Y \setminus Z)$. Agora vamos mostrar que $\{\max Z\} \cup (Y \setminus Z)$ tem maior elemento $\max Y$. Seja $y \in \{\max Z\} \cup (Y \setminus Z)$. Se $y = \max Z$, como $Z \subseteq Y$, então $y \leq \max Y$. Se $y \in (Y \setminus Z)$, como $(Y \setminus Z) \in Y$, então $y \leq \max Y$. Portanto $\max Y = \max(\{\max Z\} \cup (Y \setminus Z))$. ■

Definição 4.12 (Elementos maximal e minimal)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$ um conjunto não vazio. Um *elemento maximal* de Y é um elemento $m \in Y$ que satisfaz

$$\nexists y \in Y \qquad m < y.$$

Dualmente, um *elemento minimal* de Y é um elemento $m \in Y$ que satisfaz

$$\nexists y \in Y \qquad y < m.$$

Proposição 4.8. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$ um conjunto não vazio. Se Y tem maior elemento, então ele é o único elemento maximal de Y. Dualmente, se Y tem menor elemento, então ele é o único elemento minimal de Y.*

Demonstração. Se Y tem maior elemento, então, para todo $y \in Y$, vale $y \leq \max Y$. Como $\max Y$ é único, não existe elemento $y \in Y$ tal que $y \neq \max$ e $\max Y \leq y$. Portanto $\max Y$ é um elemento maximal de Y. Agora, se existisse outro elemento maximal m de Y, teríamos $m \leq \max Y$, pois $\max Y$ é o maior elemento de Y, o que contradiz a maximalidade de m. Logo $\max Y$ é o único elemento maximal de Y. ■

Definição 4.13 (Limitantes superior e inferior)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um *limitante superior* de Y é um elemento $l \in X$ que satisfaz

$$\forall y \in Y \qquad y \leq l.$$

Dualmente, um *limitante inferior* de Y é um elemento $l \in X$ que satisfaz

$$\forall y \in Y \qquad l \leq y.$$

Um conjunto *limitado por cima* é um conjunto que possui limitante superior. Um conjunto *limitado por baixo* é um conjunto que possui limitante inferior. Um conjunto *limitado* é um conjunto limitado por cima e por baixo.

Proposição 4.9. *Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e Y e Z conjuntos tais que $Z \subseteq Y \subseteq X$. Então, se L_Z é o conjunto dos limitantes superiores de Z*

...

Definição 4.14 (Supremo e ínfimo)**.** Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. O *supremo* de Y, denotado $\sup Y$, é o menor elemento do conjunto de limitantes superiores de Y. Dualmente, o *ínfimo* de Y, denotado $\inf Y$, é o maior elemento do conjunto de limitantes inferiores de Y.

Proposição 4.10. *Sejam $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado e Y e Z conjuntos tais que $Z \subseteq Y \subseteq X$. Então, se Y e Z têm supremo,*

$$\sup Y = \sup(\{\sup Z\} \cup (Y \setminus Z)).$$

Dualmente, se Y e Z têm ínfimo,

$$\inf Y = \inf(\{\inf Z\} \cup (Y \setminus Z)).$$

Demonstração. Seja $y \in \{\sup Z\} \cup (Y \setminus Z)$. Se $y = \sup Z$, como $Z \subseteq Y$, então $\sup Z \leq \sup Y$; ■

4.2.3 Funções Monótonas

Definição 4.15. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \leq)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \preceq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Uma *função monótona* de $\boldsymbol{X}$ em $\boldsymbol{Y}$ é uma função $\phi : X \longrightarrow Y$ que satisfaz

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad x_1 \leq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \preceq \phi(x_2).$$

4.2.4 Cadeias e Lema de Zorn

Definição 4.16. Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Uma *cadeia* de X é um conjunto $Y \subseteq X$ que satisfaz

$$\forall y_1, y_2 \in Y \qquad y_1 \leq y_2 \ \text{ ou } \ y_2 \leq y_1.$$

Proposição 4.11. *Seja $(X, \leq)$ um conjunto totalmente ordenado e $Y \subseteq X$ um conjunto não vazio. Então Y é uma cadeia de X.*

Demonstração. ... ■

Lema 4.12 (Lema de Zorn)**.** *Seja $(X, \leq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Se toda cadeia de X possui limitante superior, então X tem elemento maximal.*

4.2.5 Reticulados

Definição 4.17. Um *reticulado* é um conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ em que, para todos $x_1, x_1 \in X$, o conjunto $\{x_1, x_2\}$ tem supremo e ínfimo, denotados, respectivamente, $x_1 \vee x_2$ e $x_1 \wedge x_2$.

Proposição 4.13. *Seja $(X, \leq)$ um reticulado e $Y \subseteq X$ um conjunto finito. Então Y tem supremo e ínfimo.*

Capítulo 5

Cardinalidade de Conjuntos

5.1 Relações

5.1.1 Igualdade de Cardinais

Definição 5.1. Sejam X e Y conjuntos. Diz-se que $|X| = |Y|$ (a *cardinalidade de X é igual à cardinalidade de Y*) se, e somente se, existe uma bijeção C entre X e Y. Caso contrário, diz-se que $|X| \neq |Y|$ (a *cardinalidade de X é diferente da cardinalidade de Y*).

As cardinalidades dos números naturais e dos números reais são denotadas, respectivamente

$$|\mathbb{N}| := \aleph_0 \quad \text{e} \quad |\mathbb{R}| := \mathfrak{c}.$$

Proposição 5.1. *Sejam X, Y e Z conjuntos não vazios. Então*

1. $|X| = |X|$;
2. $|X| = |Y| \Rightarrow |Y| = |X|$;
3. $|X| = |Y| \quad e \quad |Y| = |Z| \Rightarrow |X| = |Z|$.

Demonstração.

1. Claramente, a função identidade em X é uma bijeção entre X e X e, portanto, $|X| = |X|$.
2. Se $|X| = |Y|$, então existe bijeção $C : X \longrightarrow Y$. Mas então $C^{-1} : Y \longrightarrow X$ é uma bijeção de Y em X e, portanto, $|Y| = |X|$.
3. Se $|X| = |Y|$ e $|Y| \quad \text{e} \quad |Y|$, então esistem bijeções $C_1 : X \longrightarrow Y$ e $C_2 : Y \longrightarrow Z$. Mas então $C_2 \circ C_1 : X \longrightarrow Z$ é uma bijeção de X em Y e, portanto, $|X| = |Z|$.

■

De certa forma, essa proposição mostra que a noção de cardinalidades iguais se comporta como uma relação de equivalência. Não podemos dizer que $=$ é, de fato, uma relação de equivalência porque nao existe um conjunto de todos os conjuntos no qual defini-la. Todas proposições sobre cardinalidades são, na verdade, proposições sobre funções entre conjutos e convém saber que as propriedades acima valem.

5.1.2 Ordenação de Cardinais

Definição 5.2. Sejam X e Y conjuntos não vazios.

1. Diz-se que $|X| \leq |Y|$ (a *cardinalidade de X é menor ou igual à cardinalidade de Y*) se, e somente se, existe função injetiva $C : X \longrightarrow Y$.

   Diz-se que $|X| \geq |Y|$ (a *cardinalidade de X é maior ou igual à cardinalidade de Y*) se, e somente se, existe função sobrejetiva $C : X \longrightarrow Y$.

2. Diz-se que $|X| < |Y|$ (a *cardinalidade de X é menor que a cardinalidade de Y*) se, e somente se, $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$.

   Diz-se que $|X| > |Y|$ (a *cardinalidade de X é maior que a cardinalidade de Y*) se, e somente se, $|X| \geq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$.

Definição 5.3. Um conjunto *enumerável* (ou *contável*) é um conjunto X tal que $\#X \leq \aleph_0$. Uma função injetiva $E : X \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma *enumeração* de X.

Definição 5.4. Um conjunto *finito* é um conjunto X tal que $\#X < \aleph_0$. Um conjunto *infinito* é um conjunto que não é finito.

A seguir, demonstraremos algumas proposições para mostrar que o símbolo $\leq$ se comporta como uma relação de ordem total. Novamente, não podemos dizer formalmente que $\leq$ é uma relação, pois não existe o conjunto de todos os conjuntos no qual defini-la. No entanto, as propriedades acima são bem úteis de se ter em mente e serão usadas na demonstração de outras proposições. As propriedades análogas à reflexividade e transitividade de uma relação de ordem são bem triviais. A antissimetria, por outro lado, é bem difícil, tanto que é um conhecido teorema, o Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein. Ainda, é possível demonstrar que $\leq$ se comporta como uma relação total; ou seja, todo conjunto pode ser comparado. Vamos demonstrar primeiro as propriedades triviais. Em seguida, demonstraremos separadamente as outras duas.

Proposição 5.2. *Sejam X, Y e Z conjuntos não vazios. Então*

1. $|X| \leq |X|$;

2. $|X| \leq |Y|$ *e* $|Y| \leq |X| \Rightarrow |X| = |Y|$*;*

3. $|X| \leq |Y|$ *e* $|Y| \leq |Z| \Rightarrow |X| \leq |Z|$*;*

4. $|X| \leq |Y|$ *ou* $|Y| \leq |X|$*.*

Demonstração. 1. Claramente, a função identidade é uma bijeção de X em X, logo é uma injeção de X em X e, portanto, $|X| \leq |X|$.

2. Teorema de Cantor-Schröder-Bernstein.

3. $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |Z|$, então existem funções injetivas $C_1 : X \longrightarrow Y$ e $C_2 : Y \longrightarrow Z$. Mas então $C_2 \circ C_1 : X \longrightarrow Z$ é uma função injetiva de X em Z e, portanto, $|X| \leq |Z|$.

■

MOSTRAR QUE INFITO EQUIVALE A
X tal que $|X| \geq \aleph_0$.

5.2 Operações

Definição 5.5. Sejam X e Y conjuntos não vazios. Definimos as seguintes "operações"entre cardinais:

1. $|X| + |Y| := |X + Y|$;
2. $|X| \times |Y| := |X \times Y|$;
3. $|X|^{|Y|} := \left|X^Y\right|$.

5.2.1 Cardinalidade de Soma (ou União Disjunta)

Proposição 5.3. *Seja* $(C_i)_{i \in I}$ *uma família não vazia de conjuntos disjuntos dois a dois. Então*

$$\left|\bigsqcup_{i \in I} C_i\right| = \left|\bigcup_{i \in I} C_i\right|.$$

Demonstração. Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : \bigsqcup_{i \in I} C_i &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} C_i \\ (c, i) &\longmapsto c. \end{aligned}$$

Mostremos que f é bijeção. (Injetividade) Sejam $(c_1, i_1), (c_2, i_2) \in \bigsqcup_{i \in I} C_i$ tais que $c_1 = c_2$. Como os C_i são disjuntos dois a dois, existe único $i \in I$ tal que

$c_1 = c_2 \in C_i$. Logo $i_1 = i_2 = i$ e, portanto, $(c_1, i_1) = (c_2, i_2)$. (Sobrejetividade) Seja $c \in \bigcup_{i \in I} C_i$. Então existe $i \in I$ tal que $c \in C_i$. ■

Proposição 5.4. *Seja $(C_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos de mesma cardinalidade. Então*

$$\left| \bigsqcup_{i \in I} C_i \right| = |I| \times |C|$$

para algum C de $(C_i)_{i \in I}$.

Demonstração. Como $I \neq \varnothing$, seja $j \in I$ e defina $C := C_j$. Como todos os conjuntos de $(C_i)_{i \in I}$ têm a mesma cardinalidade, para todo $i \in I$, seja $f_i : C_i \longrightarrow C$ bijeção. Considere a função

$$\begin{aligned} f : \bigsqcup_{i \in I} C_i &\longrightarrow I \times C \\ (c, i) &\longmapsto (i, f_i(c)). \end{aligned}$$

Mostremos que f é bijeção. (Injetividade) Sejam $(c_1, i_1), (c_2, i_2) \in \bigsqcup_{i \in I} C_i$ tais que $(i_1, f_{i_1}(c_1)) = (i_2, f_{i_2}(c_2))$. Então $i_1 = i_2$ e $f_{i_1}(c_1) = f_{i_2}(c_2)$, o que implica que $f_{i_1} = f_{i_2}$ e, portanto, $c_1 = c_2$, já que f_{i_1} é injetiva. Logo $(c_1, i_1) = (c_2, i_2)$. (Sobrejetividade) Seja $(i, c) \in I \times C$. Como f_i é sobrejetiva, existe $c' \in C_i$ tal que $f_i(c') = c$. Portanto $f(c', i) = (i, f_i(c')) = (i, c)$.

Da sobrejetividade de f e da definição de produto de cardinais, segue que

$$\left| \bigsqcup_{i \in I} C_i \right| = |I \times C| = |I| \times |C| \,.$$

■

Teorema 5.5. *Seja $(C_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de conjuntos. Se existem $\min_{i \in I} |C_i|$ e $\max_{i \in I} |C_i|$, então*

$$|I| \times \min_{i \in I} |C_i| \leq \left| \bigsqcup_{i \in I} C_i \right| \leq |I| \times \max_{i \in I} |C_i|.$$

Demonstração. Mostremos a primeira desigualdade. Seja $j \in I$ tal que $|C_j| := \min_{i \in I} |C_i|$ e $C := C_j$. Para cada $i \in I$, existe função injetiva $f_i : C \longrightarrow C_i$. Considere a função

$$\begin{aligned} f : I \times C &\longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} C_i \\ (i, c) &\longmapsto (f_i(c), i). \end{aligned}$$

Mostremos que f é injetiva. Sejam $(i_1, c_1), (i_2, c_2) \in I \times C$ tais que $(f_{i_1}(c_1), i_1) = (f_{i_2}(c_2), i_2)$. Então $i_1 = i_2$ e $f_{i_1} = f_{i_2}$. Como f_{i_1} é injetiva, temos que $c_1 = c_2$, logo $(i_1, c_1) = (i_2, c_2)$.

Mostremos agora a segunda desigualdade. Seja $j \in I$ tal que $|C_j| := \max_{i \in I} |C_i|$ e $C := C_j$. Para cada $i \in I$, existe função sobrejetiva $f_i : C_i \longrightarrow C$. Considere a função

$$\begin{aligned} f : \bigsqcup_{i \in I} C_i &\longrightarrow I \times C \\ (c, i) &\longmapsto (i, f_i(c)). \end{aligned}$$

Mostremos que f é sobrejetiva. Seja $(i, c) \in I \times C$. Como f_i é sobrejetiva, existe $c' \in C_i$ tal que $f_i(c') = c$. Portanto $f(c', i) = (i, f_i(c')) = (i, c)$. ■

Capítulo 6

Conjuntos Numéricos

6.1 Números Naturais

Definição 6.1. Um *modelo de números naturais* é uma tripla $\boldsymbol{N} = (N, 0, s)$ em que

1. N é um conjunto, o *conjunto de números naturais*;
2. $0 \in N$, o *zero* de $\boldsymbol{N}$;
3. $s : N \longrightarrow N$ é uma função injetiva tal que $s^{-1}(\{0\}) = \varnothing$, a função *sucessor*;
4. (Axioma da Indução) Para todo conjunto $I \subseteq N$, se $0 \in I$ e $s(n) \in I$ para todo $n \in I$, então $I = N$.
5. (Axioma da Indução)' Para todo conjunto $I \subseteq N$, se $0 \in I$ e $s(I) \subseteq I$, então $I = N$.

O *um* de $\boldsymbol{N}$ é o elemento $1 \coloneqq s(0)$.

Pela teoria de conjuntos, é possível definir um conjunto infinito $\boldsymbol{N}$ que satisfaz os axiomas de um modelo de números naturais. A construção considera $0 \coloneqq \varnothing$, $1 \coloneqq \{0\}$, e, de modo geral, $s(n) \coloneqq n \cup \{n\} = \{0, 1, \cdots, n\}$. Claramente a construção é feita com mais cuidado, mas a partir dessa construção podemos realmente achar um modelo de números naturais. A partir de agora, consideraremos que esse conjunto existe.

Proposição 6.1. *Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais. Então, para todo $n \in N \setminus \{0\}$, existe $m \in N$ tal que $n = s(m)$.*

Demonstração. Seja $I \coloneqq \{n \in N : n = 0 \text{ ou } \exists m \in N \quad n = s(m)\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$. Agora, seja $n \in I$. Então $s(n) \in I$, pois $n \in N$ e $s(n) = s(n)$. Logo $I = N$. Assim, se $n \in N \setminus \{0\}$, segue que existe $m \in N$ tal que $n = s(n)$. ■

Essa proposição mostra que s é sobrejetiva em $N \setminus \{0\}$ e, portanto, que s é uma bijeção entre N e $N \setminus \{0\}$, o que mostra que N é um conjunto infinito. No entanto, vale lembrar que a definição de conjunto infinito depende do conjunto dos números naturais.

6.1.1 Adição

Teorema 6.2. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Existe uma única função*

$$\begin{aligned} + : N \times N &\longrightarrow N \\ (n_1, n_2) &\longmapsto n_1 + n_2 \end{aligned}$$

que satisfaz

1. *(A1)* $\forall n \in N \qquad n + 0 = n;$
2. *(A2)* $\forall n_1, n_2 \in N \qquad n_1 + s(n_2) = s(n_1 + n_2).$

Demonstração. Primeiro mostraremos que essa função $+$ está bem definida. Para isso, devemos mostrar que, para todo $n_1, n_2 \in N$, existe único $n_3 \in N$ tal que $n_1 + n_2 = n_3$ satisfazendo $(A_1), (A_2)$. Consideremos o conjunto $I := \{n \in N : \exists! n_3 \in N \quad n_1 + n = n_3\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $n + 0 = n$ e, portanto, n_3 é único. Agora, seja $n \in I$. Então existe único $n_3 \in N$ tal que $n_1 + n = n_3$ e, como s é função, $s(n_3) = s(n_1 + n) \in N$ é único e tomando $n_1 + s(n) = s(n_1 + n)$, concluímos que $s(n) \in I$ e, portanto, $I = N$. Logo $+$ está bem definida. Agora, mostremos que $+$ é única. Sejam $+_1, +_2 : N \times N \longrightarrow N$ funções satisfazendo $(A_1), (A_2)$, $n_1 \in N$ e $I := \{n \in N : n_1 +_1 n = n_1 +_2 n\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $n_1 +_1 0 = n = n_1 +_2 0$. Agora, seja $n \in I$. Então

$$n_1 +_1 s(n) = s(n_1 +_1 n) = s(n_1 +_2 n) = n_1 +_2 s(n),$$

o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, que $I = N$. Logo $+_1 = +_2$. ■

Definição 6.2. Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais. A função $+$ é a *adição nos números naturais* e, dados $n_1, n_2 \in N$, o número $n_1 + n_2 \in N$ é a *soma de* n_1 *e* n_2.

Teorema 6.3 (Associatividade da adição)**.** *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n_1, n_2, n_3 \in N \qquad (n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3).$$

Demonstração. Sejam $n_1, n_2 \in N$ e $I \coloneqq \{n_3 \in N : (n_1+n_2)+n_3 = n_1+(n_2+n_3)\}$. Notemos que $0 \in I$, pois

$$\begin{aligned}(n_1+n_2)+0 &= n_1+n_2 && \text{(A1)}\\ &= n_1+(n_2+0). && \text{(A1)}\end{aligned}$$

Agora, seja $n \in I$. Então

$$\begin{aligned}(n_1+n_2)+s(n) &= s((n_1+n_2)+n) && \text{(A2)}\\ &= s(n_1+(n_2+n)) && (n \in I)\\ &= n_1+s(n_2+n) && \text{(A2)}\\ &= n_1+(n_2+s(n)), && \text{(A2)}\end{aligned}$$

o que implica $s(n) \in I$. Logo $I = N$. ■

Teorema 6.4. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n \in N \qquad s(n) = n+1.$$

Demonstração. Seja $n \in N$. Então

$$s(n) = s(n+0) = n+s(0) = n+1.$$

■

Lema 6.5. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

1. $\forall n \in N \qquad 0+n = n;$
2. $\forall n \in N \qquad 1+n = n+1.$

Demonstração. Demonstraremos ambas afirmações por indução em n.

1. Seja $I \coloneqq \{n \in N : 0+n = n\}$. Primeiro notemos que $0 \in I$, pois $0+0 = 0$. Agora, seja $n \in I$. Então

   $$0+s(n) = 0+(n+1) = (0+n)+1 = n+1 = s(n),$$

   o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, $I = N$.

2. Seja $I \coloneqq \{n \in N : 1+n = n+1\}$. Primeiro notemos que $0 \in I$, pois $1+0 = 1 = 0+1$. Agora, seja $n \in I$. Então

   $$1+s(n) = 1+(n+1) = (1+n)+1 = (n+1)+1 = s(n)+1,$$

   o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, $I = N$.

■

Teorema 6.6 (Comutatividade da adição)**.** *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n_1, n_2 \in N \qquad n_1 + n_2 = n_2 + n_1.$$

Demonstração. Demonstraremos a afirmação por indução. Seja $n_1 \in N$ e $I := \{n \in N : n_1 + n = n + n_1\}$. Primeiro notemos que $0 \in I$, pois

$$n_1 + 0 = n_1 = 0 + n_1.$$

Agora, seja $n \in I$. Então

$$\begin{aligned} n_1 + s(n) &= n_1 + (n+1) \\ &= (n_1 + n) + 1 \\ &= (n + n_1) + 1 \\ &= n + (n_1 + 1) \\ &= n + (1 + n_1) \\ &= (n+1) + n_1 \\ &= s(n) + n_1, \end{aligned}$$

o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, $I = N$. ■

6.1.2 Multiplicação

Teorema 6.7. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Existe uma única função*

$$\begin{aligned} \times : N \times N &\longrightarrow N \\ (n_1, n_2) &\longmapsto n_1 \times n_2 \end{aligned}$$

que satisfaz

1. *(M1)* $\forall n \in N \qquad n \times 0 = 0$*;*
2. *(M2)* $\forall n_1, n_2 \in N \qquad n_1 \times s(n_2) = (n_1 \times n_2) + n_1$.

Demonstração. Primeiro devemos mostrar que a função $\times$ está bem definida. Para isso, devemos mostrar que, para todo $n_1, n_2 \in N$, existe único $n_3 \in N$ tal que $n_1 \times n_2 = n_3$. Consideremos $I := \{n \in N : \exists! n_3 \in N \quad n_1 \times n = n_3\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $n_1 \times 0 = 0$ e, portanto, n_3 esxite e é único. Agora, seja $n \in I$. Então existe único $n_3 \in N$ tal que $n_1 \times n = n_3$ e, como $+$ é função, $n_3 + n_1 = n_1 \times n + n$ é único e tomando $n_1 \times s(n) = n_1 \times n + n_1$, concluímos que

$s(n) \in I$ e, portanto, $I = N$. Logo $\times$ está bem definida. Agora, devemos mostrar que $\times$ é única. Sejam $\times_1, \times_2 : N \times N \longrightarrow N$ funções satisfazendo $(M_1), (M_2)$, $n_1 \in N$ e $I := \{n \in N : n_1 \times_1 n = n_1 \times_2 n\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $n_1 \times_1 0 = 0 = n_1 \times_2 0$. Agora, seja $n \in I$. Então

$$n_1 \times_1 s(n) = n_1 \times_1 n + n_1 = n_1 \times_2 n + n_1 = n_1 \times_2 s(n),$$

o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, que $I = N$. Logo $\times_1 = \times_2$. ■

Definição 6.3. Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais. A função $\times$ é a *multiplicação nos números naturais* e, dados $n_1, n_2 \in N$, o número $n_1 \times n_2 \in N$ é o *produto de n_1 e n_2*.

Teorema 6.8 (Distributividade)**.** *Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais. Então*

1. $\forall n, m, k \in N \qquad n \times (m + k) = (n \times m) + (n \times k)$;
2. $\forall n, m, k \in N \qquad (n + m) \times k = (n \times k) + (m \times k)$.

Demonstração. 1. Sejam $n, m \in N$ e $I := \{k \in N : n \times (m + k) = (n \times m) + (n \times k)\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois

$$\begin{aligned} n \times (m + 0) &= n \times m && (A_1) \\ &= n \times m + 0 && (A_1) \\ &= (n \times m) + (n \times 0). && (M_1) \end{aligned}$$

Agora, seja $k \in I$. Então

$$\begin{aligned} n \times (m + s(k)) &= n \times s(m + k) && (A_2) \\ &= (n \times (m + k)) + n && (M_2) \\ &= ((n \times m) + (n \times k)) + n && (k \in I) \\ &= (n \times m) + ((n \times k) + n) && (6.3) \\ &= (n \times m) + (n \times s(k)), && (M_2) \end{aligned}$$

o que implica que $s(k) \in I$ e, portanto, que $I = N$.

2. Sejam $n, m \in N$ e $I := \{k \in N : (n+m) \times k = (n \times k) + (m \times k)\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois

$$\begin{aligned} (n + m) \times 0 &= 0 && (M_1) \\ &= 0 + 0 && (A_1) \\ &= (n \times 0) + (m \times 0). && (M_1) \end{aligned}$$

Agora, seja $k \in I$. Então

$$\begin{aligned}
(n+m) \times s(k) &= ((n+m) \times k) + (n+m) && (M_2)\\
&= ((n \times k) + (m \times k)) + (n+m) && (k \in I)\\
&= ((n \times k) + n) + ((m \times k) + m) && (6.3)\\
&= (n \times s(k)) + (m \times s(k)), && (M_2)
\end{aligned}$$

o que implica que $s(k) \in I$ e, portanto, que $I = N$.

■

Teorema 6.9 (Associatividade da multiplicação)**.** *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n, m, k \in N \qquad (n \times m) \times k = n \times (m \times k).$$

Demonstração. Sejam $n, m \in N$ e $I \coloneqq \{k \in N : (n \times m) \times k = n \times (m \times k)\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois

$$(n \times m) \times 0 = 0 = n \times 0 = n \times (m \times 0) \qquad (M_1)$$

Agora, seja $k \in I$. Então

$$\begin{aligned}
(n \times m) \times s(k) &= ((n \times m) \times k) + (n \times m) && (M_2)\\
&= (n \times (m \times k)) + (n \times m) && (k \in I)\\
&= n \times ((m \times k) + m) && (6.8)\\
&= n \times (m \times s(k)), && (M_2)
\end{aligned}$$

o que implica que $s(k) \in I$ e, portanto, que $I = N$. ■

Lema 6.10. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

1. $\forall n \in N \qquad 0 \times n = 0$;
2. $\forall n \in N \qquad n \times 1 = n = 1 \times n$.

Demonstração. 1. Vamos mostrar por indução em n. Seja $I \coloneqq \{n \in N : 0 \times n = 0\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $0 \times 0 = 0$. Agora, seja $n \in I$. Então

$$0 \times s(n) = (0 \times n) + 0 = 0 + 0 = 0,$$

o que mostra que $s(n) \in N$ e, portanto, $I = N$.

2. Seja $n \in N$. Então

$$n \times 1 = (n \times 0) + n = 0 + n = n.$$

Mostraremos a segunda igualdade por indução em n. Seja $I := \{n \in N : 1 \times n = n\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $1 \times 0 = 0$. Agora, seja $n \in I$. Então

$$1 \times s(n) = (1 \times n) + 1 = n + 1 = s(n),$$

o que implica que $s(n) \in I$ e, portanto, que $I = N$.

■

Teorema 6.11. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n, m \in N \qquad n \times m = m \times n.$$

Demonstração. Sejam $n \in N$ e $I := \{m \in N : n \times m = m \times n\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois

$$\begin{aligned} n \times 0 &= 0 && (M_1) \\ &= 0 \times n. && (6.10) \end{aligned}$$

Agora, seja $m \in I$. Então

$$\begin{aligned} n \times s(m) &= (n \times m) + n && (M_2) \\ &= (m \times n) + n && (m \in I) \\ &= (m \times n) + (1 \times n) && (6.10) \\ &= (m + 1) \times n && (6.8) \\ &= s(m) \times n, && (6.4) \end{aligned}$$

o que implica que $s(m) \in I$ e, portanto, que $I = N$. ■

6.1.3 Ordenação

Lema 6.12. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

1. $\forall n, m, k \in N \qquad n + k = m + k \quad \Longrightarrow \quad n = m;$

2. $\forall n, m \in N \qquad n + m = 0 \quad \Longrightarrow \quad n = m = 0.$

Demonstração. 1. Seja $I := \{k \in N : \forall n, m \in N \quad n + k = m + k \quad \Longrightarrow \quad n = m\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois, para todos $n, m \in N$, se $n + 0 = m + 0$, então $n = m$. Agora, seja $k \in I$ e $n, m \in N$. Se $n + s(k) = m + s(k)$, então $s(n + k) = s(m + k)$ e, como s é injetiva, $n + k = m + k$, o que implica que $n = m$ e, assim, temos que $s(k) \in I$ e, portanto, $I = N$.

2. Suponhamos, por absurdo, que $n \neq 0$ ou $m \neq 0$. Notemos que $n+m = m+n$; então, sem perda de generalidade, seja $m \neq 0$. Então existe $k \in N$ tal que $m = s(k)$ e segue que $n + m = n + s(k) = s(n + k) = 0$, o que é absurdo, pois $s^{-1}(\{0\}) = \varnothing$. Logo $n = m = 0$.

■

Definição 6.4. Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo dos números naturais. A relação binária $\leq$ em N é definida por

$$n \leq m \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists d \in N \quad n + d = m.$$

Proposição 6.13. *Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo dos números naturais. A relação binária $\leq$ em N é uma relação de ordem total.*

Demonstração. Primeiro, notemos que $\leq$ é reflexiva, pois, pra todo $n \in N$, $n+0 = n$, o que implica que $n \leq n$. Segundo, notemos que $\leq$ é antissimétrica. Sejam $n, m \in N$ tais que $n \leq m$ e $m \leq n$; então existem $d_1, d_2 \in N$ tais que $n + d_1 = m$ e $m + d_2 = n$ e, portanto, que $n + m = n + m + d_1 + d_2$, o que implica $d_1 + d_2 = 0$ e, portanto, que $d_1 = d_2 = 0$. Assim $n = m$. Terceiro, mostremos que $\leq$ é transitiva. Sejam $m, n, k \in N$ tais que $n \leq m$ e $m \leq k$. Então existem $d_1, d_2 \in N$ tais que $n + d_1 = m$ e $m + d_2 = k$. Assim, $n + d_1 + d_2 = k$, logo $n \leq k$. Isso termina a demonstração de que $\leq$ é uma ordem parcial. Por fim, devemos mostrar que a ordem parcial $\leq$ é total. Sejam $n \in N$ e $I := \{m \in N : n \leq m \text{ ou } m \leq n\}$. Primeiro, notemos que $0 \in I$, pois $0 + n = n$, logo $0 \leq n$. Agora, seja $m \in I$. Se $nleqm$, existe $d \in N$ tal que $n+d = m$, e segue que, como $n+d+1 = m+1 = s(m)$, $n \leq s(m)$. Se $m \leq n$, existe $d \in N$ tal que $m + d = n$. Consideramos dois casos: se $d = 0$, então $n + 1 = m + 1 = s(m)$, logo $n \leq s(m)$; se $d \neq 0$, existe $k \in N$ tal que $d = s(k) = k+1$, o que implica $n = m+d = m+k+1 = m+1+k = s(m)+k$ e, portanto, $s(m) \leq n$. Assim, concluímos que $s(m) \in I$ e, portanto, que $I = N$. Assim, fica provado que $\leq$ é uma ordem total. ■

Dessa forma, a relação binária $<$ fica definida como a ordem estrita associada a $\leq$.

Teorema 6.14 (Boa ordenação)**.** *Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais. Então $(\boldsymbol{N}, \leq)$ é bem ordenado.*

Demonstração. Seja $C \subseteq N$ um conjunto que não tem menor elemento. Devemos mostrar que $C = \varnothing$. Notemos que $0 \notin C$ porque, para todo $n \in C$, $0 \leq n$, o que implicaria que $0 = \min C$. Consideremos $I := \{m \in N : \forall n \in C \quad m < n\}$. Inicialmente, ressaltemos que $C \cap I = \varnothing$, pois, se existe $m \in I \cap C$, então, como $m \in I$, para todo $n \in C$, $m < n$ e, como $m \in C$, segue que $m < m$, o que é absurdo. Então notemos que $0 \in I$, pois $0 \leq n$ para todo $n \in C$ e $0 \notin C$. Agora,

seja $m \in I$. Então, para todo $n \in C$, $m < n$, o que implica que existe $d \in N \setminus \{0\}$ tal que $m + d = n$. Então segue que existe $k \in N$ tal que $d = s(k) = k + 1$ e segue que $s(m) + k = m + k + 1 = n$; ou seja, $s(m) \leq n$. Agora notemos que $s(m) \notin C$, pois, caso contrário, $s(m) = \min C$. Portanto, para todo $n \in C$, $s(m) < n$, o que mostra que $s(m) \in I$ e, por sua vez, que $I = N$. Como $C \subseteq N$, segue que $C \cap N = C$. Mas então $\varnothing = C \cap I = C \cap N = C$. ■

Teorema 6.15 (Indução completa)**.** *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Para todo conjunto* $I \subseteq N$*, se* $0 \in I$ *e*

$$\{m \in N : m < n\} \subseteq I \quad \Longrightarrow \quad s(n) \in I,$$

então $I = N$*.*

Demonstração. Seja $I \subseteq N$ e suponha que $0 \in I$ e $\{m \in N : m < n\} \subseteq I \quad \Longrightarrow$ $s(n) \in I$. Então ■

Lema 6.16. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. Então*

$$\forall n_1, n_2, m_1, m_2 \in N \qquad \begin{cases} n_1 \leq m_1 \\ n_2 \leq m_2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} n_1 + n_2 \leq m_1 + m_2 \\ n_1 \times n_2 \leq m_1 \times m_2. \end{cases}$$

Demonstração. Para $i \in \{1, 2\}$, como $n_i \leq m_i$, existe $d_i \in N$ tal que $n_i + d_i = m_i$. Assim, segue que $n_1 + d_1 + n_2 + d_2 = m_1 + m_2$ e, portanto, $n_1 + n_2 \leq m_1 + m_2$. Ainda, segue que

$$m_1 \times m_2 = (n_1 + d_1) \times (n_2 + d_2) = (n_1 \times n_2) + (n_1 \times d_2) + (d_1 \times n_1) + (d_1 \times d_2)$$

e, portanto, $n_1 \times n_2 \leq m_1 \times m_2$. ■

6.2 Números Inteiros

Proposição 6.17. *Seja* $\boldsymbol{N}$ *um modelo de números naturais. A relação binária* $\sim$ *em* $N \times N$ *definida por*

$$\forall n_1, n_2, m_1, m_2 \qquad (n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 + m_2 = n_2 + m_1$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Sejam $(n_1, n_2), (m_1, m_2), (k_1, k_2) \in N \times N$. Primeiro, notemos que $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$, o que mostra que $(n_1, n_2) \sim (n_1, n_2)$. Segundo, notemos que, se $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$, então $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$, o que implica que $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ e, portanto, que $(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2)$. Terceiro, notemos que, se $(n_1, n_2) \sim (m_1, m_2)$ e $(m_1, m_2) \sim (k_1, k_2)$, então $n_1 + m_2 = n_2 + m_1$ e $m_1 + k_2 = m_2 + k_1$, o que implica que $n_1 + m_2 + m_1 + k_2 = n_2 + m_1 + m_2 + k_1$ e, portanto, que $n_1 + k_2 = n_2 + k_1$, logo $(n_1, n_2) \sim (k_1, k_2)$. ■

Definição 6.5. Seja $\boldsymbol{N}$ um modelo de números naturais com a equivalência $\sim$. O *modelo de números inteiros* associado a $\boldsymbol{N}$ é o par $\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{N}, Z)$, em que Z é o conjunto

$$Z := N \times N \big/ \sim,$$

o *conjunto dos números inteiros.*

Proposição 6.18. *Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. Para todo $z \in Z$, existe único $d \in N$ tal que $z = [(n + d, n)]$ ou $z = [(n, n + d)]$.*

Demonstração. Seja $z \in Z$. Então $z = [(n_1, n_2)]$. Notemos que $n_1 \leq n_2$ ou $n_1 \geq n_2$. Agora, devemos notar que isso está bem definido para qualquer representante de z. Sejam $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in z$. Então $n_1 + n_2' = n_2 + n_1'$. Sem perda de generalidade, cosideremos que $n_1 \geq n_2$. Nesse caso, existe $d \in N$ tal que $n_1 = n_2 + d$. Mas isso implica que $n_2 + d + n_2' = n_2 + n_1'$ e, portanto, que $n_1' = n_2' + d$ e, então $n_1' \geq n_2'$. Do mesmo modo, supondo $n_1' \geq n_2'$ achamos que $n_1 \geq n_2$. Ainda, o valor d é o mesmo em ambos os casos. Assim, se $n_1 \geq n_2$, temos que $z = [(n+d, n)]$ e, caso contrário, que $z = [(n, n + d)]$. A unicidade de d é óbvia pois, se existem d_1, d_2 tais que $n_1 = n_2 + d_1$ e $n_1 = n_2 + d_2$, então segue que $n_2 + d_1 = n_2 + d_2$ e, portanto, que $d_1 = d_2$. ■

Pela proposição anterior, um número inteiro de $\boldsymbol{Z}$ é unicamente representado pelo elemento $d \in N$ e sua posição no par ordenado. Por isso, se $z = [(n + d, n)]$, identificamos z com d e, se $z = [(n, n + d)]$, identificamos z com $-d$.

6.2.1 Adição e Subtração

Definição 6.6. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. O *zero* de $\boldsymbol{Z}$ é o elemento $0 := [(n, n)]$.

Definição 6.7. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A *adição nos números inteiros* é a função

$$\begin{aligned} + : Z \times Z &\longrightarrow Z \\ ([(n_1, n_2)], [(m_1, m_2)]) &\longmapsto [(n_1 + m_1, n_2 + m_2)]. \end{aligned}$$

Dados $n, m \in Z$, o número $n + m$ é a *soma de n e m.*

Teorema 6.19. *Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A função $+$ está bem definida.*

Demonstração. Sejam $n, m \in Z$ e $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in n$, $(m_1, m_2), (m_1', m_2') \in m$. Então $n + m$ pode ser calculado por

$$\begin{aligned}[(n_1, n_2)] + [(m_1, m_2)] &= [(n_1 + m_1, n_2 + m_2)] \\ [(n_1', n_2')] + [(m_1', m_2')] &= [(n_1' + m_1', n_2' + m_2')].\end{aligned}$$

Como $n_1 + n_2' = n_2 + n_1'$ e $m_1 + m_2' = m_2 + m_1'$, segue que

$$n_1 + n_2' + m_1 + m_2' = n_2 + n_1' + m_2 + m_1'$$

e, portanto, $(n_1 + m_1, n_2 + m_2) \sim (n_1' + m_1', n_2' + m_2')$, o que mostra que a soma $n + m$ está bem definida. ■

Proposição 6.20. *Seja* $\boldsymbol{Z}$ *um modelo de números inteiros. Então*

1. $\forall n \in Z \qquad n + 0 = n$;
2. $\forall n, m, k \in Z \qquad (n + m) + k = n + (m + k)$;
3. $\forall n, m \in Z \qquad n + m = m + n$.

Demonstração. Sejam $n, m, k \in Z$ e $(n_1, n_2) \in n, (m_1, m_2) \in m, (k_1, k_2) \in k$.

1. Como $(0, 0) \in 0$, então $(n_1, n_2) + (0, 0) = (n_1, n_2)$, logo $n + 0 = n$.
2. Notemos que

$$\begin{aligned}((n_1, n_2) + (m_1, m_2)) + (k_1, k_2) &= (n_1 + m_1, n_2 + m_2) + (k_1, k_2) \\ &= (n_1 + m_1 + k_1, n_2 + m_2 + k_2) \\ &= (n_1, n_2) + (m_1 + k_1, m_2 + k_2) \\ &= (n_1, n_2) + ((m_1, m_2) + (k_1, k_2)),\end{aligned}$$

   logo $(n + m) + k = n + (m + k)$.

3. Notemos que

$$\begin{aligned}(n_1, n_2) + (m_1, m_2) &= (n_1 + m_1, n_2 + m_2) \\ &= (m_1 + n_1, m_2 + n_2) \\ &= (m_1, m_2) + (n_1, n_2),\end{aligned}$$

   logo $n + m = m + n$.

■

Definição 6.8. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A função *negativo* em $\boldsymbol{Z}$ é a função

$$\begin{aligned} - : Z &\longrightarrow Z \\ [(n_1, n_2)] &\longmapsto [(n_2, n_1)]. \end{aligned}$$

6.2.2 Multiplicação

A partir desta seção, usaremos a notação nm em vez de $n \times m$ para facilitar os cálculos.

Definição 6.9. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. O *um* de $\boldsymbol{Z}$ é o elemento $1 := [(n+1, n)]$.

Definição 6.10. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A *multiplicação nos números inteiros* é a função

$$\begin{aligned} \times : Z \times Z &\longrightarrow Z \\ ([(n_1, n_2)], [(m_1, m_2)]) &\longmapsto [(n_1m_1 + n_2m_2, n_2m_1 + n_1m_2)]. \end{aligned}$$

Dados $n, m \in Z$, o número $n \times m$ é o *produto de n e m*.

Teorema 6.21. *Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A função $\times$ está bem definida.*

Demonstração. Sejam $n, m \in Z$ e $(n_1, n_2), (n_1', n_2') \in n$, $(m_1, m_2), (m_1', m_2') \in m$. Então $n \times m$ pode ser calculado por

$$\begin{aligned} [(n_1, n_2)] \times [(m_1, m_2)] &= [(n_1m_1 + n_2m_2, n_2m_1 + n_1m_2)] \\ [(n_1', n_2')] \times [(m_1', m_2')] &= [(n_1'm_1' + n_2'm_2', n_2'm_1' + n_1'm_2')]. \end{aligned}$$

Como $n_1 + n_2' = n_2 + n_1'$ e $m_1 + m_2' = m_2 + m_1'$, segue que

$$\begin{aligned} &(n_1m_1 + n_2m_2 + n_2'm_1' + n_1'm_2') + (n_1m_2' + n_2m_1' + n_1m_1' + n_2m_2') \\ &= n_1(m_1 + m_2') + n_2(m_2 + m_1') + (n_2' + n_1)m_1' + (n_1' + n_2)m_2' \\ &= n_1(m_1' + m_2) + n_2(m_2' + m_1) + (n_2 + n_1')m_1' + (n_1 + n_2')m_2' \\ &= (n_2m_1 + n_1m_2 + n_1'm_1' + n_2'm_2') + (n_1m_2' + n_2m_1' + n_1m_1' + n_2m_2'), \end{aligned}$$

o que implica que

$$n_1m_1 + n_2m_2 + n_2'm_1' + n_1'm_2' = n_2m_1 + n_1m_2 + n_1'm_1' + n_2'm_2'$$

e, portanto, $(n_1m_1 + n_2m_2, n_2m_1 + n_1m_2) \sim (n_1'm_1' + n_2'm_2', n_2'm_1' + n_1'm_2')$, o que mostra que o produto $n \times m$ está bem definido. ■

6.2.3 Ordenação

Definição 6.11. Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A relação binária $\leq$ em N é definida por

$$[(n_1, n_2)] \leq [(m_1, m_2)] \quad \Longleftrightarrow \quad n_1 + m_2 \leq n_2 + m_1.$$

Proposição 6.22. *Seja $\boldsymbol{Z}$ um modelo de números inteiros. A relação binária $\leq$ em N está bem definida e é uma relação de ordem total.*

6.3 Números Racionais

6.3.1 Adição e Subtração

6.3.2 Multiplicação e Divisão

6.3.3 Ordenação

6.4 Números Reais

6.4.1 Adição e Subtração

6.4.2 Multiplicação e Divisão

6.4.3 Ordenação

6.4.4 Completude

Capítulo 7

Resto temporário

7.1 Complementares e Diferença Simétrica

Definição 7.1. Sejam X e Y conjuntos. O *complementar relativo* de Y em X é o conjunto

$$X \setminus Y \coloneqq \{x \in X \mid x \notin Y\}.$$

Definição 7.2. Sejam U um conjunto e X um subconjunto de U. O *complementar* de X em U é o conjunto

$$X\complement \coloneqq U \setminus X.$$

Definição 7.3. Sejam X e Y conjuntos. A *diferença simétrica* de X e Y é o conjunto

$$X \triangle Y \coloneqq (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

7.1.1 Propriedades

Proposição 7.1. *Sejam X, Y subconjuntos de U. Então*

1. $(X\complement)\complement = X$;
2. $\varnothing\complement = U$ *e* $U\complement = \varnothing$;
3. $X \cap X\complement = \varnothing$ *e* $X \cup X\complement = U$;
4. $X \subseteq Y \iff Y\complement \subseteq X\complement$.
5. $(X \cup Y)\complement = X\complement \cap Y\complement$ *e* $(X \cap Y)\complement = X\complement \cup Y\complement$.

7.2 Partições

Definição 7.4. Seja X um conjunto. Uma *partição* de X é um conjunto $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que satisfaz

1. $\varnothing \notin P$;
2. $\bigcup P = X$;
3. $\forall C_0, C_1 \in P \qquad C_0 \neq C_1 \quad \Longrightarrow \quad C_0 \cap C_1 = \varnothing$.

Um elemento $C \in P$ é uma *célula* de P.

Definição 7.5. Sejam X um conjunto e P uma partição de X. Um *refinamento* (*superpartição*) de P é uma partição R de X que satisfaz: para toda célula $D \in R$, existe uma célula $C \in P$ tal que $D \subseteq C$. Denota-se $P \leq R$. Diz que P é um *engrossamento* (*subpartição*) de R.

Proposição 7.2. *Sejam X um conjunto e P, R partições de X tais que $P \leq R$. Então $|P| \leq |R|$ e, para toda célula $C \in P$, vale $C = \bigcup \{D \in R \mid D \subseteq C\}$.*

Demonstração. Por definição de refinamento, para toda célula $D \in R$ existe célula $C \in P$ tal que $D \subseteq C$. Notemos que essa célula C é única pois, se existir célula $C' \in P$ tal que $D \subseteq C'$, então $D \subseteq C \cap C'$ e, como $D \neq \varnothing$, segue que $C = C'$. Assim, consideramos a função que mapeia, para cada célula $D \in R$ a célula $C_D \in P$ tal que $D \subseteq C_D$:

$$\begin{aligned} f : R &\longrightarrow P \\ D &\longmapsto C_D. \end{aligned}$$

Mostremos que essa função é sobrejetiva. Para isso, seja $C \in P$. Como $\bigcup R = X$, para todo $x \in C \subseteq X$ existe $D \in R$ tal que $x \in D$. Como $C \neq \varnothing$, existe $x \in C$, logo existe $D \in R$ tal que $x \in D$. Por definição de refinamento, existe $C' \in P$ tal que $D \subseteq C'$, o que implica $x \in C'$. Como $x \in C' \cap C$, segue que $C = C'$, e concluímos que $D \subseteq C$. Isso mostra que $f(D) = C$, logo que f é sobrejetiva. Concluímos, então, que $|P| \leq |R|$.

Por fim, seja $C \in P$ e $U := \bigcup \{D \in R \mid D \subseteq C\}$. Notemos que $C = U$. Para mostrar isso, seja $x \in C$. Então existe $D \in R$ tal que $x \in D$, pois $\bigcup P = X$. Por definição de refinamento, existe $C' \in P$ tal que $D \subseteq C'$, portanto $x \in C'$. Como $x \in C' \cap C$, segue que $C = C'$. concluímos que $D \subseteq C$, portanto que $x \in U$, o que mostra $C \subseteq U$. Reciprocamente, para todo $D \in U$, $D \subseteq C$, portanto $U \subseteq C$, e concluímos que $C = U$. ■

Proposição 7.3. *Sejam X um conjunto. A relação de refinamento $\leq$ no conjunto de partições de X é uma relação de ordem parcial.*

Definição 7.6. Sejam X um conjunto e $(P_i)i \in I$ uma família de partições de X. O *refinamento comum* a $(P_i)_{i\in I}$ é o conjunto

$$\bigvee_{i\in I} P_i := \left\{ \bigcap_{i\in I} C_i \;\middle|\; \forall i \in I \quad C_i \in P_i \right\} \setminus \{\varnothing\}.$$

Proposição 7.4. *Sejam X um conjunto e $(P_i)i \in I$ uma família de partições de X. O refinamento comum $\bigvee_{i\in I} P_i$ a $(P_i)i \in I$ é a menor partição de que X que refina P_i para todo $i \in I$.*

Demonstração. Primeiro, mostremos que $P := \bigvee_{i\in I} P_i$ é uma partição. Por definição, $\varnothing \notin P$. Seja $x \in X$. Então, para cada $i \in I$, existe $C_i \in P_i$ tal que $x \in C_i$, pois $\bigcup P_i = X$. Sendo assim, $x \in \bigcap_{i\in I} C_i$, portanto $X \subseteq \bigcup P$, e segue que $\bigcup P = X$. Por fim, sejam $C = \bigcap_{i\in I} C_i, D = \bigcap_{i\in I} D_i \in P$. Se $C \neq D$, então existe $x \in C \setminus D$ ou existe $x \in D \setminus C$. Sem perda de generalidade, suponha o primeiro. Então, existe $i \in I$ tal que $x \notin D_i$. Como $x \in C$, então $x \in C_i$, portanto $C_i \neq D_i$. Mas então, como P_i é partição, $C_i \cap D_i = \varnothing$. Por fim, como $C \subseteq C_i$ e $D \subseteq D_i$, segue que $C \cap D = \varnothing$.

Agora mostraremos que P é refinamento de P_i para todo $i \in I$. Sejam $i \in I$ e $C \in P$. Então $P = \bigcap_{i\in I} C_i$, portanto $C_i \in P_i$. Por fim, sejam R partição de X que é refina P_i para todo $i \in I$ e $D \in R$ uma célula. Então, para todo $i \in I$, existe $C_i \in P_i$ tal que $D \subseteq C_i$. Portanto $D \subseteq \bigcap_{i\in I} C_i$, e como $\bigcap_{i\in I} C_i \in P$, segue que $P \leq R$. ■

Alguns tipos especiais de partições são úteis na teoria de intergação de Riemmann. Em $\mathbb{R}^1$, essas partições são chamadas de partições de intervalo, e são representadas como um número finito de pontos em um intervalo. Quando generaliza-se para dimensões maiores, usam-se n-retângulos, que são conjuntos em $\mathbb{R}^n$ pprodutos de n intervalos limitados. Podemos fixar um critério a mais, o de que um n-retângulo é produto de intervalos fechados em baixo e abertos em cima. Nesse caso, podemos definir que uma partição cujos elementos são n-retângulos é uma *malha*. Alternativamente, quando temos uma medida, que é o caso de $\mathbb{R}^n$, podemos enfraquecer a restrição de que as células de uma partição são iguais ou disjuntas para a de que são iguais ou a interseção tem medida zero, e a restrição de que cobrem para a restrição de que a união da partição tem medida igual à medida total, e por fim, de que nenhum elemento da partição tem medida nula (essa não é tão necessária, acho), e definir que isso é uma μ-partição ou *partição com respeito a μ*.

Parte II

Álgebra

Capítulo 8

Operações Binárias e Estruturas Básicas

A *Álgebra* estuda objetos matemáticos conhecidos como *estruturas algébricas*. As definições desse objeto variam e podem ser tomadas de modo a serem mais ou menos gerais. No entanto, esse objetivos sempre são n-listas em que as entradas são conjuntos e funções. Uma das definições que podem ser tomadas é a de que essas estruturas são listas em que a primeira entrada é um conjunto e as demais são funções. Em geral, essas funções são *operações n-árias*, funções da n-ésima potência de um conjunto nele mesmo. Não definiremos aqui esses objetos com detalhes, nos restringindo somente a casos específicos. Ao leitor fica a oportunidade de perceber as semelhanças entre as definições e generalizá-las, ou mesmo de procurar mais a respeito.

8.1 Operações Binárias

Definição 8.1. Seja X um conjunto não vazio. Uma *operação binária* em X é uma função

$$\begin{aligned} * : X \times X &\longrightarrow X \\ (x_1, x_2) &\longmapsto x_1 * x_2 \end{aligned}$$

Proposição 8.1 (Propriedade de fecho)**.** *Sejam X e Y conjuntos não vazios tais que $Y \subseteq X$ e $*$ uma operação binária em X. Então a restrição $*|_{Y \times Y}$ da operação binária $*$ a $Y \times Y$ é uma operação binária em Y se, e somente se,*

$$\forall y_1, y_2 \in Y \qquad y_1 * y_2 \in Y.$$

Demonstração. Basta notar que, como $Y \subseteq X$, então $Y \times Y \subseteq X \times X$, e a proposição segue da proposição 3.4. ■

Denotamos $*|_{Y\times Y}$ por $*$ quando não há ambiguidade.

Definição 8.2. Seja X um conjunto. Uma operação binária *associativa* é uma operação binária $* : X \times X \longrightarrow X$ que satisfaz

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad (x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3).$$

Uma operação binária *comutativa* é uma operação binária $* : X \times X \longrightarrow X$ que satisfaz

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 * x_2 = x_2 * x_1.$$

Definição 8.3. Sejam X um conjunto e $+$ uma operação binária em X. Uma operação binária *distributiva* sobre $+$ é uma operação binária $*$ em X que satisfaz

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad x_1 * (x_2 + x_3) = (x_1 * x_2) + (x_1 * x_3).$$

8.2 Magma

Definição 8.4. Um *magma* é um par $\boldsymbol{X} = (X, *)$ em que X é um conjunto não vazio e $*$ é uma operação binária em X.

Definição 8.5. Seja $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um magma. Um *elemento neutro* de $\boldsymbol{X}$ é um elemento $e \in X$ que satisfaz

$$\forall x_1 \in X \quad e * x_1 = x_1 = x_1 * e.$$

Pode-se distinguir *elemento neutro à esquerda* e *elemento neutro à direita*, que seria o caso de e se só satisfizesse, respectivamente, as iguadades da esquerda e da direita acima, mas não adotaremos essa distinção neste livro.

Definição 8.6. Seja $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um magma com elemento neutro e e $x_1 \in X$. Um *inverso* de x_1 em $\boldsymbol{X}$ é um elemento $x_2 \in X$ que satisfaz

$$x_2 * x_1 = e = x_1 * x_2.$$

Pode-se distinguir *inverso à esquerda* e *inverso à direita*, que seria o caso de x_2 se só satisfizesse, respectivamente, as iguadades da esquerda e da direita acima, mas não adotaremos essa distinção neste livro.

Proposição 8.2. *Seja $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um magma. Se existe elemento neutro de $\boldsymbol{X}$, ele é único.*

Demonstração. Suponha que existam dois elementos neutros de $\boldsymbol{X}$, e_1 e e_2. Então

$$e_1 = e_1 * e_2 = e_2.$$

■

Definição 8.7. Seja $\boldsymbol{X}$ um magma, $Y \subseteq X$ e $x \in X$. Definimos

$$x * Y := \{x * y : y \in Y\} \text{ e } Y * x := \{y * x : y \in Y\}.$$

8.3 Semigrupo

Definição 8.8. Um *semigrupo* é um magma $\boldsymbol{X} = (X, *)$ em que $*$ é associativa. Um semigrupo *comutativo* é um semigrupo em que $*$ é comutativa.

Definição 8.9. Seja $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um semigrupo e $x_1, \ldots, x_n \in X$. Definimos a operação $*$ entre esses n elementos recursivamente como

$$\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i := \begin{cases} x_1 & n = 1 \\ \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{n-1} x_i\right) * x_n & n > 1. \end{cases}$$

Os símbolos usados são o somatório $\mathop{+}$ simb]$\mathop{+}$ para a adição e o produtório $\mathop{\times}$ simb]$\mathop{\times}$ para a multiplicação.

Proposição 8.3. *Sejam $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um semigrupo, m, n naturais não nulos e $x_1, \ldots, x_{m+n}$ elementos de X. Então*

$$\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * \mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{m+i} = \mathop{\ast}_{i=1}^{m+n} x_i.$$

Demonstração. A demonstração será por indução em n. Se $n = 1$, temos que

$$\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * \mathop{\ast}_{i=1}^{1} x_{m+i} = \mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * x_{m+1} = \mathop{\ast}_{i=1}^{m+1} x_i.$$

Considere agora que vale a igualdade para n. Então

$$\begin{aligned} \mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * \mathop{\ast}_{i=1}^{n+1} x_{m+i} &= \mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{m+i} * x_n\right) \\ &= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_i * \mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{m+i}\right) * x_n \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{m+n} x_i * x_n \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{m+n+1} x_i. \end{aligned}$$

■

Essa proposição diz, basicamente, que podemos colocar os parêntesses como quisermos que o resultado será o mesmo.

Notação. Costumamos denotar essa operação por $x_1 * \cdots * x_n$.

Definição 8.10. Seja $\boldsymbol{X} = (X, *)$ um semigrupo comutativo, n um número natural não nulo e ψ uma bijeção do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ em si mesmo. Então

$$\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{\psi(i)} = \mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i.$$

Demonstração. Usaremos o fato de que $*$ é associativa. A demonstração será por indução em n. Se $n = 1$, a afirmação é óbvia. Considere que vale para n. Seja k um inteiro tal que $\psi(k) = n$. Então

$$\begin{aligned}\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{\psi(i)} &= \mathop{\ast}_{i=1}^{k-1} x_{\psi(i)} * x_{\psi(k)} * \mathop{\ast}_{i=k+1}^{n} x_{\psi(i)} \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{k-1} x_{\psi(i)} * \mathop{\ast}_{i=k+1}^{n} x_{\psi(i)} * x_{\psi(k)}.\end{aligned}$$

Agora, defininamos uma bijeção ϕ do conjunto $\{1, \ldots, n-1\}$ em si mesmo, dada por

$$\phi(m) = \begin{cases} \psi(m) & m < k \\ \psi(m+1) & m > k. \end{cases}$$

Então temos

$$\begin{aligned}\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_{\psi(i)} &= \mathop{\ast}_{i=1}^{k-1} x_{\psi(i)} * \mathop{\ast}_{i=k+1}^{n} x_{\psi(i)} * x_{\psi(k)} \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{n-1} x_{\phi(i)} * x_n \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{n-1} x_i * x_n \\ &= \mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i.\end{aligned}$$

■

8.4 Homomorfismo de Semigrupos

Definição 8.11. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, *)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \cdot)$ semigrupos. Um *homomorfismo de semigrupos* de $\boldsymbol{X}$ em $\boldsymbol{Y}$ é uma função $h : X \longrightarrow Y$ que satisfaz

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad h(x_1 * x_2) = h(x_1) \cdot h(x_2).$$

Denota-se por $h : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$.

Proposição 8.4 (Composição de homomorfismos é homomorfismo)**.** *Sejam* $\boldsymbol{X}_1 = (X, *_1)$*,* $\boldsymbol{X}_2 = (X_2, *_2)$ *e* $\boldsymbol{X}_3 = (X_3, *_3)$ *semigrupos e* $h_1 : \boldsymbol{X}_1 \longrightarrow \boldsymbol{X}_2$ *e* $h_2 : \boldsymbol{X}_2 \longrightarrow \boldsymbol{X}_3$ *homomorfismos de semigrupos. Então* $h_2 \circ h_1 : \boldsymbol{X}_1 \longrightarrow \boldsymbol{X}_3$ *é homomorfismo de semigrupos.*

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in X_1$. Então

$$\begin{aligned}(h_2 \circ h_1)(x_1 *_1 x_2) &= h_2(h_1(x_1 *_1 x_2)) \\ &= h_2(h_1(x_1) *_2 h_1(x_2)) \\ &= h_2(h_1(x_1)) *_3 h_2(h_1(x_2)) \\ &= (h_2 \circ h_1)(x_1) *_3 (h_2 \circ h_1)(x_2).\end{aligned}$$

■

8.5 Monoide

Definição 8.12. Um *monoide* é um semigrupo $\boldsymbol{M} = (M, *)$ que tem elemento neutro. Um monoide *comutativo* é um monoide em que $*$ é comutativa.

Notação. Costumamos denotar o elemento neutro de um monoide $\boldsymbol{M}$ por e_M. Quando não há ambiguidade, denotamos o elemento neutro por e. Ainda, como existe elemento neutro, definimos $\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i = e$ quando $n \leq 0$.

Exemplo 8.1. *O conjunto* $\mathbb{N}$ *com a função*

$$\begin{aligned}\max : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (m, n) &\longmapsto \begin{cases} m & m \geq n \\ n & m < n \end{cases}\end{aligned}$$

formam um monoide comutativo com elemento neutro 0.

Proposição 8.5. *Seja* $(M, *)$ *um monoide com elemento neutro* e*. Se* $m \in M$ *tem inverso sob* $*$*, ele é único.*

Demonstração. Suponha que existam dois inversos n_1 e n_2 de m. Então

$$n_1 = n_1 * e = n_1 * (m * n_2) = (n_1 * m) * n_2 = e * n_2 = n_2.$$

■

Notação. Isso nos permite denotar o inverso de um elemento $x \in X$ por $\overline{x}$. Em geral, a notação do inverso pode ser outra. Quando a operação binária é a adição $(+)$, denotamos o inverso por $-m$. Quando é a multiplicação $(\cdot)$, denotamo-lo por m^{-1}.

Proposição 8.6. *Seja $(M, *)$ um monoide com elemento neutro e. Se $m \in M$ tem inverso sob $*$, então*

$$(m^{-1})^{-1} = m.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}(m^{-1})^{-1} &= (m^{-1})^{-1} * e \\ &= (m^{-1})^{-1} * (m^{-1} * m) \\ &= ((m^{-1})^{-1} * m^{-1}) * m \\ &= e * m \\ &= m.\end{aligned}$$

■

Definição 8.13. Seja $\boldsymbol{M} = (M, *)$ um monoide. Um *submonoide* de $\boldsymbol{M}$ é um monoide $\boldsymbol{S} = (S, *_S)$ em que $S \subseteq M$ e $*_S = *|_{S \times S}$. Denota-se $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{S}$. Um submonoide *próprio* de $\boldsymbol{M}$ é um monoide $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{M}$ em que M é um subconjunto próprio de M ($S \subset M$). Denota-se $\boldsymbol{S} < \boldsymbol{M}$.

Proposição 8.7. *Sejam $\boldsymbol{M} = (M, *)$ um monoide e $S \subseteq M$. Então $\boldsymbol{S} = (S, *|_{S \times S})$ é um monoide com $e \in S$ se, e somente se,*

1. *(Identidade) $e \in S$.*
2. *(Fechamento) $\forall\ s_1, s_2 \in S \quad s_1 * s_2 \in S$;*

Ainda, se $\boldsymbol{M}$ é comutativo, então $\boldsymbol{S}$ é comutativo.

Demonstração. Por simplicidade, definamos $\star := *_{S \times S}$.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{S}$ é um monoide com $e \in S$. (Identidade) Então vale a identidade. (Fechamento) Como $\boldsymbol{S}$ é um monoide, $\star$ é uma operação binária, portanto segue que a propriedade de fechamento (8.1).

($\Leftarrow$) Suponhamos que valem as propriedades listadas. (Operação binária) Pela identidade, segue que $S \neq \varnothing$, e disso e do fechamento, segue que $\star$ é uma operação binária (8.1). (Associatividade) Sejam $s_1, s_2, s_3 \in S$. Da associatividade de $*$ segue que

$$(s_1 \star s_2) \star s_3 = (s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3) = s_1 \star (s_2 \star s_3).$$

Logo $\star$ é associativa. (Identidade) Seja $s \in S$. Como $e \in S$, da identidade de $*$ segue que

$$e \star s = e * s = s = s * e = s \star e.$$

Logo e é identidade de $\boldsymbol{S}$.

Por fim, suponhamos que $\boldsymbol{M}$ é um monoide comutativo. Sejam $s_1, s_2 \in S$. Como $*$ é comutativa, então

$$s_1 \star s_2 = s_1 * s_2 = s_2 * s_1 = s_2 \star s_1.$$

Logo $\star$ é comutativa. ■

Vale observar que, somente sabendo que $\boldsymbol{S}$ é um monoide, isto é, que um subconjunto S de um monoide $\boldsymbol{M}$ com a operação do monoide restrita a esse subconjunto formam um monoide, não podemos garantir que o elemento neutro de $\boldsymbol{S}$ é o mesmo que o de $\boldsymbol{M}$.

8.6 Homomorfismos de Monoides

Definição 8.14. Sejam $\boldsymbol{M} = (M, *)$ e $\boldsymbol{N} = (N, \cdot)$ monoides com elementos neutros e_M e e_N, respectivamente. Um *homomorfismo de monoides* de $\boldsymbol{M}$ em $\boldsymbol{N}$ é uma função $h : M \longrightarrow N$ que satisfaz

1. h é um homomorfismo de semigrupos de $\boldsymbol{M}$ em $\boldsymbol{N}$:
   (a) $\forall m_1, m_2 \in X \qquad h(m_1 * m_2) = h(m_1) \cdot h(m_2)$;
2. $h(e_M) = e_N$.

Denota-se por $h : \boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{N}$.

Podemos notar que precisamos garantir que a função h leve o elemento neutro de um monoide no elemento neutro de outro, já que isso não seria verdade se função fosse somente um homomorfismo de semigrupos. No entanto, mesmo sem a segunda propriedade, um homomorfismo de semigrupos entre grupos garante que a imagem do elemento neutro do primeiro seja um elemento neutro do conjunto imagem. Veremos mais adiante que um homomorfismo de grupos é simplesmente um homomorfismo de semigrupos, pois ele é suficiente para preservar a estrutura algébrica de grupos.

Proposição 8.8 (Composição de homomorfismos é homomorfismo)**.** *Sejam* $\boldsymbol{M}_1 = (M_1, *_1)$, $\boldsymbol{M}_2 = (M_2, *_2)$ *e* $\boldsymbol{M}_3 = (M_3, *_3)$ *monoides e* $h_1 : \boldsymbol{M}_1 \longrightarrow \boldsymbol{M}_2$ *e* $h_2 : \boldsymbol{M}_2 \longrightarrow \boldsymbol{M}_3$ *homomorfismos de monoides. Então* $h_2 \circ h_1 : \boldsymbol{M}_1 \longrightarrow \boldsymbol{M}_3$ *é homomorfismo de monoides.*

Demonstração. 1. Como homomorfismos de monoides são homomorfismos de semigrupos, o resultado segue da proposição na seção de semigrupos que afirma que composição de homomorfismos é homomorfismo (8.4).

2. Sejam e_1, e_2 e e_3 os elementos neutros de $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{M}_2$ e $\boldsymbol{M}_3$, respectivamente. Então
$$(h_2 \circ h_1)(e_1) = h_2(h_1(e_1)) = h_2(e_2) = e_3.$$

■

Capítulo 9

Grupos

9.1 Construções Algébricas

9.1.1 Grupo e Subgrupo

Definição 9.1. Um *grupo* é um par $\boldsymbol{G} = (G, *)$ em que G é um conjunto e $* : G \times G \longrightarrow G$ é uma operação binária que satisfaz

G1. (Associatividade) Para todos $g_1, g_2, g_3 \in G$,

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3);$$

G2. (Identidade) Existe $e \in G$ tal que, para todo $g \in G$,

$$e * g = g = g * e;$$

G3. (Invertibilidade) Para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que

$$g^{-1} * g = e = g * g^{-1}.$$

Um grupo *comutaivo* é um grupo que satisfaz

G4. (Comutatividade) Para todos $g_1, g_2 \in G$,

$$g_1 * g_2 = g_2 * g_1.$$

Notação. Denotaremos o inverso de $g \in G$ por g^{-1} e $g_1 * g_2$ por $g_1 g_2$. Quando o grupo é comutativo, podemos usar $+$ para denotar sua operação binária. Nesse caso, o inverso de $g \in G$ é denotado por $-g$.

Em vista das definições introdutórias do capítulo anterior, um grupo é um monoide $\boldsymbol{G} = (G, *)$ em que todos elementos de G têm inverso sob $*$, e um grupo comutaivo é um grupo em que $*$ é comutativa.

Definição 9.2. Seja $\boldsymbol{G} = (G, *)$ um grupo, $g \in G$ e $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$g^n := \mathop{\ast}_{i=1}^{n} g \quad \text{e} \quad g^{-n} := \mathop{\ast}_{i=1}^{n} g^{-1}.$$

Proposição 9.1 (Lei do corte em grupos)**.** *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Então*

1. $\forall g, g_1.g_2 \in G \qquad gg_1 = gg_2 \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2.$
2. $\forall g, g_1.g_2 \in G \qquad g_1g = g_2g \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2.$
3. $\forall g_1, \ldots, g_n \in G \qquad (g_1 \cdots g_n)^{-1} = g_n^{-1} \cdots g_1^{-1}.$

Demonstração. Se $gg_1 = gg_2$, então

$$g_1 = (g^{-1}g)g_1 = g^{-1}(gg_1) = g^{-1}(gg_2) = (g^{-1}g)g_2 = g_2.$$

A demonstração da segunda implicação é análoga. ■

Definição 9.3. Seja $\boldsymbol{G} = (G, *)$ um grupo. Um *subgrupo* de $\boldsymbol{G}$ é um grupo $\boldsymbol{S} = (S, \star)$ em que $S \subseteq G$ e $\star = *|_{S \times S}$. Denota-se $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$. Um subgrupo *próprio* de $\boldsymbol{G}$ é um subgrupo $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ em que S é um conjunto próprio de G ($S \subset G$). Denota-se $\boldsymbol{S} < \boldsymbol{G}$.

Proposição 9.2. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $S \subseteq G$. Então $\boldsymbol{S} = (S, *|_{S \times S})$ é um grupo se, e somente se, S satisfaz*

SG1. *(Não-vacuidade) $S \neq \varnothing$;*

SG2. *(Fechamento) Para todos $s_1, s_2 \in S$, $s_1s_2 \in S$;*

SG3. *(Invertibilidade) Para todo $s \in S$, $s^{-1} \in S$.*

Ainda, se $\boldsymbol{G}$ é comutativo, então $\boldsymbol{S}$ é comutativo.

Demonstração. Por simplicidade, definamos $\star := *|_{S \times S}$.

($\Rightarrow$) (SG1) Como $\boldsymbol{S}$ é um grupo, $e \in S$, portanto $S \neq \varnothing$. (SG2) Como $\boldsymbol{S}$ é grupo, $\star$ é uma operação binária, portanto segue que, para todo $s_1, s_2 \in S$, $s_1s_2 \in S$ (8.1). (SG3) Seja $s \in S$. Como $\boldsymbol{S}$ é grupo, existe $s^{-1} \in S$ inverso de s em $\boldsymbol{S}$. Como $s^{-1} \in G$, segue da unicidade do inverso que s^{-1} é o inverso de s em $\boldsymbol{G}$.

($\Leftarrow$) (Operação binária) Pela primeira e segunda propriedades de S, segue que $\star$ é uma operação binária (8.1). (G1) Sejam $s_1, s_2, s_3 \in S$. Então

$$(s_1 \star s_2) \star s_3 = (s_1 * s_2) * s_3 = s_1 * (s_2 * s_3) = s_1 \star (s_2 \star s_3).$$

(G2) Como $S \neq \varnothing$, existe $s \in S$, portanto $s^{-1} \in S$. Isso implica que $e = s * s^{-1} \in S$ e, como e é elemento neutro de $\boldsymbol{G}$, segue que, para todo $s \in S$,

$$e \star s = e * s = s = s * e = s \star e.$$

(G3) Seja $s \in S$. Pela terceira propriedade de S, segue que o inverso de s em $\boldsymbol{G}$ pertence a S. Então

$$s^{-1} \star s = s^{-1} * s = e = s * s^{-1} = s \star s^{-1},$$

portanto s^{-1} é o inverso de s em $\boldsymbol{S}$.

(G4) Por fim, suponhamos que $\boldsymbol{G}$ é um grupo comutativo. Sejam $s_1, s_2 \in S$. Como $*$ é comutativa, então

$$s_1 \star s_2 = s_1 * s_2 = s_2 * s_1 = s_2 \star s_1.$$

■

Proposição 9.3. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\mathcal{G}$ o conjunto dos subgrupos de $\boldsymbol{G}$. Então $(\mathcal{G}, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado.*

Demonstração. Claramente, $\boldsymbol{G} \in \mathcal{G}$, portanto $\mathcal{G}$ não é vazio. Mostremos que $\leq$ é uma ordem parcial em $\mathcal{G}$. (Reflexividade) Seja $\boldsymbol{S} \in \mathcal{G}$. Então $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{S}$, pois $\boldsymbol{S}$ é um grupo, $S \subseteq S$ e $*|_{S \times S} = *|_{S \times S}$. (Antissimetria) Sejam $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2} \in \mathcal{G}$ tais que $\boldsymbol{S_1} \leq \boldsymbol{S_2}$ e $\boldsymbol{S_2} \leq \boldsymbol{S_1}$. Então $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1$, o que implica $S_1 = S_2$, e portanto $*|_{S_1 \times S_1} = *|_{S_2 \times S_2}$, o que implica $\boldsymbol{S_1} = \boldsymbol{S_2}$. (Transitividade) Sejam $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \boldsymbol{S_3} \in \mathcal{G}$ tais que $\boldsymbol{S_1} \leq \boldsymbol{S_2}$ e $\boldsymbol{S_2} \leq \boldsymbol{S_3}$. Então $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_3$, o que implica $S_1 \subseteq S_3$ e, portanto, $*_{S_1} = *|_{S_3 \times S_3}$. ■

Proposição 9.4. *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Então $\{\boldsymbol{e}\}$ e $\boldsymbol{G}$ são subgrupos de $\boldsymbol{G}$.*

Proposição 9.5. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $(\boldsymbol{S}_i)_{i \in I}$ uma família de subgrupos de $\boldsymbol{G}$ e*

$$S := \bigcap_{i \in I} S_i.$$

Então $\boldsymbol{S}$ é um subgrupo de $\boldsymbol{G}$.

Demonstração. (SG1) Para todo $i \in I$, $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, portanto $e \in N_i$. Logo $e \in N$. (SG2) Sejam $s_1, s_2 \in S$. Para todo $i \in I$, $s_1, s_2 \in S_i$. Como $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, segue que $s_1 s_2 \in S_i$, o que implica que $s_1 s_2 \in S$. (SG3) Seja $s \in S$. Para todo $i \in I$, $s \in S_i$ e, como $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, segue que $s^{-1} \in S_i$, o que implica que $s^{-1} \in S$. ■

Proposição 9.6. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $(\boldsymbol{S}_i)_{i\in I}$ uma família de subgrupos de $\boldsymbol{G}$ que satisfaz*

$$\forall i_1, i_2 \in I \ \exists i \in I \qquad S_{i_1} \subseteq S_i \ \ e \ \ S_{i_2} \subseteq S_i$$

e

$$S := \bigcup_{i\in I} S_i.$$

Então $\boldsymbol{S}$ é um subgrupo de $\boldsymbol{G}$.

Demonstração. (Não-vacuidade) Para todo $i \in I$, $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, portanto $e \in N_i$. Logo $e \in N$. (Fechamento) Sejam $s_1, s_2 \in S$. Existem $i_1, i_2 \in I$ tais que $s_1 \in S_{i_1}$ e $s_2 \in S_{i_2}$ e, pela propriedade, existe $i \in I$ tal que $S_{i_1} \subseteq S_i$ e $S_{i_2} \subseteq S_i$. Então $s_1, s_2 \in S_i$. Como $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, segue que $s_1 s_2 \in S_i$, o que implica que $s_1 s_2 \in S$. (Invertibilidade) Seja $s \in S$. Existe $i \in I$ tal que $s \in N_i$ e, como $\boldsymbol{S_i} \leq \boldsymbol{G}$, segue que $s^{-1} \in S_i$, o que implica que $s^{-1} \in S$. ■

A propriedade definida acima é equivalente a dizer que a família $(S_i)_{i\in I}$ é um conjunto dirigido com respeito a $\subseteq$.

Definição 9.4. Seja $\boldsymbol{M}$ um monoide. O conjunto dos elementos invertíveis de M é denotado por M^*.

O asterisco não tem a ver com a operação $*$ do monoide.

Proposição 9.7. *Seja $\boldsymbol{M} = (M, *)$ um monoide com elemento neutro e_M. Então $\boldsymbol{M^*} = (M^*, *|_{M^*\times M^*})$ é um grupo.*

Demonstração. Sejam $m_1, m_2 \in M^*$. Então existem $m_1^{-1}, m_2^{-1} \in M$ tais que

$$m_1 m_1^{-1} = e_M \ \text{ e } \ m_2 m_2^{-1} = e_M.$$

Portanto

$$(m_1 m_2)(m_2^{-1} m_1^{-1}) = m_1(m_2 m_2^{-1}) m_1^{-1} = m_1 m_1^{-1} = e_M,$$

o que mostra que $m_1 m_2 \in M^*$. Ainda, note que $e_M \in M^*$, pois $e_M * e_M = e_M$. Logo M^* é um submonoide de M e, portanto, $\boldsymbol{M^*}$ é um monoide (8.7). Por fim, $\boldsymbol{M^*}$ é um grupo pois, por definição, todo elemento tem inverso. ■

9.1.2 Coclasses e Índice de Subgrupo

Definição 9.5. Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo e $g \in G$. A *coclasse à esquerda* de $\boldsymbol{S}$ em $\boldsymbol{G}$ com *representante* g é o conjunto

$$gS := \{gs : s \in S\}.$$

A *coclasse à direita* de $\boldsymbol{S}$ em $\boldsymbol{G}$ com *representante* g é o conjunto

$$Sg := \{sg : s \in S\}.$$

Coclasses também são conhecidas como classes laterais. As definições de coclasses à esquerda ou à direita são análogas e, por consequência, toda definição ou proposição envolvendo uma das duas tem uma definição ou proposição dual envolvendo a outra. Por esse motivo, durante este capítulo consideraremos sempre coclasses à esquerda.

Proposição 9.8. *Sejam* $\boldsymbol{G}$ *um grupos,* $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ *um subgrupo e* $g_1 g_2 \in G$*. Então*

1. $g_1(g_2 S) = (g_1 g_2)S$ *e* $(Sg_1)g_2 = S(g_1 g_2)$
2. $g_1 S = g_2 S \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in S$ *e* $Sg_1 = Sg_2 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in S$.

Demonstração. 1. ($\subseteq$) Seja $g \in g_1(g_2 S)$. Existem $g' \in g_2 S$ tal que $g = g_1 g'$ e, portanto, existe $s \in S$ tal que $g' = g_2 s$. Mas então, pela associatividade, $g = g_1(g_2 s) = (g_1 g_2)s$, e segue que $g \in (g_1 g_2)S$. ($\supseteq$) Seja $g \in (g_1 g_2)S$. Então existe $s \in S$ tal que $g = (g_1 g_2)s$ e, da associatividade, segue que $g = g_1(g_2 s)$, logo $g \in g_1(g_2 S)$. A outra igualdade é análoga.

2. ($\Leftarrow$) Seja $g \in g_1 S = g_2 S$. Então existem $s, s' \in S$ tais que $g = g_1 s = g_2 s'$, logo $g_2^{-1} g_1 = s' s^{-1}$. Como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, segue que $g_2^{-1} g_1 = s' s^{-1} \in S$.

   ($\Rightarrow$) ($\subseteq$) Se $g_2^{-1} g_1 \in S$, existe $s \in S$ tal que $g_2^{-1} g_1 = s$, portanto $g_1 = g_2 s$, logo $g_1 \in g_2 S$. Assim, dado $g \in g_1 S$, existe $s' \in S$ tal que $g = g_1 s'$. Como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, $ss' \in S$, logo $g = g_2 ss' \in g_2 S$. ($\supseteq$) Da mesma forma, como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, $g_1^{-1} g_2 = (g_2^{-1} g_1)^{-1} = s^{-1} \in S$, o que implica que $g_2 = g_1 s^{-1} \in g_1 S$. Assim, dado $g \in g_2 S$, existe $s' \in S$ tal que $g = g_2 s'$. Como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, $s^{-1} s' \in S$, logo $g = g_1 s^{-1} s' \in g_2 S$.

■

Essa proposição nos permite denotar os conjuntos acima simplesmente por $g_1 g_2 S$ e $S g_1 g_2$, respectivamente.

A proposição a seguir mostra que as cardinalidades das coclasses de um subgrupo são sempre iguais.

Proposição 9.9. *Sejam* $\boldsymbol{G}$ *um grupo,* $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ *um subgrupo e* $g_1, g_2 \in G$*. Então*

$$|g_1 S| = |g_2 S| \,.$$

Demonstração. Considere a relação

$$\begin{aligned} f : g_1 S &\longrightarrow g_2 S \\ g &\longmapsto g_2 g_1^{-1} g. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que f é função; isto é, está bem definida, que $g_1^{-1} g \in S$. Primeiro, note que, se $g \in g_1 S$, existe $s \in S$ tal que $g = g_1 s$. Então segue que $f(s) =$

$g_2 g_1^{-1} g = g_2 g_1^{-1} g_1 s = g_2 s \in g_2 S$, o que mostra que f está bem definida. Agora, note que a função

$$\begin{aligned} f^{-1} : g_2 S &\longrightarrow g_1 S \\ g &\longmapsto g_1 g_2^{-1} g, \end{aligned}$$

que está bem definida pelo mesmo argumento de cima, é a inversa de f, pois $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{g_1 S}$ e $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{g_2 S}$. Isso mostra que f é uma bijeção. Portanto $|g_1 S| = |g_2 S|$.

■

Proposição 9.10. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo. A relação binária $\sim$ em G definida por*

$$g_1 \sim g_2 \quad \Longleftrightarrow \quad g_2^{-1} g_1 \in S$$

é uma relação de equivalência e suas classes de equivalência são as coclasses à esquerda (à direita) de $\boldsymbol{S}$ em $\boldsymbol{G}$.

Demonstração. Primeiro vamos demonstrar as três propriedades de relação de equivalência. (Reflexividade) Seja $g \in G$. Então $g^{-1} g = e \in S$, pois S é subgrupo. Logo $g \sim g$. (Simetria) Sejam $g_1, g_2 \in G$. Se $g_2^{-1} g_1 \in S$, como S é subgrupo, então $g_1^{-1} g_2 = (g_2^{-1} g_1)^{-1} \in S$. Logo $g_2 \sim g_1$. (Transitividade) Sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$. Se $g_1 \sim g_2$ e $g_2 \sim g_3$, então $g_2^{-1} g_1 \in S$ e $g_3^{-1} g_2 \in S$. Como S é subgrupo, segue que $g_3^{-1} g_1 = g_3^{-1} g_2 g_2^{-1} g_1 \in S$. Logo $g_1 \sim g_3$.

Agora, seja $g \in G$. Vamos mostrar que $[g] = gS$. Seja $s \in [g]$. Então $s \sim g$, o que implica que $g^{-1} s \in S$, que por sua vez implica que existe $s' \in S$ tal que $s' = g^{-1} s$ e, portanto, $s = g s'$. Logo $s \in gS$. Agora, seja $s \in gS$. Então existe $s' \in S$ tal que $s = g s'$, o que implica $g^{-1} s = s'$, que por sua ve implica $g^{-1} s \in S$ e, portanto, $s \sim g$. Logo $s \in [g]$. ■

Como $\sim$ é relação de equivalência, particiona G, e essas partições são as coclasses de $\boldsymbol{S}$ em $\boldsymbol{G}$. Assim, podemos considerar o conjunto G/S das classes de equivalências como o conjunto das coclasses de S em $\boldsymbol{G}$. É importante notar que esse conjunto ainda não possui estrutura de grupo. Isso será possível mais à frente, mas não para qualquer subgrupo, somente subgrupos que chamamos de normais.

Definição 9.6. Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo. O *conjunto quociente* de $\boldsymbol{G}$ por $\boldsymbol{S}$ é o conjunto

$$G/S := G/\sim .$$

Definição 9.7. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ subgrupo. O *índice* de $\boldsymbol{S}$ em $\boldsymbol{G}$ é número cardinal

$$[G : S] := |G/S| .$$

Proposição 9.11. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo. Então*

$$|G| = [G : S] \times |S| \,.$$

Demonstração. O conjunto G/S é uma partição de G, pois é um conjunto quociente (4.1). Isso implica que G/S é uma família de conjuntos não vazios, disjuntos dois a dois, e que $G = \bigcup_{[g]\in G/S} gS$. Da terceira condição temos que

$$|G| = \left| \bigcup_{[g]\in G/S} gS \right| .$$

Da segunda condição, temos por 5.3 que

$$\left| \bigcup_{[g]\in G/S} gS \right| = \left| \bigsqcup_{[g]\in G/S} gS \right| .$$

Por fim, da primeira condição e do fato de que as coclasses de S têm a mesma cardinalidade, concluímos por 5.4 que

$$\left| \bigsqcup_{[g]\in G/S} gS \right| = |G/S| \times |S| \,.$$

Disso segue que $|G| = [G : S] \times |S|$. ■

9.1.3 Subgrupo Normal e Grupo Quociente

Definição 9.8. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Um subgrupo *normal* de $\boldsymbol{G}$ é um subgrupo $\boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{G}$ que satsfaz

SGN1. (Normalidade) Para todos $g \in G$ e $n \in N$, $gng^{-1} \in N$.

Denota-se $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$. Um subgrupo normal *próprio* de $\boldsymbol{G}$ é um subgrupo $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ que é um conjunto próprio de G: $N \subset G$. Denota-se $\boldsymbol{N} \triangleleft \boldsymbol{G}$.

Proposição 9.12. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo. São equivalentes:*

1. $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$;
2. $\forall g \in G \qquad N = gNg^{-1}$;
3. $\forall g \in G \qquad gN = Ng$;
4. $\forall g_1, g_2 \in G \qquad g_1 g_2 N = g_2 g_1 N$.

Proposição 9.13. *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Então $\{\boldsymbol{e}\}$ e $\boldsymbol{G}$ são subgrupos normais de $\boldsymbol{G}$.*

Proposição 9.14. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $(\boldsymbol{N}_i)_{i\in I}$ uma família de subgrupos normais de $\boldsymbol{G}$ e*

$$N := \bigcap_{i\in I} N_i.$$

Então $\boldsymbol{N}$ é um subgrupo normal de $\boldsymbol{G}$.

Demonstração. (Subgrupo) Como $(\boldsymbol{N}_i)_{i\in I}$ uma família de subgrupos de $\boldsymbol{G}$, segue que $\boldsymbol{N}$ é um subgrupo de $\boldsymbol{G}$ (9.5). (SGN1.) Sejam $g \in G$ e $n \in N$. Para todo $i \in I$, $n \in N_i$, portanto $gng^{-1} \in N_i$, o que implica $gng^{-1} \in N$. ■

Conjectura 9.15. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $(\boldsymbol{N}_i)_{i\in I}$ uma família de subgrupos normais de $\boldsymbol{G}$ que satisfaz*

$$\forall i_1, i_2 \in I \ \exists i \in I \qquad N_{i_1} \subseteq N_i \quad e \quad N_{i_2} \subseteq N_i$$

e

$$N := \bigcup_{i\in I} N_i.$$

Então $\boldsymbol{N}$ é um subgrupo normal de $\boldsymbol{G}$.

Demonstração. (Subgrupo) Como $(\boldsymbol{N}_i)_{i\in I}$ uma família de subgrupos de $\boldsymbol{G}$ com a propriedade enunciada, segue que $\boldsymbol{N}$ é um subgrupo de $\boldsymbol{G}$ (9.6). (Normalidade) Sejam $g \in G$ e $n \in N$. Existe $i \in I$ tal que $n \in N_i$, portanto $gng^{-1} \in N_i$, o que implica $gng^{-1} \in N$. ■

A propriedade definida acima é equivalente a dizer que a família $(N_i)_{i\in I}$ é um conjunto dirigido com respeito a $\subseteq$.

Definição 9.9. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. O *grupo quociente* de $\boldsymbol{G}$ por $\boldsymbol{N}$ é o par $\boldsymbol{G/N} = (G/N, *)$, em que G/N é o conjunto quociente de G pela relação de equivalência induzida por N e

$$\begin{aligned} * : G/N \times G/N &\longrightarrow G/N \\ (g_1N, g_2N) &\longmapsto g_1g_2N. \end{aligned}$$

Uma notação um pouco mais cuidadosa ressaltaria que as operações binárias de $\boldsymbol{G}$ e de $\boldsymbol{G/N}$ não são a mesma e, se denotarmos a primeira como $*$ e a segunda como $\star$, teríamos a definição acima nos dando $g_1N \star g_2N := (g_1 * g_2)N$. No entanto, como $*$ de G/N está sempre relacionada a $*$ de G, mantemos a mesma notação para ambas e a mesma convenção de omiti-la quando possível. Vale notar, também, que pela associatividade da $*$ de $\boldsymbol{G}$, temos que $g_1g_2N = g_1(g_2N) = (g_1g_2)N$.

Proposição 9.16. *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. Então $\boldsymbol{G/N}$ é um grupo.*

Demonstração. Para simplificar as contas, usaremos a notação $[g] = gN$ quando conveniente. (Operação Binária) Devemos mostrar que a função definida acima está bem definida. Sejam $g_1, g_1', g_2, g_2' \in G$ tais que $g_1N = g_1'N$ e $g_2N = g_2'N$. Então

$$g_1g_2N = g_1Ng_2 = g_1'Ng_2 = g_1'Ng_2 = g_1'g_2N = g_1'g_2'N.$$

(Associatividade) Sejam $g_1, g_2, g_3 \in G$. Da associatividade da $*$ de $\boldsymbol{G}$ segue que

$$([g_1][g_2])[g_3] = [g_1g_2][g_3] = [g_1g_2g_3] = [g_1][g_2g_3] = [g_1]([g_2][g_3]).$$

(Elemento Neutro) Seja $e \in G$ elemento neutro e $g \in G$. Então

$$[e][g] = [eg] = [g] = [ge] = [g][e].$$

(Inverso) Seja $g \in G$. Então

$$[g^{-1}][g] = [g^{-1}g] = [e] = [gg^{-1}] = [g][g^{-1}].$$

■

9.1.4 Homomorfismo de Grupo

Definição 9.10. Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos. Um *homomorfismo de grupos* de $\boldsymbol{G_1}$ em $\boldsymbol{G_2}$ é uma função $h : G_1 \longrightarrow G_2$ que satisfaz

$$\forall g_1, g_2 \in G_1 \qquad h(g_1g_2) = h(g_1)h(g_2).$$

Denota-se $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$. O conjunto de todos esses homomorfismos é denotado por $\mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2})$.

Note que a propriedade de homomorfismos de semigrupos e de grupos é a mesma.

Proposição 9.17 (Homomorfismos preservam a estrutura algébrica)**.** *Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos com elementos neutros e_1 e e_2, respectivamente, e $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ um homomorfismo de grupos. Então*

1. $h(e_1) = e_2$;
2. $\forall g \in G_1 \qquad h(g)^{-1} = h(g^{-1})$.

Demonstração. Seja $g \in G$. Então

1.

$$\begin{aligned} h(e_1) &= h(e_1)e_2 \\ &= h(e_1)h(g)h(g)^{-1} \\ &= h(e_2g)h(g)^{-1} \\ &= h(g)h(g)^{-1} \\ &= e_2. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} h(g)^{-1} &= h(g)^{-1}e_2 \\ &= h(g)^{-1}h(e_1) \\ &= h(g)^{-1}h(gg^{-1}) \\ &= h(g)^{-1}h(g)h(g^{-1}) \\ &= e_2h(g^{-1}) \\ &= h(g^{-1}). \end{aligned}$$

■

Essa proposição mostra que, como mencionado na seção de monoides, um homomorfismo de grupos é, de fato, um homomorfismo de monoides que preserva a inversa.

Corolário 9.18 (Composição de homomorfismos é homomorfismo)**.** *Sejam* $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$ *e* $\boldsymbol{G_3}$ *grupos e* $h_1 : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ *e* $h_2 : \boldsymbol{G_2} \longrightarrow \boldsymbol{G_3}$ *homomorfismos de grupos. Então* $(h_2 \circ h_1) : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_3}$ *é um homomorfismo de grupos.*

Demonstração. Como um homomorfismo de grupos é um homomorfismo de semigrupos, o resultado segue da proposição na seção de semigrupos que afirma que composição de homomorfismos é homomorfismo (8.4). ■

Proposição 9.19. *Sejam* $\boldsymbol{G}$ *um grupo e* $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ *um subgrupo normal. Então a projeção canônica* $\pi : G \longrightarrow G/N$*, definida por*

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/N \\ g &\longmapsto gN \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos sobrejetivo.

Demonstração. Sejam $g_1, g_2 \in G$. Então, da definição de prduto em $\boldsymbol{G/N}$, segue que

$$\pi(g_1g_2) = g_1g_2N = g_1Ng_2N = \pi(g_1)\pi(g_2).$$

(Sobrejetividade) Seja $gN \in G/N$. Então, $g \in G$, temos que $h(g) = gN$. ■

Proposição 9.20. *Sejam* $\boldsymbol{G_1}$ *e* $\boldsymbol{G_2}$ *grupos e* $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ *um homomorfismo de grupos. Se* $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G_2}$ *é um subgrupo, então* $\boldsymbol{h^{-1}(S)} \leq \boldsymbol{G_1}$ *é um subgrupo, e se* $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G_2}$ *é um subgrupo normal, então* $\boldsymbol{h^{-1}(N)} \trianglelefteq \boldsymbol{G_1}$ *é um subgrupo normal.*

Demonstração. (SG1) Como $e_2 \in S$ e h é homomorfismo segue que $h(e_1) = e_2$, portanto $e_1 \in h^{-1}(S)$. (SG2) Sejam $s_1, s_2 \in h^{-1}(S)$. Então $h(s_1), h(s_2) \in S$ e, como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, $h(s_1)h(s_2) \in S$. Logo, como h é homomorfismo, $h(s_1s_2) = h(s_1)h(s_2) \in S$ e, portanto, $s_1s_2 \in h^{-1}(S)$. (SG3) Seja $s \in h^{-1}(S)$. Então $h(s) \in S$ e, como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, $h(s)^{-1} \in S$. Como h é homomorfismo, segue que $h(s^{-1}) = h(s)^{-1} \in S$ e, portanto, $s^{-1} \in h^{-1}(S)$. (SGN1.) Sejam $g \in G_1$ e $n \in h^{-1}(N)$. Então $h(g) \in G_2$ e $h(n) \in N$. Como h é homomorfismo, segue que $h(gng^{-1}) = h(g)h(n)h(g)^{-1}$ e, como $\boldsymbol{N}$ é subgrupo normal, segue que $h(g)h(n)h(g)^{-1} \in N$. Logo $gng^{-1} \in h^{-1}(N)$. ■

Proposição 9.21. *Sejam* $\boldsymbol{G_1}$ *e* $\boldsymbol{G_2}$ *grupos e* $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ *um homomorfismo de grupos. Se* $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G_1}$*, então* $\boldsymbol{h(S)} \leq \boldsymbol{G_2}$*, e se* h *é sobrejetivo e* $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G_1}$ *um subgrupo normal, então* $\boldsymbol{h(N)} \trianglelefteq \boldsymbol{G_2}$*.*

Demonstração. (SG1) Como $e_1 \in S$, segue que $e_2 = h(e_1) \in h(S)$. (SG2) Sejam $s_1, s_2 \in h(S)$. Então existem $s_1', s_2' \in S$ tais que $h(s_1') = s_1$ e $h(s_2') = s_2$. Como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, segue que $s_1's_2' \in S$ e, como h é homomorfismo, segue que

$$s_1s_2 = h(s_1')h(s_2') = h(s_2's_2') \in h(S).$$

(SG3) Seja $s \in h(S)$. Então existe $s' \in S$ tal que $h(s') = s$. Como $\boldsymbol{S}$ é subgrupo, segue que $s^{-1} \in S$ e, portanto, $h(s)^{-1} = h(s^{-1}) \in h(S)$. (SGN1.) Sejam $g \in G_2$ e $n \in h(N)$. Existe $n' \in N$ tal que $h(n') = n$ e, como h é sobrejetivo, existe $g' \in G_1$ tal que $h(g') = g$. Como N é normal, $gng^{-1} \in N$ e, como h é homomorfismo,

$$gng^{-1} = h(g')h(n')h(g')^{-1} = h(g'n'g'^{-1}) \in h(N).$$

■

9.1.5 Núcleo, Imagem e Isomorfismo

Definição 9.11. Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos e $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ um homomorfismo de grupos. O *núcleo* de h é o conjunto

$$\mathcal{N}(h) := h^{-1}(e_2) = \{g \in G_1 : h(g) = e_2\}$$

e a *imagem* de h é o conjunto

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(h) := h(G_1) = \{g_2 \in G_2 : \exists g_1 \in G_1, h(g_1) = g_2\}.$$

Proposição 9.22. *Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos e $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ um homomorfismo de grupos. Então h é injetiva se, e somente se, $\mathcal{N}(h) = \{e_1\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que h é injetiva. Seja $n \in \mathcal{N}(h)$. Então $h(n) = e_2$. Mas $h(e_1) = e_2$ e, como h é injetiva, concluímos que $n = e_1$.
($\Leftarrow$) Suponha que $\mathcal{N}(h) = \{e_1\}$. Sejam $g_1, g_2 \in G_1$. Se $h(g_1) = h(g_2)$, temos que $h(g_1 g_2^{-1}) = h(g_1)h(g_2)^{-1} = e_2$, o que implica que $g_1 g_2^{-1} = e_1$, pois $\mathcal{N}(h) = \{e_1\}$. Logo $g_1 = g_2$, e concluímos que h é injetiva. ■

Definição 9.12. Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos. Um *isomorfismo de grupos* é um homomorfismo de grupos invertível. O conjunto de todos esses ismorfismos é denotado por $\mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{G_1}, \boldsymbol{G_2})$.

Proposição 9.23. *Sejam $\boldsymbol{G_1}$ e $\boldsymbol{G_2}$ grupos e $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ um isomorfimo de grupos. Então $h^{-1} : \boldsymbol{G_2} \longrightarrow \boldsymbol{G_1}$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Como h é bijetiva, sua inversa h^{-1} também é bijetiva. Sejam $g_1 g_1 \in G_2$. Como h é bijetiva, existem $g_1', g_2' \in G_1$ tais que $h(g_1') = g_1$ e $h(g_2') = g_2$. Assim, como h é homomorfismo, segue que

$$\begin{aligned} h^{-1}(g_1 g_2) &= h^{-1}(h(g_1')h(g_2')) \\ &= h^{-1}(h(g_1' g_2')) \\ &= g_1' g_2' \\ &= h^{-1}(g_1)h^{-1}(g_2). \end{aligned}$$

■

Definição 9.13. Seja $\boldsymbol{G_1}$ um grupo. Um grupo *isomorfo* a $\boldsymbol{G_1}$ é um grupo $\boldsymbol{G_2}$ para o qual existe isomorfismo $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$. Denota-se $\boldsymbol{G_1} \simeq \boldsymbol{G_2}$.

Proposição 9.24. *Sejam $\boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{G_2}$ e $\boldsymbol{G_3}$ grupos. Então*

1. *(Reflexividade) $\boldsymbol{G_1} \simeq \boldsymbol{G_1}$;*
2. *(Antissimetria) $\boldsymbol{G_1} \simeq \boldsymbol{G_2} \Rightarrow \boldsymbol{G_2} \simeq \boldsymbol{G_1}$;*
3. *(Transitividade) $\boldsymbol{G_1} \simeq \boldsymbol{G_2}$ e $\boldsymbol{G_2} \simeq \boldsymbol{G_3} \Rightarrow \boldsymbol{G_1} \simeq \boldsymbol{G_3}$.*

Demonstração.

1. A função id_{G_1} é um isomorfismo de grupos.
2. A inversa é um isomorfismo de grupos (9.23).
3. A composição de homomorfismo é homomorfismo e a composição de bijeções é bijeção.

■

Não dizemos que $\simeq$ é uma relação de equivalência porque ela não está propriamente definida em um conjunto, já que não existe o conjunto de todos os grupos por não existir o conjunto de todos os conjuntos. No entanto, é claro que o que a proposição afirma é que ela satisfaz as propriedades de uma relação de equivalência.

9.1.6 Teoremas de Isomorfismo

Teorema 9.25 (Primeiro teorema de isomorfismo)**.** *Sejam* $\boldsymbol{G_1}$ *e* $\boldsymbol{G_2}$ *grupos e* $h : \boldsymbol{G_1} \longrightarrow \boldsymbol{G_2}$ *um homomorfismo de grupos. Então* $\boldsymbol{\mathcal{N}(h)} \trianglelefteq \boldsymbol{G_1}$, $\boldsymbol{\mathcal{I}m(h)} \leq \boldsymbol{G_2}$ *e*

$$\boldsymbol{G_1}\big/\boldsymbol{\mathcal{N}(h)} \simeq \boldsymbol{\mathcal{I}m(h)}.$$

Demonstração. Como $\mathcal{N}(h) = h^{-1}(e_2)$ e $\boldsymbol{\{e_2\}} \trianglelefteq \boldsymbol{G_2}$ (9.13), a proposição segue da proposição 9.20. Como $\mathcal{I}\mathrm{m}(h) = h^(G_1)$ e $\boldsymbol{G_1} \leq \boldsymbol{G_1}$ (9.13), a proposição segue da proposição 9.20. Por causa disso, $\boldsymbol{G_1}/\boldsymbol{\mathcal{N}(h)}$ e $\boldsymbol{\mathcal{I}m(h)}$ são grupos. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \eta : G_1/\mathcal{N}(h) &\longrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}(h) \\ g\mathcal{N}(h) &\longmapsto h(g). \end{aligned}$$

Primeiro mostremos que η é função. Sejam $g_1, g_2 \in G_1$ tais que $g_1\mathcal{N}(h) = g_2\mathcal{N}(h)$. Então $g_2^{-1}g_1 \in \mathcal{N}(h)$ (9.8), o que implica que $h(g_2^{-1}g_1) = e$. Como h é homomorfismo, $e = h(g_2^{-1}g_1) = h(g_2)^{-1}h(g_1)$, portanto $h(g_1) = h(g_2)$. Isso implica que $\eta(g_1\mathcal{N}(h)) = \eta(g_1\mathcal{N}(h))$.

Agora, mostremos que η é isomomorfismo de grupos. Para simplificar as contas, denotamos $[g] = g\mathcal{N}(h)$. Primeiro mostramos que η é homomorfismo. Sejam $g_1, g_2 \in G_1$. Então

$$\eta([g_1][g_2]) = \eta([g_1g_2]) = h(g_1g_2) = h(g_1)h(g_2) = \eta([g_1])\eta([g_2]).$$

Por fim, devemos mostrar que η é bijetivo. (Injetividade) Seja $[g] \in \mathcal{N}(\eta)$. Então $\eta([g]) = e_2$, logo $h(a) = e_2$. Mas isso implica que $g \in \mathcal{N}(h)$. Portanto $[g] = [e_1]$, e segue que $\mathcal{N}(\eta) = \{[e_1]\}$, o que é equivalente à injetividade (9.22). (Sobrejetividade) Para todo $g \in \mathcal{I}\mathrm{m}(h)$, existe $g' \in G_1$ tal que $g = h(g')$. Mas $h(g') = \eta(g'\mathcal{N}(h))$, e segue a sobrejetividade. ■

Definição 9.14. Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo e $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. Então

$$SN := \{sn : s \in S \ \text{ e } \ n \in N\}.$$

Teorema 9.26 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo, $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ um subgrupo e $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. Então $\boldsymbol{SN} \leq \boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{S}$ e*

$$\boldsymbol{S}\big/\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{N} \simeq \boldsymbol{SN}\big/\boldsymbol{N}.$$

Teorema 9.27 (Terceiro teorema de isomorfismo)**.** *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. Então*

1. *Se $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ tal que $N \subseteq S \subseteq G$, então $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{N} \leq \boldsymbol{G}/\boldsymbol{N}$. Por outro lado, se $\boldsymbol{S}' \leq \boldsymbol{G}/\boldsymbol{N}$, existe $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ tal que $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}/\boldsymbol{N}$.*

2. *Se $\boldsymbol{S} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ tal que $N \subseteq S \subseteq G$, então $\boldsymbol{S}/\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}/\boldsymbol{N}$. Por outro lado, se $\boldsymbol{S}' \trianglelefteq \boldsymbol{G}/\boldsymbol{N}$, existe $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{G}$ tal que $\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}/\boldsymbol{N}$.*

3. *Se $\boldsymbol{N}' \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ tal que $N \subseteq N' \subseteq G$, então*

$$\left(\boldsymbol{G}\big/\boldsymbol{N}\right)\Big/\left(\boldsymbol{N}'\big/\boldsymbol{N}\right) \simeq \boldsymbol{G}\big/\boldsymbol{N}'.$$

9.2 Construções Categóricas

9.2.1 Produto de Grupos

Definição 9.15. Seja $(\boldsymbol{G_i})_{i\in I} = (G_i, *_i)_{i\in I}$ uma família de grupos. O *produto* da família $(\boldsymbol{G_i})_{i\in I}$ é o par

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{G_i} := (G, *)\,,$$

em que $G = \prod_{i\in I} G_i$ e

$$\begin{aligned} * : G \times G &\longrightarrow G \\ (g_1, g_2) &\longmapsto ((g_1)_i *_i (g_2)_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Proposição 9.28. *Seja $(\boldsymbol{G_i})_{i\in I} = (G_i, *_i)_{i\in I}$ uma família de grupos. Então o produto $\prod_{i\in I} \boldsymbol{G_i}$ é um grupo. Se, para todo $i \in I$, $\boldsymbol{G_i}$ é comutativo, então $\prod_{i\in I} \boldsymbol{G_i}$ é comutativo.*

Demonstração. (Associatividade) Sejam $g, g', g'' \in G$. Então, da associatividade de cada $*_i$,

$$(gg')g'' = ((g_i g_i')g_i'')_{i\in I} = (g_i(g_i' g_i'')_{i\in I} = g(g'g'').$$

(Identidade) Seja e_i identidade de $(G_i, *_i)$. Então $e := (e_i)_{i\in I}$ é a identidade de $(G, *)$, já que, para todo $g = (g_i)_{i\in I} \in G$,

$$eg = (e_i g_i)_{i\in I} = (g_i)_{i\in I} = g = (g_i)_{i\in I} = (g_i e_i)_{i\in I} = ge.$$

(Invertibilidade) Seja $g \in G$. Então $g^{-1} := (g_i^{-1})_{i\in I}$ é o inverso de g em $(G, *)$, já que

$$g^{-1}g = (g_i^{-1} g_i)_{i\in I} = (e_i)_{i\in I} = (g_i g_i^{-1})_{i\in I} = gg^{-1}.$$

(Comutatividade) Sejam $g, g' \in G$. Então, da comutatividade de cada $*_i$,

$$gg' = (g_i g_i')_{i\in I} = (g_i' g_i)_{i\in I} = g'g.$$

■

Proposição 9.29. *Seja $(\boldsymbol{G_i})_{i\in I} = (G_i, *_i)_{i\in I}$ uma família de grupos. Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_i$ é um homomorfismo de grupos.*

Demonstração. Sejam $g, g' \in \prod_{i\in I} G_i$. Então

$$\pi_i(gg') = \pi_i((g_i g_i')_{i\in I}) = g_i g_i' = \pi_i(g)\pi_i(g').$$

■

Proposição 9.30 (Propriedade Universal)**.** *Sejam* $(\boldsymbol{G_i})_{i\in I}$ *uma família de grupos,* $\boldsymbol{X} = (X, \star)$ *um grupo e, para todo* $i \in I$, $h_i : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{G_i}$ *um homomorfismo de grupos. Então existe um único homomorfismo de grupos* $h : \boldsymbol{X} \longrightarrow \prod_{i\in I} \boldsymbol{G_i}$ *tal que, para todo* $i \in I$, $\pi_i \circ h = h_i$ *(o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
 & \prod\limits_{i\in I} \boldsymbol{G_i} \arrow[d, "\pi_i"] \\
\boldsymbol{X} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "h_i"'] & \boldsymbol{G_i}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} h : X &\longrightarrow \prod_{i\in I} G_i \\ x &\longmapsto (h_i(x))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Da propriedade universal para o produto de conjuntos, h é a única função tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ h = h_i$. Basta mostrar que h é homomorfismo de grupos. Por simplicidade, apenas a operação $*$ em G será explicitada. Sejam $x_1, x_2 \in X$. Então, como h_i são homomorfismos de grupo,

$$h(x_1 \star x_2) = (h_i(x_1 \star x_2))_{i\in I} = (h_i(x_1) *_i h_i(x_2))_{i\in I} = h(x_1) * h(x_2).$$

■

9.2.2 Grupo Livre

Definição 9.16. Seja C um conjunto. O *conjunto de inversos formais* de C é o conjunto

$$C^{-1} := \{(c, -1) \mid c \in G\}.$$

Os elementos de C^{-1} são denotados $c^{-1} := (c, -1)$.

Uma *palavra* em C é uma sequência finita $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$. Denota-se $c_1 \cdots c_n$.

Seja $p = c_1 \cdots c_n$ uma palavra em C. A *palavra inversa* de p é a palavra $p^{-1} := c_n^{-1} \cdots c_1^{-1}$.

Definição 9.17. Seja C um conjunto e p_1, p_2 palavras em $C \cup C^{-1}$. A relação de equivalência entre as palavras p_1 e p_2 é definida por

$$p_1 \sim p_2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_1 p_2^{-1} \rightsquigarrow e.$$

$$C^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cup C^{-1})^n$$

Define-se $C^0 = \{e := \varnothing\}$.

$$\langle C\rangle := C^*/\sim$$

A inclusão é definida.

$$\begin{aligned} \iota : C &\longrightarrow \langle C\rangle \\ c &\longmapsto [c]. \end{aligned}$$

Proposição 9.31 (Propriedade Universal)**.** *Seja C um conjunto, $\boldsymbol{X} = (X, \star)$ um grupo e $f : C \longrightarrow X$ uma função. Então existe um único homomorfismo de grupos $h : \langle \boldsymbol{C}\rangle \longrightarrow \boldsymbol{X}$ tal que $h \circ \iota = f$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd} \langle \boldsymbol{C}\rangle \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ C \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "f"'] & \boldsymbol{X} \end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} h : \langle C\rangle &\longrightarrow X \\ [c_1 \cdots c_n] &\longmapsto f(c_1) \star \cdots \star f(c_n), \end{aligned}$$

de modo que $h([e]) = e_X$. Então, para todo $c \in C$,

$$h \circ \iota(c) = h(\iota(c)) = h([c]) = f(c).$$

Logo $h \circ \iota = f$. Para mostrar que é um homomorfismo de grupos, sejam $[c_1 \cdots c_n]$, $[d_1 \cdots d_m] \in \langle C\rangle$. Então

$$\begin{aligned} h([c_1 \cdots c_n][d_1 \cdots d_m]) &= h([c_1 \cdots c_n d_1 \cdots d_m]) \\ &= f(c_1) \star \cdots \star f(c_n) \star f(d_1) \star \cdots \star f(d_m) \\ &= h([c_1 \cdots c_n]) \star h([d_1 \cdots d_m]). \end{aligned}$$

Isso mostra a existência. Para mostrar a unicidade, seja $\overline{h} : \langle \boldsymbol{C} \rangle \longrightarrow \boldsymbol{X}$ um homomorfismo de grupos tal que $\overline{h} \circ \iota = f$. Seja $[c_1 \cdots c_n] \in \langle C \rangle$. Como $[c_1 \cdots c_n] = [c_1] \cdots [c_n] = \iota(c_1) \cdots \iota(c_n)$, segue que

$$\begin{aligned}
\overline{h}([c_1 \cdots c_n]) &= \overline{h}(\iota(c_1) \cdots \iota(c_n)) \\
&= \overline{h}(\iota(c_1)) \star \cdots \star \overline{h}(\iota(c_n)) \\
&= f(c_1) \star \cdots \star f(c_n) \\
&= h([c_1 \cdots c_n]),
\end{aligned}$$

o que implica que $\overline{h} = h$. ■

9.2.3 Coproduto de Grupos

Definição 9.18. Seja $(\boldsymbol{G_i})_{i \in I}$ uma família de grupos. O *coproduto* da família $(\boldsymbol{G_i})_{i \in I}$ é o par

$$\bigsqcup_{i \in I} \boldsymbol{G_i} \coloneqq (G, *),$$

em que $G \coloneqq \langle \bigsqcup_{i \in I} G_i \rangle$ é o grupo livre sobre o coproduto de conjuntos $\bigsqcup_{i \in I} G_i$ e

$$\begin{aligned}
* : G \times G &\longrightarrow G \\
([p_1], [p_2]) &\longmapsto [p_1 p_2].
\end{aligned}$$

Proposição 9.32 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(\boldsymbol{G_i})_{i \in I}$ uma família de grupos, $\boldsymbol{X} = (X, \star)$ um grupo e, para todo $i \in I$, $h_i : \boldsymbol{G_i} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ um homomorfismo de grupos. Então existe um único homomorfismo de grupos $h : \bigsqcup_{i \in I} \boldsymbol{G_i} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ tal que, para todo $i \in I$, $h \circ \iota_i = h_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i \in I} \boldsymbol{G_i} \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
\boldsymbol{G_i} \arrow[u, "\iota_i"] \arrow[r, "h_i"'] & \boldsymbol{X}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned}
h : \left\langle \bigsqcup_{i \in I} G_i \right\rangle &\longrightarrow X \\
[(g_1, i_1) \cdots (g_n, i_n)] &\longmapsto h_{i_1}(g_1) \star \cdots \star h_{i_n}(g_n).
\end{aligned}$$

Por simplicidade, seja $G \coloneqq \langle \bigsqcup_{i \in I} G_i \rangle$. Para mostrar que h é homomorfismo, sejam $[(g_1, i_1) \cdots (g_n, i_n)]$ e $[(g'_1, i'_1) \cdots (g'_m, i'_m)] \in G$. Então

$$\begin{aligned}
&h([(g_1, i_1) \cdots (g_n, i_n)][(g'_1, i'_1) \cdots (g'_m, i'_m)]) \\
&= h([(g_1, i_1) \cdots (g_n, i_n)(g'_1, i'_1) \cdots (g'_m, i'_m)]) \\
&= h_{i_1}(g_1) \star \cdots \star h_{i_n}(g_n) \star h_{i'_1}(g'_1) \star \cdots \star h_{i'_n}(g'_n) \\
&= h([(g_1, i_1) \cdots (g_n, i_n)]) \star h([(g'_1, i'_1) \cdots (g'_m, i'_m)]).
\end{aligned}$$

■

9.3 Construções Específicas

9.3.1 Grupo Simples e Subgrupo Normal Maximal

Definição 9.19. Um *grupo simples* é um grupo não-trivial $\boldsymbol{G}$ cujos únicos subgrupos normais são $\boldsymbol{\{e\}}$ e $\boldsymbol{G}$.

Definição 9.20. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Um subgrupo normal *maximal* de $\boldsymbol{G}$ é um subgrupo normal próprio $\boldsymbol{M} \lhd \boldsymbol{G}$ que satisfaz

1. (Maximalidade) Para todo $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$,

$$M \subseteq N \Rightarrow N = M \quad \text{ou} \quad N = G.$$

Proposição 9.33. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{M} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal. Então $\boldsymbol{M}$ é maximal se, e somente se, $\boldsymbol{G/M}$ é simples.*

Demonstração. Consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/M \\ g &\longmapsto gM. \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{M}$ é maximal. Então $\boldsymbol{M}$ é um subgrupo próprio, o implica que $\boldsymbol{G/M}$ é não-trivial. Seja $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G/M}$. Sabemos que $\boldsymbol{\pi^{-1}(N)} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ (9.20). Como $[e] \in N$, então $\pi^{-1}(e) \subseteq \pi^{-1}(N)$. Notando que $\pi^{-1}([e]) = \mathcal{N}(\pi) = M$, segue que $M \subseteq \pi^{-1}(N)$. Como $\boldsymbol{M}$ é maximal, segue que $\pi^{-1}(N) = N$ ou $\pi^{-1}(N) = G$. Notemos que $N = \pi(\pi^{-1}(N))$, pois π é sobrejetiva. No primeiro caso, $N = \pi(\pi^{-1}(N)) = \pi(M) = \{[e]\}$. No segundo caso, $N = \pi(\pi^{-1}(N)) = \pi(G) = G/M$. Portanto $\boldsymbol{G/M}$ é simples.
($\Leftarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{G/M}$ é simples. Seja $\boldsymbol{N} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$ tal que $M \subseteq N$. Como π é homomorfismo de grupos sobrejetivo, ssegue que $\pi(N) \trianglelefteq \boldsymbol{G/M}$ (9.21). Como $\boldsymbol{G/M}$ é simples, então $\pi(N) = \{[e]\}$ ou $\pi(N) = G/M$. No primeiro caso, $N = \mathcal{N}(\pi) = M$. No segundo caso, $N = \pi^{-1}(\pi(N)) = \pi^{-1}(N) = G$. Logo $\boldsymbol{M}$ é maximal. ■

Conjectura 9.34. *Sejam $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\boldsymbol{N} \lhd \boldsymbol{G}$ um subgrupo normal próprio. Então $\boldsymbol{G}$ tem subgrupo normal maximal.*

Demonstração. Usaremos o lema de Zorn. Seja $P \subseteq \mathcal{P}(G)$ o conjunto de todos os subconjuntos $S \subset G$ tais que $\boldsymbol{S} \lhd \boldsymbol{G}$. Então $(P, \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado com a contenção de conjuntos usual. Agora, seja $(C)_{i \in I}$ uma cadeia de $(P, \subseteq)$. Consideremos o conjunto $C := \bigcup_{i \in I} C_i$. Como

Notemos que P não é vazio, pois $N \in P$. Seja

Então P tem elemento maximal. ■

9.3.2 Sequência subnormal

Definição 9.21. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Uma *sequência subnormal* de $\boldsymbol{G}$ é uma sequência finita $(\boldsymbol{N_i})_{i\in \mathtt{I}_n}$ de subgrupos de $\boldsymbol{G}$ que satisfaz

$$\boldsymbol{\{e\}} = \boldsymbol{N_0} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq \boldsymbol{N_n} = \boldsymbol{G}.$$

O grupo $\boldsymbol{N_{i+1}/N_i}$ é o i-ésimo *grupo fator* da sequência. Uma *sequência normal* é uma sequência subnormal em que, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $\boldsymbol{N_i} \trianglelefteq \boldsymbol{G}$.

Uma sequência subnormal *estrita* de $\boldsymbol{G}$ é uma sequência subnormal $(\boldsymbol{N_i})_{i\in \mathtt{I}_n}$ de $\boldsymbol{G}$ que satisfaz

$$\boldsymbol{\{e\}} = \boldsymbol{N_0} \triangleleft \cdots \triangleleft \boldsymbol{N_n} = \boldsymbol{G}.$$

O comprimento

9.3.3 Conjunto gerador

Definição 9.22. Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo e $S \subseteq G$ um conjunto. O grupo *gerado* por S é o grupo $\boldsymbol{\langle S\rangle} \leq \boldsymbol{G}$ em que

$$\langle S\rangle \coloneqq \{s_1 \cdots s_n : n \in \mathbb{N},\ s_i \in S \ \text{ ou } \ s_i^{-1} \in S\}.$$

$$\langle S\rangle \coloneqq \left\{ \mathop{\ast}_{i\in \mathtt{I}_n} s_i : n \in \mathbb{N},\ s_i \in S \ \text{ ou } \ s_i^{-1} \in S \right\}.$$

Um *conjunto gerador* de $\boldsymbol{G}$ é um conjunto $S \subseteq G$ tal que $\langle S\rangle = G$.

9.3.4 Grupos Simétricos e Alternados

Definição 9.23. Seja C um conjunto. O *grupo simétrico* de C é o par $\boldsymbol{\mathfrak{S}(C)} = (\mathfrak{S}(C), \circ)$, em que

$$\mathfrak{S}(C) \coloneqq \left\{ p : C \longrightarrow C \;\middle|\; \exists p^{-1} : C \longrightarrow C \right\}$$

é o conjunto de todas as bijeções entre C e C, e $\circ$ é a composição de funções. Seja α um número cardinal. Para $C = \alpha$, usa-se a notação $\mathfrak{S}_\alpha \coloneqq \mathfrak{S}(\alpha)$.

Proposição 9.35. *Seja C um conjunto. O grupo simétrico $\boldsymbol{\mathfrak{S}(C)}$ é um grupo.*

Demonstração. Se $C = \varnothing$, então $\mathfrak{S}(C) = \{\varnothing\}$. Assim, como $\varnothing \circ \varnothing = \varnothing$, segue que $\circ$ é operação binária em $\{\varnothing\}$. Ainda, segue que $\circ$ é associativa, pois $(\varnothing \circ \varnothing) \circ \varnothing = \varnothing \circ (\varnothing \circ \varnothing)$; tem elemeno neutro $\varnothing$, pois $\varnothing \circ \varnothing = \varnothing$, e que todo elemento tem inverso, pois $\varnothing^{-1} = \varnothing$.

Suponhamos, então, que $C \neq \varnothing$ e sejam $p_1, p_2 \in \mathfrak{S}(C)$. Como p_1 e p_2 são bijeções, a função $p_2 \circ p_1 : C \longrightarrow C$ é uma bijeção entre C e C (3.11 e 3.12) e,

portanto, $p_2 \circ p_1 \in \mathfrak{S}(C)$. Isso mostra que $\circ$ é uma operação binária em $\mathfrak{S}(C)$. A composição de funções é associativa, pois, para todos $p_1, p_2, p_3 \in \mathfrak{S}(C)$, $p_3 \circ (p_2 \circ p_1) = (p_3 \circ p_2) \circ p_1$ (3.5). Ainda, notemos que id_C é o elemento neutro de $\boldsymbol{\mathfrak{S}(C)}$, pois, para todo $p \in \mathfrak{S}(C)$, vale $p \circ \mathrm{id}_C = \mathrm{id}_C \circ p = p$ (3.7). Por fim, como p é uma bijeção, existe função inversa $p^{-1} : C \longrightarrow C$ que é bijeção entre C e C (3.8 e 3.9); logo existe $p^{-1} \in \mathfrak{S}(C)$ tal que $p \circ p^{-1} = p^{-1} \circ p = \mathrm{id}_C$. Portanto concluímos que $\boldsymbol{\mathfrak{S}(C)}$ é um grupo. ■

Proposição 9.36. *Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = |B|$. Então*

$$\boldsymbol{\mathfrak{S}(A) \simeq \mathfrak{S}(B)}.$$

Demonstração. Seja $\phi : A \longrightarrow B$ uma bijeção e considere a função

$$\begin{aligned} h : \mathfrak{S}(A) &\longrightarrow \mathfrak{S}(B) \\ p &\longmapsto \phi \circ p \circ \phi^{-1}. \end{aligned}$$

Primeiro notemos que h é homomorfismo de grupos. Sejam $p_1, p_2 \in \mathfrak{S}(A)$. Então

$$\begin{aligned} h(p_2 \circ p_1)(c) &= \phi \circ (p_2 \circ p_1) \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ (p_2 \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ p_1) \circ \phi^{-1} \\ &= (\phi \circ p_2 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ p_1 \circ \phi^{-1}) \\ &= h(p_2) \circ h(p_1). \end{aligned}$$

Portanto h é um homomorfismo de grupos entre $\boldsymbol{\mathfrak{S}(A)}$ e $\boldsymbol{\mathfrak{S}(B)}$.

Agora notemos que h é uma bijeção. A inversa de h é a função

$$\begin{aligned} h^{-1} : \mathfrak{S}(B) &\longrightarrow \mathfrak{S}(A) \\ p &\longmapsto \phi^{-1} \circ p \circ \phi, \end{aligned}$$

pois, para todo $p \in \mathfrak{S}(B)$,

$$\begin{aligned} (h \circ h^{-1})(p) &= h(h^{-1}(p)) \\ &= \phi \circ h^{-1}(p) \circ \phi^{-1} \\ &= \phi \circ (\phi^{-1} \circ p \circ \phi) \circ \phi^{-1} \\ &= p \\ &= \mathrm{id}_{\mathfrak{S}(B)}(p), \end{aligned}$$

o que mostra que $h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}(B)}$, e, para todo $p \in \mathfrak{S}(A)$,

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ h)(p) &= h^{-1}(h(p)) \\ &= \phi^{-1} \circ h(p) \circ \phi \\ &= \phi^{-1} \circ (\phi \circ p \circ \phi^{-1}) \circ \phi \\ &= p \\ &= \mathrm{id}_{\mathfrak{S}(A)}(p), \end{aligned}$$

o que mostra que $h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}(A)}$. Assim, está provado que h é isomorfismo entre $\boldsymbol{\mathfrak{S}(A)}$ e $\boldsymbol{\mathfrak{S}(B)}$. ■

Essa proposição mostra que podemos estudar somente os grupos simétricos dos números cardinais, pois isso será equivalente a estudar qualquer grupo simétrico. Em particular, para todo conjunto finito, podemos estudar seu grupo simétrico considerando somente o grupo simétrico $\boldsymbol{\mathfrak{S}}_n$, em que n é o número de elementos do conjunto. A partir de agora, as proposições serão considerando esses grupos $\boldsymbol{\mathfrak{S}}_n$.

Proposição 9.37. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $|\mathfrak{S}_n| = n!$.*

Teorema 9.38. *Seja $\boldsymbol{G}$ um grupo. Então*

$$\boldsymbol{G} \lesssim \boldsymbol{\mathfrak{S}(G)}.$$

Demonstração. Consideremos a função

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow \mathfrak{S}(G) \\ g &\longmapsto h(g) : G \longrightarrow G \\ & \qquad\qquad\quad x \longmapsto g * x \end{aligned}$$

Primeiro, devemos mostrar que $h(g) \in \mathfrak{S}(G)$, para que h esteja bem definida. Para isso, notemos que $h(g)$ está bem definida, já que, para todo $x \in G$, $g * x \in G$. Ainda, $h(g)$ é uma bijeção, pois $h(g)^{-1} = h(g^{-1})$, já que, para todo $x \in G$,

$$(h(g) \circ h(g)^{-1})(x) = h(g)((h(g)^{-1})(x)) = h(g)(g^{-1} * x) = g * g^{-1} * x = x = \mathrm{id}_G,$$

o que mostra que $h(g) \circ h(g)^{-1} = \mathrm{id}_G$, e

$$(h(g)^{-1} \circ h(g))(x) = h(g)^{-1}((h(g)(x)) = h(g)^{-1}(g * x) = g^{-1} * g * x = x = \mathrm{id}_G,$$

o que mostra que $h(g)^{-1} \circ h(g) = \mathrm{id}_G$. Isso mostra que $h(g)$ é uma bijeção e, portanto, $h(g) \in \mathfrak{S}(G)$.

Agora, notemos que h é um homomorfismo de grupos, pois, para todos $g_1, g_2 \in G$, segue que, para todo $x \in G$,

$$\begin{aligned} h(g_1 * g_2)(x) &= (g_1 * g_2) * x \\ &= g_1 * (g_2 * x) \\ &= h(g_1)(g_2 * x) \\ &= h(g_1)(h(g_2)(x)) \\ &= (h(g_1) \circ h(g_2))(x), \end{aligned}$$

o que mostra que $h(g_1 * g_2) = h(g_1) \circ h(g_2)$. Por fim, notemos que h é injetiva, já que, se $g \in G$ é tal que $h(g) = id_G$, então, para todo $x \in G$,

$$g * x = h(g)(x) = \mathrm{id}_G(x) = x,$$

o que mostra que $g = e_G$ e, portanto, que $\mathcal{N}(h) = \{e_G\}$. ■

Esse teorema é um teorema muito importante, pois ele mostra que, de certa forma, todo grupo é um subconjunto de permutações. Por causa disso que grupos são pensados como os objetos algébricos que modelam a simetria.

Permutações e Órbitas

Definição 9.24. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma *permutação* de n objetos é um elemento $p \in \mathfrak{S}_n$, denotado por

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ p(1) & p(2) & \cdots & p(n-1) & p(n) \end{pmatrix}.$$

Notação. Seja $n \in \mathbb{N}$. A composição de duas permutações $p_1, p_2 \in \mathfrak{S}_n$, quando representadas na notação acima, é denotada

$$p_2 \circ p_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ p_2(1) & p_2(2) & \cdots & p_2(n-1) & p_2(n) \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ p_1(1) & p_1(2) & \cdots & p_1(n-1) & p_1(n) \end{smallmatrix}\right).$$

Definição 9.25. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathfrak{S}_n$. A *matriz de permutação* de p é a matriz $[p] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$ cujas entradas são dadas por

$$[p]_{i,j} = \delta_{i,p(j)} = \begin{cases} 1 & i = p(j) \\ 0 & i \neq p(j). \end{cases}$$

O *conjunto das matrizes de permutação* de $\mathfrak{S}_n$ é o conjunto

$$[\mathfrak{S}_n] := \{[p] : p \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Proposição 9.39. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então o par $[\mathfrak{S}_n] = ([\mathfrak{S}_n], \cdot)$, em que $\cdot$ é o produto de matrizes, é um grupo, e*

$$\mathfrak{S}_n \simeq [\mathfrak{S}_n].$$

Demonstração. Primeiro, notemos que, para todos $p, q \in \mathfrak{S}_n$,

$$[p][q]_{i,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} [p]_{i,k}[q]_{k,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} \delta_{i,p(k)}\delta_{k,p(j)}.$$

Mas o produto $\delta_{i,p(k)}\delta_{k,p(j)}$ é igual a 1 se, e somente se, $i = p(k)$ e $k = q(j)$. Como p é bijeção, a segunda consição é equivalente a $p(k) = pq(j)$, e isso mostra que as

duas consições são equivalentes a $i = p(k) = pq(j)$. Como p é bijeção, para cada $i \in \mathtt{I}_n$, $k = p^{-1}(i)$ é o único $k \in \mathtt{I}_n$ tal que a condição é satisfeita, e segue que

$$[p][q]_{i,j} = \mathop{+}_{k=1}^{n} \delta_{i,p(k)}\delta_{k,p(j)} = \mathop{+}_{k=1}^{n} \delta_{i,pq(j)} = [pq]_{i,j}.$$

e, como $pq \in \mathfrak{S}_n$, então $[p][q] = [pq] \in [\mathfrak{S}_n]$. Isso mostra que o produto de matrizes é uma operação binária em $[\mathfrak{S}_n]$. Agora, disso segue que $[p][p^{-1}] = [pp^{-1}] = [id]$

MOATRAR QUE O INVERSO DE P ESTA NO GRUPO

Disso, segue que $[\mathfrak{S}_n]$ é um grupo, pois é subgrupo de $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$. Por fim, consideremos a função

$$\begin{aligned} h : \mathfrak{S}_n &\longrightarrow [\mathfrak{S}_n] \\ p &\longmapsto [p]. \end{aligned}$$

Note que que h é homomorfismo, pois, para todos $p, q \in \mathfrak{S}_n$,

$$h(pq) = [pq] = [p][q] = h(p)h(q).$$

Ainda, h ■

Definição 9.26. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathfrak{S}_n$ e $m \in \mathtt{I}_n$. A *órbita de m sob p* é o conjunto

$$\mathcal{O}_p(m) := \{p^k(m) : k \in \mathbb{Z}\}.$$

O *período* da órbita $\mathcal{O}_p(m)$ é o número $|\mathcal{O}_p(m)|$. Uma *órbita trivial* é uma órbita de período 1. Uma órbita de p é a órbita de um elemento $m \in \mathtt{I}_n$ sob p.

O *conjunto de órbitas* de p é o conjunto

$$\mathcal{O}_p := \{\mathcal{O}_p(m) : m \in \mathtt{I}_n\}.$$

Proposição 9.40. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathfrak{S}_n$. O conjunto $\mathcal{O}_p$ é uma partição de $\mathtt{I}_n$.*

Demonstração. Primeiro, notemos que $m \in \mathcal{O}_p(m)$ e, portanto, $\varnothing \nsubseteq \mathcal{O}_p$. Ainda, $\bigcup_{m\in\mathtt{I}_n} \mathcal{O}_p(m) = \mathtt{I}_n$, já que, para todo $m \in inte_n$, $m \in \mathcal{O}_p(m)$, o que mostra que $\mathtt{I}_n \subseteq \bigcup_{m\in\mathtt{I}_n}$ e, para todo $l \in \bigcup_{m\in\mathtt{I}_n} \mathcal{O}_p(m)$, existe $m \in \mathtt{I}_n$ tal que $l \in \mathcal{O}_p(m)$ e, portanto, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $l = p^k(m) \in \mathtt{I}_n$, o que mostra que $\bigcup_{m\in\mathtt{I}_n} \subseteq \mathtt{I}_n$. Por fim, sejam $o_1, o_2 \in \mathcal{O}_p$. Então existem $m_1, m_2 \in \mathtt{I}_n$ tais que $o_1 = \mathcal{O}_p(m_1)$ e $o_2 = \mathcal{O}_p(m_2)$. Se existe $l \in \mathcal{O}_p(m_1) \cap \mathcal{O}_p(m_2)$, então existem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $l = p^{k_1}(m_1) = p^{k_2}(m_2)$. Assim, segue que $m_1 = p^{k_2-k_1}(m_2)$ e, portanto, $m_1 \in \mathcal{O}_p(m_2)$. Mas isso implica que $\mathcal{O}_p(m_1) \subseteq \mathcal{O}_p(m_2)$; a inclusão contrária é análoga e concluímos que $\mathcal{O}_p(m_1) = \mathcal{O}_p(m_2)$. Logo $\mathcal{O}_p$ é uma partição de $\mathtt{I}_n$. ■

Permutações, Ciclos e Transposições

Definição 9.27. Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Um *ciclo* de $\mathfrak{S}_n$ é um elemento $c \in \mathfrak{S}_n$ para o qual existe $m \in \mathtt{I}_n$ tal que, para todo $m' \in \mathtt{I}_n$, $c(m') = m'$ ou existe $d \in \mathtt{I}_n$ tal que $m' = c^d(m)$. O *comprimento* de um ciclo é a ordem desse ciclo. Um ciclo c cujo comprimento é k é denotado

$$c = \Big(m \; c(m) \; c^2(m) \; \cdots \; c^{k-2}(m) \; c^{k-1}(m)\Big).$$

Proposição 9.41. *Sejam $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Se $c_1, c_2 \in \mathfrak{S}_n$ são ciclos disjuntos, então $c_2 \circ c_1 = c_1 \circ c_2$.*

Proposição 9.42 (Fatoração de Permutação)**.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathfrak{S}_n$. Então existem únicos ciclos $c_1, \ldots, c_k \in \mathfrak{S}_n$ disjuntos dois a dois tais que $p = c_1 \circ \cdots \circ c_k$.*

Demonstração. Seja $k := |\mathcal{O}_p|$. O cojunto $\mathcal{O}_p$ particiona $\mathtt{I}_n$. Sejam $(o_k)_{i \in \mathtt{I}_k}$ uma indexação de $\mathcal{O}_p$ e $m_1, \cdot, m_k \in \mathtt{I}_n$ tais que $o_i = \mathcal{O}_p(m_i)$ para todo $i \in \mathtt{I}_k$, e seja $k_i := |\mathcal{O}_p(m_i)|$. Definamos $c_i := \Big(m_i \; \cdots \; p^{k_i - 1}(m_i)\Big)$. Então segue que

$$p = \bigtimes_{i=1}^{k} \Big(m_i \; \cdots \; p^{k_i-1}(m_i)\Big) = \bigtimes_{i=1}^{k} c_i.$$

■

9.3.5 Grupos Cíclicos

9.3.6 Grupos Diedrais

9.3.7 Ações de Grupos

A noção de uma ação de grupo, de certa forma, generaliza uma estratégia usada na demonstração do teorema de que todo grupo é isomorfo a um subgrupo de seu grupo simétrico.

Definição 9.28. Sejam X um conjunto e $\boldsymbol{G}$ um grupo. Uma *ação (à esquerda)* de $\boldsymbol{G}$ em X é uma função

$$\begin{aligned} \centerdot : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \centerdot x \end{aligned}$$

que satisfaz

1. (Identidade) Para todo $x \in X$,

$$e \centerdot x = x;$$

2. (Compatibilidade) Para todos $g_0, g_1 \in G$ e $x \in X$,

$$(g_1 g_0) \centerdot x = g_1 \centerdot (g_0 \centerdot x).$$

Um grupo $\boldsymbol{G}$ *age* em o conjunto X se, e somente se, existe uma ação de $\boldsymbol{G}$ em X.

Analogamente, uma ação à direita pode ser definida, mas toda ação à direita pode ser traduzida em uma ação à esquerda, de modo que é suficiente estudar somente ações à esquerda.

Proposição 9.43. *Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{G}$ um grupo, A uma ação de $\boldsymbol{G}$ em X e $g \in G$. Então a função*

$$\begin{aligned} g \centerdot : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto g \centerdot x \end{aligned}$$

é uma bijeção. Equivalentemente, $g \centerdot \in \mathfrak{S}(X)$.

Proposição 9.44. *Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{G}$ um grupo e $\centerdot$ uma ação de $\boldsymbol{G}$ em X. Então a função*

$$\begin{aligned} h : G &\longrightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g &\longmapsto g \centerdot : X \longrightarrow X \\ & \qquad\qquad x \longmapsto g \centerdot x. \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos de $\boldsymbol{G}$ para $\boldsymbol{\mathfrak{S}(X)}$.

Demonstração. Sejam $g_1, g_0 \in G$ e $x \in X$. Então

$$h(g_1 g_0)(x) = (g_1 g_0)_{\blacksquare}\, x = g_{1\blacksquare}\, (g_{0\blacksquare}\, x) = h(g_1)(h(g_0)(x)) = h(g_1) \circ h(g_0)(x),$$

logo $h(g_1 g_0) = h(g_1) \circ h(g_0)$. ■

Sob a ótica desse teorema, as propriedades de uma ação de grupos podem ser escritas

1. $e_{\blacksquare} = \mathrm{id}$;
2. Para todos $g_0, g_1 \in G$,
$$(g_1 g_0)_{\blacksquare} = g_{1\blacksquare} \circ g_{0\blacksquare}\,.$$

Definição 9.29. Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{G}$ um grupo que age em X e $x \in X$. A *órbita* de x sob $\boldsymbol{G}$ é o conjunto

$$G_{\blacksquare}\, x \coloneqq \{g_{\blacksquare}\, x \mid g \in G\}\,.$$

$$G_x = \{g \in G \mid g_{\blacksquare}\, x = x\} = h^{-1}(\{\mathrm{id}\}) = \mathcal{N}(h).$$

Capítulo 10

Anéis

10.1 Anel

Definição 10.1. Um *anel* é uma tripla $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ em que

1. $(A, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro chamado de *zero* ou *nulidade* e representado por 0 (ou 0_A, caso exista ambiguidade).

2. $(A, \cdot)$ é um monoide comutativo com elemento neutro chamado de *um* ou *unidade* e representado por 1 (ou 1_A, caso exista ambiguidade).

3. A operação $\cdot$ é distributiva sobre $+$.

As operações $+$ e $\cdot$ são chamadas, respectivamente, de *adição* e *multiplicação*. A imagem de dois elementos $a_1, a_2 \in A$ pela adição é chamada de *soma* de a_1 e a_2 e denotada por $a_1 + a_2$. A imagem de a_1, a_2 pela multiplicação é chamada de *produto* de a_1 e a_2 e denotada por $a_1 \cdot a_1$ ou $a_1 a_2$.

Um comentário sobre os elementos neutros 0 e 1. Se $0 = 1$, o anel será trivial, mas garantimos esse anel na definição pois, mais para frente, quando virmos anéis quocientes, vai ser proveitoso que qualquer anel quociente seja um anel, e se quocientarmos um anel por ele mesmo, temos o anel trivial.

Notação. Como $(A, +)$ é um grupo, denotaremos o inverso de um elemento $a \in A$ sob $+$ por $-a$, e escreveremos $a_1 - a_2$ para $a_1 + (-a_2)$. Ainda, a multiplicação tem preferência na notação; ou seja, $a_1 a_2 + a_3 = (a_1 \cdot a_2) + a_3$ e $-a_1 a_2 = -(a_1 \cdot a_2)$. Denotaremos o inverso de um elemento $a \in A$ sob $\cdot$ por a^{-1}, se ele existir, pois sabemos que é único (8.5). Os símbolos operatórios relativos à adição e à multiplicação serão, respectivamente, $\boxplus$ e $\boxtimes$. Caso não haja ambiguidade, denotaremos um anel pelo símbolo que denota seu conjunto escrito em negrito, como em $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$.

Proposição 10.1. *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um anel. Então, para todo* $a, b \in A$*,*

1. $0 \cdot a = 0$*;*
2. $-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$*.*

Demonstração. 1.

$$\begin{aligned} 0 \cdot a &= 0 \cdot a + 0 \\ &= 0 \cdot a + (0 \cdot a - 0 \cdot a) \\ &= (0 \cdot a + 0 \cdot a) - 0 \cdot a \\ &= (0 + 0) \cdot a - 0 \cdot a \\ &= 0 \cdot a - 0 \cdot a \\ &= 0. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -(a \cdot b) &= -(a \cdot b) + 0 \\ &= -(a \cdot b) + 0 \cdot b \\ &= -(a \cdot b) + (a - a) \cdot b \\ &= -(a \cdot b) + (a \cdot b + (-a) \cdot b) \\ &= (-(a \cdot b) + a \cdot b) + (-a) \cdot b \\ &= 0 + (-a) \cdot b \\ &= (-a) \cdot b. \end{aligned}$$

■

Definição 10.2. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. O conjunto dos elementos invertíveis sob multiplicação de $\boldsymbol{A}$ é denotado por A^*.

Proposição 10.2. *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um anel. O par* $(A^*, \cdot|_{A^* \times A^*})$ *é um grupo comutativo.*

Demonstração. O par $(A, \cdot)$ é um monoide comutativo com elemento neutro 1. Portanto segue que o par $(A^*, \cdot|_{A^* \times A^*})$ é um grupo. Como $(A, \cdot)$ é comutativo, então $(A^*, \cdot|_{A^* \times A^*})$ também o é. ■

Definição 10.3. Um *domínio de integridade* (ou *domínio*) é um anel $\boldsymbol{A}$ em que

$$\forall a_1, a_2 \in A \qquad a_1 \cdot a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \ \text{ ou } \ a_2 = 0.$$

Definição 10.4. Um *corpo* é um anel $\boldsymbol{A}$ em que $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo.

Proposição 10.3. *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um corpo. Então* $\boldsymbol{A}$ *é um domínio.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 \cdot a_2 = 0$. Suponhamos que $a_2 \neq 0$. Então existe $a_2^{-1} \in A$ e temos

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \cdot 1 \\ &= a_1 \cdot (a_2 \cdot a_2^{-1}) \\ &= (a_1 \cdot a_2) \cdot a_2^{-1} \\ &= 0 \cdot a_2^{-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo, se $a_1 \cdot a_2 = 0$, $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$. ■

Proposição 10.4 (Lei do corte em domínios)**.** *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um domínio e* $a, a_1, a_2 \in A$*,* $a \neq 0$*. Então*

$$aa_1 = aa_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Demonstração. Se $aa_1 = aa_2$, então $-aa_1 = -aa_2$. Portanto

$$a(a_1 - a_2) = aa_1 - aa_2 = aa_1 - aa_1 = 0.$$

Logo, como $\mathbf{A}$ é um domínio e $a \neq 0$, temos que $a_1 - a_2 = 0$, o que implica $a_1 = a_2$. ■

Essa proposição é interessante pois, mesmo sem exigir que $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ seja um grupo, como no caso de $\mathbf{A}$ ser um corpo, se $\mathbf{A}$ for um domínio, vale a lei do corte da multiplicação para elementos de $A \setminus \{0\}$.

10.2 Subanel

Definição 10.5. Seja $\boldsymbol{A} = (A, +, \times)$ um anel. Um *subanel* de $\boldsymbol{A}$ é um anel $\boldsymbol{S} = (S, +_S, \times_S)$ em que $S \subseteq A$, $+_S = +|_{S \times S}$ e $\times_S = \times|_{S \times S}$. Denota-se $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{A}$. Um subanel *próprio* de $\boldsymbol{A}$ é um subanel $\boldsymbol{S} \leq \boldsymbol{A}$ em que S é um conjunto próprio de A ($S \subset A$). Denota-se $\boldsymbol{S} < \boldsymbol{A}$.

Proposição 10.5. *Sejam* $\boldsymbol{A} = (A, +, \times)$ *um anel e* $S \subseteq A$*. Então*

$$\boldsymbol{S} = (S, +|_{S \times S}, \times|_{S \times S})$$

é um anel com $1 \in S$ *se, e somente se,*

1. $(S, +|_{S \times S})$ *é um subgrupo comutativo de* $(A, +)$*:*

(a) *(Não-vacuidade)* $S \neq \varnothing$;

(b) *(Fechamento)* $\forall s_1, s_2 \in S \qquad s_1 + s_2 \in S$;

(c) *(Invertibilidade)* $\forall s \in S \qquad -s \in S$;

2. $(S, \times|_{S\times S})$ *é um submonoide comutativo de* $(A, \times)$ *com* $1 \in S$:

(a) *(Identidade)* $1 \in S$;

(b) *(Fechamento)* $\forall s_1, s_2 \in S \qquad s_1 \times s_2 \in S$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{S}$ é um anel com $1 \in S$. (Subgrupo) Como $S \subseteq A$ e $(S, +|_{S\times S})$ um grupo comutativo, então é um subgrupo de $(A, +)$ por definição de subgrupo (o que é equivalente às propriedades listadas) e é comutativo (9.2)). (Subanel) Como $S \subseteq A$ e $(S, \times|_{S\times S})$ um monoide comutativo com $1 \in S$, então é um submonoide de $(A, \times)$ por definição de submonoide (o que é equivalente às propriedades listadas) e é comutativo (8.7).

($\Leftarrow$) Suponhamos, agora, que $(S, +|_{S\times S})$ é subgrupo comutativo de $(A, +)$ e $(S, \times_{S\times S})$ é submonoide comutativo de $(A, \times)$. (Grupo comutativo) Como $(S, +|_{S\times S})$ é subgrupo comutativo, então é um grupo comutativo por definição de subgrupo. (Monoide comutativo) Como $(S, \times|_{S\times S})$ é submonoide comutativo, então é um monoide comutativo por definição de monoide. (Distributividade) Sejam $s_1, s_2, s_3 \in S$. Então

$$\begin{aligned} s_1 \times |_{S\times S}(s_2 + |_{S\times S} s_3) &= s_1 \times (s_2 + s_3) \\ &= (s_1 \times s_2) + (s_1 \times s_3) \\ &= (s_1 \times |_{S\times S} s_2) + |_{S\times S}(s_1 \times |_{S\times S} s_3). \end{aligned}$$

Logo $\times_{S\times S}$ é distributiva sobre $+\times_{S\times S}$.

■

10.3 Anel de Polinômios

Definição 10.6. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. O *conjunto dos polinômios em* A é o conjunto

$$A[x] := \left\{ \mathop{+}_{i=0}^{m} a_i x^i \;\middle|\; a_i \in A, m \geq 0 \right\},$$

em que $a_0 x^0 := a_0$. Os números a_i são chamados de coeficientes do polinômio. Dizemos que dois polinômios são iguais se todos seus coeficientes não nulos são iguais.

Definição 10.7. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $f, g \in A[x]$ tais que $f \coloneqq +_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g \coloneqq +_{i=0}^{n} b_i x^i$. Então definimos as operações binárias $\oplus$ e $\odot$ em $A[x]$ por

$$f \oplus g \coloneqq \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i \qquad\qquad f \odot g \coloneqq \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{m+n} \left(\mathop{\mathop{+}_{j=0}}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i.$$

tal que $a_i = 0$ para $m < i \leq \max\{m, n\}$ e $b_i = 0$ para $n < i \leq \max\{m, n\}$. Denotaremos $\oplus$ e $\odot$ por $+$ e $\cdot$ quando não existir ambiguidade.

Proposição 10.6. *Seja* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *um anel. Então* $\boldsymbol{A[x]} \coloneqq (A[x], \oplus, \odot)$ *é um anel.*

Demonstração. Sejam $f, g, h \in A[x]$ tais que $f \coloneqq +_{i=0}^{m} a_i x^i$, $g \coloneqq +_{i=0}^{n} b_i x^i$ e $h \coloneqq +_{i=0}^{l} c_i x^i$. Notemos que $\max\{\max\{m, n\}, l\} = \max\{m, \max\{n, l\}\}$. Denotamos essa quantidade como $\max\{m, n, l\}$. Definamos $a_i = 0$ para $m < i \leq \max\{m, n, l\}$, $b_i = 0$ para $n < i \leq \max\{m, n, l\}$ e $c_i = 0$ para $l < i \leq \max\{m, n, l\}$.

Primeiro vamos mostrar que $(A[x], \oplus)$ é um grupo comutativo. Todas as propriedades de grupo comutativo decorrem do fato de que $(A, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro 0. A operação $\oplus$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}
(f \oplus g) \oplus h &= \left(\mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i \right) \oplus h \\
&= \left(\mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n,l\}} ((a_i + b_i) + c_i)x^i \right) \\
&= \left(\mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n,l\}} (a_i + (b_i + c_i))x^i \right) \\
&= f \oplus \left(\mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{n,l\}} (b_i + c_i)x^i \right) \\
&= f \oplus (g \oplus h),
\end{aligned}$$

e comutativa, pois

$$f \oplus g = \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i)x^i = \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,n\}} (b_i + a_i)x^i = g \oplus f.$$

Ainda, o polinômio $0_{A[x]} \coloneqq 0$ é elemento neutro, pois

$$f \oplus 0_{A[x]} = \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{\max\{m,0\}} (a_i + 0)x^i = \mathop{\mathop{+}_{i=0}}^{m} a_i x^i = f.$$

Por fim, existe $-a_i \in A$ para todo $i \in \{0, \ldots, m\}$. Assim, $-f :- +_{i=0}^{m}(-a_i)x^i$ é o polinômio inverso de f, pois

$$f + (-f) = \mathop{\Large +}_{i=0}^{\max\{m,m\}} (a_i + (-a_i))x^i = \mathop{\Large +}_{i=0}^{m} 0x^i = 0$$

Agora, devemos mostrar que $(A[x], \odot)$ é um monoide comutativo. Novamente, as propriedades decorrem do fato de que $(A, \cdot)$ é um monoide comutativo com elemento neutro 1. A operação $\odot$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}
(f \odot g) \odot h &= \left(\mathop{\Large +}_{i=0}^{m+n} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i \right) \odot h \\
&= \mathop{\Large +}_{i=0}^{m+n+l} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} \left(\mathop{\Large +}_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) c_{i-j} \right) x^i \\
&= \mathop{\Large +}_{i=0}^{m+n+l} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} \left(\mathop{\Large +}_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) c_{i-j} \right) x^i \\
&= \\
&= \mathop{\Large +}_{i=0}^{m+n+l} () \\
&= f \odot \left(\mathop{\Large +}_{i=0}^{n+l} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} b_j c_{i-j} \right) x^i \right) \\
&= f \odot (g \odot h).
\end{aligned}$$

e comutativa, pois

$$f \odot g = \mathop{\Large +}_{i=0}^{m+n} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right) x^i = \mathop{\Large +}_{i=0}^{n+m} \left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i} b_j a_{i-j} \right) x^i = g \odot f.$$

Ainda, o polinômio $1_{A[x]} := 1$ é elemento neutro, pois

$$f \odot 1_{A[x]} = \mathop{\Large +}_{i=0}^{m+0} \left(\left(\mathop{\Large +}_{j=0}^{i-1} a_j \cdot 0 \right) + a_i \cdot 1 \right) x^i = \mathop{\Large +}_{i=0}^{m} a_i x^i = f.$$

Por fim, distributividade... ■

Definição 10.8. Definimos o *grau* de um polinômio $f \in A[x] \subseteq \{0\}$ como o maior índice de um coeficiente não nulo de f; ou seja, se $f = +_{i=0}^{m} a_i x^i$ com $a_m \neq 0$, então $\text{grau}(f) = m$.

Proposição 10.7. *Seja* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *um domínio e* $f, g \in A[x] \setminus \{0\}$. *Então*

$$\text{grau}(fg) = \text{grau}(f) + \text{grau}(g).$$

Demonstração. Sejam $\text{grau}(f) = m$ e $\text{grau}(g) = n$, e sejam $f = +_{i=0}^{m} a_i x^i$ e $g = +_{i=0}^{n} b_i x^i$. O produto fg terá coeficientes $+_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$, com $i \in \{0, \ldots, m+n\}$. Notemos que, para $i = m + n$, $+_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} = a_m b_n$. Isso ocorre porque todos os termos desse somatório se anulam, menos quando $j = m$. Se $j > m$, temos $a_j = 0$; se $j < m$, então $i - j > m + n - m = n$, e temos $b_{i-j} = 0$. Em ambos os casos, $a_j b_{i-j} = 0$. Portanto $+_{j=0}^{m+n} a_j b_{i-j} c = a_m b_n$. Como m e n são os graus de f e g, respectivamente, sabemos que $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$ e, como $\boldsymbol{A}$ é um domínio, isso implica que $a_m b_n \neq 0$ Logo $fg \neq 0$ e $\text{grau}(fg) = m + n$. ■

Proposição 10.8. *Seja* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *um anel. Então* $\boldsymbol{A}$ *é um domínio se, e somente se,* $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}] = (A[x], +, \cdot)$ *é um domínio.*

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{A}$ é um domínio e sejam $f, g \in A[x] \setminus \{0\}$. Então $\text{grau}(fg) = \text{grau}(f) + \text{grau}(g)$, o que mostra que $fg \neq 0$. Logo $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]$ é um domínio. Por outro lado, suponha que $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]$ é um domínio e sejam $a_1, a_2 \in A \setminus \{0\}$. Então $a_1, a_2 \in A[x] \setminus \{0\}$ e, portanto, $a_1 a_2 \neq 0$. Logo $\boldsymbol{A}$ é um domínio. ■

Podemos ver que $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]$ nunca é um corpo, pois x não tem inverso.

10.4 Produto de Anéis

Definição 10.9. Seja $(\boldsymbol{A_i})_{i \in I} = (A_i, +_i, \times_i)_{i \in I}$ uma família de anéis. O *produto* da família $(\boldsymbol{A_i})_{i \in I}$ é a tripla

$$\prod_{i \in I} \boldsymbol{A_i} := (A, +, \times)$$

em que $A = \prod_{i \in I} A_i$ é o produto de conjuntos,

$$\begin{aligned} + : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto (a_i +_i b_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \times : A \times A &\longrightarrow A \\ (a, b) &\longmapsto (a_i \times_i b_i)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Denotaremos as operações $+_i$ todas por $+$ e as operações $\times_i$ todas por $\times$ quando não existir ambiguidade.

Proposição 10.9. *Seja* $(\boldsymbol{A_i})_{i\in I} = (A_i, +_i, \times_i)_{i\in I}$ *uma família de anéis. Então o produto* $\prod_{i\in I} \boldsymbol{A_i}$ *é um anel.*

Demonstração. Como, para todo $i \in I$, o par $(A_i, +_i)$ é um grupo comutativo, segue que o par $(\prod_{i\in I} A_i, +)$ é um grupo comutativo.

Agora, devemos mostrar que $(\prod_{i=1}^{n} A_i, \times)$ é um monoide comutativo. Novamente, as popriedades de monoide comutativo decorrem do fato de que $(A_i, \times_i)$, $i \in I$, são todos monoides comutativos com elementos neutros 1_i, respectivamente. Sejam $a = (a_i)_{i\in I}, b = (b_i)_{i\in I}, c = (c_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$. A operação $\times$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}(a \times b) \times c &= (a_i \times_i b_i)_{i\in I} \times c \\ &= ((a_i \times_i b_i) \times_i c_i)_{i\in I} \\ &= (a_i \times_i (b_i \times_i c_i))_{i\in I} \\ &= a \times (b_i \times_i c_i)_{i\in I} \\ &= a \times (b \times c),\end{aligned}$$

e comutativa, pois

$$a \times b = (a_i \times_i b_i)_{i\in I} = (b_i \times_i a_i)_{i\in I} = b \times a.$$

Ainda, $1 := (1_i)_{i\in I}$ é elemento neutro, pois

$$a \times 1 = (a_i \times 1_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} = a.$$

Por fim, como $\times_i$ são ditributivas sobre $+_i$, temos que

$$\begin{aligned}a \times (b + c) &= a \times (b_i +_i c_i)_{i\in I} \\ &= (a_i \times_i (b_i +_i c_i))_{i\in I} \\ &= ((a_i \times_i b_i) +_i (a_i \times_i c_i))_{i\in I} \\ &= (a_i \times_i b_i)_{i\in I} + (a_i \times_i c_i)_{i\in I} \\ &= (a \times b) + (a \times c).\end{aligned}$$

■

10.5 Ideais e Anéis Quocientes

Definição 10.10. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Um *ideal* de $\boldsymbol{A}$ é um conjunto não vazio $I \subseteq A$ tal que

1. $\forall i_1, i_2 \in I \qquad i_1 - i_2 \in I$

2. $\forall a \in A, i \in I \qquad ai \in I$

Denotamos que I é ideal de $\boldsymbol{A}$ por $I \trianglelefteq A$. Ainda, $I \triangleleft A$ significa que $I \neq A$ e $I \trianglelefteq A$.

É interessante observar que I é subgrupo de $(A, +)$. A definição de ideal difere da definição de subanel na propriedade 2.

Proposição 10.10. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $I \trianglelefteq A$. Então*

1. $0 \in I$;
2. $\forall i_1, i_2 \in I \qquad i_1 + i_2 \in I$;
3. $1 \in I \Rightarrow I = A$;
4. $\{0\}$ *e* A *são ideais de* A.

Demonstração. 1. Seja $i \in I$. Então $0 = i - i \in I$.

2. Sejam $i_1, i_2 \in I$. Pelo item anterior, sabemos que $0 \in I$, o que implica $-i_2 = 0 - i_2 \in I$. Logo $i_1 + i_2 = i_1 - (-i_2) \in I$.
3. Se $1 \in I \trianglelefteq A$, então, para todo $a \in A$, temos $a = a \cdot 1 \in A$. Logo $I = A$.
4. Consideremos $\{0\}$. Se $i \in \{0\}$, então $i = 0$. Portanto, para todo $a \in A$ e $i \in \{0\}$, temos $i - i = 0 \in \{0\}$ e $ai = 0 \in \{0\}$. Logo $\{0\} \trianglelefteq A$. Agora, consideremos A. Para todo $a_1, a_2 \in A$, temos $a_1 - a_2 \in A$ e $a_1 a_2 \in A$. Logo $A \trianglelefteq A$.

■

Proposição 10.11. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $(I_j)_{j \in J}$ uma família de ideais de $\boldsymbol{A}$. Então*

$$I \coloneqq \bigcap_{j \in J} I_j$$

é um ideal de $\boldsymbol{A}$.

Demonstração. Sejam $i_1, i_2 \in I$ e $a \in A$. Então, para todo $j \in J$, $i_1, i_2 \in I_j$ e, como I_j é ideal de $\boldsymbol{A}$, segue que $i_1 - i_2 \in I_j$ e que $ai_1 \in W_i$. Logo $i_1 - i_2 \in I$ e $ai_1 \in I$, o que mostra que I é ideal de $\boldsymbol{A}$. ■

Proposição 10.12. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $(I_j)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência crescente de ideais de $\boldsymbol{A}$; ou seja, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$. Então*

$$I \coloneqq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$$

é um ideal de $\boldsymbol{A}$.

Demonstração. Sejam $i_1, i_2 \in I$. Então existem $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $i_1 \in I_n$ e $i_2 \in I_m$. Nesse caso, $I_n \subseteq I_m$ ou $I_m \subseteq I_n$. Sem perda de generalidade, suponhamos o primeiro caso. Então segue que $i_1 \in I_m$ e, portanto, $i_1 - i_2 \in I_m$, o que mostra que $i_1 - i_2 \in I$. Agora, seja $a \in A$ e notemos que, como I_n é ideal de $\boldsymbol{A}$, segue qque $ai_1 \in I_n$. Logo $ai_1 \in I$, o que mostra que I é ideal de $\boldsymbol{A}$. ■

Definição 10.11. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definimos o conjunto

$$\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i A = a_1 A + \ldots + a_n A := \left\{ \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; b_i \in A \right\}.$$

Proposição 10.13. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Então*

$$I := \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k A \trianglelefteq A.$$

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $i_1, i_2 \in I$ tais que $i_1 = +_{k=1}^{n} a_i b_i$ e $i_2 = +_{k=1}^{n} a_i c_i$. Então

$$i_1 - i_2 = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k b_k - \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k c_k = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k (b_k - c_k) \in I,$$

pois $(b_k - c_k) \in A$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Ainda,

$$ak_1 = a \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k b_k = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} a_k (ab_k) \in I,$$

pois $ab_k \in A$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Logo $I \trianglelefteq A$. ■

Esse ideal é chamado de ideal de A gerado por $a_1, \ldots, a_n$.

Definição 10.12. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Um *ideal principal* de $\boldsymbol{A}$ é um ideal $I \trianglelefteq A$ tal que

1. $\exists a \in A \qquad I = aA.$

Proposição 10.14. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Então $\boldsymbol{A}$ é um corpo se, e somente se, $\boldsymbol{A}$ é um anel não-trivial cujos únicos ideais de $\boldsymbol{A}$ são $\{0\}$ e A.*

Demonstração. Suponha que $\boldsymbol{A}$ é um corpo. Então $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ é um grupo e, portanto, $A \neq \varnothing$. Seja $I \trianglelefteq A$ e suponha que $I \neq \{0\}$. Então existe $i \in I \setminus \{0\}$. Como $\boldsymbol{A}$ é corpo, existe $i^{-1} \in A$. Portanto $1 = i^{-1} i \in I$. Logo $I = A$.

Por outro lado, suponha que os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A. Como $\boldsymbol{A}$ é não-trivial, seja $a \in A \setminus \{0\}$ e consideremos o ideal $I = aA$. Notemos que $a = a \cdot 1 \in aA$, o que implica $I \neq \{0\}$. Portanto $I = A$. Mas então $1 \in aA$, o que significa que deve existir $b \in A$ tal que $1 = ab$; ou seja, todo $a \in A \setminus \{0\}$ tem inverso em A. Logo $\boldsymbol{A}$ é corpo. ■

Proposição 10.15. *Sejam* $\boldsymbol{A}$ *um anel e* $I \trianglelefteq A$. *A relação binária* $\sim_I$ *em* A, *definida por*

$$a \sim_I b \Leftrightarrow a - b \in I,$$

é uma relação de equivalência.

Demonstração. Vamos demonstrar as três propriedades de uma relação de equivalência.

1. (Reflexividade) Seja $a \in A$. Então $a - a = 0 \in I$. Logo $a \sim_I a$.

2. (Simetria) Sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 \sim_I a_2$. Então $(a_1 - a_2) \in I$. Mas $0 \in I$, o que implica $a_2 - a_1 = 0 - (a_1 - a_2) \in I$. Logo $a_2 \sim_I a_1$.

3. (Transitividade) Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$ tais que $a_1 \sim_I a_2$ e $a_2 \sim_I a_3$. Então $(a_1 - a_2), (a_2 - a_3) \in I$, o que implica $a_1 - a_3 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) \in I$. Logo $a_1 \sim_I a_3$.

■

Definição 10.13. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $I \trianglelefteq A$. O conjunto $a + I \coloneqq \{a + i : i \in I\}$ é a *classe lateral* de I com representante a. O conjunto das classes laterais de A é denotado por $A/I \coloneqq \{a + I : a \in A\}$.

Proposição 10.16. *Sejam* $(A, +, \cdot)$ *um anel,* $I \trianglelefteq A$ *e* $\sim_I$ *a relação de equivalência definida na proposição anterior e* $a \in A$. *Então a classe de equivalência* $[a] = \{b \in A : b \sim_I a\}$ *é igual à classe lateral* $a + I$ *e, por consequência, o conjunto quociente* $A/\sim_I$ *é igual ao conjunto* A/I.

Demonstração. Seja $b \in [a]$. Então $b - a \in I$; ou seja, existe $i \in I$ tal que $b - a = i$. Mas isso implica $b = a + i$, que implica, por sua vez, que $b \in a + I$. Por outro lado, seja $b \in a + I$. Então existe $i \in I$ tal que $b = a + i$; ou seja, $b - a = i$, que implica $b - a \in I$ e, assim, $b \in [a]$. Disso, vem que $A/\sim_I = A/I$. ■

Uma consequência disso é que o conjunto A é particionado em classes laterais de I. Outra consequência é que duas classes laterais são iguais se, e somente se, a diferença entre seus representantes está em I.

Definição 10.14. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel, $I \trianglelefteq A$ e $a_1, a_2 \in A$. Então definimos as operações binárias $\oplus$ e $\odot$ em A/I por

$$(a_1 + I) \oplus (a_2 + I) \coloneqq (a_1 + a_2) + I \qquad (a_1 + I) \odot (a_2 + I) \coloneqq (a_1 \cdot a_2) + I$$

Denotaremos $\oplus$ e $\odot$ por $+$ e $\cdot$ quando não existir ambiguidade.

Proposição 10.17. *As operações* $\oplus$ *e* $\odot$ *da definição anterior estão bem definidas.*

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ tais que $a_1 + I = a_2 + I$ e $b_1 + I = b_2 + I$. Primeiro, vamos mostrar que $\oplus$ está bem definida. Devemos mostrar que $(a_1 + b_1) + I = (a_2 + b_2) + I$. De $a_1 + I = a_2 + I$, sabemos que $a_1 - a_2 \in I$. Da mesma forma, $b_1 - b_2 \in I$. Mas então $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I$, o que implica $(a_1 + b_1) + I = (a_2 + b_2) + I$.

Agora, vamos mostrar que $\odot$ está bem definida. Devemos mostrar que $(a_1b_1) + I = (a_2b_2) + I$. Sejam $c = a_1 - a_2$ e $d = b_1 - b_2$. Notemos que

$$a_1b_1 = (a_2 + c)(b_2 + d) = a_2b_2 + a_2d + cb_2 + cd.$$

Como $c, d \in I$, $(a_2d + cb_2 + cd) \in I$. Logo $a_1b_1 - a_2b_2 \in I$, o que implica $(a_1b_1) + I = (a_2b_2) + I$. ■

Proposição 10.18. *Sejam* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *um anel e* $I \trianglelefteq A$. *Então* $\boldsymbol{A/I} := (A/I, \oplus, \odot)$ *é um anel, chamado* anel quociente *de* A *por* I.

Demonstração. Sejam $a_1, a_2, a_3 \in A$. Primeiro, vamos mostrar que $(A/I, \oplus)$ é um grupo comutativo. As propriedades de grupo comutativo decorrem do fato de que $(A, +)$ é grupo comutativo com elemento neutro 0. A operação $\oplus$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}((a_1 + I) \oplus (a_2 + I)) \oplus (a_3 + I) &= ((a_1 + a_2) + I) \oplus (a_3 + I)\\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + I\\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + I\\ &= (a_1 + I) \oplus ((a_2 + a_3) + I)\\ &= (a_1 + I) \oplus ((a_2 + I) \oplus (a_3 + I)),\end{aligned}$$

e comutativa, pois

$$(a_1 + I) \oplus (a_2 + I) = (a_1 + a_2) + I = (a_2 + a_1) + I = (a_2 + I) \oplus (a_1 + I).$$

Ainda, $0 + I$ é elemento neutro, pois

$$(a_1 + I) \oplus (0 + I) = (a_1 + 0) + I = a_1 + I.$$

Por fim, existe $-a_1 \in A$. Assim, $(-a_1) + I$ é inverso de $a_1 + I$, pois

$$(a_1 + I) \oplus ((-a_1) + I) = (a_1 + (-a_1)) + I = 0 + I.$$

Agora, devemos mostrar que $(A/I, \odot)$ é um monoide comutativo. Novamente, as propriedades de monoide comutativo decorrem do fato de que $(A, \cdot)$ é um mo-

noide comutativo com elemento neutro 1. A operação $\odot$ é associativa, pois

$$\begin{aligned}((a_1+I)\odot(a_2+I))\odot(a_3+I) &= ((a_1\cdot a_2)+I)\odot(a_3+I)\\ &= ((a_1\cdot a_2)\cdot a_3)+I\\ &= (a_1\cdot(a_2\cdot a_3))+I\\ &= (a_1+I)\odot((a_2\cdot a_3)+I)\\ &= (a_1+I)\odot((a_2+I)\odot(a_3+I)),\end{aligned}$$

e comutativa, pois

$$(a_1+I)\odot(a_2+I) = (a_1\cdot a_2)+I = (a_2\cdot a_1)+I = (a_2+I)\odot(a_1+I).$$

Ainda, $1+I$ é elemento neutro, pois

$$(a_1+I)\odot(1+I) = (a_1\cdot 1)+I = a_1+I.$$

Por fim, como $\cdot$ é distributiva sobre $+$, temos que

$$\begin{aligned}(a+1+I)\odot((a_2+I)\oplus(a_3+I)) &= (a+1+I)\odot((a_2+a_3)+I)\\ &= (a_1\cdot(a_2+a_3))+I\\ &= ((a_1\cdot a_2)+(a_1\cdot a_3))+I\\ &= ((a_1\cdot a_2)+I)\oplus((a_1\cdot a_3)+I)\\ &= ((a_1+I)\odot(a_2+I))\oplus((a_1+I)\odot(a_3+I)).\end{aligned}$$

■

10.6 Homomorfismos de Anéis

Definição 10.15. Sejam $\boldsymbol{A} = (A,+,\cdot)$ e $\boldsymbol{B} = (B,\oplus,\odot)$ dois anéis. Um *homomorfismo de anéis* entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é uma função $\phi : A \longrightarrow B$ que é

1. um homomorfismo de grupos entres $(A,+)$ e $(B,\oplus)$
   (a) $\forall a_1, a_2 \in A \qquad \phi(a_1+a_2) = \phi(a_1)\oplus\phi(a_2)$;
2. um homomorfismo de monoides entre $(A,\cdot)$ e $(B,\odot)$
   (a) $\forall a_1, a_2 \in A \qquad \phi(a_1\cdot a_2) = \phi(a_1)\odot\phi(a_2)$;
   (b) $\phi(1_A) = 1_B$.

O conjunto de todos os homomorfismos de anéis entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é denotado por $\mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Exemplo 10.1. *Seja* $(A, +, \cdot)$ *um anel e consideremos o anel dos números inteiros* $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. *Então*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ z &\longmapsto \begin{cases} \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{z} 1_A & z > 0 \\ 0_A & z = 0 \\ -\phi(-z) & z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis.

Demonstração. Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Para ver que ϕ é um homomorfismo de anéis, provemos primeiro que $\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) + \phi(z_2)$. Vamos separar a demonstração em vários casos. Primeiro, notemos que, se $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, a igualdade é trivial; sem perda de generalidade, suponha que $z_2 = 0$. Então

$$\phi(z_1 + z_2) = \phi(z_1) = \phi(z_1) + 0_A = \phi(z_1) + \phi(z_2).$$

Então, suponhamos $z_1 z_2 \neq 0$. Se $z_1 > 0$ e $z_1 > 0$, então $z_1 + z_2 > 0$. Logo

$$\phi(z_1 + z_2) = \mathop{+}_{i=1}^{z_1+z_2} 1_A = \mathop{+}_{i=1}^{z_1} 1_A + \mathop{+}_{i=z_1+1}^{z_1+z_2} 1_A = \mathop{+}_{i=1}^{z_1} 1_A + \mathop{+}_{i=1}^{z_2} 1_A = \phi(z_1) + \phi(z_2).$$

Se $z_1 < 0$ e $z_1 < 0$, então $z_1 + z_2 < 0$. Logo $-z_1$, $-z_2$ e $-(z_1 + z_2)$ são positivos e segue da equação anterior que

$$\begin{aligned} \phi(z_1 + z_2) &= -\phi(-(z_1 + z_2)) \\ &= -\phi((-z_1) + (-z_2)) \\ &= -(\phi(-z_1) + \phi(-z_2)) \\ &= -(-\phi(z_1) - \phi(z_2)) \\ &= \phi(z_1) + \phi(z_2). \end{aligned}$$

No caso que resta, z_1 e z_2 são um positivo e um negativo; sem perda de generalidade, suponhamos que $z_1 > 0$ nesse caso $-z_2 > 0$. Se tivermos $z_1 = -z_2$, então

$$\begin{aligned} \phi(z_1 + z_2) &= \phi(0) \\ &= 0_A \\ &= \mathop{+}_{i=1}^{z_1} 1_A - \mathop{+}_{i=1}^{z_1} 1_A \\ &= \phi(z_1) - \phi(-z_1) \\ &= \phi(z_1) + \phi(z_2). \end{aligned}$$

Se tivermos $z_1 > -z_2$, então

$$\begin{aligned}
\phi(z_1+z_2) &= \mathop{\Large +}_{i=1}^{z_1+z_2} 1_A \\
&= \mathop{\Large +}_{i=1}^{z_1+z_2} 1_A + \mathop{\Large +}_{i=1}^{-z_2} 1_A - \mathop{\Large +}_{i=1}^{-z_2} 1_A \\
&= \mathop{\Large +}_{i=1}^{z_1+z_2} 1_A + \mathop{\Large +}_{i=z_1+z_2+1}^{z_1} 1_A - \mathop{\Large +}_{i=1}^{-z_2} 1_A \\
&= \mathop{\Large +}_{i=1}^{z_1} 1_A - \mathop{\Large +}_{i=1}^{-z_2} 1_A \\
&= \phi(z_1) + \phi(z_2).
\end{aligned}$$

Por fim, se $-z_2 > z_1$, então $-z_1 < 0$ e $-z_2 >$ e segue da equação anterior que

$$\begin{aligned}
\phi(z_1+z_2) &= -\phi(-(z_1+z_2)) \\
&= -\phi((-z_1)+(-z_2)) \\
&= -(\phi(-z_1)+\phi(-z_2)) \\
&= -(-\phi(z_1)-\phi(z_2)) \\
&= \phi(z_1)+\phi(z_2).
\end{aligned}$$

■

Exemplo 10.2. *Sejam* $\boldsymbol{A}$ *um anel e* $I \trianglelefteq A$. *Então a* projeção canônica *de* A *em* A/I, *definida por*

$$\begin{aligned}
\pi : A &\longrightarrow A/I \\
a &\longmapsto a + I,
\end{aligned}$$

é um homomorfismo de anéis.

Demonstração. Sejam $a_1, a_2 \in A$. Vemos que π é um homomorfismo de grupos entre $(A,+)$ e $(A/I,+)$, pois

$$\pi(a_1+a_2) = (a_1+a_2)+I = (a_1+I)+(a_2+I) = \pi(a_1)+\pi(a_2).$$

Também, vemos que π é um homomorfismo de monoides entre $(A,\cdot)$ e $(A/I,\cdot)$, pois

$$\pi(a_1 \cdot a_2) = (a_1 \cdot a_2)+I = (a_1+I)\cdot(a_2+I) = \pi(a_1)\cdot\pi(a_2)$$

e $\pi(1) = 1 + I = 1_{A/I}$. ■

Corolário 10.19 (Homomorfismos preservam a estrutura algébrica entre anéis)**.** *Sejam* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *e* $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ *dois anéis e* $\phi : A \longrightarrow B$ *um homomorfismo de anéis. Então*

1. $\phi(0_A) = 0_B$;
2. $-\phi(a) = \phi(-a)$.

Demonstração. Como ϕ é um homomorfismo de grupos entres $(A, +)$ e $(B, \oplus)$, sabemos que ϕ preserva a estrutura algébrica de grupo entre os grupos (9.17). ■

Corolário 10.20 (Composição de homomorfismos é homomorfismo)**.** *Sejam* $\boldsymbol{A_1} = (A_1, +_1, \cdot_1)$, $\boldsymbol{A_2} = (A_2, +_2, \cdot_2)$ *e* $\boldsymbol{A_3} = (A_3, +_3, \cdot_3)$ *três anéis e* $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$ *e* $\psi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3})$. *Então* $(\psi \circ \phi) \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_3})$.

Demonstração. As duas propriedades de homomorfismo de anéis para $(\psi \circ \phi)$ seguem de propriedades análogas na seção de grupos e monoides.

1. Como ϕ é um homomorfismo de grupos entre $(A_1, +_1)$ e $(A_2, +_2)$ e ψ é homomorfismos de grupos entre $(A_2, +_2)$ e $(A_3, +_3)$, segue da proposição de composição de homomorfismos da seção de grupos (9.18) que $(\psi \circ \phi)$ é homomorfismo de grupos entre $(A_1, +_1)$ e $(A_3, +_3)$.
2. Como ϕ é um homomorfismo de monoides entre $(A_1, \cdot_1)$ e $(A_2, \cdot_2)$ e ψ é homomorfismos de monoides entre $(A_2, \cdot_2)$ e $(A_3, \cdot_3)$, segue da proposição de composição de homomorfismos da seção de monoides (8.8) que $(\psi \circ \phi)$ é homomorfismo de monoides entre $(A_1, \cdot_1)$ e $(A_3, \cdot_3)$.

■

Proposição 10.21. *Sejam* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *anéis,* $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ *e* $I \trianglelefteq B$. *Então* $\phi^{-1}(I) \trianglelefteq A$.

Demonstração. Sejam $i_1, i_2 \in \phi^{-1}(I)$ e $a \in A$. Então, como $\phi(i_1), \phi(i_2) \in I$, temos $\phi(i_1 - i_1) = \phi(i_1) - \phi(i_2) \in I$, o que implica que $i_1 - i_2 \in \phi^{-1}(I)$. Ainda, como $\phi(a) \in A$, temos que $\phi(ai_1) = \phi(a)\phi(i_1) \in I$, o que implica $ai_1 \in \phi^{-1}(I)$. Logo $\phi^{-1}(I) \trianglelefteq A$. ■

Proposição 10.22. *Sejam* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *anéis,* $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ *sobrejetivo e* $I \trianglelefteq A$. *Então* $\phi(I) \trianglelefteq B$.

Demonstração. Sejam $j_1, j_2 \in \phi(I)$ e $b \in B$. Então existem $i_1, i_2 \in I$ tais que $\phi(i_1) = j_1$ e $\phi(i_2) = j_2$ e, como ϕ é sobrejetiva, existe $a \in A$ tal que $\phi(a) = b$. Então, como $I \trianglelefteq A$, temos que $i_1 - i_2 \in I$ e $ai_1 \in I$, o que implica $j_1 - j_2 = \phi(i_1) - \phi(i_2) = \phi(i_1 - i_2) \in \phi(I)$ e $bj_1 = \phi(a)\phi(i_1) = \phi(ai_1) \in \phi(I)$. Logo $\phi(I) \trianglelefteq B$. ■

Definição 10.16. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois anéis e $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. O *núcleo* de ϕ é o conjunto

$$\mathcal{N}(\phi) := \{a \in A : \phi(a) = 0_B\}$$

e a *imagem* de ϕ é o conjunto

$$\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi) := \{b \in B : \exists a \in A, \phi(a) = b\}.$$

Proposição 10.23. *Sejam* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *e* $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ *dois anéis e seja* $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. *Então*

1. $\mathcal{N}(\phi) \trianglelefteq A$;

2. $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$ *é subanel de* $\boldsymbol{B}$.

Demonstração. Demonstramos as afirmações separadamente.

1. Primeiro notamos que $\mathcal{N}(\phi) \subseteq A$ e que $\mathcal{N}(\phi)$ não é vazio, pois, como $\phi(0_A) = 0_B$, então $0_A \in \mathcal{N}(\phi)$. Vamos mostrar as duas propriedades de um ideal. Sejam $a \in A$ e $n_1, n_2 \in \mathcal{N}(\phi)$. Então $n_1 - n_2 \in \mathcal{N}(\phi)$, pois

$$\phi(n_1 - n_2) = \phi(n_1) - \phi(n_2) = 0_B - 0_B = 0_B.$$

   Ainda, $a \cdot n_1 \in \mathcal{N}(\phi)$, pois

$$\phi(a \cdot n_1) = \phi(a) \odot \phi(n_1) = \phi(a) \odot 0_B = 0_B.$$

   Portanto $\mathcal{N}(\phi)$ é ideal de A.

2. Claramente, $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi) \subseteq B$ e $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$ não é vazio. Sejam $i_1, i_2 \in \mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$. Então existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $\phi(a_1) = i_1$ e $\phi(a_2) = i_2$. Portanto $i_1 \ominus i_2 \in \mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$, já que

$$\phi(a_1 - a_2) = \phi(a_1) - \phi(a_2) = i_1 - i_2.$$

   Ainda, $i_1 \odot i_2 \in \mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$, pois

$$\phi(a_1 \cdot a_2) = \phi(a_1) \odot \phi(a_2) = i_1 \odot i_2.$$

   Por fim, $1_B \in \mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$, pois $\phi(1_A) = 1_B$. Logo $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$ é subanel de $\boldsymbol{B}$.

■

Proposição 10.24. *Sejam* $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ *e* $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ *dois anéis e seja* $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. *Então* ϕ *é injetiva se, e somente se,* $\mathcal{N}(\phi) = \{0_A\}$.

Demonstração. Como ϕ é um homomorfismo de anéis, ele é um homomorfismo de grupos entre $(A, +)$ e $(B, \oplus)$. Então, pela proposição análoga da seção de grupos (9.22), esta proposição está provada. ■

Definição 10.17. Sejam $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ e $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ dois anéis. Um isomorfismo de anéis é um homomorfismo de anéis $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ que é bijetivo. O conjunto de todos os homomorfismos de anéis entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ é denotado por $\mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Proposição 10.25. *Sejam $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ e $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ anéis e $\phi \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Então $\phi^{-1} \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$.*

Demonstração. Como ϕ é bijetiva, sua inversa ϕ^{-1} também é bijetiva. Devemos provar que ϕ^{-1} é um homomorfismo de anéis. Sejam $b_1, b_1 \in B$. Primeiro, vamos provar que ϕ^{-1} é um homomorfismo de grupos entre $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{A}$. Como ϕ é isomorfismo, existem $a_1, a_2 \in A$ tais que $\phi(a_1) = b_1$ e $\phi(a_2) = b_2$. Então

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(b_1 \oplus b_2) &= \phi^{-1}(\phi(a_1) \oplus \phi(a_2)) \\
&= \phi^{-1}(\phi(a_1 + a_2)) \\
&= a_1 + a_2 \\
&= \phi^{-1}(b_1) \oplus \phi^{-1}(b_2)
\end{aligned}$$

e

$$\phi^{-1}(\ominus b_1) = \phi^{-1}(\phi(-a_1)) = -a_1 = \ominus\phi(b_1).$$

Agora, mostramos que ϕ^{-1} é homomorfismo de monoides entre $(B, \odot)$ e $(A, \cdot)$.

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(b_1 \odot b_2) &= \phi^{-1}(\phi(a_1) \odot \phi(a_2)) \\
&= \phi^{-1}(\phi(a_1 \cdot a_2)) \\
&= a_1 \cdot a_2 \\
&= \phi^{-1}(b_1) \odot \phi^{-1}(b_2)
\end{aligned}$$

e, como $\phi(1_A) = 1_B$, temos $\phi^{-1}(1_B) = 1_A$. ■

Definição 10.18. Sejam $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ dois anéis. Dizemos que $\boldsymbol{A}$ é *isomorfo* a $\boldsymbol{B}$, e denotamos isso por $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{B}$, sse existe $\phi \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Proposição 10.26. *Sejam $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$ e $\boldsymbol{A_3}$ três anéis. Então*

1. *(Reflexividade) $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_1}$;*
2. *(Antissimetria) $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_2} \Rightarrow \boldsymbol{A_2} \simeq \boldsymbol{A_1}$;*
3. *(Transitividade) $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_2}$ e $\boldsymbol{A_2} \simeq \boldsymbol{A_3} \Rightarrow \boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_3}$.*

OBS: *Não dizemos que $\simeq$ é uma relação de equivalência porque ela não está propriamente definida em um conjunto, já que não existe o conjunto de todos os anéis por não existir o conjunto de todos os conjuntos. No entanto, é claro que o que a proposição afirma é que ela satisfaz as propriedades de uma relação de equivalência.*

Demonstração. Vamos demonstrar as três propriedades separadamente.

1. Claramente, a função $\phi = Id_A : A \longrightarrow A$ é um isomorfismo de anéis. Logo $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_1}$

2. Se $\mathbf{A}_1 \simeq \boldsymbol{A_2}$, existe $\phi \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$. Pela proposição (10.25), ϕ^{-1} é um isomorfismo de anéis entre $\boldsymbol{A_2}$ e $\boldsymbol{A_1}$. Logo $\boldsymbol{A_2} \simeq \boldsymbol{A_1}$.

3. $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_2}$, existe $\phi \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2})$ e, como $\boldsymbol{A_2} \simeq \boldsymbol{A_3}$, existe $\psi \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_3})$. Assim, pela proposição (10.20), sabemos que $(\psi \circ \phi) \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_3})$. Ainda, como ϕ e ψ são bijeções, sua composição é uma bijeção. Portanto $(\psi \circ \phi) \in \mathcal{I}\mathrm{so}(\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_3})$, o que implica $\boldsymbol{A_1} \simeq \boldsymbol{A_3}$.

■

10.7 Teoremas de Isomorfismo

Teorema 10.27 (Primeiro Teorema de Isomorfismo)**.** *Sejam $\boldsymbol{A} = (A, +, \cdot)$ e $\boldsymbol{B} = (B, \oplus, \odot)$ dois anéis e $\phi \in \mathcal{H}\mathrm{om}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. Então*

$$\boldsymbol{A}/\boldsymbol{\mathcal{N}(\varphi)} \simeq \boldsymbol{\mathcal{I}\mathrm{m}(\varphi)}.$$

Demonstração. Primeiro, vale notar que, como $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi) \trianglelefteq A$, o $\boldsymbol{A/\mathcal{N}(\phi)}$ é um anel. Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} \psi : A/\mathcal{N}(\phi) &\longrightarrow \mathcal{I}\mathrm{m}(\phi) \\ a + \mathcal{N}(\phi) &\longmapsto \phi(a). \end{aligned}$$

Notemos que a função ψ é bem definida. Para isso, sejam $a_1, a_2 \in A$ tais que $a_1 + \mathcal{N}(\phi) = a_2 + \mathcal{N}(\phi)$. Então $(a_1 - a_2) \in \mathcal{N}(\phi)$, o que implica $\phi(a_1 - a_2) = 0$. Como ϕ é homomorfismo de anéis, segue que $\phi(a_1) = \phi(a_2)$. Então $\psi(a_1 + \mathcal{N}(\phi)) = \psi(a_2 + \mathcal{N}(\phi))$.

Vamos mostrar que essa função é um isomorfismo de anéis. Primeiro, vamos mostrar que ψ é homomorfismo de anéis. Para isso, vamos denotar $a + \mathcal{N}(\phi) \in A/\mathcal{N}(\phi)$ por $[a]$ para facilitar a demonstração. Sejam $[a_1], [a_2] \in A/\mathcal{N}(\phi)$. Vemos que ψ é homomosfismo de grupos entre $(A/\mathcal{N}(\phi), +)$ e $(\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi), \oplus)$, pois

$$\psi([a_1] + [a_2]) = \psi([a_1 + a_2]) = \phi(a_1 + a_2) = \phi(a_1) \oplus \phi(a_2) = \psi([a_1]) \oplus \psi([a_2]).$$

Agora, vemos que ψ é homomosfismo de monoides entre $(A/\mathcal{N}(\phi), \cdot)$ e $(\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi), \odot)$, pois

$$\psi([a_1] \cdot [a_2]) = \psi([a_1 \cdot a_2]) = \phi(a_1 \cdot a_2) = \phi(a_1) \odot \phi(a_2) = \psi([a_1]) \odot \psi([a_2])$$

e $\psi([1_A]) = \phi(1_A) = 1_B$.

Por fim, devemos mostrar que ψ é bijetiva. Primeiro, mostramos que ψ é injetiva. Seja $[a] \in \mathcal{N}(\psi)$. Então $\psi([a]) = 0_B$, o que implica $\phi(a) = 0_B$. Mas isso implica $a \in \mathcal{N}(\phi)$; ou seja, $[a] = [0_A]$. Logo $\mathcal{N}(\psi) = \{[0_A]\}$, que quer dizer que ψ é injetiva (10.24). Agora, notamos que ψ é sobrejetiva por construção, pois tem como contradomínio $\mathcal{I}\mathrm{m}(\phi)$. ■

Proposição 10.28 (Teorema Chinês do Resto)**.** *Sejam $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dois a dois coprimos entre si. Então*

$$\mathbb{Z}\big/m_1 m_2 \ldots m_n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}\big/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\big/m_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}\big/m_n\mathbb{Z}.$$

Demonstração. ■

Definição 10.19.

$$B + I \coloneqq \{b + i : b \in B, i \in I\}$$

Teorema 10.29 (Segundo Teorema de Isomorfismo)**.** *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel, B um subanel de $\boldsymbol{A}$ e $I \trianglelefteq A$. Então*

1. *$B + I$ é subanel de $\boldsymbol{A}$;*
2. *$B \cap I \trianglelefteq B$;*
3. $$\boldsymbol{B}\big/\boldsymbol{B \cap I} \simeq \boldsymbol{B + I}\big/\boldsymbol{I}.$$

Demonstração. 1. Para mostrar que $B + I$ é subanel de $\boldsymbol{A}$, primeiro notamos que $B + I$ não é vazio, pois B não é vazio e I não é vazio. Ainda, notamos que $B + I \subseteq A$, pois $B \subseteq A$ e $I \subseteq A$. Agora, mostramos as pripriedades de subanel. Sejam $b_1, b_2 \in B$ e $i_1, i_2 \in I$. Primeiro, mostraremos que $B + I$ é subgrupo de $(A, +)$. Note que $(b_1 + i_1) - (b_2 + i_2) \in B + I$, pois, como B é subgrupo de $(A, +)$, $b_1 - b_2 \in B$ e, como $I \trianglelefteq A$, $i_1 - i_2 \in A$, o que implica $(b_1 + i_1) - (b_2 + i_2) = (b_1 - b_2) + (i_1 - i_2) \in B + I$. Mostremos agora que $B + I$ é submonoide de $(A, \cdot)$. Note que

$$(b_1 + i_1)(b_2 + i_2) = b_1 b_2 + b_1 i_2 + i_1 b_2 + i_1 i_2.$$

Como B é submonoide de $(A, \cdot)$, $b_1 b_2 \in B$ e, como $i \trianglelefteq A$, $b_1 i_2, i_1 b_2, i_1 i_2 \in I$, o que implica $b_1 i_2 + i_1 b_2 + i_1 i_2 \in I$. Logo $(b_1 + i_1)(b_2 + i_2) = (b_1 b_2) + (b_1 i_2 + i_1 b_2 + i_1 i_2) \in B + I$. Ainda, $1 \in B$ e $0 \in I$. Logo $1 = 1 + 0 \in B + I$.

2. Para mostrar que $B \cap I \trianglelefteq B$, notemos primeiro que $B \cap I$ não é vazio. De fato, como B é subanel de $\boldsymbol{A}$, segue que $0 \in B$ e, como $I \trianglelefteq A$, também segue que $0 \in I$, o que implica $0 \in B \cap I$. Claramente, $B \cap I \subseteq A$. Então basta provar as propriedades de ideal. Sejam $b_1, b_2 \in B \cap I$. Como B é subanel de $\boldsymbol{A}$, temos $b_1 - b_2 \in B$ e, como $I \trianglelefteq A$, temos $b_1 - b_2 \in I$. Logo $b_1 - b_2 \in B \cap I$. Seja $b \in B$. Como B é subanel de $\boldsymbol{A}$, temos $bb_1 \in B$ e, como $I \trianglelefteq A$, temos $bb_1 \in I$. Logo $bb_1 \in B \cap I$.

3. O isomorfismo só faz sentido se os dois quocientes fazem sentido. O primeiro faz sentido pelo item anterior. O segundo faz sentido pois, pela definição de ideal, segue direto que $I \trianglelefteq B + I$, pois $I \subseteq B + I \subseteq A$. Então devemos exibir um isomorfismo de anéis entre os dois anéis. Considere a função

$$\begin{aligned} \phi : B &\longrightarrow {}^{B+I}\big/_{I} \\ b &\longmapsto b + I. \end{aligned}$$

Essa função é um homomorfismo de anéis. Sejam $b_1, b_2 \in B$. Então $\phi(b_1 + b_2) = (b_1 + b_2) + I = (b_1 + I) + (b_1 + I) = \phi(b_1) + \phi(b_2)$. Ainda, vale $\phi(b_1 b_2) = (b_1 b_2) + I = (b_1 + I)(b_1 + I) = \phi(b_1)\phi(b_2)$. Por fim, $\phi(1) = 1 + I$.

Agora, notemos que $\mathcal{N}(\phi) = B \cap I$. Seja $b \in B$. Então

$$b \in \mathcal{N}(\phi) \Leftrightarrow \phi(b) = 0 \Leftrightarrow b + I = I \Leftrightarrow b \in I.$$

Por fim, notemos que $\mathfrak{Im}(\phi) = {}^{B+I}\big/_{I}$, pois um elemento de ${}^{B+I}\big/_{I}$ é da forma $b = i + I$, com $b \in B$ e $i \in I$. Mas então $b + i + I = b + I$. Logo segue do primeiro teorema de isomorfismo (10.27) que

$$\boldsymbol{{}^{B}\big/_{B \cap I} = {}^{B}\big/_{\mathcal{N}(\phi)} \simeq \mathfrak{Im}(\phi) = {}^{B+I}\big/_{I}}.$$

■

Lema 10.30. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $I \trianglelefteq A$. Então*

1. *Se B é subanel de $\boldsymbol{A}$ tal que $I \subseteq B$, então ${}^{B}\big/_{I}$ é subanel de ${}^{\boldsymbol{A}}\big/_{\boldsymbol{I}}$. Por outro lado, todo subanel de ${}^{\boldsymbol{A}}\big/_{\boldsymbol{I}}$ é da forma ${}^{B}\big/_{I}$ para algum B subanel de $\boldsymbol{A}$ tal que $I \subseteq B$.*

2. *Se $J \trianglelefteq A$ tal que $I \subseteq J$, então ${}^{J}\big/_{I} \trianglelefteq {}^{A}\big/_{I}$. Por outro lado, todo ideal de ${}^{A}\big/_{I}$ é da forma ${}^{J}\big/_{I}$ para algum $J \trianglelefteq A$, tal que $I \subseteq J$.*

Demonstração. 1. Seja B um subanel de $\boldsymbol{A}$ tal que $I \subseteq B$. Para mostrar que o conjunto B/I é subanel de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$, sejam $b_1 + I, b_2 + I \in B/I$. Então, como $b_1, b_2 \in B$, vale $b_1 - b_2 \in B$ e $b_1 b_2 \in B$ e segue que $(b_1 + I) - (b_2 + I) = (b_1 - b_2) + I \in B/I$ e $(b_1 + I)(b_2 + I) = (b_1 b_2) + I \in B/I$. Ainda, como $1 \in B$, $1 + I \in B/I$. Logo B/I é subanel de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$.

Seja agora C um subanel de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$. Como C é subconjunto não vazio de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$, é da forma $C = \{b + I : b \in B\}$, com $I \subseteq B \subseteq A$; ou seja, $C = B/I$. Vamos mostrar que B é subanel de $\boldsymbol{A}$. Sejam $b_1, b_2 \in B$. Como B/I é subanel de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$, temos que $(b_1 + I) - (b_2 + I) = (b_1 - b_2) + I \in B/I$ e $(b_1 + I)(b_2 + I) = (b_1 b_2) + I \in B/I$. Então $b_1 - b_2 \in B$ e $b_1 b_2 \in B$. Ainda, como $1 + I \in B/I$, temos que $1 \in B$, e a demonstração está completa.

2. Seja $J \trianglelefteq A$ tal que $I \subseteq J$. Para mostrar que $J/I \trianglelefteq A/I$, sejam $j_1 + I, j_2 + I \in J/I$ e $a + I \in A/I$. Como $J \trianglelefteq A$, vale $j_1 - j_2 \in J$ e $aj_1 \in J$. Então $(j_1 + I) - (j_2 + I) = (j_1 - j_2) + I \in J/I$ e $(a + I)(j_1 + I) = (aj_1) + I \in J/I$.

Seja $C \trianglelefteq A/I$. Como C é subconjunto de A/I, é da forma $C = \{j + I : j \in J\}$, com $I \subseteq J \subseteq A$; ou seja, $C = J/I$. Vamos mostrar que $J \trianglelefteq A$. Sejam $j_1, j_2 \in J$ e $a \in A$. Como $J/I \trianglelefteq A/I$, temos que $(j_1 + I) - (j_2 + I) = (j_1 - j_2) + I \in J/I$ e $(a + I)(j_1 + I) = (aj_1) + I \in J/I$. Então $j_1 - j_2 \in J$ e $aj_1 \in J$, e a demonstração está completa.

■

Teorema 10.31 (Terceiro Teorema de Isomorfismo)**.** *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel, $I \trianglelefteq A$ e $J \trianglelefteq A$ tais que $I \subseteq J$. Então*

$$\left(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\right)\Big/\left(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{I}\right) \simeq \boldsymbol{A}/\boldsymbol{J}.$$

Demonstração. Consideremos a função

$$\begin{aligned} \phi : A/I &\longrightarrow A/J \\ a + I &\longmapsto a + J. \end{aligned}$$

Primeiro, notemos que ϕ é bem definida, pois, se $a_1 + I = a_2 + I$, então $a_1 - a_2 \in I \subseteq J$, o que implica $a_1 + J = a_2 + J$. Agora, provemos que ϕ é

homomorfismo de anéis. Sejam $a_1 + I, a_2 + I \in A/I$. Então

$$\begin{aligned}\phi((a_1 + I) + (a_2 + I)) &= \phi((a_1 + a_2) + I)\\ &= (a_1 + a_2) + J\\ &= (a_1 + J) + (a_2 + J)\\ &= \phi(a_1) + \phi(a_2).\end{aligned}$$

Também, vale que

$$\begin{aligned}\phi((a_1 + I)(a_2 + I)) &= \phi((a_1a_2) + I)\\ &= (a_1a_2) + J\\ &= (a_1 + J)(a_2 + J)\\ &= \phi(a_1)\phi(a_2).\end{aligned}$$

Por fim, notamos que $\phi(1 + I) = 1 + J$. Assim, provamos que ϕ é homomorfismo de anéis.

Agora, notemos que

$$\mathcal{N}(\phi) = \{a + I : \phi(a + I) = 0 + J\} = \{a + I : a \in J\} = {}^{J}\!/_{I},$$

o que prova que ${}^{J}\!/_{I} \trianglelefteq {}^{A}\!/_{I}$ e que, portanto, o quociente $\left({}^{A}\!/_{I}\right)\Big/\left({}^{J}\!/_{I}\right)$ pode formar um anel quociente. Notemos também que ϕ é sobrejetiva por construção; ou seja, $\mathfrak{Im}(\phi) = {}^{A}\!/_{J}$. Logo, pelo primeiro teorema de isomorfismo (10.27), temos que

$$\boldsymbol{\left({}^{A}\!/_{I}\right)\Big/\left({}^{J}\!/_{I}\right) = \left({}^{A}\!/_{I}\right)\Big/\mathcal{N}(\phi) \simeq \mathfrak{Im}(\phi) = {}^{A}\!/_{J}}.$$

■

10.8 Ideais Primos e Ideais Maximais

Definição 10.20. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Um *ideal primo* de $\boldsymbol{A}$ é um ideal $I \trianglelefteq A$ tal que

1. $\forall a, b \in A \qquad ab \in I \Rightarrow a \in I$ ou $b \in I$.

Teorema 10.32. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $I \trianglelefteq A$. Então I é um ideal primo de $\boldsymbol{A}$ se, e somente se, ${}^{\boldsymbol{A}}\!/_{\boldsymbol{I}}$ é um domínio.*

Demonstração. Vamos demonstrar as duas implicações ao mesmo tempo. Sejam $a, b \in A$ e $\alpha, \beta \in A/I$ tais que $\alpha = a + I$ e $\beta = b + I$. Note que $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$ é um domínio se, e somente se,

$$\forall \alpha, \beta \in A/I \qquad \alpha\beta = 0_{A/I} \Rightarrow \alpha = 0_{A/I} \ \text{ ou } \ \beta = 0_{A/I}.$$

Mas $\alpha\beta = (a + I)(b + I) = ab + I$ e $0_{A/I} = 0 + I$. Ainda, para qualquer $a' \in A$, $a' + I = 0 + I$ se, e somente se, $a' \in I$. Logo segue que a implicação acima é equivalente a

$$\forall a, b \in A \qquad ab = 0 \Rightarrow a = 0 \ \text{ ou } \ b = 0,$$

que é a definição de ideal primo. ■

Definição 10.21. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Um *ideal maximal* de $\boldsymbol{A}$ é um ideal $I \lhd A$ tal que

$$\forall J \in \mathcal{P}(A) \qquad I \subseteq J \ \text{ e } \ J \trianglelefteq A \Rightarrow J = I \ \text{ ou } \ J = A.$$

Teorema 10.33. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $I \lhd A$. Então I é um ideal maximal de $\boldsymbol{A}$ se, e somente se, $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$ é um corpo.*

Demonstração. Em ambas implicações, usaremos o fato que um anel é um corpo se, e somente se, seus únicos ideais são o anel trivial e o anel todo (10.14).

$\Leftarrow$ Suponha que I é um ideal maximal de $\boldsymbol{A}$. Vamos mostrar que os únicos ideais de $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$ são $\{0+I\}$ e A/I. Seja $L \trianglelefteq A/I$ e consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A/I \\ a &\longmapsto a + I. \end{aligned}$$

Sabemos que $\pi^{-1}(L) = \{a \in A : \pi(a) \in L\} \trianglelefteq A$ (10.21). Como $0 + I = 0_{A/I} \in L$, isso implica que $\pi^{-1}(0 + I) \subseteq \pi^{-1}(L)$. Notando que $\pi^{-1}(0 + I) = \mathcal{N}(\phi) = I$, temos que $I \subseteq \pi^{-1}(L) \subseteq A$. Como I é ideal maximal, então $\pi^{-1}(L) = I$ ou $\pi^{-1}(L) = A$. Vamos então avaliar os dois casos. Para isso, ressaltamos antes que $L = \pi(\pi^{-1}(L))$. No primeiro caso, $L = \pi(\pi^{-1}(L)) = \pi(I) = 0+I = 0_{A/I}$. No segundo caso, $L = \pi(\pi^{-1}(L)) = \pi(A) = A/I$. Logo A/I é um corpo.

$\Rightarrow$ Suponha que $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$ é um corpo. Consideremos $J \trianglelefteq A$ tal que $I \subseteq J$ e a projeção canônica $\pi : A \longrightarrow A/I$. Como π é um homomorfismo de anéis bijetivo, temos que $\pi(J) \trianglelefteq A/I$ (10.22). Como $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}$ é corpo, $\pi(J) = 0_{A/I}$ ou $\pi(J) = A/I$. No primeiro caso, $J = \mathcal{N}(\pi) = I$. No segundo caso, $J = \pi^{-1}(\pi(J)) = \pi^{-1}(A/I) = A$. Logo I é ideal maximal de A.

■

Proposição 10.34. *Seja* $\boldsymbol{A}$ *um anel e* $I \lhd A$ *um ideal maximal. Então* I *é ideal primo.*

Demonstração. A demonstração é simples. Sabemos que, se I é ideal maximal, então A/I é um corpo (10.33). Mas isso implica que A/I é um domínio (10.3). Concluímos, portanto, que I é um ideal primo (10.32). ■

10.9 Domínios Euclidianos

Definição 10.22. Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio. Uma *função euclidiana* em $\boldsymbol{D}$ é uma função $\phi : D \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ que satisfaz

1. $\forall a \in D,\ b \in D \setminus \{0\} \quad \exists q, r \in D \qquad a = qb + r \qquad \text{e} \qquad r = 0 \ \text{ ou } \ \phi(r) < \phi(b)$;
2. $\forall a, b \in D \setminus \{0\} \qquad \phi(a) \leq \phi(ab)$.

Nesse caso, q é chamado *quociente* e r é chamado de *resto* da divisão de a por b.

É possível mostrar que a segunda propriedade é desnecessária no seguinte sentido.

Proposição 10.35. *Seja* $\boldsymbol{D}$ *um domínio e* $\phi : D \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ *uma função que satisfaz*

1. $\forall a \in D,\ b \in D \setminus \{0\} \quad \exists q, r \in D \qquad a = qb + r \qquad e \qquad r = 0 \ \text{ ou } \ \phi(r) < \phi(b)$.

Então existe uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$.

Demonstração. Seja $\psi : D \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma função definida por

$$\psi(d) = \min\{\phi(dx) : x \in D \setminus \{0\}\}.$$

Mostraremos que ψ é uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$. Sejam $a \in D, b \in D \setminus \{0\}$. Então existem $q, r \in D$ tais que $a = qb + r$. Se $r \neq 0$, então $\phi(r) < \phi(b)$. Ainda, seja $d \in D \setminus \{0\}$. Como $\boldsymbol{D}$ é domínio, então $db \in D \setminus \{0\}$. Logo existem $q_d, r_d \in D$ tais que $a = q_d db + r_d$. Em particular, $r = r_1$ e $q = q_1$.

Tentar mostrar que, se $r_d = 0$, então $\psi(r) \neq \min\{\phi(rx) : x \in D \setminus \{0\}\}$...
$\psi(r) < \psi(b)$
$\psi(d) \leq \phi(d)$
$\psi(r_d) < \phi(r_d) < \phi(bd)$

$\min\{\phi(rx) : x \in D \setminus \{0\}\} < \min\{\phi(bx) : x \in D \setminus \{0\}\}$

Se $r \neq 0$, então $rd \neq 0$. Isso implica que

Agora, mostremos que ψ satisfaz a segunda propriedade de função euclidiana. Sejam $a, b \in D \setminus \{0\}$ e $d \in D \setminus \{0\}$ tal que $\psi(ab) = \phi(abd)$. Como $\boldsymbol{D}$ é domínio, $bd \in D \setminus \{0\}$, e segue que

$$\psi(a) = \min\{\phi(ax) : x \in D \setminus \{0\}\} \leq \phi(abd).$$

Logo $\psi(a) \leq \psi(ab)$.

■

Proposição 10.36. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio, ϕ uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$ e $a, b \in D$.*

Demonstração. ■

Definição 10.23. Um *domínio euclidiano* é um domínio em que existe uma função euclidiana.

Proposição 10.37. *Os anéis $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}[i]$ são domínios euclidianos.*

Demonstração. ■

Proposição 10.38. *Seja $\boldsymbol{C}$ um corpo. Então $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{x}]$ é um domínio euclidiano.*

Demonstração. ■

Definição 10.24. Um *domínio principal* é um domínio em que todo ideal é principal.

Proposição 10.39. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio euclidiano. Então $\boldsymbol{D}$ é um domínio principal.*

Demonstração. Seja ϕ uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$ e $I \trianglelefteq D$. Se $I = \{0\}$, então $I = 0I$. Se $I \neq 0$, seja $a \in I \setminus \{0\}$ tal que $\phi(a) = \min\{\phi(i) : a \in I \setminus \{0\}\}$. Tome $b \in I$. Então existem $q, r \in D$ tais que $b = aq + r$. Então $r = aq - b \in I$, pois $a, b \in I$. Se $r \neq 0$, então $\phi(r) < \phi(a)$. Mas isso é absurdo, pois $\phi(a) = \min\{\phi(i) : a \in I \setminus \{0\}\}$. Logo $r = 0$, o que implica $b = aq$; ou seja, $I \subseteq aD$. Como a inclusão inversa sempre vale, então $I = aD$. ■

Proposição 10.40. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio eucidiano, ϕ uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$ e $d_1, d_2 \in D \setminus \{0\}$. Então $d_1 \in D^*$ se, e somente se, $\phi(d_2) = \phi(d_1 d_2)$.*

Demonstração. Se $d_1 \in D^*$, então existe $d_1^{-1} \in D$. Assim, temos que $\phi(d_1 d_2) \leq \phi(d_1 d_2 d_1^{-1}) = \phi(d_2)$. Por outro lado, sempre vale $\phi(d_2) \leq \phi(d_1 d_2)$. Logo $\phi(d_1 d_2) = \phi(d_2)$. Por outro lado, suponha $\phi(d_1 d_1) = \phi(d_2)$. Existem $q, r \in D$ tais que $d_2 = d_1 d_2 q + r$. Se $r \neq 0$, então, como $r = d_2 - d_1 d_2 q = d_2(1 - d_1 q)$ e $\boldsymbol{D}$ é domínio, segue que $1 - qa \neq 0$. Logo $\phi(r) = \phi(d_2(1 - d_1 q)) \geq \phi(d_2) = \phi(d_1 d_2)$, contradição. Logo $r = 0$ e temos $d_2 = d_1 d_2 q$. Como $d_2 \neq 0$ e $\boldsymbol{D}$ é domínio, então $d_1 q = 1$, o que implica $d_1 \in D^*$. ■

Proposição 10.41. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio euclidiano e ϕ uma função eucliana em $\boldsymbol{D}$. Então*

$$D^* = \{d \in D : \phi(d) = \phi(1)\}.$$

Demonstração. Tome $d_2 = 1$ na proposição anterior. ■

10.10 Divisão e Associação em Anéis

10.10.1 Divisão

Definição 10.25. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. A *divisão* em $\boldsymbol{A}$ é a relação binária $\preceq$ em A definida por

$$\forall a, b \in A \qquad a \preceq b \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in A \quad aq = b.$$

Se $a \preceq b$, diz-se que a é um *divisor* de b em $\boldsymbol{A}$ (ou que a *divide* b em $\boldsymbol{A}$) e que b é um *múltiplo* de a em A. Caso contrário, a não é um divisor de b em A e b não é um múltiplo de a em A, e denota-se $a \not\preceq b$.

Proposição 10.42. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. A divisão $\preceq$ em A é uma relação reflexiva e transitiva.*

Demonstração. Reflexividade: Seja $a \in A$. Então $a \preceq a$, pois $a \cdot 1 = a$.

Transitividade: Sejam $a, b, c \in A$ tais que $a \preceq b$ e $b \preceq c$. Então existem $q, q' \in A$ tais que $aq = b$ e $bq' = c$. Logo $aqq' = c$. Como $qq' \in A$, segue que $a \preceq c$. ■

Proposição 10.43. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Então*

1. $\forall a \in A, \forall u \in A^* \qquad u \preceq a \preceq 0$ *em* $\boldsymbol{A}$;
2. $\forall a \in A, \forall u \in A^* \qquad a \preceq u$ *em* $\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow a \in A^*$;
3. $\forall a \in A \qquad 0 \preceq a$ *em* $\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow a = 0$.

Demonstração. Seja $a \in A$, $u \in A^*$.

1. Como $u \in A^*$, existe $u^{-1} \in A^*$. Então $u \cdot (u^{-1} a) = a$ e segue que $u \preceq a$; como $a \cdot 0 = 0$, segue que $a \preceq 0$;

2. Se $a \preceq u$, existe $q \in A$ tal que $aq = u$. Como $u \in A^*$, segue que $aqu^{-1} = uu^{-1} = 1$. Logo $a \in A^*$. Reciprocamente, se $a \in A^*$, existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = 1$. Então $aa^{-1}u = u$ Logo $a \preceq u$;

3. Se $0 \preceq a$, existe $q \in A$ tal que $0q = a$. Mas então $a = 0$. A recíproca segue da reflexividade de $\preceq$.

■

Proposição 10.44. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $a_1, a_2 \in A$. Então $a_1A \subseteq a_2A$ se, e somente se, $a_2 \preceq a_1$.*

Demonstração. Se $a_1A \subseteq a_2A$, então $a_1 \in a_2A$. Mas isso significa que existe $q \in A$ tal que $a_1 = a_2q$, o que mostra que $a_2 \preceq a_1$. A implicação contrária segue a mesma demonstração com as implicação invertidas. ■

Definição 10.26. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $Q \subseteq A$. Um *divisor comum* de Q em $\boldsymbol{A}$ é um elemento $d \in A$ que satisfaz

$$\forall q \in Q \qquad d \preceq q \ \text{ em } \boldsymbol{A}.$$

O conjunto dos divisores comuns de Q em $\boldsymbol{A}$ é $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. O índice $\boldsymbol{A}$ pode ser omitido caso não haja ambiguidade.

Dualmente, um *múltiplo comum* de Q em $\boldsymbol{A}$ é um elemento $m \in A$ que satisfaz

$$\forall q \in Q \qquad q \preceq m \ \text{ em } \boldsymbol{A}.$$

O conjunto dos múltiplos comuns de Q em $\boldsymbol{A}$ é $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. O índice $\boldsymbol{A}$ pode ser omitido caso não haja ambiguidade.

Proposição 10.45. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $Q \subseteq A$. Então*

1. $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A) = \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A^*) = A^*$ *e* $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing) = \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(\{0\}) = A$;

2. $A^* \subseteq \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \subseteq A$;

3. $\{0\} \cap \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing \Leftrightarrow Q \subseteq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$.

Dualmente,

1. $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(A) = \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(\{0\}) = \{0\}$ *e* $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing) = \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(A^*) = A$;

2. $\{0\} \subseteq \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \subseteq A$;

3. $A^* \cap \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing \Leftrightarrow Q \subseteq A^* \Leftrightarrow \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$.

Demonstração. 1. Seja $u \in A^*$. Então $u \preceq a$ para todo $a \in A$. Logo $u \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A)$. Por outro lado, seja $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A)$. Então $d \preceq a$ para todo $a \in A$. Em particular, $d \preceq 1$. Como $1 \in A^*$, então $d \in A^*$.

Seja $u \in A^*$. Então $u \preceq v$ para todo $v \in A^*$. Logo $u \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A^*)$. Por outro lado, seja $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(A^*)$. Então $d \preceq u$ para todo $u \in A^*$. Logo $d \in A^*$.

Seja $a \in A$. Se $a \notin \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing)$, existe $q \in \varnothing$ tal que $a \not\preceq q$, o que é absurdo. Logo $a \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing)$.

Seja $a \in A$. Então $a \preceq 0$, o que implica $a \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(\{0\})$. A inclusão contrária é óbvia pela definição do conjunto dos divisores comuns.

2. Se $Q = \varnothing$, então $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$. Se $Q \neq \varnothing$, sejam $q \in Q$ e $u \in A^*$. Então $u \preceq q$. Logo $u \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. A inclusão $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \subseteq A$ é óbvia pela definição do conjunto de divisores comuns;

3. Suponhamos que $\{0\} \cap \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing$. Então $0 \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Se $Q = \varnothing$, então $Q \subseteq \{0\}$. Caso contrário, seja $q \in Q$. Como $0 \preceq q$, segue que $q = 0$. Em ambos os casos, $Q \subseteq \{0\}$.

   Suponhamos que $Q \subseteq \{0\}$. Então $Q = \varnothing$ ou $Q = \{0\}$. Pelo item 1, segue que $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$.

   Suponhamos que $\mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$. Então $\{0\} \cap \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \{0\} \neq \varnothing$.

Dualmente,

1. Note que $a \preceq 0$ para todo $a \in A$. Logo $0 \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(A)$. Por outro lado, seja $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(A)$. Então $a \preceq m$ para todo $a \in A$. Em particular, $0 \preceq m$, o que implica $m = 0$.

   Note que $0 \preceq 0$, o que implica $0 \in \mathrm{mul}\,\boldsymbol{A}(\{0\})$. Por outro lado, seja $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(\{0\})$. Então $0 \preceq m$, o que implica $m = 0$.

   Seja $a \in A$. Se $a \notin \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing)$, existe $q \in \varnothing$ tal que $q \not\preceq a$, o que é absurdo. Logo $a \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(\varnothing)$.

   Sejam $a \in A$ e $u \in A^*$. Então $u \preceq a$, o que implica $a \in \mathrm{mul}_{bmA}(A^*)$. A inclusão contrária é óbvia pela definição do conjunto dos múltiplos comuns.

2. Se $Q = \varnothing$, então $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$. Se $Q \neq \varnothing$, seja $q \in Q$. Então $q \preceq 0$, o que implica $\{0\} \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. A inclusão $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \subseteq A$ é óbvia pela definição do conjunto dos múltiplos comuns;

3. Suponhamos que $A^* \cap \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing$. Seja $m \in A^* \cap \mathrm{mul}\,\boldsymbol{A}(Q)$. Se $Q = \varnothing$, então $Q \subseteq A^*$. Caso contrário, seja $q \in Q$. Como $q \preceq m$, pois $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $q \in A^*$, pois $m \in A^*$. Logo $Q \subseteq A^*$.

Suponhamos que $Q \subseteq A^*$. Se $Q = \varnothing$, do item 1 segue que $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$. Caso contrário, sejam $q \in Q$ e $a \in A$. Então $q \in A^*$ e segue que $q \preceq a$. Logo $a \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Por outro lado, a inclusão $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \subseteq A$ é óbvia pela definição do conjunto de múltiplos comuns;

Suponhamos que $\mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A$. Então $A^* \cap \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A^*$. Como $1 \in A^*$, segue que $A^* \cap \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing$.

■

Definição 10.27. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $Q \subseteq A$. Um *máximo divisor comum* de Q em $\boldsymbol{A}$ é um elemento $d \in A$ que satisfaz

1. $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$;
2. $d' \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \Rightarrow d' \preceq d$ em $\boldsymbol{A}$.

O conjunto dos máximos divisores comuns de Q em $\boldsymbol{A}$ é $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Se Q é um conjunto finito $Q = \{a_1, \ldots, a_n\}$, denota-se $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ ou $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = (a_1, \ldots, a_n)$. O índice $\boldsymbol{A}$ pode ser omitido caso não haja ambiguidade.

Dualmente, um *mínimo múltiplo comum* de Q em $\boldsymbol{A}$ é um elemento $m \in A$ que satisfaz

1. $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$;
2. $m' \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \Rightarrow m \preceq m'$ em $\boldsymbol{A}$.

O conjunto dos mínimos múltiplos comuns de Q em $\boldsymbol{A}$ é $\mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Se Q é um conjunto finito $Q = \{a_1, \ldots, a_n\}$, denota-se $\mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}} = \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)(a_1, \ldots, a_n)$. ou $\mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = [a_1, \ldots, a_n]$ O índice $\boldsymbol{A}$ pode ser omitido caso não haja ambiguidade.

Proposição 10.46. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $Q \subseteq A$. Então*

1. $Q \subseteq \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \{0\}$;
2. $A^* \cap Q \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A^*$.

Dualmente,

1. $Q \subseteq A^* \Leftrightarrow \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A^*$;
2. $\{0\} \cap Q \neq \varnothing \Rightarrow \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \{0\}$.

Demonstração. 1. Suponha que $Q \subseteq \{0\}$. Então $A = \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Em particular, $0 \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, para todo $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, vale que $d \preceq 0$, pois $d \in A$. Logo $0 \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, se $d \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $0 \preceq d$, pois $0 \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$ e $d \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Portanto $d = 0$. Reciprocamente, se $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \{0\}$, então $0 \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$; ou seja, $\{0\} \cap \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing$, o que implica que $Q \subseteq \{0\}$.

2. Como $A^* \cap Q \neq \varnothing$, seja $a \in A^* \cap Q$. Se $u \in A^*$, então $u \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, se $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então, em particular, $d \preceq a$. Mas como $a \in A^*$, segue que $d \in A^*$. Logo $d \preceq u$, o que mostra que $u \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Por outro lado, se $d \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $d \preceq a$. Como $a \in A^*$, então $d \in A^*$, e concluímos que $A^* = \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$.

Dualmente,

1. Suponha que $Q \subseteq A^*$. Então $A = \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Seja $u \in A^*$. Então $u \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, para todo $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, vale que $u \preceq m$, pois $m \in A$. Logo $u \in \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, se $m \in \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $m \preceq u$, pois $u \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$ e $m \in \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Portanto $m \in A^*$. Reciprocamente, se $\mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = A^*$, então $1 \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$; ou seja, $A^* \cap \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q) \neq \varnothing$, o que implica $Q \subseteq A^*$.

2. Como $\{0\} \cap Q \neq \varnothing$, então $0 \in Q$. Note que $0 \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Ainda, se $m \in \mathrm{mul}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $0 \preceq m$. Então segue que $0 \in \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$. Por outro lado, se $m \in \mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q)$, então $0 \preceq m$, o que implica $m = 0$, e concluímos que $\mathrm{mmc}_{\boldsymbol{A}}(Q) = \{0\}$.

■

Proposição 10.47. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e B e C conjuntos tais que $C \subseteq B \subseteq A$. Então,* $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(B) \neq \varnothing$ *e* $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(C) \neq \varnothing$*,*

$$\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(B) = \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(C) \cup (B \setminus C)).$$

Demonstração. Seja $d \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(B)$. Então $d \in \preceq_{\boldsymbol{A}} (B)$. Seja $x \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(C) \cup (B \setminus C)$. Se $x \in B \setminus C$, então $x \in B$, o que implica $d \preceq x$. Se $x \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{A}}(C)$

...

...

...

Então, como $C \subseteq B$, para todo $c \in C$, segue que $c \in B$ e, portanto, $d \preceq c$. Ainda, para todo $b \in B \setminus C$, segue que $b \in B$ e, portanto, $d \preceq b$.

■

10.10.2 Relação de Associação

Definição 10.28. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. A relação binária $\sim$ (é associado a) em A é definida por

$$\forall a, b \in A \qquad a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists u \in A^* \quad au = b.$$

Se $a \sim b$, diz-se que a é *associado* a b em A (ou que a e b são *associados* em $\boldsymbol{A}$). Caso contrário, a não é associado a b.

Proposição 10.48. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. A relação binária $\sim$ em A é uma relação de equivalência.*

Demonstração. Reflexividade: Seja $a \in A$. Como $1 \in A^*$, segue que $a \cdot 1 = a$ e, portanto, $a \sim a$.

Simetria: Seja $a, b \in A$ tais que $a \sim b$. Então existe $u \in A^*$ tal que $au = b$. Como $u \in A^*$, então $bu^{-1} = a$, o que implica $b \sim a$.

Transitividade: Sejam $a, b, c \in A$ tais que $a \sim b$ e $b \sim c$. Então existem $u, v \in A^*$ tai que $au = b$ e $bv = c$. Assim segue que $auv = c$. Como $uv \in A^*$, conclui-se que $a \sim c$. ■

Proposição 10.49. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Então*

1. $\forall a, b \in A \qquad a \sim b \Rightarrow a \preceq b;$

2. $\forall a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A \qquad \forall i \in \mathtt{I}_n \quad a_i \sim b_i \Rightarrow \bigtimes_{i=1}^{n} a_i \sim \bigtimes_{i=1}^{n} b_i.$

Demonstração.

1. Sejam $a, b \in A$. Se $a \sim b$, então existe $u \in A^*$ tal que $au = b$. Mas isso significa que $a \preceq b$.

2. Sejam $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$ e $i \in \mathtt{I}_n$. Se $a_i \sim b_i$, então existe $u_i \in A^*$ tal que $a_i u_i = b_i$. Logo $a_1 \cdots a_n \cdot u_1 \cdots u_n = b_1 \cdots b_n$. Como $u_1 \cdots u_n \in A^*$, segue que $\bigtimes_{i=1}^{n} a_i \sim \bigtimes_{i=1}^{n} b_i$.

■

Proposição 10.50. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio e $d_1, \ldots, d_n \in D$ não todos nulos. Se d, d' são máximos divisores comuns de $d_1, \ldots, d_n$, então d e d' são associados, $d \sim d'$.*

Demonstração. Como d é máximo divisor comum de $d_1, \ldots, d_n$ e d' é divisor comum de $d_1, \ldots, d_n$, então $d' \preceq d$. Analogamente, $d \preceq d'$. Então existem $u, v \in D$ tais que $d = d'u$ e $d' = dv$. Então $d = dvu$. Como $d \neq 0$ e $\boldsymbol{D}$ é domínio, segue que e $vu = 1$. Portanto $u, v \in D^*$, o que implica $d \sim d'$. ■

10.11 Domínios de Fatoração Única

Definição 10.29. Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio. Um elemento *irredutível* em $\boldsymbol{D}$ é um elemento $i \in D$ que satisfaz

1. $i \notin (D^* \cup \{0\})$;

2. $\exists d_1, d_2 \in D \quad i = d_1 d_2 \quad \Rightarrow \quad d_1 \in D^* \text{ ou } d_2 \in D^*.$

Proposição 10.51. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio e $u_1, u_2 \in D^*$. Se existe $d \in D$ tal que $u_1 d = u_2$, então $d \in D^*$.*

Demonstração. Como $u_1 \in D^*$, existe u_1^{-1}. Assim, segue que $d = u_1^{-1}u_2$ e, portanto,

$$du_2^{-1}u_1 = u_1^{-1}u_2u_2^{-1}u_1 = u_1^{-1}u_1 = 1.$$

Logo $d \in D^*$. ■

Proposição 10.52. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio, $u \in D^*$ e $i \in D$ um elemento irredutível em $\boldsymbol{D}$. Então iu é irredutível em $\boldsymbol{D}$.*

Demonstração. Primeiro, devemos mostrar que $iu \notin (D^* \cup \{0\})$. Como $u \neq 0$ e $i \neq 0$ e $\boldsymbol{D}$ é domínio, então $iu \neq 0$. Supondo que $iu \in D^*$, então existe $v \in D^*$ tal que $(iu)v = 1$. Mas então $uv = i^{-1}$, o que é absurdo, pois $i \notin D^*$. Logo $iu \notin D^*$. Suponha, agora, que existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $iu = d_1d_2$. Se $d_1 \notin D^*$ e $d_2 \notin D^*$, então $u^{-1}d_1 \notin D^*$ e $u^{-1}d_1 \neq 0$. Logo segue que $i = (u^{-1}d_1)d_2$, o que é absurdo, pois i é irredutível. ■

Definição 10.30. Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio. Um elemento *primo* em $\boldsymbol{D}$ é um elemento $p \in D$ que satisfaz

1. $p \notin (D^* \cup \{0\})$;
2. $\forall d_1, d_2 \in D \qquad p \preceq d_1d_2 \Rightarrow p \preceq d_1$ ou $p \preceq d_2$.

Proposição 10.53. *Sejam $\boldsymbol{D}$ um domínio e p um primo em $\boldsymbol{D}$. Se existem $d_1, \ldots, d_n$ tais que $p \preceq d_1 \cdots d_n$, então existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p \preceq d_i$.*

Demonstração. Vamos mostrar por indução em n. Para o caso base, se $n = 1$, então $i = 1$ satisfaz o procurado. Para demonstrar o passo indutivo, suponhamos que a propridade vale para um natural n. Então, se $p = d_1 \cdots d_{n+1}$, como p é primo, $p \preceq d_1 \cdots d_n$ ou $p \preceq d_{n+1}$. Se $p \preceq d_1 \cdots d_n$, pela hipótese de indução, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $p \preceq d_i$; caso contrário, $p \preceq d_{n+1}$, Logo, existe $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ tal que $p \preceq d_i$. ■

Proposição 10.54. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio. Se p é primo em $\boldsymbol{D}$, então p é irredutível em $\boldsymbol{D}$.*

Demonstração. Seja p primo em $\boldsymbol{D}$. Se existem $d_1, d_2 \in D$ tais que $p = d_1d_2$, então $p \preceq d_1d_2$. Como p é primo, então $p \preceq d_1$ ou $p \preceq d_2$. Se $p \preceq d_1$, então existe $q \in D$ tal que $pq = d_1$. Assim, segue que $p = d_1d_2 = pqd_2$ e, como $\boldsymbol{D}$ é domínio, $1 = qd_2$. Logo $d_2 \in D^*$. Analogamente, se $p \preceq d_2$, segue que $d_1 \in D^*$. Portanto p é irredutível. ■

Proposição 10.55. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio euclidiano que não é um corpo e ϕ uma função euclidiana em $\boldsymbol{D}$. Então $d_0 \in D$ tal que*

$$\phi(d_0) = \min\{\phi(d) : d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})\}$$

é um elemento irredutível em $\boldsymbol{D}$.

Demonstração. Primeiro, definamos $m := \min\{\phi(d) : d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})\}$ e notemos que existe tal mínimo porque o conjunto dos naturais é bem ordenado. Notemos que $d_0 \notin D^* \cup \{0\}$ por definição. Suponha que $d_0 = d_1 d_2$, com $d_1, d_2 \in D$. Como D é um domínio, então $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$. Suponha que $d_1, d_2 \notin D^*$. Então $\phi(d_1) \geq m = \phi(d_1 d_2) \geq \phi(d_1)$ e $\phi(d_2) \geq m = \phi(d_1 d_2) \geq \phi(d_2)$. Logo $\phi(d_1) = \phi(d_1 d_2)$ e $\phi(d_2) = \phi(d_1 d_2)$, o que implica $d_1, d_2 \in D^*$, que é absurdo. ■

NOTA: Tentar mostrar a recíproca.

Definição 10.31. Um *domínio de fatoração única* é um domínio $\boldsymbol{D}$ que satisfaz

1. (Existência de Fatoração) Para todo $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, existem $p_1, \ldots, p_n$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que
$$d = \bigtimes_{i=1}^{n} p_i;$$
2. (Unicidade de Fatoração) Para todo $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, se existem $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que
$$d = \bigtimes_{i=1}^{n} p_i = \bigtimes_{i=1}^{m} q_i,$$
então $m = n$ e existe uma permutação ϕ de $\mathtt{I}_n$ tal que, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $p_i \sim q_{\phi(i)}$ em $\boldsymbol{D}$.

Domínios de fatoração única também são chamados de domínios fatoriais.

Proposição 10.56. *A função $\phi_k : \mathtt{I}_{m-1} \longrightarrow \mathtt{I}_m$, definida por*

$$\phi_k(i) := \begin{cases} i & 1 \leq i \leq k-1 \\ i+1 & k \leq i \leq m-1, \end{cases}$$

é uma função injetiva e $k \notin \mathfrak{Im}(\phi_k)$.

Demonstração. Para mostrar que ϕ_k é , sejam $i, j \in \mathtt{I}_m$, tais que $i = j$. Se $\phi(i) = i$ e $\phi(j) = j$, então $\phi(i) = \phi(j)$. Se $\phi(i) = i+1$ e $\phi(j) = j+1$, então $\phi(i) = \phi(j)$. Se $\phi(i) = i$ e $\phi(j) = j+1$, então $1 \leq i \leq k-1$ e $k \leq j \leq m-1$, absurdo. Se $\phi(i) = i+1$ e $\phi(j) = j$, então $1 \leq j \leq k-1$ e $k \leq i \leq m-1$, absurdo. Ainda, é fácil notar que $k \notin \mathfrak{Im}(\phi_k)$, pois, se $1 \leq i \leq k-1$, então $1 \leq \phi(i) \leq k-1$ e, se $k \leq i \leq m-1$, então $k+1 \leq \phi(i) \leq m$. ■

Teorema 10.57. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio. Então $\boldsymbol{D}$ é um domínio de fatoração única se, e somente se, satisfaz*

1. *Para todo $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, existem $p_1, \ldots, p_n \in D$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que*
$$d = \bigtimes_{i=1}^{n} p_i;$$

2. *Se p é irredutível em $\boldsymbol{D}$, então p é primo em $\boldsymbol{D}$.*

Demonstração. Nota-se que a primeira propriedade do enunciado é a mesma da definição de domínio de fatoração única. Basta, portanto, que assumamos essa propriedade e mostremos que as segundas propriedades são equivalentes.

Suponhamos, primeiro, que $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única. Sejam p irredutível em $\boldsymbol{D}$ e $d_1, d_2 \in D$ tais que $p \preceq d_1 d_2$. Então existe $q \in D$ tal que $pq = d_1 d_2$. Se $d_1 \in D^*$, então $pqd_1^{-1} = d_2$, o que implica $p \preceq d_2$. Analogamente, se $d_2 \in D^*$, então $p \preceq d_1$. Se $d_1 = 0$, então $p \preceq d_1$. Se $d_2 = 0$, então $p \preceq d_2$. Caso $d_1, d_2 \notin (D^* \cup \{0\})$, então, como $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única, existem $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que
$$d_1 = \bigtimes_{i=1}^{n} p_i \quad \text{e} \quad d_2 = \bigtimes_{i=1}^{m} q_i.$$
Então
$$pq = \left(\bigtimes_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\bigtimes_{i=1}^{m} q_i\right).$$
Se $q \in D^*$, então pq é irredutível, pois p é irredutível. Então pq pode ser escrito como produto de 1 irredutível e como produto de $n + m$ irredutíveis, o que é absurdo, pois $n+m \geq 2$. Logo $q \notin D^*$. Se $q = 0$, então $0 = pq = d_1 d_2$. Mas $d_1 \neq 0$ e $d_2 \neq 0$, o que é absurdo, pois $\boldsymbol{D}$ é domínio. Portanto $q \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$. Como $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única, existem $r_1, \ldots, r_l$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que
$$q = \bigtimes_{i=1}^{l} r_i.$$
Então
$$p\left(\bigtimes_{i=1}^{l} r_i\right) = \left(\bigtimes_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\bigtimes_{i=1}^{m} q_i\right).$$
Como $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única, então existe $i \in \mathtt{I}_n$ tal que $p \sim p_i$ em $\boldsymbol{D}$ ou existe $j \in \mathtt{I}_m$ tal que $p \sim q_j$ em $\boldsymbol{D}$. Então $p \preceq p_i$ ou $p \preceq q_j$. No primeiro caso, como $p_i \preceq d_1$, da transitividade de $\preceq$ segue que $p \preceq d_1$. No segundo caso, como $q_j \preceq d_2$, da transitividade de $\preceq$ segue que $p \preceq d_2$.

Suponhamos agora que $\boldsymbol{D}$ satisfaz a segunda propriedade do enunciado. Sejam $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$ e $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que

$$d = \bigtimes_{i=1}^{n} p_i = \bigtimes_{i=1}^{m} q_i.$$

Pela segunda propriedade do enunciado, $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ são primos em $\boldsymbol{D}$. Demonstraremos a segunda propriedade de domínios de fatoração única por indução em $l := \min\{n, m\}$. Para o caso base, se $l = 1$, então $n = 1$ ou $m = 1$; sem perda de generalidade, tomemos $n = 1$. Nesse caso, $d = p_1 = q_1 \cdots q_m$. Como $p_1 \preceq d$, então existe $k \in \mathtt{I}_m$ tal que $p_1 \preceq q_k$, pois p_1 é primo. Portanto existe $r \in D$ tal que $p_1 r = q_k$. Então

$$p_1 = \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} q_i\right) p_1 r \left(\bigtimes_{i=k+1}^{m} q_i\right).$$

Como $\boldsymbol{D}$ é domínio e $p_1 \neq 0$, então

$$1 = \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} q_i\right) r \left(\bigtimes_{i=k+1}^{m} q_i\right).$$

Como p_n e q_k são irredutíveis, então $r \in D^*$. Suponhamos $m > 1$. Então existe q_2. Se $k = 1$, rq_2 é irredutível, pois q_2 é irredutível e $r \in D^*$; caso contrário, se $k > 1$, então $q_{k-1}r$ é irredutível pelo mesmo motivo. Em ambos os casos, 1 é um produto de irredutíveis, o que é absurdo, pois 1 é invertível. Logo $m = 1$, o que demonstra o caso base da indução.

Agora, seja $l > 1$ e suponhamos que a propriedade vale para todo natural $k < l$. Como $p_n \preceq d$, então existe $k \in \mathtt{I}_m$ tal que $p_n \preceq q_k$, pois p_n é primo. Portanto existe $r \in D$ tal que $p_n r = q_k$. Então

$$\left(\bigtimes_{i=1}^{n-1} p_i\right) p_n = \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} q_i\right) p_n r \left(\bigtimes_{i=k+1}^{m} q_i\right).$$

Como $\boldsymbol{D}$ é domínio e $p_n \neq 0$, então

$$\bigtimes_{i=1}^{n-1} p_i = \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} q_i\right) r \left(\bigtimes_{i=k+1}^{m} q_i\right) = r \left(\bigtimes_{i=1}^{k-1} q_i\right) \left(\bigtimes_{i=k+1}^{m} q_i\right).$$

Como p_n e q_k são irredutíveis, então $r \in D^*$. Como $l > 1$, segue que $n > 1$ e $m > 1$. Então existe q_2. Consideremos a função $\phi_k : \mathtt{I}_{m-1} \longrightarrow \mathtt{I}_m$, definida por

$$\phi_k(i) := \begin{cases} i & 1 \leq i \leq k-1 \\ i+1 & k \leq i \leq m-1. \end{cases}$$

Os casos especiais são $\phi_1(i) = i + 1$ e $\phi_m(i) = i$. Notemos que ϕ_k é injetiva para todo $k \in \mathtt{I}_m$ e que $k \notin \mathfrak{Im}(\phi_k)$.

Notemos que rq_2 é irredutível, pois q_2 é irredutível e $r \in D^*$. Definamos

$$q'_i := \begin{cases} rq_{\phi_1(i)} & i = 1 \\ q_{\phi_1(i)} & 2 \leq i \leq m-1. \end{cases}$$

Caso contrário, se $k > 1$, $q_{k-1}r$ é irredutível pelo mesmo motivo, e definamos

$$q'_i := \begin{cases} q_{\phi_k(i)} & 1 \leq i \leq k-2 \ \text{ ou } \ k \leq i \leq m-1 \\ q_{\phi_k(i)}r & i = k-1 \end{cases}$$

Em ambos os casos, o lado direito da equação acima é um produto de $m-1$ termos irredutíveis e o lado esquerdo é um produto de $n-1$

$$\bigtimes_{i=1}^{n-1} p_i = \bigtimes_{i=1}^{m-1} q'_i.$$

Logo, como $\min\{n-1, m-1\} = l - 1 < l$, vale a hipótese de indução e então, $n-1 = m-1$ e existe permutação ϕ' de $\mathtt{I}_{n-1}$ tal que, para todo $i \in \mathtt{I}_{n-1}$, $p_i \sim q'_{\phi'(i)}$ em $\boldsymbol{D}$. Então segue que $n = m$. Portanto, podemos criar a permutação ϕ de $\mathtt{I}_n$, definida por

$$\phi(i) := \begin{cases} (\phi_k \circ \phi')(i) & 1 \leq i < n-1 \\ k & i = n. \end{cases}$$

Por fim, mostremos que ϕ é uma permutação de $\mathtt{I}_n$ e que, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $p_i \sim q_{\phi(i)}$ em $\boldsymbol{D}$. Primeiro, mostremos que ϕ é injetiva. Para isso, notemos que, como ϕ' é injetiva, ϕ_k é injetiva e $k \notin \mathfrak{Im}(\phi_k)$, então $(\phi_k \circ \phi')|_{\mathtt{I}_{n-1}}$ é injetiva e, então, segue que ϕ é injetiva, pois $\phi(n) = k$. Agora, para mostrar que ϕ é sobrejetiva, seja $j \in \mathtt{I}_n$ e notemos que, como ϕ_k é injetiva e $k \notin \mathfrak{Im}(\phi_k)$, então, se $1 \leq j \leq k-1$ ou $k+1 \leq j \leq m$, existe $i \in \mathtt{I}_{n-1}$ tal que $\phi(i) = j$; e, se $j = k$, então $\phi(n) = k$. Logo ϕ é sobrejetiva e concluímos que ϕ é uma permutação de $\mathtt{I}_n$.

Agora, seja $i \in \mathtt{I}_n$. Se $i = n$, então $\phi(i) = k$. Por construção, $p_n \sim q_k = q_{\phi(n)}$. Se $1 \leq i \leq n-1$, então $p_i \sim q'_{\phi'(i)}$. Se $k = 1$, separamos em dois casos. Primeiro, se $\phi'(i) = 1$, então $p_i \sim q'_{\phi'(i)}$. Mas $q'_{\phi'(i)} = q'_1$ e, como $r \in D^*$, temos que $q'_1 = rq_2$ implica $q'_1 \sim q_2$. Pela transitividade de $\sim$, segue que $p_i \sim q_2$ e, notando que $\phi_1(\phi'(i)) = \phi_1(1) = 2$, segue que $p_i \sim q_{\phi(i)}$. No segundo caso, se $2 \leq \phi'(i) \leq n-1$, então $p_i \sim q'_{\phi'(i)} \sim q_{\phi_1(\phi'(i))}$, pois $\sim$ é transitiva, e segue que $p_i \sim q_{\phi(i)}$. Agora, consideremos $k > 1$. Se paramos em dois casos, novamente. Se $\phi'(i) = k-1$, então $q'_{\phi'(i)} = q_{\phi_k(\phi'(i))}r$ e, como $r \in D^*$, segue que $q'_{\phi'(i)} \sim q_{\phi_k(\phi'(i))} = q_{\phi(i)}$. Mas $p_i \sim q'_{\phi'(i)}$ e segue, da transitividade de $\sim$, que $p_i \sim q_{\phi(i)}$. No outro caso, se $1 \leq \phi'(i) \leq k-2$ ou $k \leq \phi'(i) \leq m-1$, então $q'_{\phi'(i)} = q_{\phi_k(\phi'(i))} = q_{\phi(i)}$ e segue, da transitividade de $\sim$, que $p_i \sim q_{\phi(i)}$, e está provado o teorema. ■

Proposição 10.58. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio de fatoração única. Então*

1. *(Existência de Fatoração Reduzida) Para todo $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, existem $p_1, \ldots, p_n$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$, $u \in D^*$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tais que*

$$d = u \bigtimes_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}$$

   e, para todos $i, j \in \mathtt{I}_n$, $i \neq j$ implica que $p_i \not\sim p_j$ em $\boldsymbol{D}$.

2. *(Unicidade de Fatoração Reduzida) Para todo $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, se existem $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$, $u, v \in D^*$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ e $\beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{N}^*$ tais que*

$$d = u \bigtimes_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} = v \bigtimes_{k=1}^{m} q_k^{\beta_k},$$

   e, para todos $i, j \in \mathtt{I}_n$, $i \neq j$ implica que $p_i \not\sim p_j$ em $\boldsymbol{D}$ e que $q_i \not\sim q_j$ em $\boldsymbol{D}$, então $m = n$ e existe permutação ϕ de $\mathtt{I}_n$ tal que, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $q_{\phi(i)}$ e p_i são associados em $\boldsymbol{D}$ e $\alpha_i = \beta_{\phi(i)}$.

Demonstração. Seja $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$. Então existem $p'_1, \cdots, p'_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que

$$d = \bigtimes_{i=1}^{m} p'_i.$$

Vamos considerar os conjuntos $I_i \coloneqq \{j \in \mathtt{I}_m : p'_j \sim p'_i\}$ dos índices de elementos da fatoração de d que são associados. Esses conjuntos são uma partição de $\mathtt{I}_m$; ou seja, $P \coloneqq \{I_i : i \in \mathtt{I}_m\}$ é uma partição de $\mathcal{I}_m$. Para mostrar isso, seja $n \coloneqq |P|$ e sejam $P_1, \ldots, P_n$ os elementos de P. Primeiro, notemos que $\varnothing \notin P$ por definição. Segundo, notemos que

$$\bigcup_{j \in \mathtt{I}_n} P_j = \mathtt{I}_m$$

pois, para todo $j \in \mathtt{I}_m$, existe $k \in \mathtt{I}_n$ tal que $I_j = P_k$ e, como $j \in I_j$, isso implica que $j \in \bigcup_{i \in \mathtt{I}_n} P_i$. Terceiro, sejam $j, k \in \mathtt{I}_n$; se $P_j \cap P_k \neq \varnothing$, então seja $i \in P_j \cap P_k$; logo, para todos $i_j \in P_j, i_k \in P_k$, segue que $i_j \sim i \sim i_k$, o que implica $P_j = P_k$. Portanto podemos escrever

$$d = \bigtimes_{i=1}^{m} p'_i = \bigtimes_{k=1}^{n} \bigtimes_{i \in P_k} p'_i.$$

Sendo assim, seja $k \in \mathtt{I}_n$ e definamos $p_k \coloneqq p'_{\min(P_k)}$ e $\alpha_k \coloneqq |P_k|$. Segue claramente que p_k é irredutível em $\boldsymbol{D}$ e que $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$. Como, para todo $i \in P_k$,

vale $p'_i \sim p_k$, então existe $u'_i \in A^*$ tal que $p'_i = u'_i p_k$. Assim, definindo $u_k := \bigtimes_{i \in P_k} u'_i$, temos que $u_k \in A^*$ e

$$\bigtimes_{i \in P_k} p'_i = \bigtimes_{i \in P_k} u'_i p_k = \left(\bigtimes_{i \in P_k} u'_i \right) p_k^{\alpha_k} = u_k p_k^{\alpha_k}.$$

Assim, segue que

$$d = \bigtimes_{k=1}^{n} \bigtimes_{i \in P_k} p'_i = \bigtimes_{k=1}^{n} u_k p_k^{\alpha_k}.$$

Definindo $u := \bigtimes_{k=1}^{n} u_k$, temos que $u \in A^*$ e segue a existência da fatoração reduzida

$$d = \left(\bigtimes_{k=1}^{n} u_k \right) \left(\bigtimes_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k} \right) = u \bigtimes_{k=1}^{n} p_k^{\alpha_k}.$$

Devemos, então, mostrar a UNICIDADE... ■

NOTA: O teorema seguinte vale para um número finito de valores.

Teorema 10.59. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio de fatoração única. Então, para todo $a, b \in D \setminus \{0\}$, existe $d \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$.*

Demonstração. Se $\{a, b\} \cap D^* \neq \varnothing$, então $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b) = D^*$. Suponhamos, então, que $\{a, b\} \notin D \setminus (D^* \cup \{0\})$. Como $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única, existem $p_1, \ldots, p_n$ e $q_1, \ldots, q_m$ irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que $a = p_1 \cdots p_n$ e $b = q_1 \cdots q_m$. Seja k o número de fatores p_i e q_j associados, e suponhamos, sem perda de generalidade, que, para todo $i \leq k$, $p_i \sim q_i$ e, para todo $i \geq k+1$ e $j \geq k+1$, $p_i \not\sim q_j$.

Se $k = 0$, mostraremos que $\mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b) = D^*$. Para isso, mostraremos que $1 \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Notamos que $1 \in D^* \subseteq \mathrm{div}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Agora, seja $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{A}}(a, b)$. Como $\{a, b\} \cap \{0\} = \varnothing$, então $\{0\} \cap \mathrm{div}_{\boldsymbol{D}}(a, b) = \varnothing$. Se $d \in D^*$, então $d \preceq 1$, logo $1 \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Se $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, então existe p irredutível em $\boldsymbol{D}$ tal que $p \preceq d$. Pela transitividade de $\preceq$, $p \preceq a$ e $p \preceq b$. Como $\boldsymbol{D}$ é domínio de fatoração única, p é primo em $\boldsymbol{D}$. Então segue que existe i e j tais que $p \preceq p_i$ e $p \preceq q_j$. Como esses elementoss são irredutíveis, $p \sim p_i$ e $p \sim q_j$. Da transitividade e reflexividade de $\sim$, segue que $p_i \sim q_j$, o que é absurdo. Logo $1 \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Como todos os máximos divisores comuns são associados, então $D^* = \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$.

Se $k \geq 1$, mostraremos que $p_1 \cdots p_k \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Primeiro, notamos que $p_1 \cdots p_k \preceq a$ e $q_1 \cdots q_k \preceq b$. Como $p_i \sim q_i$ para todo $i \leq k$, então $p_1 \cdots p_k \sim q_1 \cdots q_k$. Logo $p_1 \cdots p_k \preceq q_1 \cdots q_k$ e, da trasitividade de $\preceq$, segue que $p_1 \cdots p_k \preceq b$. Logo $p_1 \cdots p_k \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Então, seja $d \in \mathrm{div}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Se $d \in D^*$, então $d \preceq p_1 \cdots p_k$. Logo $p_1 \cdots p_k \in \mathrm{mdc}_{\boldsymbol{D}}(a, b)$. Se $d \in D \setminus (D^* \cup \{0\})$, então existem $r_1, \ldots, r_l$

irredutíveis em $\boldsymbol{D}$ tais que $d = r_1 \cdots r_l$. Por $\boldsymbol{D}$ ser domínio, $r_1, \ldots, r_l$ são primos em $\boldsymbol{D}$. Como $d \preceq a$, então $r_1 \preceq p_1 \cdots p_k$. Como r_1 é primo, existe $i_1 \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $r_1 \preceq p_{i_1}$. Seja $s_1 \in D$ tal que $r_1 s_1 = p_{i_1}$. Como r_1 e p_{i_1} são irredutíveis, então $r_1 \sim p_{i_1}$, o que implica $s_1 \in D^*$. Então $r_2 \cdots r_l \preceq p_1 \cdots p_{i_1-1} \cdot s_1 \cdot p_{i_1+1} \cdots p_k$, pois $\boldsymbol{D}$ é domínio. Repetindo o processo indutivamente, conclui-se que existem $i_1, \ldots, i_m$ tais que $r_j \sim p_{i_j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$ (MELHORAR ARUMENTAÇÃO DA INDUÇÃO). Da mesma forma, cocnlui-se que que existem $i'_1, \ldots, i'_m$ tais que $r_j \sim q_{i'_j}$ para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$. Portanto, da reflexividade e transitividade de $\sim$, segue que $p_{i_j} \sim q_{i'_j}$ para todo i, j. Então $d \sim p_{i_1} \cdots p_{i_m} \sim q_{i'_1} \cdots q_{i'_m}$. Como $p_{i_1} \cdots p_{i_m} \preceq p_1 \cdots p_k$ e $q_{i'_1} \cdots q_{i'_m} \preceq q_1 \cdots q_k$, então $d \preceq p_1 \cdots p_k$(MELHORAR ARGUMENTAÇÃO FINAL). ■

Lema 10.60. *Seja $\boldsymbol{D}$ um domínio.*

10.12 Raízes de Polinômios

Proposição 10.61. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $f, g \in A[x]$. Se g é mônico, então existem $q, r \in A[x]$ tais que $f = qg + r$ e $r = 0$ ou* $\operatorname{grau}(r) < \operatorname{grau}(g)$.

Demonstração. Sejam $n := \operatorname{grau}(f)$, $m := \operatorname{grau}(g)$,

$$f = \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \text{e} \quad g = \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{m-1} b_i x^i + x^m$$

Se $m \leq n$, definimos $q(x) := a_n x^{n-m}$ e $r := f - qg$ e temos

$$\begin{aligned}
r(x) &= f(x) - q(x)g(x) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{n} a_i x^i - a_n x^{n-m} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{m-1} b_i x^i + x^m \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{n} a_i x^i - \left(\mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{m-1} a_n b_i x^{n-m+i} + a_n x^n \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{n-1} a_i x^i - \mathop{\mathbin{+}}_{i=n-m}^{n-1} a_n b_{i-n+m} x^i \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=0}^{n-m-1} a_i x^i + \mathop{\mathbin{+}}_{i=n-m}^{n-1} (a_i - a_n b_{i-n+m}) x^i.
\end{aligned}$$

Daí, segue que, se $r \neq 0$, $\operatorname{grau}(r) \leq n - 1 < m \leq \operatorname{grau}(g)$.

... TERMINAR, USEI ISSO NUMA DEMONSTRAÇÃOMAIS A FRENTE, TENHO QUE DEMMONSTRAR. ■

Definição 10.32. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel, $p = +_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$ e $a \in A$. O *valor* de p em a é o elemento

$$p(a) := \mathop{+}_{i=0}^{n} a_i a^i \in A.$$

Definição 10.33. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $p \in A[x]^* = A[x] \setminus A$. Uma *raiz* de p é um elemento $r \in A$ tal que $p(r) = 0$.

Proposição 10.62. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel, $p \in A[x]^*$ e $r \in A$. Então r é raiz de p se, e somente se, existe $q \in A[x]$ tal que $p(x) = (x - r)q(x)$.*

Demonstração. Primeiro, notemos que, se existe $q \in A[x]$ tal que $p(x) = (x - r)q(x)$, então $p(r) = (r - r)q(r) = 0q(r) = 0$. Reciprocamente, suponhamos que r é raiz de p.

... ■

Capítulo 11

Corpos

11.1 Extensões de Corpos

Definição 11.1. Seja $\boldsymbol{C}$ um corpo. Uma *extensão* de $\boldsymbol{C}$ é um corpo $\boldsymbol{E}$ tal que $\boldsymbol{C}$ é um subcorpo de $\boldsymbol{E}$.

Proposição 11.1. *Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo e $\boldsymbol{E} = (E, +, \cdot)$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$. Então $(E, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$, em que $\oplus \coloneqq +$ e $\odot \coloneqq \cdot|_{C \times E}$.*

Demonstração. Como $\boldsymbol{E}$ é um anel, então $(E, \oplus) = (E, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro 0 do corpo. Agora, como $\odot$ é a restrição de $\cdot$ a $C \times E$, então, para todo $e \in E$, $1 \odot e = 1e = e$ e, para todos $c_1, c_2 \in C$, $(c_1 \cdot c_2) \odot e = c_1 c_2 e = c_1 \odot (c_2 \odot e)$. Por fim, como $\cdot$ é distributiva sobre $+$, segue que, para todos $c \in C$ e $e_1, e_2 \in E$, $c \odot (e_1 \oplus e_2) = c(e_1 + e_2) = ce_1 + ce_2 = c \odot e_1 \oplus c \odot e_2$ e, para todos $c_1, c_2 \in C$ e $e \in E$, $(c_1 + c_2) \odot e = (c_1 + c_2)e = c_1 e + c_2 e = c_1 odote \oplus c_2 \odot e$. Por tanto, concluímos que $(E, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$. ■

Notação. Nesse caso, quando não houver ambiguidade, denotaremos $\oplus$ como $+$ e $\odot$ como $\cdot$, bem como todas outras notações relacionadas às operações do espaço veorial.

Definição 11.2. Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo e $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$. Então a *dimensão* da extensão $\boldsymbol{E}$ com respeito a $\boldsymbol{C}$ é a dimensão do espaço vetorial $\boldsymbol{E}$ sobre $\boldsymbol{C}$. A extensão $\boldsymbol{E}$ é *finita* de sua dimensão é finita e *infitina* se sua dimensão é infinita.

Definição 11.3. Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo e $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$. Um *elemento algébrico* sobre $\boldsymbol{C}$ é um elemento $\alpha \in E$ que é raiz de um polinômio em $C[x]^*$.

Proposição 11.2. *Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo e $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$. Então*

1. *Todo elemento de C é algébrico sobre $\boldsymbol{C}$;*

2. *Se $\alpha \in E\backslash\{0\}$ é um elemento algébrico sobre $\boldsymbol{C}$, então existem $c_0, \ldots, c_n \in C$ tais que $c_0 \neq 0$ e*
$$\mathop{+}_{i=0}^{n} c_i\alpha^i = 0.$$

Demonstração. 1. Seja $\alpha \in C$. Então $\alpha \in E$, pois $C \subseteq E$. Tomando $p(x) = x - \alpha$, temos que $p(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$.

2. Sejam $\alpha \in E$ um elemento algébrico sobre $\boldsymbol{C}$ e $c'_0, \ldots, c'_m \in C$ tais que
$$\mathop{+}_{i=0}^{m} c'_i\alpha^i = 0.$$
Como $c'_0, \ldots, c'_m$ não são todos nulos, seja $k := \min\{i \in \{0, \ldots, m\} : c'_i \neq 0\}$. Então, para todo $i < k$, $c'_i = 0$, e segue que
$$0 = \mathop{+}_{i=0}^{m} c'_i\alpha^i = \mathop{+}_{i=k}^{m} c'_i\alpha^i = \alpha^k \mathop{+}_{i=k}^{m} c'_i\alpha^{i-k}$$
e, como E é corpo e $\alpha \neq 0$, podemos dividir por α^k em ambos lados e temos
$$\mathop{+}_{i=k}^{m} c'_i\alpha^{i-k} = 0.$$
Fazendo, $n := m - k$ e, para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$, $c_i := c'_{k+i}$, temos que $c_0, \ldots, c_n \in E$ — com $c_0 = c'_k \neq 0$ e, portanto, não todos nulos — tais que
$$\mathop{+}_{i=0}^{n} c_i\alpha^i = \mathop{+}_{i=0}^{n} c'_{k+i}\alpha^i = \mathop{+}_{i=k}^{m} c'_i\alpha^{i-k} = 0.$$

■

Definição 11.4. Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo, $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$ e $\alpha \in E$ um elemento algébrico sobre $\boldsymbol{C}$. Um *polinômio minimal* de α sobre $\boldsymbol{C}$ é um polinômio $p \in C[x]$ que satisfaz

1. $p(\alpha) = 0$;
2. p é mônico;
3. $\text{grau}(p) = \min\{\text{grau}(f) : f \in C[x]^*, f(\alpha) = 0 \text{ e } f \text{ é mônico}\}$.

Proposição 11.3. *Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo, $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$ e $\alpha \in E$ um elemento algébrico sobre $\boldsymbol{C}$. Então existe um único polinômio minimal de α sobre $\boldsymbol{C}$.*

Demonstração. Pela definição de elemento algébrico, existe $p \in C[x]^*$ tal que $p'(\alpha) = 0$. Seja $n := \text{grau}(p')$ e $p'(x) = +_{i=0}^{n} a'_i x^i$. Como $\boldsymbol{C}$ é corpo e $a'_n \neq 0$, existe $(a'_n)^{-1} \in C$. Definindo

$$p := (a'_n)^{-1} p = \mathop{+}_{i=0}^{n-1} (a'_n)^{-1} a_i x^i + x^n,$$

segue que $p \in C[x]^*$, $\text{grau}(p) = n$, $p(\alpha) = (a'_n)^{-1} p'(\alpha) = 0$ e p é mônico. Portanto $\{\text{grau}(f) : f \in C[x]^*, f(\alpha) = 0 \text{ e } f \text{ é mônico}\}$ não é vazio, e, como é subconjunto de $\mathbb{N}$, admite mínimo, o que mostra que existe polinômio minimal de α sobre $\boldsymbol{C}$.

Para mostrar a unicidade, suponhamos que p_1 e p_2 são polinômios minimais de α sobre $\boldsymbol{C}$. Pela primeira propriedade de polinômio minimal, $(p_1 - p_2)(\alpha) = p_1(\alpha) - p_2(\alpha) = 0$. Pela terceira propriedade de polinômio minimal, $\text{grau}(p_1) = \text{grau}(p_2)$. Seja $n := \text{grau}(p_1)$ e sejam $p_1 = +_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $p_2 = +_{i=0}^{n} b_i x^i$. Pela segunda propriedade de polinômio minimal, $a_n = b_n = 1$. Então $a_n - b_n = 0$ e

$$(p_1 - p_2)(x) = \mathop{+}_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i) x^i,$$

e conclui-se que $\text{grau}(p_1 - p_2) < n$. Se $p_1 \neq p_2$, existe $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $a_i \neq b_i$. Então seja $k := \max\{i \in \{0, \ldots, n-1\} : a_i \neq b_i\}$. Assim, para todo $i > k$, $a_i = b_i$, o que implica $a_i - b_i = 0$, e temos que $\text{grau}(p_1 - p_2) = k$ e

$$(p_1 - p_2)(x) = \mathop{+}_{i=0}^{k} (a_i - b_i) x^i.$$

Como $\boldsymbol{C}$ é corpo e $a_k - b_k \neq 0$, existe $(a_k - b_k)^{-1} \in C$. Definindo

$$p := (a_k - b_k)^{-1}(p_1 - p_2) = \mathop{+}_{i=0}^{k-1} (a_k - b_k)^{-1}(a_i - b_i) x^i + x^k,$$

segue que $p \in C[x]^*$, $\text{grau}(p) = k$, $p(\alpha) = (a_k - b_k)^{-1}(p_1 - p_2)(\alpha) = (a_k - b_k)^{-1}(p_1(\alpha) - p_2(\alpha)) = 0$ e p é mônico. Mas $\text{grau}(p) = k < n = \text{grau}(p_1) = \text{grau}(p_2)$, o que contradiz a minimalidade do grau de p_1 e p_2. Portanto $p_1 = p_2$ e está provada a unicidade. ■

Proposição 11.4. *Seja $\boldsymbol{C}$ um corpo e $p \in C[x]^*$. Se p é mônico e redutível, então existem $p_1, p_2 \in C[x]^*$ tais que $p = p_1 p_2$ e p_1 e p_2 são mônicos.*

Demonstração. Como p é redutível, existem $p'_1, p'_2 \in C[x]^*$ tais que $p = p'_1 p'_2$. Sejam $n := \text{grau}(p_1)$, $p_1 = +_{i=0}^{n} a_i x^i$, e $m := \text{grau}(p_2)$, $p_2 = +_{i=0}^{m} b_i x^i$. Pela

definição de produto, sabemos que $a_n b_m = 1$, pois p é mônico. Como $\boldsymbol{C}$ é um corpo, existem $(a_n)^{-1}, (b_m)^{-1} \in C$. Definindo

$$p_1 := (a_n)^{-1} p_1' = \mathop{+}_{i=0}^{n-1} (a_n)^{-1} a_i x^i + x^n \quad \text{e} \quad p_2 := (b_m)^{-1} p_2' = \mathop{+}_{i=0}^{m-1} (b_m)^{-1} b_i x^i + x^m,$$

segue que $p_1, p_2 \in C[x]^*$ são mônicos e que

$$p = p_1' p_2' = (a_n) p_1 (b_m) p_2 = (a_n b_m) p_1 p_2 = p_1 p_2.$$

■

Proposição 11.5. *Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo, $\boldsymbol{E}$ uma extensão de $\boldsymbol{C}$, $\alpha \in E$ um elemento algébrico sobre $\boldsymbol{C}$ e $p \in C[x]^*$ um polinômio mônico tal que $p(\alpha)$. Então p é o polinômio minimal de α sobre $\boldsymbol{C}$ se, e somente se, p é irredutível em $\boldsymbol{C}[x]$.*

Demonstração. Suponhamos que p é polinômio minimal de α sobre $\boldsymbol{C}$. Se p não é irredutível em $C[x]$, como p é mônico, então existem $p_1, p_2 \in C[x]^*$ mônicos tais que $0 < \text{grau}(p_i) < \text{grau}(p)$ para todo $i \in \{1, 2\}$. Como $p(\alpha) = p_1(\alpha) p_2(\alpha) = 0$ e $\boldsymbol{C}$ é corpo, segue que $p_1(\alpha) = 0$ ou $p_2(\alpha) = 0$. No primeiro caso, $p_1 \in C[x]^*$ é um polinômio mônico, $p_1(\alpha) = 0$ e $\text{grau}(p_1) < \text{grau}(p)$, o que contradiz a minimalidade de p. No segundo caso, $p_2 \in C[x]^*$ é um polinômio mônico, $p_2(\alpha) = 0$ e $\text{grau}(p_2) < \text{grau}(p)$, o que também contradiz a minimalidade de p, e temos um absurdo. Portanto p é irredutível em $\boldsymbol{C}[x]$.

Reciprocamente, suponhamos que p é irredutível em $\boldsymbol{C}[x]$. Por hipótese, $p(\alpha) = 0$ e p é mônico. Seja $p_\alpha \in C[x]^*$ o polinômio minimal de α sobre $\boldsymbol{C}$. Então $\text{grau}(p_\alpha) \leq \text{grau}(p)$. Como p_α é mônico, exitem $q, r \in C[x]$ tais que $p = q p_\alpha + r$. Como $p(\alpha) = p_\alpha(\alpha) = 0$, então $r(\alpha) = p(\alpha) - q(\alpha) p_\alpha(\alpha) = 0$. Se $r \neq 0$, então $\text{grau}(r) < \text{grau}(p_\alpha)$. Seja $n := \text{grau}(r)$. Como $r(\alpha) = 0$, segue que $\text{grau}(r) > 0$. Então seja $r(x) = +_{i=0}^{n} a_i x^i$. Como $\boldsymbol{C}$ é corpo, existe $(a_n)^{-1} \in C$. Assim, definindo

$$p' := (a_n)^{-1} r = \mathop{+}_{i=0}^{n-1} (a_n)^{-1} a_i x^i + x^n,$$

e segue que $p' \in C[x]^*$, $p'(\alpha) = (a_n)^{-1} p'(\alpha) = 0$ e p' é mônico. Mas $\text{grau}(p') = n = \text{grau}(r) < \text{grau}(p_\alpha)$, o que contradiz a minimalidade do grau de p_α. Então $r \neq 0$. Se $r = 0$, então $p = q p_\alpha$. Mas p é irredutível, e $p_\alpha \in C[x]^*$, o que implica $q \in C$. Como p e p_α são mônicos, segue que $q = 1$ e, portanto, $p = p_\alpha$. ■

11.2 COISAS DA PROVA 3

Teorema 11.6. *Seja $k \subseteq K$ uma estensão de corpos, $\overline{k}$ fecho algébrico de k. Então as seguintes condições são equivalentes:*

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\cdot"] \arrow[d, "\cdot"'] & \overline{k} \\ K \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

1. *DIAGRAMA COMUTATIVO*
2. *K é corpo de raízes sobre k de uma família $(f_i)_{i\in I}$ de polinômios em $k[x]\setminus k$;*
3. *Se $f \in k[x]\setminus k$ é irredutível em $k[x]$ com raiz α, então $f(x) = c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$ em $k[x]$, com $\alpha_1 = \alpha$ e $c \in k \setminus \{0\}$.*

Demonstração. PULEI, tem nas notas mas não tudo. ■

Definição 11.5. Uma extensão de corpos $k \subseteq K$ é uma *extensão normal* se ela satisfaz uma das três condições do teorema acima.

OBS: Se $k \subseteq \overline{k}$ é uma extensão algébrica, então todo $\beta \in \overline{k}$ é algébrico sobre k vale para $\beta \in K$, então $k \subseteq K$ é extensão algébrica.

Se $k \subseteq K$ é extensão algébrica, então $k \subseteq K \subseteq \overline{K}$ são extensões algébricas, então $k \subseteq \overline{K}$ é extensão algébrica. Então $\overline{k} \sim \overline{K}$ é fecho algébrico de k.

(?????)

Proposição 11.7. *Seja $k \subseteq K$ um extensão algébrica e $\sigma : K \longrightarrow K$ um homomorfismo de cropos que satisfaz $\sigma|_k = id|_k$. Então σ é um isomorfismo de corpos.*

Demonstração. ... ■

Definição 11.6. Seja $E \subseteq F$ uma extensão algébrica e $\sigma : E \longrightarrow L$ um homomorfismo de corpos tal que L é algebricamente fechaado, $\sigma(E) \subseteq L$ é uma extensão algébrica (L é fecho algébrico de $\sigma(E)$)

$$S_\sigma := \{\mu : \mu : F \longrightarrow L \text{ homomorfismo de corpos}, \mu|_E = \sigma\}.$$

Lema 11.8. *$|S_\sigma|$ depende de $E \subseteq F$, mas não depende de σ nem de L.*

Demonstração. ... vários diagramas ■

Definição 11.7. Seja $E \subseteq F$ uma extensão algébrica. O *grau de separabilidade* da extensão é $[F : E]_S := |S_\sigma|$. (Pode escolher $l = \overline{E}$ e σ inclusão.)

Teorema 11.9. 1. *$E \subseteq F \subseteq K$ extensões algébricas, então*

$$[K : E]_S = [K : F]_S[F : E]_S$$

2. *$E \subseteq F$ extensão finita (logo algébrica), então*

$$[F : E]_S \leq [F : E]$$

Demonstração. ... ■

Definição 11.8. Seja $E \subseteq K$ uma extensão finita. Ela é *separável* se $[K : E]_S = [K : E]$.

Corolário 11.10. *Sejam $E \subseteq F \subseteq K$ extensões de corpos, $[K : E] < \infty$, $E \subseteq K$ separável. Então $E \subseteq F$ e $FsubseteqK$ são separáveis.*

Demonstração.

$$[K : F]_S[F : E]_S = [K : E]_S = [K : E] = [K : F][F : E].$$

Como $[F : E]_S \leq [F : E]$ e $[K : F]_S \leq [K : F]$, segue o corolário. ■

Capítulo 12

Matrizes

Definição 12.1. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $l, c \in \mathbb{N}$. Uma *matriz* de dimensão $l \times c$ sobre $\boldsymbol{A}$ é uma função $M : \mathtt{I}_l \times \mathtt{I}_c \longrightarrow A$. Representa-se isso por

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,c} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{l,1} & \cdots & m_{l,c} \end{bmatrix},$$

em que $m_{i,j} \coloneqq M(i,j) \in A$. O conjunto $\mathtt{I}_l$ é o conjunto dos *índices das linhas* e $\mathtt{I}_c$ é o conjunto dos *índices das colunas* da matriz M. A imagem de M é o conjunto das *entradas* da matriz M e o elemento $m_{i,j}$ é a entrada da linha i e coluna j.

O conjunto de todas as matrizes de dimensão $l \times c$ sobre $\boldsymbol{A}$ é denotado por $\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$.

Definição 12.2. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $d \in \mathbb{N}$. Uma *matriz quadrada* de dimensão d sobre $\boldsymbol{A}$ é uma matriz $M \in \mathbb{M}_{d\times d}(\boldsymbol{A})$. O conjunto de todas as matrizes quadradas de dimensão d sobre $\boldsymbol{A}$ é denotado por $\mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$.

Definição 12.3. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $M \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$. A *matriz transposta* de M é a matriz $M^\intercal \in \mathbb{M}_{c\times l}(\boldsymbol{A})$ definida por

$$(M^\intercal)(i,j) \coloneqq m_{j,i}.$$

12.1 Soma de Matrizes

Definição 12.4. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $M, N \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$. A *matriz soma* das matrizes M e N é a matriz $(M+N) \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$ definida por

$$(M+N)(i,j) \coloneqq m_{i,j} + n_{i,j}.$$

Definição 12.5. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e 0 o elemento neutro da soma de $\boldsymbol{A}$.

1. A *matriz nula* de dimensão $l \times c$ sobre $\boldsymbol{A}$ é a matriz $\mathbb{O}_{l\times c} \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$, definida por
$$\mathbb{O}_{l\times c}(i,j) := 0.$$

2. Se $M \in \mathbb{M}_{l\times c}$, a *matriz negativa* de M é a matriz $-M \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$, definida por
$$(-M)(i,j) := -m_{i,j}.$$

Proposição 12.1. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $+$ a operação binária em $\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$ definida por*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}) \times \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}) &\longrightarrow \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}) \\ (M,N) &\longmapsto M+N. \end{aligned}$$

Então $(\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}),+)$ é um grupo com elemento neutro $\mathbb{O}_{l\times c}$. Se $\boldsymbol{A}$ é comutativo, então $(\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}),+)$ é comutativo.

Demonstração. Sejam $M, N, P \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$. Primeiro, notemos que $+$ é associativa, pois, como a soma no anel é associativa, segue que

$$(m_{i,j} + n_{i,j}) + p_{i,j} = m_{i,j} + (n_{i,j} + p_{i,j})$$

e, portanto, $(M+N)+P = M+(N+P)$. Então, notemos que $\mathbb{O}$ é elemento neutro de $+$. Como 0 é elemento neutro da soma da anel, segue que

$$m_{i,j} + 0 = 0 + m_{i,j} = m_{i,j}$$

e, portanto, $M + \mathbb{O} = \mathbb{O} + M = M$. Ainda, notemos que, como $-m_{i,j}$ é o inverso aditivo de $m_{i,j}$ no anel, segue que

$$m_{i,j} + (-m_{i,j}) = (-m_{i,j}) + m_{i,j} = 0$$

e, portanto, $M + (-M) = (-M) + M = \mathbb{O}$. Assim, concluímos que $(\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}),+)$ é um anel. Por fim, notemos que, se $\boldsymbol{A}$ é comutativo, então $+$ é comutativa, pois, como a soma no anel é comutativa, segue que

$$m_{i,j} + n_{i,j} = n_{i,j} + m_{i,j}$$

e, portanto, $M + N = N + M$. Assim, concluímos que, se $\boldsymbol{A}$ é comutativo, então $(\mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A}),+)$ é comutativo. ■

12.2 Produto de Matrizes e Produto Por Escalar

Definição 12.6. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $M \in \mathbb{M}_{l\times d}(\boldsymbol{A})$ e $N \in \mathbb{M}_{d\times c}(\boldsymbol{A})$. A *matriz produto* das matrizes M e N é a matriz $(MN) \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$ definida por

$$(MN)(i,j) \coloneqq \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} m_{i,k}n_{k,j}.$$

Proposição 12.2. *Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $M \in \mathbb{M}_{l\times d_1}(\boldsymbol{A})$, $N \in \mathbb{M}_{d_1\times d_2}(\boldsymbol{A})$ e $P \in \mathbb{M}_{d_2\times c}(\boldsymbol{A})$. Então*

$$(MN)P = M(NP).$$

Demonstração. Um elemento de MN é dado por

$$(mn)_{i,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1}n_{k_1,j}.$$

Logo, um elemento de $(MN)P$ é dado por

$$((mn)p)_{i,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} (mn)_{i,k_2}p_{k_2,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1}n_{k_1,k_2} \right) p_{k_2,j}.$$

Analogamente, um elemento de $M(NP)$ é dado por

$$(m(np))_{i,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1}(np)_{k_1,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} n_{k_1,k_2}p_{k_2,j} \right).$$

Mas então, como $\boldsymbol{A}$ é um anel, segue que

$$\begin{aligned}
((mn)p)_{i,j} &= \mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1}n_{k_1,k_2} \right) p_{k_2,j} \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1}n_{k_1,k_2}p_{k_2,j} \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} m_{i,k_1}n_{k_1,k_2}p_{k_2,j} \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{k_1=1}^{d_1} m_{i,k_1} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k_2=1}^{d_2} n_{k_1,k_2}p_{k_2,j} \right) \\
&= (m(np))_{i,j}.
\end{aligned}$$

■

Definição 12.7. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e 0 e 1 os elementos neutros da soma e da multiplicação de $\boldsymbol{A}$ respectivamente. A *matriz identidade* de dimensão d sobre $\boldsymbol{A}$ é a matriz $\mathrm{id}_d \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ definida por

$$\mathrm{id}_d(i,j) \coloneqq \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases}$$

Essa função δ é conhecida como delta de Kronecker.

Proposição 12.3. *Seja $\boldsymbol{A}$ um anel e $\cdot$ a operação binária em $\mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ definida por*

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}) \times \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}) &\longrightarrow \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}) \\ (M,N) &\longmapsto MN. \end{aligned}$$

Então $(\mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}), \cdot)$ é um monoide com elemento neutro id_d.

Demonstração. Sejam $M, N, P \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$. Pela proposição anterior, sabemos que vale $(MN)P = M(NP)$ e que, portanto, $\cdot$ é associativa. Agora, notemos que um elemento de $M\mathrm{id}_d$ é da forma

$$\mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} m_{i,k}\delta_{k,j}.$$

Mas, para $k \in \mathtt{I}_d$, se $k \neq j$, então $\delta_{k,j} = 0$ e, se $k = j$, então $\delta_{k,j} = 1$ e, portanto, segue que

$$\mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} m_{i,k}\delta_{k,j} = m_{i,j}.$$

Assim, concluímos que $M\mathrm{id}_d = M$. Analogamente, mostra-se que $\mathrm{id}_d M = M$, e concluímos que id_d é elemento neutro de $\cdot$. Isso mostra que $(\mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}), \cdot)$ é um monoide. ■

Definição 12.8. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel. Uma *matriz invertível* é uma matriz $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que é invertível com respeito ao produto do monoide $(\mathbb{M}_d(\boldsymbol{A}), \cdot)$. A matriz inversa de M é denotada M^{-1}.

Definição 12.9. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel, $a \in A$ e $M \in \mathbb{M}_{l\times c}(\boldsymbol{A})$. O *produto por escalar* de a e M é a matriz $aM \in \mathbb{M}_{l\times c}$ definida por

$$(aM)(i,j) \coloneqq am_{i,j}.$$

12.3 Matrizes Quadradas

Definição 12.10. Seja $\boldsymbol{A}$ um anel.

1. Uma *matriz triangular superior* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que satisfaz
$$\forall i, j \in \mathtt{I}_d \qquad i > j \Rightarrow m_{i,j} = 0.$$

2. Uma *matriz triangular inferior* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ sobre $\boldsymbol{A}$ que satisfaz
$$\forall i, j \in \mathtt{I}_d \qquad i < j \Rightarrow m_{i,j} = 0.$$

3. Uma *matriz triangular superior* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que satisfaz
$$\forall i, j \in \mathtt{I}_d \qquad i > j \Rightarrow m_{i,j} = 0.$$

4. Uma *matriz triangular* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que é triangular superior ou triangular inferior.

5. Uma *matriz diagonal* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que é triangular superior e triangular inferior; ou seja, que satisfaz
$$\forall i, j \in \mathtt{I}_d \qquad i \neq j \Rightarrow m_{i,j} = 0.$$

6. Uma *matriz simétrica* uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que é igual a sua transposta
$$M = M^{\intercal}.$$

7. Uma *matriz antissimétrica* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ que é igual à negativa da sua transposta
$$M = -M^{\intercal}.$$

8. Uma *matriz ortogonal* é uma matriz quadrada $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$ cuja transposta é igual à sua inversa
$$M^{\intercal} = M^{-1}.$$

12.4 Traço e Determinante

Definição 12.11. Sejam $\boldsymbol{A}$ um anel e $M \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$. O *traço* de M é o elemento $\operatorname{tr}(M) \in A$ definido por
$$\operatorname{tr}(M) \coloneqq \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} m_{i,i}.$$

Proposição 12.4. *Sejam* $\boldsymbol{A}$ *um anel,* $a \in A$ *e* $M, N \in \mathbb{M}_d(\boldsymbol{A})$*. Então*

1. $\operatorname{tr}(M^\intercal) = \operatorname{tr}(M)$;
2. $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$;
3. $\operatorname{tr}(M + N) = \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N)$;
4. $\operatorname{tr}(aM) = a \operatorname{tr}(M)$.

Demonstração. 1.

$$\operatorname{tr}(M) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} m_{i,i} = \operatorname{tr}(M^\intercal).$$

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(MN) &= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} m_{i,k} n_{k,i} \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} n_{k,i} m_{i,k} \right) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{d} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} n_{k,i} m_{i,k} \right) \\
&= \operatorname{tr}(NM).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(M + N) &= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} (m_{i,i} + n_{i,i}) \\
&= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} m_{i,i} + \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} n_{i,i} \\
&= \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N).
\end{aligned}$$

4.

$$\operatorname{tr}(aM) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} a m_{i,i} = a \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{d} m_{i,i} = a \operatorname{tr}(M).$$

■

Capítulo 13

Espaços Vetoriais

13.1 Espaço e Subespaço Vetoriais

Definição 13.1. Um *espaço vetorial* (ou *espaço linear*) sobre um corpo $\boldsymbol{C} = (C, +, \cdot)$ é uma tripla $\boldsymbol{V} = (V, +, \boldsymbol{\cdot})$ em que

1. $(V, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro $\mathbf{0}$;
2. $\boldsymbol{\cdot} : C \times V \longrightarrow V$ é uma função que satisfaz
   (a) $\forall \boldsymbol{v} \in V \qquad 1 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$;
   (b) $\forall c_1, c_2 \in C \ \forall \boldsymbol{v} \in V \qquad (c_1 \cdot c_2) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{\cdot} (c_2 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v})$;
3. (Distributividades)
   (a) $\forall c \in C \ \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \qquad c \boldsymbol{\cdot} (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = c \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}_1 + c \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}_2$;
   (b) $\forall c_1, c_2 \in C \ \forall \boldsymbol{v} \in V \qquad (c_1 + c_2) \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v} + c_2 \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{v}$.

Os elementos de V são chamados de *vetores* e denotados em negrito e os elementos de C são chamados de *escalares*. As operações $+$ e $\boldsymbol{\cdot}$ são denotadas por $+$ e $\cdot$, o inverso de $\boldsymbol{v} \in V$ é denotado $-\boldsymbol{v}$ e a imagem de $(c, v) \in C \times V$, chamada de *produto* de c e $\boldsymbol{v}$, é denotada por $c\boldsymbol{v}$. Quando o corpo é $\mathbb{R}$, dizemos *espaço vetorial real*, quando o corpo é $\mathbb{C}$, dizemos *espaço vetorial complexo*.

Proposição 13.1. *Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então, para todos $\boldsymbol{v} \in V$ e $c \in C$,*

1. $c\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow c = 0$ *ou* $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$;
2. $-(c\boldsymbol{v}) = (-c)\boldsymbol{v} = c(-\boldsymbol{v})$;
3. $c\boldsymbol{v} = (-c)(-\boldsymbol{v})$.

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{v} \in V$ e $c \in C$.

1. Primeiro, notemos que

$$\begin{aligned} 0\boldsymbol{v} &= 0\boldsymbol{v} + \mathbf{0} \\ &= 0\boldsymbol{v} + (0\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v}) \\ &= (0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{v}) - 0\boldsymbol{v} \\ &= (0+0)\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v} \\ &= 0\boldsymbol{v} - 0\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

   Agora, notemos que

$$\begin{aligned} c\mathbf{0} &= c\mathbf{0} + \mathbf{0} \\ &= c\mathbf{0} + (c\mathbf{0} - c\mathbf{0}) \\ &= (c\mathbf{0} + c\mathbf{0}) - c\mathbf{0} \\ &= c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) - c\mathbf{0} \\ &= c\mathbf{0} - c\mathbf{0} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

   Portanto, se $c = 0$ ou $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, então $c\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Agora, suponhamos que $c\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Se $c \neq 0$, como $\boldsymbol{C}$ é corpo, segue da demonstração anterior que

$$\boldsymbol{v} = c^{-1}c\boldsymbol{v} = c^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

2. Basta notar que

$$\begin{aligned} -(c\boldsymbol{v}) &= -(c\boldsymbol{v}) + \mathbf{0} \\ &= -(c\boldsymbol{v}) + (0\boldsymbol{v}) \\ &= -(c\boldsymbol{v}) + (c - c)\boldsymbol{v} \\ &= -(c\boldsymbol{v}) + (c\boldsymbol{v} + (-c)\boldsymbol{v}) \\ &= (-(c\boldsymbol{v}) + c\boldsymbol{v}) + (-c)\boldsymbol{v} \\ &= \mathbf{0} + (-c)\boldsymbol{v} \\ &= (-c)\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
-(c\boldsymbol{v}) &= -(c\boldsymbol{v}) + \mathbf{0} \\
&= -(c\boldsymbol{v}) + (c\mathbf{0}) \\
&= -(c\boldsymbol{v}) + c(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}) \\
&= -(c\boldsymbol{v}) + (c\boldsymbol{v} + c(-\boldsymbol{v})) \\
&= (-(c\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{v}) + c(-\boldsymbol{v}) \\
&= \mathbf{0} + c(-\boldsymbol{v}) \\
&= c(-\boldsymbol{v}).
\end{aligned}$$

3. Do item anterior, segue que

$$c\boldsymbol{v} = (-(-c))\boldsymbol{v} = (-c)(-\boldsymbol{v}).$$ ■

Proposição 13.2. *Seja* $\boldsymbol{C}$ *um corpo e* n *um natural positivo. Então* $(C^n, +, \cdot)$, *em que*

$$\begin{aligned}
\cdot : C \times C^n &\longrightarrow C^n \\
(c, (c_1, \ldots, c_n)) &\longmapsto (c \cdot c_1, \ldots, c \cdot c_n),
\end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$.

Demonstração. Claramente $(C^n, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro $(0, \ldots, 0)$. Note que, para todos $(c_1, \ldots, c_n) \in C^n$ e $c, c' \in C$,

$$1 \cdot (c_1, \ldots, c_n) = (1 \cdot c_1, \ldots, 1 \cdot c_n) = (c_1, \ldots, c_n)$$

e

$$\begin{aligned}
(c \cdot c') \cdot (c_1, \ldots, c_n) &= ((c \cdot c') \cdot c_1, \ldots, (c \cdot c') \cdot c_n) \\
&= ((c \cdot (c' \cdot c_1), \ldots, (c \cdot (c' \cdot c_n)) \\
&= c \cdot (c' \cdot c_1, \ldots, c' \cdot c_n) \\
&= c \cdot (c' \cdot (c_1, \ldots, c_n)).
\end{aligned}$$

Ainda, note que, para todos $(c_1, \ldots, c_n), (c'_1, \ldots, c'_n) \in C^n$ e $c, c' \in C$,

$$\begin{aligned}
c \cdot ((c_1, \ldots, c_n) + (c'_1, \ldots, c'_n)) &= c \cdot (c_1 + c'_1, \ldots, c_n + c'_n) \\
&= (c \cdot (c_1 + c'_1), \ldots, c \cdot (c_n + c'_n)) \\
&= (c \cdot c_1 + c \cdot c'_1, \ldots, c \cdot c_n + c \cdot c'_n) \\
&= (c \cdot c_1, \ldots, c \cdot c_n) + (c \cdot c'_1, \ldots, c \cdot c'_n) \\
&= c \cdot (c_1, \ldots, c_n) + c \cdot (c'_1, \ldots, c'_n)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(c+c')\cdot(c_1,\ldots,c_n) &= ((c+c')c_1,\ldots,(c+c')c_n)\\ &= (c\cdot c_1+c'\cdot c_1,\ldots,c\cdot c_n+c'\cdot c_n)_{i\in I}\\ &= (c\cdot c_1,\ldots,c\cdot c_n)+(c'\cdot c_1,\ldots,c'\cdot c_n)\\ &= c\cdot(c_1,\ldots,c_n)+c'\cdot(c_1,\ldots,c_n).\end{aligned}$$ ■

Para generalizar esse resultado, lembremos que o produto de uma família $(C_i)_{i\in I}$ de conjuntos é $\bigtimes_{i\in I} C_i$ e, quando $C_i = C$, temos que $\bigtimes_{i\in I} C_i = C^I$ e os elementos de C^I são funções $c = (c_i)_{i\in I}$ de I em C.

Proposição 13.3 (EXERCÍCIO)**.** *Sejam $\boldsymbol{C}$ um corpo e I um conjunto não vazio. Então $\boldsymbol{C^I} = (C^I, +, \cdot)$, em que*

$$\begin{aligned}+ : C^I \times C^I &\longrightarrow C^I\\ (\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}') &\longmapsto (c_i + c_i')_{i\in I}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cdot : C \times C^I &\longrightarrow C^I\\ (a,\boldsymbol{c}) &\longmapsto (a\cdot c_i)_{i\in I},\end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$.

Proposição 13.4 (Espaço de Funções)**.** *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então $\boldsymbol{W^V} = (W^V, +, \cdot)$, em que*

$$\begin{aligned}+ : W^V \times W^V &\longrightarrow W^V\\ (\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2) &\longmapsto \boldsymbol{f}_1+\boldsymbol{f}_2 : V \longrightarrow W\\ &\qquad\qquad \boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v})+\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\cdot : C \times W^V &\longrightarrow W^V\\ (c,\boldsymbol{f}) &\longmapsto c\boldsymbol{f} : V \longrightarrow W\\ &\qquad\qquad \boldsymbol{v} \longmapsto c\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$.

Demonstração. Primeiro, sabemos que $(W^V, +)$ é um grupo comutativo com elemento neutro $0 : W^V \times W^V \longrightarrow W^V$ definido por $0(\boldsymbol{v}) = 0$. Devemos então mostrar que $\cdot : C \times W^V \longrightarrow W^V$ satisfaz os itens da definição de espaço vetorial.

Primeiro, seja $\boldsymbol{f} \in W^V$. Então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$, $(1\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) = 1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$, o que mostra que $1\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$. Agora, sejam $c_1, c_2 \in C$ e $\boldsymbol{f} \in W^V$. Então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$,

$$((c_1c_2)\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) = (c_1c_2)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = c_1(c_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})) = c_1(c_2\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) = (c_1(c_2\boldsymbol{f}))(\boldsymbol{v}),$$

o que mostra que $(c_1c_2)\boldsymbol{f} = c_1(c_2\boldsymbol{f})$.

Por fim, devemos mostrar as propriedades distributivas. Sejam $c \in C$ e $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in W^V$. Então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$,

$$\begin{aligned}(c(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2))(\boldsymbol{v}) &= c(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= c(\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{v})) \\ &= c\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{v}) + c\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{v}) \\ &= (c\boldsymbol{f}_1)(\boldsymbol{v}) + (c\boldsymbol{f}_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= (c\boldsymbol{f}_1 + c\boldsymbol{f}_2)(\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

o que mostra que $c(\boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{f}_2) = c\boldsymbol{f}_1 + c\boldsymbol{f}_2$. Agora, sejam $c_1, c_2 \in C$ e $\boldsymbol{f} \in W^V$. Então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$,

$$\begin{aligned}((c_1 + c_2)\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) &= (c_1 + c_2)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) + c_2\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \\ &= (c_1\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) + (c_2\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}) \\ &= (c_1\boldsymbol{f} + c_2\boldsymbol{f})(\boldsymbol{v}),\end{aligned}$$

o que mostra que $(c_1 + c_2)\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{f} + c_2\boldsymbol{f}$. Assim, concluímos que $(W^V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$. ■

Definição 13.2. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Um *subespaço vetorial* de $\boldsymbol{V}$ é um conjunto não vazio $W \subseteq V$ tal que

1. $\forall \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W \qquad \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$;
2. $\forall c \in C\ \forall \boldsymbol{w} \in W \qquad c\boldsymbol{w} \in W$.

Proposição 13.5. *Seja $\boldsymbol{V} = (V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então um conjunto não vazio $W \subseteq V$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$ se, e somente se, $\boldsymbol{W} = (W, +|_{W\times W}, \cdot|_{C\times W})$ é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$.*

Demonstração. ... ■

Proposição 13.6. *Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e W um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. Então*

1. $\mathbf{0} \in W$;

2. *$\{\mathbf{0}\}$ e V são subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$.*

Demonstração. 1. Como W não é vazio, seja $\boldsymbol{w} \in W$. Então $0\boldsymbol{w} = \mathbf{0} \in W$.

2. Seja $W = \{\mathbf{0}\}$. Se $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$, $\boldsymbol{w}_1 = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$, e segue que $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Ainda, para todo $c \in C$, segue que $c\boldsymbol{w}_1 = c\mathbf{0} = \mathbf{0} \in W$. Seja $W = V$. Como $\boldsymbol{V}$ é espaço vetorial, então V é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$ pala proposição anterior. ■

Proposição 13.7. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $(W_i)_{i\in I}$ uma família de subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$. Então*

$$W := \bigcap_{i\in I} W_i$$

é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Demonstração. Como, para todo $i \in I$, $\mathbf{0} \in W_i$, segue que $\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio. Agora, sejam $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ e $c \in C$. Então, para todo $i \in I$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_i$ e, como W_i é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$, segue que $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W_i$ e que $c\boldsymbol{w}_1 \in W_i$. Logo $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$ e $c\boldsymbol{w}_1 \in W$, o que mostra que W é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. ■

Proposição 13.8. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $\{W_i\}_{i\in I}$ uma cadeia de subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$ (ou seja, para todos $I, j \in I$, $W_I \subseteq W_j$ ou $W_j \subseteq W_i$). Então*

$$W := \bigcup_{i\in I} W_i$$

é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$.

Demonstração. Como, para todo $i \in I$, $\mathbf{0} \in W_i$, pois W_i é subespaço vetoriasl de $\boldsymbol{V}$, segue que $\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio. Agora, sejam $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$. Então existem $i, j \in I$ tais que $\boldsymbol{w}_1 \in W_i$ e $\boldsymbol{w}_2 \in W_j$. Nesse caso, $W_i \subseteq W_j$ ou $W_j \subseteq W_i$. Sem perda de generalidade, suponhamos o primeiro caso. Então segue que $\boldsymbol{w}_1 \in W_j$ e, portanto, $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W_j$, o que mostra que $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$. Agora, seja $c \in C$ e notemos que, como W_i é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$, segue que $c\boldsymbol{w}_1 \in W_i$. Logo $c\boldsymbol{w}_1 \in W$, o que mostra que W é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. ■

Definição 13.3. Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $W \subseteq V$ e $(W_i)_{i\in I}$ uma indexação do conjunto de todos subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$ dos quais W é subconjunto. O *subespaço vetorial gerado por* W em $\boldsymbol{V}$ é o subespaço vetorial

$$\langle W \rangle := \bigcap_{i\in I} W_i.$$

Nesse caso, dizemos que W é um *conjunto gerador* de $\langle W \rangle$ ou que W gera $\langle W \rangle$.

Proposição 13.9. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então $\langle\varnothing\rangle = \{\mathbf{0}\}$.*

Demonstração. Como $\{\mathbf{0}\}$ é um subespaço vetorial de V e $\varnothing \subseteq \{\mathbf{0}\}$, segue que, se $\boldsymbol{v} \in \langle\varnothing\rangle$, então $\boldsymbol{v} \in \{\mathbf{0}\}$, o que implica $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ e, portanto, que $\langle\varnothing\rangle = \{\mathbf{0}\}$. ■

13.2 Combinação Linear de Vetores

Definição 13.4. Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$ um conjunto finito tal que $W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$. Uma *combinação linear* de W em $\boldsymbol{V}$ é um vetor $\boldsymbol{v} \in V$ tal que existem $c_1, \ldots, c_n \in C$ satisfazendo

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{w}_i.$$

Se W é um conjunto infinito, uma *combinação linear* de W é uma combinação linear de um subconjunto finito de W.

O vetor $\mathbf{0}$ é combinação linear de qualquer conjunto, pois é a soma vazia.

Teorema 13.10. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$ não vazio. Então $\langle W\rangle$ é o conjunto de todas as combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$.*

Demonstração. Consideremos, primeiro, o caso em que $W = \varnothing$. Nesse caso, $\langle W\rangle = \{\mathbf{0}\}$, e a única combinação linear de W é a soma vazia $\mathbf{0}$, o que mostra a igualdade dos conjuntos.

Agora, assumamos que $W \neq \varnothing$ e seja $(W_j)_{j\in J}$ uma indexação do conjunto de todos subespaços de $\boldsymbol{V}$ que contêm W. Primeiro, mostraremos que uma combinação linear de W em $\boldsymbol{V}$ está em $\langle W\rangle$. Seja $\boldsymbol{v} \coloneqq +_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w}_i$ uma combinação linear de W em $\boldsymbol{V}$. Para todo $j \in J$, W_j é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. Portanto, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, segue que $c_i\boldsymbol{w_i} \in W_j$ e, então, que $\boldsymbol{v} \in W_j$. Logo $\boldsymbol{v} \in \langle W\rangle$.

Reciprocamente, mostraremos que o conjunto de todas combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. Primeiro, notemos que $\mathbf{0}$ é uma combinação linear de W, pois, para todo $\boldsymbol{w} \in W$, vale $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{w}$. Agora, sejam $\boldsymbol{v}_1 = +_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w}_i$ e $\boldsymbol{v}_2 = +_{i=1}^{m} c'_i\boldsymbol{w}'_i$ combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$ e $c \in C$. Então, se definirmos, para todo $i \in \mathtt{I}_m$, $\boldsymbol{w}_{n+i} \coloneqq \boldsymbol{w}'_i$ e $c_{n+i} \coloneqq c'_i$ e, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $\overline{c}_i \coloneqq cc_i$, segue que

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w}_i + \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{m} c'_i\boldsymbol{w}'_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+m} c_i\boldsymbol{w}_i$$

e

$$c\boldsymbol{v}_1 = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} (cc_i)\boldsymbol{w}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \overline{c}_i\boldsymbol{w}_i$$

são combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$, o que implica que o conjunto de todas combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$ é um subespaço de $\boldsymbol{V}$. Assim, como $\langle W \rangle$ é subconjunto de todo conjunto que é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$ contendo W, segue que o conjunto de todas combinações lineares de W em $\boldsymbol{V}$ é igual ao subespaço gerado por W. ■

Proposição 13.11. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $W \subseteq V$ e $\boldsymbol{v} \in \langle W \rangle$. Então existem $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ distintos e $c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que*

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{w}_i.$$

Demonstração. Como $\boldsymbol{v} \in \langle W \rangle$, existem $\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_m \in W$ e $c'_1, \ldots, c'_m \in C$ tais que $\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{m} c'_i \boldsymbol{w}'_i$. Vamos particionar o conjunto dos índices $\mathtt{I}_m$ com a seguinte relação de equivalência: para todo $i, j \in \mathtt{I}_m$, $i \sim j$ se, e somente se, $\boldsymbol{w}'_i = \boldsymbol{w}'_j$. Essa relação é de equivalência pois a igualddade de vetores é uma relação de equivalência. Agora, seja n o número de classes de equivalências dessa relação. Para cada $i \in \mathtt{I}_n$, seja $j \in P_i$ e definimos os vetores $\boldsymbol{w}_i \coloneqq \boldsymbol{w}'_j$. Notemos que os vetores $\boldsymbol{w}_i$ estão bem definidos, não dependem do j, pois, se $k \in P_i$, então $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}'_j = \boldsymbol{w}'_k$. Ainda, definimos os coeficientes $c_i \coloneqq \mathop{\mathbin{+}}_{j \in P_i} c'_j$. Desse modo, segue que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{m} c'_i \boldsymbol{w}'_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \mathop{\mathbin{+}}_{j \in P_i} c'_j \boldsymbol{w}'_j = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \mathop{\mathbin{+}}_{j \in P_i} c'_j \boldsymbol{w}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{w}_i.$$

Por fim, notemos que os $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ são distintos por definição, já que, se $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_j$ para $i, j \in \mathtt{I}_n$, então existem $k, l \in \mathtt{I}_m$ tais que $k \in P_i$, $l \in P_j$ e $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}'_k$, $\boldsymbol{w}_j = \boldsymbol{w}'_l$. Mas isso implica $\boldsymbol{w}'_k = \boldsymbol{w}'_l$, o que implica $P_i = P_j$ e, portanto, $i = j$. ■

Definição 13.5 (Dependência Linear)**.** Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$. Dizemos que W é *linarmente dependente* em $\boldsymbol{V}$ se existem $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ distintos e $c_1, \ldots, c_n \in C$ não nulos tais que

$$\boldsymbol{0} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{w}_i.$$

Caso contrário, dizemos que W é *linearmente independente* em $\boldsymbol{V}$.

Proposição 13.12. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$. Então W é linearmente dependente se, e somente se, existe $\boldsymbol{w} \in W$ que é combinação linear de $W \setminus \{\boldsymbol{w}\}$ em $\boldsymbol{V}$.*

Demonstração. Suponhamos que W é linearmente dependente. Então existem vetores $\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_n \in W$ distintos e $c'_1, \ldots, c'_n \in C$ não nulos tais que

$$\boldsymbol{0} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c'_i \boldsymbol{w}'_i.$$

Como $c'_1, \ldots, c'_n$ são não nulos, então existe $j \in \mathtt{I}_n$ tal que $c'_j \neq 0$. Definindo $\boldsymbol{w}_i \coloneqq \boldsymbol{w}'_i$ se $1 \leq i < j$ e $\boldsymbol{w}_i \coloneqq \boldsymbol{w}'_{i-1}$ se $j < i \leq n$, e $c_i \coloneqq (c'_j)^{-1}(-c'_i)$ para todo $1 \leq i < j$ ou $j < i \leq n$, segue que

$$\boldsymbol{w}'_j = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{j-1} (c'_j)^{-1}(-c'_i)\boldsymbol{w}'_i + \mathop{\mathbin{+}}_{i=j+1}^{n} (c'_j)^{-1}(-c'_i)\boldsymbol{w}'_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n-1} c_i\boldsymbol{w}_i.$$

Por tanto, como $\boldsymbol{w}_i \in W \setminus \{\boldsymbol{w}'_j\}$ e $c_i \in C$ para todo $i \in \mathtt{I}_{n-1}$, $\boldsymbol{w}'_j$ é combinação linear de $W \setminus \{\boldsymbol{w}'_j\}$ em $\boldsymbol{V}$.

Reciprocamente, suponhamos que existe $\boldsymbol{w} \in W$ que é combinação linear de $W \setminus \{\boldsymbol{w}\}$ em $\boldsymbol{V}$. Então existem $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W \setminus \{\boldsymbol{w}\}$ distintos e $c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que

$$\boldsymbol{w} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w}_i.$$

Definindo $\boldsymbol{w}_{n+1} \coloneqq \boldsymbol{w}$ e $c_{n+1} \coloneqq -1$, segue que

$$\mathbf{0} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} c_i\boldsymbol{w}_i.$$

Então, como $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1}$ são distintos e $c_{n+1} = -1 \neq 0$, segue que W é linearmente dependente. ■

Proposição 13.13. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$. Então*

1. *$\varnothing$ é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$;*
2. *Se $\mathbf{0} \in W$, então W é linearmente dependente em $\boldsymbol{V}$;*
3. *Se $W = \{\boldsymbol{v}\} \neq \{\mathbf{0}\}$, então W é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$.*

Demonstração. 1. Suponha, por absurdo, que $\varnothing$ não é linearmente independente. Então existem $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_n} \in \varnothing$ distintos e $c_1, \ldots, c_n \in C$ não nulos tais que

$$\mathbf{0} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{w_i}.$$

Mas $\boldsymbol{w_1}, \ldots, \boldsymbol{w_n} \in \varnothing$ é um absurdo.

2. Seja $c \in C \setminus \{0\}$. Então, como $\mathbf{0} = c\mathbf{0}$, segue que W é linearmente dependente em $\boldsymbol{V}$.

3. Se $\mathbf{0} = c\boldsymbol{v}$, como $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, segue que $c = 0$, o que mostra que W é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$. ■

Proposição 13.14. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W \subseteq V$. Então W é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$ se, e somente se, para toda combinação linear $\boldsymbol{v} = +_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{w}_i \neq \mathbf{0}$ de W em $\boldsymbol{V}$ tal que $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ são distintos e não nulos, então $c_1, \ldots, c_n$ são únicos.*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que W é linearmente dependente em $\boldsymbol{V}$. Então existem $\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_{n'} \in W$ distintos e $c'_1, \ldots, c'_{n'} \in C$ não nulos tais que

$$\mathbf{0} = \mathop{+}_{i=1}^{n'} c'_i \boldsymbol{w}'_i.$$

Nesse caso, seja $\boldsymbol{v} \in \langle W \rangle$. Se $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, então segue que
..... . Se $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$

■

Proposição 13.15. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $\{W_i\}_{i \in I}$ uma cadeia de conjuntos linearmente independentes em $\boldsymbol{V}$ (ou seja, para todos $i, j \in I$, $W_i \subseteq W_j$ ou $W_j \subseteq W_i$). Então*

$$W := \bigcup_{i \in I} W_i$$

é um conjunto linearmente independente em $\boldsymbol{V}$.

Demonstração. Como, para todo $i \in I$, $\mathbf{0} \in W_i$, segue que $\mathbf{0} \in W$ e, portanto, W não é vazio. Agora, sejam $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$. Então existem $i, j \in I$ tais que $\boldsymbol{w}_1 \in W_i$ e $\boldsymbol{w}_2 \in W_j$. Nesse caso, $W_i \subseteq W_j$ ou $W_j \subseteq W_i$. Sem perda de generalidade, suponhamos o primeiro caso. Então segue que $\boldsymbol{w}_1 \in W_j$ e, portanto, $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W_j$, o que mostra que $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$. Agora, seja $c \in C$ e notemos que, como W_i é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$, segue que $c\boldsymbol{w}_1 \in W_i$. Logo $c\boldsymbol{w}_1 \in W$, o que mostra que W é subespaço vetorial de $\boldsymbol{V}$. ■

13.3 Soma de Subespaços Vetoriais

Definição 13.6. Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $(W_i)_{i \in I}$ uma família de subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$. A *soma* de $(W_i)_{i \in I}$ é o subespaço vetorial gerado pela união de W_i. Denotamos

$$\mathop{+}_{i \in I} W_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} W_i \right\rangle.$$

Caso $(W_i)_{i \in I}$ seja uma família finita, escrevemos $W_1 + \cdots + W_n$.

Definição 13.7. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma *soma direta* é a soma de uma família $(W_i)_{i\in I}$ de subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$ tal que $W_i \cap W_j = \{\mathbf{0}\}$ para todo $i, j \in I$, $i \neq j$. Nesse caso, denotamos

$$\bigoplus_{i\in I} W_i := \left\langle \bigcup_{i\in I} W_i \right\rangle.$$

Caso $(W_i)_{i\in I}$ seja uma família finita, escrevemos $W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Proposição 13.16. *Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W_1, \ldots, W_n$ subespaços vetoriais de $\boldsymbol{V}$ tais que $V = +_{i=1}^{n} W_i$. Então*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} W_i$$

se, e somente se, para todo $\boldsymbol{v} \in V$, existem únicos $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i.$$

Demonstração. Mostraremos, primeiro, que se V é soma direta de $W_1, \ldots, W_n$, então todo vetor de V é soma única de vetores de $W_1, \ldots, W_n$. A demontração será por indução em n. O caso base é trivial, pois, se $V = W_1$, então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{v} \in W_1$. Agora, suponhamos que a proposição vale para todo natural menor ou igual a n. Sejam $W_1, \ldots, W_{n+1}$ subespaços vetoriais de V tais que $V = +_{i=1}^{n+1} W_i$. Então existem $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1} \in W_{n+1}$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w}_i.$$

Suponhamos que existam $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1} \in W_{n+1}$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w}'_i.$$

Então

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w}'_i,$$

o que implica

$$\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} (\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}'_i) = \boldsymbol{w}'_{n+1} - \boldsymbol{w}_{n+1}.$$

Como, para todo $i \in \mathtt{I}_{n+1}$, $w_i, w_i' \in W_i$, segue que $\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_i' \in W_i$. Definamos $W := \bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Assim, segue que

$$\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} (\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_i') \in \langle W \rangle$$

e

$$\boldsymbol{w}_{n+1}' - \boldsymbol{w}_{n+1} \in W_{n+1}.$$

Ainda, como V é soma direta de $W_1, \ldots, W_{n+1}$, então segue que $W \cap W_{n+1} = \{\mathbf{0}\}$. Portanto concluímos que

$$\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} (\boldsymbol{w}_i - \boldsymbol{w}_i') = \boldsymbol{w}_{n+1}' - \boldsymbol{w}_{n+1} = \mathbf{0}.$$

Assim, concluímos que $\boldsymbol{w}_{n+1}' = \boldsymbol{w}_{n+1}$ e que

$$\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i'.$$

Mas notemos que

$$\langle \boldsymbol{W} \rangle = (\langle W \rangle, +|_{\langle W \rangle \times \langle W \rangle}, \cdot|_{\langle W \rangle \times \langle W \rangle})$$

é um espaço vetorial e $W_1, \ldots, W_n$ são subespaços vetoriais de $\langle \boldsymbol{W} \rangle$ tais que $\langle W \rangle = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} W_i$. Portanto, pela hipótese de indução, segue que, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{w}_i'$ e, portanto, concluímos que existem únicos $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n+1} \in W_{n+1}$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n+1} \boldsymbol{w}_i.$$

Suponhamos, então, que todo vetor de V é soma de únicos vetores de W_1, ..., W_n. Sejam $i, j \in \mathtt{I}_n$, $i \neq j$, e $\boldsymbol{v} \in W_i \cap W_j$. Como $\boldsymbol{v} \in V$, segue que existem únicos $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ tais que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{n} \boldsymbol{w}_k.$$

Sem perda de generalidade, suponhamos $i < j$. Notemos que

$$\boldsymbol{v} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \boldsymbol{w}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{i-1} \boldsymbol{w}_k + (\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}) + \mathop{\mathbin{+}}_{k=i+1}^{j-1} \boldsymbol{w}_k + (\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{v}) + \mathop{\mathbin{+}}_{k=j+1}^{n} \boldsymbol{w}_k.$$

Como $\boldsymbol{v} \in W_i \cap W_j$, segue que $(\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}) \in W_i$ e $(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{v}) \in W_j$ e, portanto, como $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W_n$ são únicos, segue que $(\boldsymbol{w}_i + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_i$ e $(\boldsymbol{w}_j - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_j$; ou seja, $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. Logo V é soma direta de $W_1, \ldots, W_n$. ■

13.4 Bases de Espaços Vetoriais

Definição 13.8. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma *base* de $\boldsymbol{V}$ é um conjunto $B \subseteq V$ linearmente independente em $\boldsymbol{V}$ que gera V; ou seja, $V = \langle B \rangle$. Uma base de um subespaço vetorial W de $\boldsymbol{V}$ é uma base do espaço vetorial $\boldsymbol{W} = (W, +|_{W \times W}, \cdot|_{W \times W})$.

Teorema 13.17. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então existe base B de $\boldsymbol{V}$ e, se L é um conjunto linearmente independente em $\boldsymbol{V}$, existe uma base B de $\boldsymbol{V}$ tal que $L \subseteq B$.*

Demonstração. A afirmação de que todo espaço vetorial tem uma base é consequência da segunda afirmação porque, tomando $L = \varnothing$, sabemos que L é linearmente independente e, portanto, existe base B de $\boldsymbol{V}$ que contém $\varnothing$. Demonstraremos a segunda afirmação.

Sejam L um conjunto linearmente independente em $\boldsymbol{V}$ e P o conjunto dos subconjuntos $S \subseteq V$ tais que $L \subseteq S$ e S é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$. Então $(P, \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado com a contenção de conjuntos usual. Agora, seja $(S_i)_{i \in I}$ uma cadeia de $(P, \subseteq)$. Consideremos o conjunto $S := \bigcup_{i \in I} S_i$. Como $L \subseteq S_i$ para todo $i \in I$, então $L \subseteq S$. Devemos mostrar que S é um conjunto linearmente independente em $\boldsymbol{V}$. Para isso, seja $M \subseteq S$ subconjunto finito de S. Como $(S_i)_{i \in I}$ é uma cadeia, existe $i \in I$ tal que $M \subseteq S_i$. Mas, como S_i é linearmente independente, então M também o é e, portanto, S é linearmente independente. Logo S é um limitante superior da cadeia. Concluímos, portanto, que existe um elemento maximal B de $(P, \subseteq)$ que, por definição de P, é linearmente independente e $L \subseteq B$.

Vamos mostrar que B é base de $\boldsymbol{V}$. Devemos mostrar que B gera V, ou seja, que $V = \langle B \rangle$. Seja $\boldsymbol{v} \in V$ e suponhamos, por absurdo, que $\boldsymbol{v} \notin \langle B \rangle$. Então, em particular, $\boldsymbol{v} \notin B$; logo $B \subset B \cup \{\boldsymbol{v}\}$. Concluiremos que $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ é linearmente independente, o que constradiz a maximalidade de B. Seja S um subconjunto finito de $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$. Se $\boldsymbol{v} \notin S$, então $S \subseteq B$ e, portanto, é linearmente independente, pois B o é; se $\boldsymbol{v} \in S$, sejam $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} := S \setminus \{\boldsymbol{v}\} \subseteq B$ e $c, c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que

$$c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n - c\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Como $\boldsymbol{v} \notin \langle B \rangle$, então $c = 0$, pois, caso contrário, teríamos

$$\boldsymbol{v} = \frac{c_1}{c} \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \frac{c_n}{c} \boldsymbol{v}_n.$$

Assim, segue que $c_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$. Mas $S \setminus \{\boldsymbol{v}\} \subseteq B$ é linearmente independente, pois B o é, o que implica que $c_1 = \cdots = c_n = 0$ e, portanto, S é linearmente independente. Com isso, concluímos que $B \cup \{\boldsymbol{v}\}$ é linearmente independente, pois

todo subconjunto finito é, e isso contradiz a maximalidade de B. Por esse absurdo, segue que $\boldsymbol{v} \in \langle B \rangle$ e, portanto, que $V = \langle B \rangle$. Concluímos que B é uma base de $\boldsymbol{V}$ que contém L. ■

Proposição 13.18. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $W, W' \subseteq V$ conjuntos finitos. Se W é linearmente independente em $\boldsymbol{V}$ e W' gera V, então $|W| \leq |W'|$.*

Demonstração. Se $W = \varnothing$, então $0 = |W'| \leq |W|$. Caso contrário, seja $|W| = n$ e $(\boldsymbol{w}_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$ uma indexação de W. Suponhamos, por absurdo, que $W' = \varnothing$. Então, como W' gera V e $\langle W' \rangle = \{\mathbf{0}\}$, segue que $V = \{\mathbf{0}\}$, o que é absurdo, pois isso implica que $W = \{\mathbf{0}\}$, que é um conjunto linearmente dependente. Então $W' \neq \varnothing$. Seja $|W'| = m$ e $(\boldsymbol{w}'_i)_{i \in \mathtt{I}_m}$ uma indexação de W'. Queremos mostrar que $n \leq m$. Suponhamos, por absurdo, que $m < n$. Como W é linearmente independente, então, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $\boldsymbol{w}_i \neq \mathbf{0}$. Como W' gera V, existem $c_1, \ldots, c_m \in C$ tais que

$$\boldsymbol{w}_1 = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{w}'_i,$$

e os $c_1, \ldots, c_m \in C$ não são todos nulos pois, caso contrário, teríamos $\boldsymbol{w}_1 = \mathbf{0}$. Assim, suponhamos, sem perda de generalidade, que $c_1 \neq 0$. Então

$$\boldsymbol{w}'_1 = c_1^{-1} \boldsymbol{w}_1 - \mathop{\mathbin{+}}_{i=2}^{m} c_1^{-1} c_i \boldsymbol{w}'_i.$$

Seja $W_1 \coloneqq \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$. Como W' gera V e todo elemento de W' pode ser escrito como combinação linear de W_1, W_1 gera V. Assim, analogamente, podemos escrever $\boldsymbol{w}_2$ como combinação linear de W_1, como $\boldsymbol{w}_2 \neq \mathbf{0}$, segue que nem todo os coeficientes da combinação linear são nulos. Mais ainda, se somente o coeficiente de $\boldsymbol{w}_1$ é não nulo, então $\boldsymbol{w}_2$ é múltiplo de $\boldsymbol{w}_1$, o que contradiz a independência linear de W. Portanto, deve existir um coeficiente dos $\boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m$ não nulo. Assim, sem perda de generalidade, suponhamos que o coeficiente de $\boldsymbol{w}'_2$ é não nulo. Então, como no caso anterior, $\boldsymbol{w}'_2$ pode ser escrito como combinação linear de $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}'_3, \ldots, \boldsymbol{w}'_m$ e segue que o conjunto $W_2 \coloneqq \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}'_3, \ldots, \boldsymbol{w}'_m\}$ gera V. Repetindo o processo, que termina porque $m < n$ são finitos, achamos o conjunto $W_m \coloneqq \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$, que gera V e é um subconjunto próprio de W, pois $m < n$. Mas isso implica que $\boldsymbol{w}_{m+1} \in W$ é uma combinação linear de W_m em $\boldsymbol{V}$, o que implica que W é linearmente dependente, uma contradição. Logo $m \leq n$. ■

Teorema 13.19. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Se $B, B' \subseteq V$ são bases de $\boldsymbol{V}$, então $|B| = |B'|$.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que não ocorre o caso de uma base ser um conjunto finito e outra ser um conjunto infinito. Suponhamos, sem perda de generalidade, que B é um conjunto finito com $|B| = n$, $\{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} := B$, e B' é um conjunto infinito. Seja $i \in \mathtt{I}_n$. Como $\boldsymbol{b}_i \in V$ e B' gera V, segue que existem $\boldsymbol{b}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{i,n_i} \in B'$ e $c_{i,1}, \ldots, c_{i,n_i} \in C$ tais que

$$\boldsymbol{b}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{n_i} c_{i,j}\boldsymbol{b}_{i,j}.$$

Notemos que o conjunto de todos esses $\boldsymbol{b}_{i,j}$ é $B'' := \bigcup_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{b}_{i,j} : j \in \mathtt{I}_{n_i}\}$, que é um subconjunto finito de B' e, portanto, um subconjunto próprio. Assim, como $B'' \subset B'$, existe $\boldsymbol{b} \in B' \setminus B''$. Como $\boldsymbol{b} \in V$ e B é base, segue que existem $c_1, \ldots, c_n \in C$ tais que $\boldsymbol{b} = \mathbin{+}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{b}_i$. Mas então

$$\boldsymbol{b} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i\boldsymbol{b}_i = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{n_i} c_{i,j}\boldsymbol{b}_{i,j} = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{n_i} c_i c_{i,j}\boldsymbol{b}_{i,j},$$

o que mostra que $\boldsymbol{b} \in B'$ pode ser escrito como uma combinação linear de $B' \setminus \{\boldsymbol{b}\}$ em $\boldsymbol{V}$; ou seja, B' não é linearmente independente, o que é um absurdo. Assim, existem dois casos a serem considereados; o primeiro em que ambas as bases são conjuntos finitos e o outro em que ambas são conjuntos infinitos.

Suponhamos, no primeiro caso, que B e B' são conjuntos finitos com $|B| = n$ e $|B'| = m$. Como B é linearmente independente e B' gera V, segue que $|B| \leq |B'|$. Reciprocamente, como B' é linearmente independente e B gera V, segue que $|B'| \leq |B|$. Assim, segue que $|B| = |B'|$. Agora, suponhamos que B e B' são conjuntos infinitos.

TERMINAR ■

Definição 13.9. Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $B \subseteq V$ uma base $\boldsymbol{V}$. A *dimensão* de $\boldsymbol{V}$ é o número ordinal $\dim \boldsymbol{V} := |B|$.

13.5 Transformações Lineares

Definição 13.10. Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma *transformação linear* de $\boldsymbol{V}$ em $\boldsymbol{W}$ é uma função $T : V \longrightarrow W$ que satisfaz

1. (Aditividade) $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \qquad T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2)$;
2. (Homogeneidade) $\forall c \in C, \forall \boldsymbol{v} \in V \qquad T(c\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{v})$.

O conjunto das transformações lineares de $\boldsymbol{V}$ em $\boldsymbol{W}$ é o conjunto $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$ e o conjunto das tranformações lineares de $\boldsymbol{V}$ em $\boldsymbol{V}$ é o conjunto $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}) := \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{V})$.

É imediato da definição que as duas propriedades são equivalentes à seguinte propriedade

$$\text{(Linearidade) } \forall c \in C, \forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \qquad T(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + cT(\boldsymbol{v}_2).$$

Proposição 13.20. *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Então*

1. *(Linearidade generalizada) Para todos $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ e $c_1, \ldots, c_n \in C$,*

$$T\left(\mathop{+}_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i\right) = \mathop{+}_{i=1}^{n} c_i T(\boldsymbol{v}_i).$$

2. *$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;*

3. *$T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$.*

Proposição 13.21. *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Então*

Proposição 13.22. *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{V}}$.*

Demonstração. Primeiro, sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Então, para todos $c \in C$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$,

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) &= T_1(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) + T_2(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) \\
&= T_1(\boldsymbol{v}_1) + cT_1(\boldsymbol{v}_2) + T_2(\boldsymbol{v}_1) + cT_2(\boldsymbol{v}_2) \\
&= T_1(\boldsymbol{v}_1) + T_2(\boldsymbol{v}_1) + cT_1(\boldsymbol{v}_2) + cT_2(\boldsymbol{v}_2) \\
&= (T_1 + T_2)(\boldsymbol{v}_1) + c(T_1 + T_2)(\boldsymbol{v}_2).
\end{aligned}$$

Agora, sejam $c' \in C$ e $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Então

$$\begin{aligned}
(c'T)(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) &= c'T(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) \\
&= c'(T(\boldsymbol{v}_1) + cT(\boldsymbol{v}_2)) \\
&= c'T(\boldsymbol{v}_1) + c'cT(\boldsymbol{v}_2) \\
&= (c'T)(\boldsymbol{v}_1) + c(c'T)(\boldsymbol{v}_2).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que $\mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$ é um subespaço vetorial de $\boldsymbol{W}^{\boldsymbol{V}}$. ■

Proposição 13.23. *Sejam $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ e $\boldsymbol{V}_3$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Se $T_1 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}_1; \boldsymbol{V}_2)$, $T_2 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}_2; \boldsymbol{V}_3)$, então $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}_1; \boldsymbol{V}_3)$.*

Demonstração. Sejam $c \in C$ e $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$. Então

$$\begin{aligned}(T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2) &= T_2(T_1(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2)) \\ &= T_2(T_1(\boldsymbol{v}_1) + cT_1(\boldsymbol{v}_2)) \\ &= T_2(T_1(\boldsymbol{v}_1)) + cT_2(T_1(\boldsymbol{v}_2)) \\ &= (T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{v}_1) + c(T_2 \circ T_1)(\boldsymbol{v}_2),\end{aligned}$$

o que mostra que $T_2 \circ T_1$ é linear. ■

Proposição 13.24. *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Se T é invertível, então $T^{-1} \in \mathcal{L}(\boldsymbol{W}; \boldsymbol{V})$.*

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Se T é invertível, $T^{-1} \in V^W$ e, para todos $c \in C$ e $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$, existem $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ tais que $T(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$ e $T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$ e segue que

$$\begin{aligned}T^{-1}(\boldsymbol{w}_1 + c\boldsymbol{w}_2) &= T^{-1}(T(\boldsymbol{v}_1) + cT(\boldsymbol{v}_2)) \\ &= T^{-1}(T(\boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2)) \\ &= \boldsymbol{v}_1 + c\boldsymbol{v}_2 \\ &= T^{-1}(\boldsymbol{w}_1) + cT^{-1}(\boldsymbol{w}_2),\end{aligned}$$

o que mostra que T^{-1} é linear. ■

Proposição 13.25. *Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $B_V = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ base de $\boldsymbol{V}$, $B_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ base de $\boldsymbol{W}$ e $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W})$. Então, para todo $\boldsymbol{v} \in V$, existem únicos $c_1, \ldots, c_m \in C$ tais que*

$$T(\boldsymbol{v}) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{m} c_j \boldsymbol{w}_j.$$

Demonstração. Primeiro demonstraremos a existência. Sabemos que, como B_V é base de V, então existem únicos $a_1, \ldots, a_n \in C$ tais que $\boldsymbol{v} = +_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$. Mas, como T é linear, então

$$T(\boldsymbol{v}) = T\left(\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i T(\boldsymbol{v}_i).$$

Agora, como B_W é base de $\boldsymbol{W}$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existem únicos

$$b_{i1}, \ldots, b_{im} \in C$$

tais que $T(\boldsymbol{v}_i) = +_{j=1}^{m} b_{ij} \boldsymbol{w}_j$. Assim, definindo $c_j \coloneqq +_{i=1}^{n} a_i b_{ij}$, segue que

$$T(\boldsymbol{v}) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i \left(\mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{m} b_{ij} \boldsymbol{w}_j\right) = \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{m} \left(\mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} a_i b_{ij}\right) \boldsymbol{w}_j = \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{m} c_j \boldsymbol{w}_j.$$

■

13.6 Espaços Vetoriais Normados

Definição 13.11. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço vetorial real. Uma *norma em* $\boldsymbol{V}$ é uma função $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

1. $\forall \boldsymbol{v} \in V, \forall c \in \mathbb{R} \qquad \|c\boldsymbol{v}\| = |c|\,\|\boldsymbol{v}\|;$
2. $\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \qquad \|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\| \leq \|\boldsymbol{v}_1\| + \|\boldsymbol{v}_2\|;$
3. $\|\boldsymbol{v}\| = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}.$

Proposição 13.26. *Sejam* $\boldsymbol{V}$ *um espaço vetorial real e* $\|\cdot\|$ *uma norma em* $\boldsymbol{V}$*. Então*

1. $\|\mathbf{0}\| = 0$
2. $\|-\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$
3. $\forall \boldsymbol{v} \in V \qquad 0 \leq \|\boldsymbol{v}\|.$

13.7 Produto e Coproduto de Espaços Vetoriais

13.7.1 Produto

Definição 13.12. Seja $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I} = ((V_i, +_i, \cdot_i))_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. O *produto categórico* de $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I}$ é a tripla

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{V_i} = (V, +, \cdot),$$

em que $V = \prod_{i\in I} V_i$,

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (v_1, v_2) &\longmapsto ((v_1)_i +_i (v_2)_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : C \times V &\longrightarrow V \\ (c, v) &\longmapsto (c \cdot_i v_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Proposição 13.27. *Seja $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I} = ((V_i, +_i, \cdot_i))_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então $\prod_{i\in I} \boldsymbol{V_i} = (V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$.*

Demonstração. 1. $(V, +)$ é um grupo pois tem a mesma operação do produto de grupos (9.28).

2. Seja $v \in V$. Então
$$1v = (1v_i)_{i\in I} = (v_i)_{i\in I} = v.$$
Sejam $c_1, c_2 \in C$ e $v \in V$. Então
$$\begin{aligned} (c_1c_2)v &= ((c_1c_2)v_i)_{i\in I} \\ &= (c_1(c_2v_i))_{i\in I} \\ &= c_1(c_2v_i)_{i\in I} \\ &= c_1(c_2v). \end{aligned}$$

3. (Distributividades) Sejam $c \in C$ e $v, v' \in V$. Então
$$\begin{aligned} c(v + v') &= c(v_i + v_i')_{i\in I} \\ &= (c(v_i + v_i'))_{i\in I} \\ &= (cv_i + cv_i')_{i\in I} \\ &= (cv_i)_{i\in I} + (cv_i')_{i\in I} \\ &= cv + cv'. \end{aligned}$$

Sejam $c_1, c_2 \in C$ e $v \in V$. Então

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2)v &= ((c_1 + c_2)v_i)_{i\in I} \\ &= (c_1 v_i + c_2 v_i)_{i\in I} \\ &= (c_1 v_i)_{i\in I} + (c_2 v_i)_{i\in I} \\ &= c_1 v + c_2 v.\end{aligned}$$

■

Proposição 13.28. *Seja $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I} = ((V_i, +_i, \cdot_i))_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i : \prod_{i\in I} \boldsymbol{V_i} \longrightarrow \boldsymbol{V_i}$ é uma transformação linear.*

Demonstração. Sejam $c \in C$ e $v, v' \in \prod_{i\in I} V_i$. Então

$$\pi_i(v + cv') = \pi_i((v_i + cv'_i)_{i\in I}) = v_i + cv'_i = \pi_i(v) + c\pi_i(v').$$

■

Proposição 13.29 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{X}$ um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$ e, para todo $i \in I$, $L_i : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{V_i}$ uma transformação linear. Então existe única transformação linear $L : \boldsymbol{X} \longrightarrow \prod_{i\in I} \boldsymbol{V_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ L = L_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd} & \prod\limits_{i\in I} \boldsymbol{V_i} \arrow[d, "\pi_i"] \\ \boldsymbol{X} \arrow[ur, dashed, "L"] \arrow[r, "L_i"'] & \boldsymbol{V_i} \end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow \prod_{i\in I} V_i \\ x &\longmapsto (L_i(x))_{i\in I}. \end{aligned}$$

Da propriedade universal para conjuntos, L é a única função de X para $\bigtimes_{i\in I} \boldsymbol{V_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ L = L_i$. Falta mostrar que L é transformação linear. Sejam $c \in C$ e $x_1, x_2 \in V$. Então

$$\begin{aligned} L(x_1 + cx_2) &= (L_i(x_1 + cx_2))_{i\in I} \\ &= (L_i(x_1) + cL_i(x_2))_{i\in I} \\ &= (L_i(x_1))_{i\in I} + c(L_i(x_2))_{i\in I} \\ &= L(x_1) + cL(x_2). \end{aligned}$$

■

13.7.2 Coproduto (Soma)

Definição 13.13. Seja $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I} = ((V_i, +_i, \cdot_i))_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais. A *soma categórica* de $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I}$ é

$$\bigsqcup_{i\in I} \boldsymbol{V_i} = (V, +, \cdot),$$

em que $V = \{(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i \mid \exists J \subseteq I \qquad |J| < |\mathbb{N}| \ \text{ e } \ v_i \neq 0\}$,

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (v_1, v_2) &\longmapsto ((v_1)_i +_i (v_2)_i)_{i\in I} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cdot : C \times V &\longrightarrow V \\ (c, v) &\longmapsto (c(v)_i)_{i\in I}. \end{aligned}$$

Observe que, se $|I| < |\mathbb{N}|$, então $\prod_{i\in I} \boldsymbol{V_i} = \bigsqcup_{i\in I} \boldsymbol{V_i}$.

Proposição 13.30 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(\boldsymbol{V_i})_{i\in I}$ uma família de espaços vetoriais sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{X}$ um espaço vetorial sobre $\boldsymbol{C}$ e, para todo $i \in I$, $L_i : \boldsymbol{V_i} \longrightarrow \boldsymbol{X}$ uma transformação linear. Então existe única transformação linear $L : \boldsymbol{X} \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} \boldsymbol{V_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $L \circ \iota_i = L_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{V_i} \arrow[r, "L_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & \boldsymbol{X} \\ \bigsqcup_{i\in I} \boldsymbol{V_i} \arrow[ur, dashed, "L"'] & \end{tikzcd}$$

O coproduto de espaços vetoriais é também chamado de *soma* ou *soma direta* e denotado

$$\bigoplus_{i\in I} \boldsymbol{V_i}.$$

Capítulo 14

Álgebra Multilinear

14.1 Transformações Multilineares

Definição 14.1. Sejam $\boldsymbol{V_0}, \cdots, \boldsymbol{V_{n-1}}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços lineares sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma *transformação n-linear* de $(\boldsymbol{V_0}, \ldots, \boldsymbol{V_{n-1}})$ para $\boldsymbol{W}$ é uma função

$$T : \boldsymbol{V}_0 \times \cdots \times \boldsymbol{V}_{n-1} \longrightarrow \boldsymbol{W}$$

tal que, para todo $0 \leq i < n$ e $(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) \in \boldsymbol{V_0} \times \cdots \times \boldsymbol{V_{i-1}} \times \boldsymbol{V_{i+1}} \times \cdots \times \boldsymbol{V}_{n-1}$, a função

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{\cdot}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) : \boldsymbol{V_i} &\longrightarrow \boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{v} &\longmapsto T(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) \end{aligned}$$

é uma transformação linear. O conjunto dessas transformações é denotado

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{V_0}, \ldots, \boldsymbol{V_{n-1}}; \boldsymbol{W})$$

e, quando todos os espaços $\boldsymbol{V_i}$ são iguais, denota-se

$$\mathcal{L}^n(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{W}) \coloneqq \mathcal{L}(\underbrace{\boldsymbol{V}, \ldots, \boldsymbol{V}}_{n}; \boldsymbol{W})$$

Proposição 14.1. *Sejam $\boldsymbol{V_0}, \cdots, \boldsymbol{V_{n-1}}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços lineares de dimensão finita sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ cujas dimensões são $d_0, \ldots, d_{n-1}$ e d, respectivamente, e, para cada $i \in n$, seja $(\boldsymbol{b}_{ij})_{j \in d_i}$ uma base ordenada de $\boldsymbol{V_i}$. Então toda transformação n-linear $T \in \mathcal{L}(\boldsymbol{V_0}, \ldots, \boldsymbol{V_{n-1}}; \boldsymbol{W})$ está determinada pelos seus valores em $(\boldsymbol{b}_{0j_0}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(n-1)j_{n-1}})$.*

Demonstração. Como consequência da propriedade de linearidade generalizada para transformações lineares, para todos $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{m-1} \in \boldsymbol{V_k}$ e $c_0, \ldots, c_{m-1} \in C$, vale que

$$T\left(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \mathop{+}_{i\in m} c_i \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\right) = \mathop{+}_{i\in m} c_i T\left(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}\right).$$

Sendo assim, para cada $i \in n$, sejam $\boldsymbol{v}_i \in \boldsymbol{V_i}$ e $v_{i0}, \ldots, v_{id_i} \in C$ os coeficientes de $\boldsymbol{v}_i$ na base $\boldsymbol{b}_i$, de modo que

$$\boldsymbol{v}_i = \mathop{+}_{j\in d_i} v_{ij}\boldsymbol{b}_{ij}.$$

Pela linearidade em cada entrada, temos que

$$\begin{aligned}
T(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-1}) &= T\left(\mathop{+}_{j_0\in d_0} v_{0j}\boldsymbol{b}_{0j_0}, \ldots, \mathop{+}_{j_{n-1}\in d_{n-1}} v_{(n-1)j_{n-1}}\boldsymbol{b}_{(n-1)j_{n-1}}\right) \\
&= \mathop{+}_{j_0\in d_0} \cdots \mathop{+}_{j_{n-1}\in d_{n-1}} v_{0j_0}\cdots v_{(n-1)j_{n-1}} T\left(\boldsymbol{b}_{0j_0}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(n-1)j_{n-1}}\right) \\
&= \mathop{+}_{(j_0,\ldots,j_{n-1})\in d_0\times\cdots\times d_{n-1}} v_{0j_0}\cdots v_{(n-1)j_{n-1}} T\left(\boldsymbol{b}_{0j_0}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(n-1)j_{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Portanto a função T está determinada pelos valores que tem nos elementos

$$(\boldsymbol{b}_{0j_0}, \ldots, \boldsymbol{b}_{(n-1)j_{n-1}}).$$

Como há $d_0 \cdots d_{n-1}$ desses elementos, há essa quantidade de escolhas a serem determinadas para se determinar os valores de T. ■

Proposição 14.2. *Sejam $\boldsymbol{V_1}, \cdots, \boldsymbol{V_n}$ e $\boldsymbol{W}$ espaços lineares sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(V_1, \ldots, V_n; W)} := (\mathcal{L}(\boldsymbol{V_1}, \ldots, \boldsymbol{V_n}; \boldsymbol{W}), +, \cdot),$$

em que $+$ e $\cdot$ são a soma e o produto escalar pontuais induzidos por $\boldsymbol{W}$, é um espaço linear sobre $\boldsymbol{C}$ (de dimensão ...).

14.2 Formas Multilineares

Definição 14.2. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço linear sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma *forma k-linear* em $\boldsymbol{V}$ é uma função $f \in \mathcal{L}^k(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{C})$, ou seja, um funcional k-linear em $(\boldsymbol{V}, \ldots, \boldsymbol{V})$.

Definição 14.3. Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço linear sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Uma forma k-linear f em $\boldsymbol{V}$ é:

1. *simétrica* se, e somente se, para toda permutação $p \in \mathfrak{S}_k$ e todos $\boldsymbol{v}_0$, ..., $\boldsymbol{v}_{k-1} \in V$,
$$f(\boldsymbol{v}_{p(0)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p(k-1)}) = f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1});$$

2. *antissimétrica* se, e somente se, para toda permutação $p \in \mathfrak{S}_k$ e todos $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$,
$$f(\boldsymbol{v}_{p(0)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p(k-1)}) = \epsilon(p) f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1});$$

3. *alternada* se, e somente se, para todos $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$ linearmente dependentes,
$$f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = 0.$$

O conjunto das formas k-lineares alternadas é denotado $\mathcal{A}^k(\boldsymbol{V})$.

Proposição 14.3. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço linear sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ e $f \in \mathcal{L}^k(\boldsymbol{V}; \boldsymbol{C})$.*

Proposição 14.4. *Seja $\boldsymbol{V}$ um espaço linear sobre um corpo $\boldsymbol{C}$. Então*

1. *Uma forma k-linear em $\boldsymbol{V}$ é alternada se, e somente se, para todos $\boldsymbol{v}_0$, ..., $\boldsymbol{v}_{k-1} \in V$ tais que $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ para dois $i, j \in k$ distintos,*
$$f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = 0.$$

2. *Uma forma alternada k-linear em $\boldsymbol{V}$ é antissimétrica. Se a característica de $\boldsymbol{C}$ é diferente de 2, então uma forma antissimétrica k-linear em $\boldsymbol{V}$ é alternada.*

3. *Se a característica de $\boldsymbol{C}$ é igual a 2, então uma forma k-linear em $\boldsymbol{V}$ é antissimétrica se, e somente se, é simétrica.*

Demonstração. 1. Se f é alternada, então, para todos $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$ tais que $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ para dois $i, j \in k$ distintos, o conjunto $\{\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}\}$ é linearmente dependente, portanto $f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = 0$. Reciprocamente, suponha que f satisfaz a propriedade e sejam $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$ linearmente dependentes. Então existe $i \in k$ tal que $\boldsymbol{v}_i$ é combinação linear dos outros $\boldsymbol{v}_j$: existem $c_j \in C$, $j \in k \setminus \{i\}$, tais que
$$\boldsymbol{v}_i = \mathop{+}_{j \in k \setminus \{i\}} c_j \boldsymbol{v}_j.$$

Assim, segue da k-linearidade e da propriedade que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) &= f\left(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \mathop{+}_{j \in k \setminus \{i\}} c_j \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}\right) \\ &= \mathop{+}_{j \in k \setminus \{i\}} c_j f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) \\ &= \mathop{+}_{j \in k \setminus \{i\}} c_j 0 = 0. \end{aligned}$$

2. Suponha f alternada e sejam $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$. Então segue da k-linearidade e da alternância de f que

$$\begin{aligned} 0 =& f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) \\ =& f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) + f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) \\ &+ f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) + f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) \\ =& f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) + f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}), \end{aligned}$$

portanto

$$f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = -f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}).$$

Como toda permutação $p \in \mathfrak{S}_k$ é um produto de $N \in \mathbb{N}$ inversões, e como $\epsilon(p) = (-1)^N$, segue por indução que, para toda permutação $p \in \mathfrak{S}_k$,

$$f(\boldsymbol{v}_{p(0)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p(k-1)}) = (-1)^N f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = \epsilon(p) f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}).$$

Suponha que a característica de $\boldsymbol{C}$ é diferente de 2. Sejam f uma forma antissimétrica k-linear em $\boldsymbol{V}$ e sejam $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1} \in V$ tais que $\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ para dois $i, j \in k$ distintos. Considerando a permutação $(i \quad j) \in \mathfrak{S}_k$, segue da antissimetria de f e de $\epsilon((i \quad j)) = -1$ que

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) &= f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) \\ &= -f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_i, \ldots, \boldsymbol{v}_j, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}), \end{aligned}$$

portanto

$$2f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = 0.$$

Como a característica de $\boldsymbol{C}$ é diferente de 2, segue que $f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) = 0$. Do item 1 segue que f é alternada.

3. Se a característica de $\boldsymbol{C}$ é igual de 2, então $-1 = 1$. Isso implica que, para qualquer permutação p, $\epsilon(p) = 1$.

■

14.3 Produto Exterior

Definição 14.4. Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço linear sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $f \in \mathcal{A}^k(\boldsymbol{V})$, $g \in \mathcal{A}^l(\boldsymbol{V})$ e $\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l-1} \in \boldsymbol{V}$. O *produto exterior* entre f e g em $(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l-1})$ é

$$(f \wedge g)(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l-1}) := \frac{1}{k!l!} \mathop{+}_{p \in \mathfrak{S}_{k+l}} \epsilon(p) f(\boldsymbol{v}_0, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}) g(\boldsymbol{v}_k, \ldots, \boldsymbol{v}_{k+l-1})$$

Proposição 14.5. *Sejam $\boldsymbol{V}$ um espaço linear de dimensão finita d sobre um corpo $\boldsymbol{C}$, $(\boldsymbol{b}_i)_{i \in d}$ um base ordenada de $\boldsymbol{V}$ e $(\boldsymbol{b}_i^*)_{i \in d}$ sua base dual de $\boldsymbol{V}^*$. Então $\mathcal{A}^k(\boldsymbol{V})$ é um espaço linear sobre $\boldsymbol{C}$ de dimensão $\binom{d}{k}$ e o conjunto*

$$\left\{ \boldsymbol{b}_{i_0}^* \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_{i_{k-1}}^* \;\middle|\; i_0 < \cdots < i_{k-1} \in d \right\}$$

de formas alternadas k-lineares em $\boldsymbol{V}$ é uma base para $\mathcal{A}^k(\boldsymbol{V})$

Em particular, isso mostra que formas d-lineares num espaço de dimensão d são todas múltiplos umas das outras, pois $\binom{d}{d} = 1$. Podemos fixar o valor de uma das formas como 1 e chamá-la de *determinante*.

Capítulo 15

Reticulados

15.1 Reticulados

Definição 15.1. Um *reticulado* é uma tripla $(R, \vee, \wedge)$ em que

1. $(R, \vee)$ e $(R, \wedge)$ são semigrupos comutativos;
2. Valem as propriedades de *absorção*: para todos $a, b \in R$,
   (a) $a \vee (a \wedge b) = a$;
   (b) $a \wedge (a \vee b) = a$.

Proposição 15.1. *Seja $(R, \vee, \wedge)$ um reticulado. Valem as propriedades de* idempotência*: para todo $a \in R$,*

1. *$a \vee a = a$;*
2. *$a \wedge a = a$.*

Definição 15.2. Um *reticulado limitado* é uma 5-sequência $(R, \vee, \wedge, 0, 1)$ em que $(R, \vee, \wedge)$ é um reticulado, 0 é elemento neutro de $(R, \vee)$ e 1 é elemento neutro de $(R, \wedge)$.

$\vee$ e $\wedge$ estão definidos para todo subconjunto não-vazio finito por indução, já que são operações associativas.

Proposição 15.2. *Todo reticulado finito é limitado.*

15.2 Álgebras Booleanas

Definição 15.3. Uma *álgebra booleana* é uma tripla $(A, \vee, \wedge)$, em que A é um conjunto não vazio, que satisfaz

1. $(A, \vee)$ e $(A, \wedge)$ são magmas comutativos com elementos neutros 0 e 1, respectivamente;

2. As operações $\vee$ e $\wedge$ são distributivas uma sobre a outra;

3. Pa é uma ora todo $a \in A$ existe um elemento *complementar* $a' \in A$, que satisfaz $a \vee a' = 1$ e $a \wedge a' = 0$.

Proposição 15.3. *Seja A um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ um conjunto de partes de A que satisfaz*

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$;

2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow X^{\complement} \in \mathcal{A}$.

Então $(\mathcal{A}, \cup, \cap)$ é uma álgebra booleana.

Demonstração. Primeiramente, é necessário notar, embora os símbolos $\cup$ e $\cap$ não sejam funções propriamente ditas, ao fixarmos um conjunto A, podemos definir $\cup$ e $\cap$ como operações binárias em $\mathcal{P}(A)$, dadas por $(X, Y) \longmapsto X \cup Y$ e $(X, Y) \longmapsto X \cap Y$, respectivamente. Para $X, Y \in \mathcal{A}$, temos que $X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{A}$, o que mostra que as operações estão bem definidas.

Sendo assim, podemos prosseguir com a demonstração. Se $\mathcal{A}$ satisfaz as propriedades do enunciado, então $A = \varnothing^{\complement} \in \mathcal{A}$. O par $(\mathcal{A}, \cup)$ é um magma comutativo com elemento neutro $\varnothing$, pois a união de dois cojuntos é comutativa por definição e a união de um conjunto qualquer com o conjunto vazio dá o próprio conjunto. Da mesma forma, o par $(\mathcal{A}, \wedge)$ é um magma comutativo com elemento neutro A, pois a interseção de dois conjuntos é comutativa por definição e a interseção de qualquer conjunto com o conjunto A é o próprio conjunto. Ainda, vale que, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{A}$, $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ e $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$; ou seja, as operações binárias $\cup$ e $\cap$ são distributivas uma sobre a outra. Por fim, nota-se que, dado $X \in \mathcal{A}$, $X^{\complement} \in \mathcal{A}$ e vale $X \cup X^{\complement} = A$ e $X \cap X^{\complement} = \varnothing$. Logo $(\mathcal{A}, \cup, \cap)$ é uma álgebra booleana. ■

Proposição 15.4 (Princípio da Dualidade)**.** *Toda afirmação dudutível somente a partir da definição de álgebra booleana continua válida se são trocados entre si os símbolos $\vee$ e $\wedge$ e os símbolos 0 e 1 que aparecem na expressão.*

Demonstração. Todas as propriedades de uma álgebra booleana são definidas simetricaente e continuam iguais se trocamos entre si os símbolos $\vee$ e $\wedge$ e os símbolos 0 e 1. Logo isso também vale para qualquer afirmação dedutível dessas propriedades. ■

Como consequência do princípio da dualidade, qualquer afirmação dedutível das pripriedades de álbegra booleana tem uma afirmação associadad a ela ao trocarmos entre si os símbolos $\vee$ e $\wedge$ e os símbolos 0 e 1, que chamaremos que sua afirmação *dual*. Claramente, a afirmação dual da dual é a própria afirmação. Portanto só será necessário demonstrar a afirmação para demonstrar sua afirmação dual. Toda proposição, lema e teorema dessa seção exibirá sua proposição, lema e teorema dual, mas a afirmação dual não será demonstrada.

Teorema 15.5 (Identidades)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$\forall a \in A \qquad a \vee 1 = 1$$

$$\forall a \in A \qquad a \wedge 0 = 0$$

Teorema 15.6 (Absorção)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$\forall a, b \in A \qquad a \vee (a \wedge b) = a$$

$$\forall a, b \in A \qquad a \wedge (a \vee b) = a$$

Corolário 15.7 (Idempotência)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$\forall a \in A \qquad a \vee a = a$$

$$\forall a \in A \qquad a \wedge a = a$$

Demonstração. Basta tomar $b = 1$ e $b = 0$ nas proposições anteriores. ■

Teorema 15.8 (Associatividade)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$(A, \vee) \text{ é associativo.}$$

$$(A, \wedge) \text{ é associativo.}$$

Teorema 15.9 (Unicidade do Complementar)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana e* $a \in A$*. Então o complementar de* a *é único.*

Note que esse teorema é seu próprio dual.

Teorema 15.10 (Dupla Complementação)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana e* $a \in A$*. Então o complementar de* a' *é* a*.*

Teorema 15.11 (Identidades Complementares)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$0' = 1$$

$$1' = 0$$

Teorema 15.12 (Leis de De Morgan)**.** *Seja* $(A, \vee, \wedge)$ *uma álgebra booleana. Então*

$$\forall a, b \in A \qquad (a \wedge b)' = a' \vee b'$$

$$\forall a, b \in A \qquad (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

Parte III

Topologia

Capítulo 16

Espaços Topológicos

16.1 Topologia, abertos e fechados

A noção de topologia que será abordada nesta parte do livro é a topologia baseada em teoria dos conjuntos.

Definição 16.1. Seja X um conjunto. Uma *topologia* de X é um conjunto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ que satisfaz

1. Vazio e conjunto todo são abertos.

$$\varnothing, X \in \mathcal{T}$$

2. União de abertos é aberto.

$$(A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

3. Interseção finita de abertos é aberto.

$$(A_i)_{i \in \mathtt{I}_n} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$$

Proposição 16.1. *Seja X um conjunto.*

1. *(Topologia trivial) $\{\varnothing, X\}$ é uma topologia de X;*
2. *(Topologia discreta) $\mathcal{P}(X)$ é uma topologia de X.*

Demonstração. 1. Primeiramente, $\varnothing$ e X pertencem a $\{\varnothing, X\}$. Agora, consideremos uma família $(A_i)_{i\in I} \subseteq \{\varnothing, X\}$ de abertos. Caso $A_i = \varnothing$ para todo $i \in I$, então $\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing \in \mathcal{T}$. Caso contrário, existe $j \in I$ tal que $A_j = X$, o que implica $\bigcup_{i\in I} A_i = X \in \mathcal{T}$. Assim, concluímos que vale a seguda propriedade. Para mostrar a terceira propriedade, seja $(A_i)_{i\in \mathtt{I}_n} \subseteq \mathcal{T}$ uma família finita de abertos. Caso $A_i = X$ para todo $i \in I$, o que implica $\bigcap_{i=1}^n A_i = X \in \mathcal{T}$, Caso contrário, existe $j \in I$ tal que $A_j = \varnothing$, o que implica $\bigcap_{i=1}^n A_i = \varnothing \in \mathcal{T}$.

2. Todas propriedades valem pois $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. ■

Definição 16.2. Um *espaço topológico* é um par $(X, \mathcal{T})$ em que X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ é uma topologia de X. Um *aberto* de $(X, \mathcal{T})$ é um conjunto de $\mathcal{T}$. Um *fechado* de $(X, \mathcal{T})$ é um conjunto cujo complemenar em $\mathcal{T}$ é um aberto de $(X, \mathcal{T})$. O conjunto dos fechados de $(X, \mathcal{T})$ é denotado $\mathsf{C}(\mathcal{T})$.

Proposição 16.2 (Dualidade de abertos e fechados)**.** *Seja X um conjunto. Então*

1. *Vazio e conjunto todo são fechados.*

$$\varnothing, X \in \mathsf{C}(\mathcal{T})$$

2. *Interseção de fechados é fechado.*

$$(F_i)_{i\in I} \subseteq \mathsf{C}(\mathcal{T}) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} F_i \in \mathsf{C}(\mathcal{T})$$

3. *União finita de fechados é fechado.*

$$(F_i)_{i\in \mathtt{I}_n} \subseteq \mathsf{C}(\mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathsf{C}(\mathcal{T})$$

Demonstração. Todas as demonstrações dependem de propriedades básicas de teoria de conjuntos.

1. Como $\varnothing, X \in \mathcal{T}$, $\varnothing^{\mathsf{C}} = X$ e $X^{\mathsf{C}} = \varnothing$, segue que $\varnothing, X \in \mathsf{C}(\mathcal{T})$.

2. Seja $(F_i)_{i\in I} \subseteq \mathsf{C}(\mathcal{T})$. Então $((F_i)^{\mathsf{C}})_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$, o que implica que $\bigcup_{i\in I}(F_i)^{\mathsf{C}} \in \mathcal{T}$. Para concluir a demonstração, basta notar que

$$\left(\bigcup_{i\in I}(F_i)^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} = \bigcap_{i\in I} F_i.$$

3. Seja $(F_i)_{i\in\mathtt{I}_n} \subseteq \complement(\mathcal{T})$. Então $((F_i)^\complement)_{i\in\mathtt{I}_n} \subseteq \mathcal{T}$, o que implica que $\bigcap_{i=1}^n (F_i)^\complement \in \mathcal{T}$. Para concluir a demonstração, basta notar que

$$\left(\bigcap_{i=1}^n (F_i)^\complement\right)^\complement = \bigcup_{i=1}^n F_i.$$

■

16.2 Subespaços Topológicos

Definição 16.3. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $Y \subseteq X$ um conjunto não vazio. A *topologia induzida por* $\mathcal{T}$ *em* Y é o conjunto

$$\mathcal{T}|_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{T}\}.$$

(OBS: Essa é a menor topologia que torna a inclusão de Y em X contínua.)

Proposição 16.3. *Sejam* $(X, \mathcal{T})$ *um espaço topológico e* $Y \subseteq X$ *um conjunto não vazio. Então* $(Y, |_Y)$ *é um espaço topológico em* Y.

Demonstração. Primeiro, notemos que $\varnothing, Y \in \mathcal{T}|_Y$, pois $\varnothing \cap Y = \varnothing$ e $X \cap Y = Y$. Agora, seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de abertos em $\mathcal{T}|_Y$. Então, para cada $i \in I$, existe um aberto $B_i \in \mathcal{T}$ tal que $A_i = B_i \cap Y$. Assim, temos que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (B_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \cap Y,$$

que pertence à topologia induzida pois $\bigcup_{i\in I} B_i \in \mathcal{T}$. Por fim, seja $(A_i)_{i\in\mathtt{I}_n}$. Então, para cada $i \in \mathtt{I}_n$, existe um aberto $B_i \in \mathcal{T}$ tal que $A_i = B_i \cap Y$. Assim, temos que

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (B_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) \cap Y,$$

que pertence à topologia induzida pois $\bigcap_{i=1}^n B_i \in \mathcal{T}$. ■

16.3 Interior e Fecho

Intuitivamente, sabemos dizer quais pontos de um subconjunto da reta, do plano ou do espaço estão dentro do conjunto, quais estão fora e quais formam uma espécie de fronteira entre a parte de dentro e a de fora. Para uma bola aberta de raio unitário e centro na origem, é claro que os pontos de norma menor que 1 são os pontos do interior da bola, os pontos de norma igual a 1 são os pontos de froteira

e os pontos com norma maior que 1 são os pontos do exterior. Para conjuntos mais complicados, no entanto, parece ser mais difícil dizer o que está dentro e o que está fora. Se analisamos o conjunto dos racionais na reta, não é óbvio o que está dentro, o que está fora, o que é fronteira.

Além disso, a nossa intuição usa a ideia de norma ou distância no caso da bola e em espaços topológicos gerais isso não é possível. Para continuar a generalização dos conceitos topológicos existentes na reta, plano e espaço, devemos tentar formular a ideia de ponto interior usando os conceitos topológicos gerais, e fazemos isso notando que, no caso da bola e de conjuntos simples dos espaços tradicionais, um ponto está dentro do conjunto se existe um aberto em torno do ponto que está inteiramente contido no conjunto. Esse conceito não é o conceito que usaremos para definir o interior de um conjunto, mas é equivalente.

No começo dessa seção, o foco será o conceito de interior de um conjunto. A definição de interior que usaremos é a de que o interior de um conjunto é o maior conjunto aberto contido no conjunto. Maior, nesse caso, significa maior em relação à ordem parcial de contenção de conjuntos abertos. Como união de abertos é aberto, sabemos que a união de todos abertos contidos em um conjunto é aberto e, portanto, é o maior aberto contido no conjunto. Podemos perceber, ainda, que essa definição é equivalente à comentada acima pois, se um ponto está em um aberto do conjunto, ele está na união de todos eles e, se ele está na união, está, em particilar, em algum aberto. Seguem abaixo a definição formal de interior de um conjunto e, em seguida, algumas propriedades básicas.

Definição 16.4. Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico, $C \subseteq X$ e $(A_i)_{i\in I}$ uma indexação do conjunto de todos conjuntos abertos de X que são subconjunto de C. O *interior de C* é o conjunto aberto

$$C^\circ := \bigcup_{i\in I} A_i.$$

De acordo com essa defínção, o interior de um conjunto é o maior aberto contido no conjunto, no sentido de que qualquer aberto contido no conjunto está também contido no seu interior. Ainda, podemos ver o interior como um operador topológico — uma função $\mathcal{I} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ que leva $C \longmapsto C^\circ$. Nesse sentido, podemos pensar em propriedades que esse operador satisfaz. Algumas dessas propriedades estão na proposição abaixo. Além disso, se temos um operador qualquer em $\mathcal{P}(X)$ que satisfaça algumas das propriedades abaixo, então esse operador é o operador interior de alguma topologia de X. Isso está demonstrado na proposição que segue a proposição abaixo.

Proposição 16.4. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico e $A, B \subseteq X$. Então*

1. $A^\circ \subseteq A$

2. $A \in \mathcal{T} \Leftrightarrow A^\circ = A$

3. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

4. $(A^\circ)^\circ = A^\circ$

5. $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

Demonstração. Sejam $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ e $(C_k)_{k\in K}$ indexações dos subconjuntos abertos de A, B e $A \cap B$, respectivamente.

1. Seja $a \in A^\circ$. Então existe $j \in I$ tal que $a \in A_j$. Como $A_i \subseteq A$ para todo $i \in I$, então $a \in A$, o que mostra que $A^\circ \subseteq A$.

2. Suponha que A um aberto. Como $A^\circ \subseteq A$ para todo $A \subseteq X$, basta mostrar que $A \subseteq A^\circ$. Seja $a \in A$. Se A é aberto, então existe $i \in I$ tal que $A_i = A$, o que implica $a \in A_i$ e, portanto, que $a \in A^\circ$, o que mostra que $A \subseteq A^\circ$. Assim, concluímos que $A^\circ = A$. Reciprocamente, suponha que $A^\circ = A$. Como A° é união de abertos, é um conjunto aberto e isso implica que A é aberto.

3. Vamos mostrar a inclusão $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$. Seja $a \in (A \cap B)^\circ$. Então existe $k \in K$ tal que $a \in C_k$. Como C_k é subconjunto aberto de $A \cap B$, então C_k é subconjunto aberto de A e de B, o que implica que $a \in A^\circ$ e $a \in B^\circ$. Assim, concluímos que $a \in A^\circ \cap B^\circ$. Reciprocamente, vamos mostrar a inclusão $A^\circ \cap B^\circ \subseteq (A \cap B)^\circ$. Seja $a \in A^\circ \cap B^\circ$. Então $a \in A^\circ$ e $a \in B^\circ$, o que implica que existem $i \in I$ e $j \in J$ tais que $a \in A_i$ e $a \in B_j$; ou seja, $a \in A_i \cap B_j$. Como A_i e B_j são abertos, sua interseção é aberto e, como $A_i \subseteq A$ e $B_j \subseteq B$, segue que $A_i \cap B_j \subseteq A \cap B$, e isso implica que $a \in (A \cap B)^\circ$.

4. Como A° é um conjunto aaberto, pelo item 2 segue que $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. ■

Proposição 16.5. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{I} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função que satisfaz, para todos $A, B \subseteq X$,*

1. $\mathcal{I}(X) = X$;

2. $\mathcal{I}(A) \subseteq A$;

3. $\mathcal{I}(A \cap B) = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)$;

4. $\mathcal{I}(\mathcal{I}(A)) = \mathcal{I}(A)$.

Então o conjunto $\mathcal{T} := \{C \subseteq X : C = \mathcal{I}(C)\}$ é uma topologia de X e $\mathcal{I}(C) = C^\circ$ para cada $C \subseteq X$.

Demonstração. Primeiro, notemos que, pela primeira propriedade, $X \in \mathcal{T}$ e, pela segunda propriedade, como $\mathcal{I}(\varnothing) \subseteq \varnothing$, concluímos que $\mathcal{I}(\varnothing) = \varnothing$, o que significa que $\varnothing \in \mathcal{T}$.

Vamos mostrar a seguinte propriedade: para todos $A, B \subseteq X$,

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{I}(B)$$

Supondo que $A \subseteq B$, temos que $A = A \cap B$. Então, pela terceira propriedade, $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)$. Assim, segue que $\mathcal{I}(A) \subseteq \mathcal{I}(B)$.

Agora, seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos em $\mathcal{T}$. Então, para cada $j \in I$, $A_j \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ e, portanto, $\mathcal{I}(A_j) \subseteq \mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} A_i)$. Mas a família satisfaz $\mathcal{I}(A_i) = A_i$. Assim, concluímos que

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{I}(A_i) = \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \mathcal{I}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

Pela segunda propriedade, $\mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Portanto $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{I}(\bigcup_{i \in I} A_i)$, e concluímos que $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$.

Então, seja $(A_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$ uma família finita de conjuntos em $\mathcal{T}$. Usando a terceira propriedade e indução, provaremos que $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$. Para $n = 1$, a propriedade é trivialmente verdade. Suponhamos que vale para $n = k$. Então, pela terceira propriedade,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= \mathcal{I}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}\right) \\
&= \mathcal{I}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap \mathcal{I}\left(A_{k+1}\right) \\
&= \bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1} \\
&= \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i,
\end{aligned}$$

o que mostra que $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \in \mathcal{T}$ e que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$. Logo concluímos que $\mathcal{T}$ é uma topologia de X.

Devemos, por fim, mostrar que $\mathcal{I}(C) = C^\circ$ para todo $C \subseteq X$. Seja $(C_I)_{i \in I}$ uma indexação dos subconjuntos abertos de C. Vamos mostrar primeiro que $C^\circ \subseteq \mathcal{I}(C)$. Para todo $i \in I$, temos que $C_i \subseteq C$ implica $\mathcal{I}(C_i) \subseteq \mathcal{I}(C)$. Como $C_i = \mathcal{I}(C_i)$, segue que $C_i \subseteq \mathcal{I}(C)$ e, portanto,

$$C^\circ = \bigcup_{i \in I} C_i \subseteq \mathcal{I}(C).$$

Por outro lado, notemos que $\mathcal{I}(C)$ é um aberto, pois, pela quarta propriedade, $\mathcal{I}(\mathcal{I}(C)) = \mathcal{I}(C)$. Pela segunda propriedade, $\mathcal{I}(C) \subseteq C$, e segue que $\mathcal{I}(C)$ é um dos subconjuntos abertos C_i de C. Portanto

$$\mathcal{I}(C) \subseteq \bigcup_{i \in I} C_i = C^\circ.$$

■

Proposição 16.6. *Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico e $C \subseteq X$. Então*

$$C^\circ = \{x \in X : \exists A \in \mathcal{T} \quad x \in A \subseteq C\}$$

Demonstração. Se o único aberto contido em C é $\varnothing$, então $C^\circ = \varnothing$ e segue que, para todo $x \in X$, todo aberto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A$ não está contido em C. Então os conjuntos são iguais. Se $C^\circ = \varnothing$, então o único aberto contido em

Se $x \in C^\circ$, então existe ■

Dualmente, consideraremos agora o conceito de fecho.

Definição 16.5. Sejam $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico, $C \subseteq X$ e $(F_i)_{i \in I}$ uma indexação do conjunto de todos conjuntos fechados de X dos quais C é subconjunto. O *fecho de C* é o conjunto fechado

$$\overline{C} := \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Proposição 16.7. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. Então*

1. *Para todo $A \subseteq X$, $A \subseteq \overline{A}$;*
2. *Um conjunto A é fechado se, e somente se, $\overline{A} = A$;*
3. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

Demonstração. Demonstração análoga à de interior.

■

Proposição 16.8. *Sejam X um conjunto e $\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ uma função que satisfaz, para todos $A, B \subseteq X$,*

1. $\mathcal{F}(\varnothing) = \varnothing$;
2. $A \subseteq \mathcal{F}(A)$;

3. $\mathcal{F}(A \cup B) = \mathcal{F}(A) \cup \mathcal{F}(B)$.

4. $\mathcal{F}(\mathcal{F}(A)) = \mathcal{F}(A)$.

Então o conjunto $\complement(\mathcal{T}) := \{C \subseteq X : C = \mathcal{F}(C)\}$ *é o conjunto de fechados de uma topologia* $\mathcal{T}$ *de* X *e* $\mathcal{F}(C) = \overline{C}$ *para cada* $C \subseteq X$.

Demonstração. Demonstração análoga à de interior. ■

Proposição 16.9. *Sejam* $\boldsymbol{X}$ *um espaço topológico e* $A \subseteq X$. *Então*

1. $(\overline{A})^{\complement} = (A^{\complement})^{\circ}$;

2. $(A^{\circ})^{\complement} = \overline{(A^{\complement})}$.

Demonstração. 1.

2.

■

16.4 Fronteira

Definição 16.6. Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico e $C \subseteq X$. A *fronteira* de C é o conjunto

$$\partial C := \overline{C} \setminus C^{\circ}.$$

Proposição 16.10. *Sejam* $\boldsymbol{X}$ *um espaço topológico e* $C \subseteq X$. *Então*

1. *O fecho é a união disjunta de interior e fronteira.*

$$\overline{C} = C^{\circ} \cup \partial C \quad e \quad C^{\circ} \cap \partial C = \varnothing$$

2. *A fronteira é a interseção dos fechos do conjunto e de seu complementar.*

$$\partial C = \overline{C} \cap \overline{C^{\complement}}$$

3. *Um conjunto é aberto se, e somente se, não contém pontos da fronteira.*

$$C \in \mathcal{T} \Leftrightarrow \partial C \cap C = \varnothing$$

4. *Um conjunto é fechado se, e somente se, contém todos pontos da fronteira.*

$$C \in \complement(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \partial C \subseteq C$$

5. *A fronteira de um conjunto é fechada.*

$$\partial C \in \complement(\mathcal{T})$$

6. $\partial(\partial(\partial C)) = \partial(\partial C)$.

Demonstração. 1.

$$\partial C = \overline{C} \setminus C^\circ \Leftrightarrow \overline{C} = C^\circ \cup \partial C$$

2.

3.

$$\partial C = \overline{C} \setminus C^\circ = \overline{C} \cap (C^\circ)^\complement = \overline{C} \cap \overline{C^\complement}$$

■

16.5 Derivado

Propriedades de derivado

$A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$

Capítulo 17

Topologias Geradas, Bases e Sub-bases

17.1 Topologias Finas e Grossas e Topologias Geradas

Definição 17.1. Seja X um conjunto e $\mathcal{T}$ uma topologia de X. Uma *topologia mais grossa* (ou *fraca*) que a topologia $\mathcal{T}$ é uma topologia $\mathcal{T}'$ de X tal que $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$. Uma *topologia mais fina* (ou *forte*) que a topologia $\mathcal{T}$ é uma topologia $\mathcal{T}'$ de X tal que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

A topologia mais fraca é a topologia trivial e a topologia mais forte é a topologia discreta.

Proposição 17.1. *Sejam X um conjunto e $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ uma família de topologias de X. Então*

$$\mathcal{T} := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$$

é uma topologia de X.

Demonstração. Primeiro, notemos que, para todo $i \in I$, $\varnothing, X \in \mathcal{T}_i$, e segue que $\varnothing, X \in \mathcal{T}$. Agora, seja $(A_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{T}$. Então, para todo $i \in I$, $(A_j)_{j\in J} \in \mathcal{T}_i$, e segue que $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}_i$, o que implica que $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$. Por fim, seja $(A_j)_{j\in \mathtt{I}_n} \subseteq \mathcal{T}$. Então, para todo $i \in I$, $(A_j)_{j\in \mathtt{I}_n} \in \mathcal{T}_i$, e segue que $\bigcap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{T}_i$, o que implica que $\bigcap_{j=1}^n A_j \subseteq \mathcal{T}$. ■

Definição 17.2. Sejam X um conjunto, $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ uma indexação do conjunto de todas as topologias de X das quais T é subconjunto. A *topologia gerada por T* é a topologia

$$\langle T \rangle := \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i.$$

Nesse caso, dizemos que T é o *conjunto gerador* de $\langle T \rangle$ ou que T gera $\langle T \rangle$.

17.2 Bases e Sub-bases

Capítulo 18

Funções Contínuas

Definição 18.1. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{T}_X)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. Uma *função contínua* de $\boldsymbol{X}$ para $\boldsymbol{Y}$ é uma função $f : X \longrightarrow Y$ tal que, para todo $A \in \mathcal{T}_Y$,

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X.$$

Denota-se $f : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$. O conjunto de todos essas funções contínuas é denotado por $\mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$.

Proposição 18.1. *Propriedades categóricas.*

1. *(Identidade) Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. A função $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ é uma função contínua.*

2. *(Associatividade) Sejam $\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ espaços topológicos e $f_0 : \boldsymbol{X_0} \longrightarrow \boldsymbol{X_1}$ e $f_1 : \boldsymbol{X_1} \longrightarrow \boldsymbol{X_2}$ funções contínuas. Então $f_1 \circ f_0 : \boldsymbol{X_0} \longrightarrow \boldsymbol{X_2}$ é uma função contínua.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X_0} \arrow[r, "f_0"] \arrow[rr, bend right, "f_1 \circ f_0"'] & \boldsymbol{X_1} \arrow[r, "f_1"] & \boldsymbol{X_2}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. 1. Seja $A \in \mathcal{T}$. Então $\mathrm{id}_X^{-1}(A) = A \in \mathcal{T}$, logo id_x é contínua.

2. Seja $A \in \mathcal{T}_2$. Como f_1 é contínua, $f_1^{-1}(A) \in \mathcal{T}_1$. Como f_0 é contínua, $f_0^{-1}(f_1^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_0$. Portanto

$$(f_1 \circ f_0)^{-1}(A) = f_1^{-1} \circ f_0^{-1}(A) = f_0^{-1}(f_1^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_0.$$

Logo $f_1 \circ f_0$ é contínua.

■

18.1 Topologias Puxadas e Empurradas

Definição 18.2. Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{T}_Y)$ um espaço topológico e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A *topologia puxada* por f é

$$f^\star(\mathcal{T}_Y) := \left\{ f^{-1}(A) \;\middle|\; A \in \mathcal{T}_Y \right\}.$$

Proposição 18.2. *Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ um espaço topológico e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então $f^\star(\mathcal{T}_Y)$ é uma topologia de X.*

Demonstração. Primeiro notemos que, como $\varnothing \in \mathcal{T}_Y$ e $\varnothing = f^{-1}(\varnothing)$, temos que $\varnothing \in f^\star(\mathcal{T}_Y)$. Agora, seja $(A_i)_{i\in I}$ uma família de conjuntos em $f^\star(\mathcal{T}_Y)$. Então, para cada $i \in I$, existe aberto $U_i \in \mathcal{T}_Y$ tal que $A_i = f^{-1}(U_i)$. Como $\mathcal{T}_Y$ é topologia, a união de abertos é aberto $\bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_Y$. Portanto

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right),$$

logo $\bigcup_{i\in I} A_i \in f^\star(\mathcal{T}_Y)$. Por fim, seja $(A_i)_{i\in \mathtt{I}_n}$ uma família finita de conjuntos em $f^\star(\mathcal{T}_Y)$. Então, para cada $i \in \mathtt{I}_n$, existe aberto $U_i \in \mathcal{T}_Y$ tal que $A_i = f^{-1}(U_i)$. Como $\mathcal{T}_Y$ é topologia, a interseção finita de abertos é aberto $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}_Y$. Portanto

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right),$$

logo $\bigcup_{i=1}^n A_i \in f^\star(\mathcal{T}_Y)$. ■

Definição 18.3. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico, Y um conjunto e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A *topologia empurrada* por f é

$$f_\star(\mathcal{T}_X) := \left\{ A \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X \right\}.$$

Proposição 18.3. *Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{T}_X)$ um espaço topológico, Y um conjunto e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então $\mathcal{T}_Y := f_\star(\mathcal{T}_X)$, a topologia empurrada por f, é uma topologia sobre Y.*

Proposição 18.4. *Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \mathcal{T}_X)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \mathcal{T}_Y)$ espaços topológicos. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é função contínua de $\boldsymbol{X}$ para $\boldsymbol{Y}$ se, e somente se, a topologia $f^\star(\mathcal{T}_Y)$ puxada por f é uma subtopologia de $\mathcal{T}_X$.*

$$f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \quad \Longleftrightarrow \quad f^\star(\mathcal{T}_Y) \subseteq \mathcal{T}_X.$$

prop: restrição de função contínua é contínua na topologia induzida.

Capítulo 19

Produto de Espaços Topológicos

Definição 19.1. Seja $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I} = (X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos. O *produto* da família $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I}$ é o par

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i} := (X, \mathcal{T}),$$

em que $X := \prod_{i\in I} X_i$ é o produto de conjuntos e

$$\mathcal{T} := \left\langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^\star(\mathcal{T}_i) \right\rangle.$$

Proposição 19.1. *Sejam $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I} = (X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $X = \prod_{i\in I} X_i$ o produto de conjuntos. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{T}$ é a topologia mais fraca tal que, para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i : X \longrightarrow X_i$ é contínua.*

2. *$\mathcal{T}$ é a topologia gerada pela base cujos elementos são $\prod_{i\in I} A_i$, tal que $A_i \in \mathcal{T}_i$ e existe $J \subseteq I$ finito com $A_i = X_i$ para $i \in I \setminus J$.*

3. *$\mathcal{T}$ é a topologia $\langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^\star(\mathcal{T}_i) \rangle$.*

Demonstração. 1.

2.

3. Pela propriedade universal do produto de conjunto, $\mathrm{id}_X = \langle \pi_i \rangle_{i\in I}$, pois $\pi_i \circ \mathrm{id}_X = \pi_i$. Então, por uma propriedades básica de imagem inversa de produto (2.8),

$$\prod_{i\in I} A_i = \mathrm{id}_X^{-1}\left(\prod_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(A_i)$$

Para todo $i \in I \setminus J$, $A_i = X_i$, então $\pi_i^{-1}(A_i) = X$ e, portanto,

$$\bigcap_{i \in I \setminus J} \pi_i^{-1}(A_i) = \bigcap_{i \in I \setminus J} X = X.$$

Isso implica que

$$\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(A_i) = \left(\bigcap_{i \in I \setminus J} \pi_i^{-1}(A_i) \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j) \right) = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j)$$

Logo $\prod_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_j)$.

Seja A aberto da topologia do item 2. Então

$$A = \bigcup_{k \in K} A_k = \bigcup_{k \in K} \prod_{i \in I} A_{ki} = \bigcup_{k \in K} \bigcap_{j \in J} \pi_j^{-1}(A_{kj}),$$

o que mostra que A é aberto da topologia do item 3.

■

Proposição 19.2 (Propriedade Universal)**.** *Sejam $(\boldsymbol{X_i})_{i \in I} = (X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ uma família de espaços topológicos, $\boldsymbol{T} = (T, \mathcal{T}_T)$ um espaço topológico e, para todo $i \in I$, $f_i : \boldsymbol{T} \longrightarrow \boldsymbol{X_i}$ uma função contínua. Então existe uma única função contínua $f : \boldsymbol{T} \longrightarrow \prod_{i \in I} \boldsymbol{X_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i \in I} \boldsymbol{X_i} \arrow[d, "\pi_i"] \\
\boldsymbol{T} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & \boldsymbol{X_i}
\end{tikzcd}$$

Definição 19.2. Defina a função

$$\begin{aligned} f : T &\longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \\ x &\longmapsto (f_i(x))_{i \in I}. \end{aligned}$$

Pela propriedade universal do produto de conjuntos, f é única e $\pi_i \circ f = f_i$. Resta mostrar que f é contínua. Seja $A \in \mathcal{T}_X$. Então $A = \bigcup_{k \in K} A_k$ é uma união de abertos básicos $A_k \in \mathcal{T}$. Isso significa que, para todo $k \in K$, $A_k = \prod_{i \in I} A_{ki}$, com $A_{ki} \in \mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$ e existe $J_k \subseteq I$ finito tal que, para todo $i \in I \setminus J_k$,

$A_{ki} = X_i$. Assim, por propriedades básicas de imagem inversa de união e produto (2.8),

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{k\in K}\prod_{i\in I} A_{ki}\right) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}\left(\prod_{i\in I} A_{ki}\right) = \bigcup_{k\in K}\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_{ki}).$$

Seja $k \in K$. Como, para todo $i \in I \setminus J_k$, $A_{ki} = X_i$, então $f_i^{-1}(A_{ki}) = f_i^{-1}(X_i) = T$. Disso segue que

$$\bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(A_{ki}) = \bigcap_{j\in J_k} f_j^{-1}(A_{kj})$$

e, portanto,

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{k\in K}\bigcap_{j\in J_k} f_j^{-1}(A_{kj}).$$

Seja $k \in K$. Para todo $j \in J_k$, f_j é contínua, o que impica que $f_j^{-1}(A_{kj})$ é aberto e, por J_k ser finito, a interseção $\bigcap_{j\in J_k} f_j^{-1}(A_{kj})$ é aberta. Isso significa que a união $\bigcup_{k\in K}\bigcap_{j\in J_k} f_j^{-1}(A_{kj})$ é aberta e, portanto, $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_T$. Logo f é contínua.

Capítulo 20

Axiomas de Separação

20.1 Noções de Separação de Conjuntos

Definição 20.1. Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico e $A, B \subseteq X$. Definimos as seguintes relações entre A e B:

1. (*Separação*).
$$A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing.$$

2. (*Separação por vizinhanças*).
$$\exists U \in \mathcal{V}_A,\ V \in \mathcal{V}_B \qquad U \cap V = \varnothing.$$

3. (*Separação por função contínua*).
$$\exists f \in \mathcal{C}(X, [0,1]) \qquad f(A) = \{0\} \ \text{ e } \ f(B) = \{1\}.$$

Cada uma das relações vale entre pontos $x, y \in X$, ou entre um conjunto A e um ponto x, se, e somente se, valem entre os conjuntos $\{x\}$ e $\{y\}$, ou entre A e $\{x\}$, respectivamente.

As primeiras duas relações binárias são claramente simétricas, mas isso não é necessariamente claro no caso da terceira. No entanto, isso pode ser concluído ao cosiderar, dada uma função f que faz A e B separados por função contínua, a função $1 - f$ que faz o mesmoo entre B e A.

Proposição 20.1. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico e $A, B \subseteq X$. Então*

1. *Se A e B são separados por função contínua, então são separados por vizinhanças.*

2. *Se A e B são separados por vizinhanças, então são separados.*

3. *Se A e B são separados, então são disjuntos.*

DÚVIDA: As relações de separação negadas são relações de equivalência? Pois indintinguibilidade topológica é, e ela é a negação de separação de pontos (não exatamente). Tentar entender melhor isso.

20.2 Espaços Distinguíveis

Definição 20.2. Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico e $x, y \in X$. Os pontos são x e y são *topologicamente indisntinguíveis em* $\boldsymbol{X}$ se $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$ e são *topologicamente disntinguíveis em* $\boldsymbol{X}$ caso contrário.

Proposição 20.2. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. A relação binária de indistinguibilidade topológica é uma relação de equivalência em X.*

Demonstração. Denotemos por $\sim$ a relação binária de indistinguibilidade topológica. Sejam $x, y, z \in X$. Para mostrar a reflexividade, notemos que, como $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$, então $x \sim x$. Para mostrar a simetria, se $x \sim y$, então $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$, o que é equivalente a $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_x$ e, portanto, $y \sim x$. Por fim, para mostrar a transitividade, se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_y$ e $\mathcal{V}_y = \mathcal{V}_z$, o que implica $\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_z$ e, portanto, $x \sim z$. ■

O fato de que essa é uma relação de equivalência mostra que podemos obter a partir de qualquer espaço topológico um espaço topológico em que nenhum ponto é topologicamente indisntinguível. Para isso, basta considerar o espaço quociente definido pela relação. de indistinguibilidade topológica. Espaços com essa propriedade são definidos a seguir.

Definição 20.3 (T_0)**.** Um espaço topológico *distinguível* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que todo par de pontos distintos é topologicamente distinguível:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_x \neq \mathcal{V}_y.$$

Proposição 20.3. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. São equivalentes as seguites propriedades:*

1. *$\boldsymbol{X}$ é dinstinguível.*

2. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_x \nsubseteq \mathcal{V}_y \;\; ou \;\; \mathcal{V}_y \nsubseteq \mathcal{V}_x.$

3. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad x \notin \overline{\{y\}} \;\; ou \;\; y \notin \overline{\{x\}}.$

4. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}.$

Proposição 20.4. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico distinguível e $Y \subseteq X$. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico distinguível.*

Proposição 20.5. *Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\bigtimes \boldsymbol{X_i}$ é distinguível se, e somente se, todos os espaços $\boldsymbol{X}_i$ são distinguíveis.*

20.3 Espaços Acessíveis

Definição 20.4 (T_1)**.** Um espaço topológico *acessível* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \mathcal{V}_x \nsubseteq \mathcal{V}_y \ \text{ e } \ \mathcal{V}_y \nsubseteq \mathcal{V}_x.$$

Proposição 20.6 ($T_1 \Rightarrow T_0$)**.** *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. Se $\boldsymbol{X}$ é acessível, então $\boldsymbol{X}$ é dintinguível.*

Demonstração. Se $\boldsymbol{X}$ é acessível, então, para todos $x, y \in X$ tais que $x \neq y$, temos que $\mathcal{V}_x \nsubseteq \mathcal{V}_y$ e $\mathcal{V}_y \nsubseteq \mathcal{V}_x$. Mas isso implica que $\mathcal{V}_x \nsubseteq \mathcal{V}_y$ ou $\mathcal{V}_y \nsubseteq \mathcal{V}_x$, o que é equivalente a $\mathcal{V}_x \neq \mathcal{V}_y$. Logo $\boldsymbol{X}$ é dintinguível. ■

Proposição 20.7. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. São equivalentes as seguintes propriedades:*

1. *$\boldsymbol{X}$ é acessível.*
2. *Todo par de pontos distintos é separado:*

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad x \notin \overline{\{y\}} \ \text{ e } \ y \notin \overline{\{x\}}.$$

3. $\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{V}_x,\ V \in \mathcal{V}_y \qquad y \notin U \ \text{ e } \ x \notin V.$
4. $\forall x \in X \quad \overline{\{x\}} = \{x\}.$

Proposição 20.8. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico acessível e $Y \subseteq X$. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico acessível.*

Proposição 20.9. *Seja $(X_i)_{i\in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\bigtimes \boldsymbol{X_i}$ é acessível se, e somente se, todos os espaços $\boldsymbol{X}_i$ são acessíveis.*

20.4 Espaços Separados

Definição 20.5 (T_2)**.** Um espaço topológico *separado* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que todo par de pontos distintos é separado por vizinhanças:

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{V}_x,\ V \in \mathcal{V}_y \quad U \cap V = \varnothing.$$

Esses espaços também são conhecidos como espaços de Hausdorff.

Proposição 20.10 ($T_2 \Rightarrow T_1$)**.** *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. Se $\boldsymbol{X}$ é separado, então $\boldsymbol{X}$ é acessível.*

Proposição 20.11. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. São equivalentes as seguintes propriedades:*

1. *$\boldsymbol{X}$ é separado.*
2. *Toda rede convergente em $\boldsymbol{X}$ tem limite único.*
3. *Todo filtro convergente em $\boldsymbol{X}$ tem limite único.*

Proposição 20.12. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico separado e $Y \subseteq X$. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico separado.*

Proposição 20.13. *Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\bigtimes \boldsymbol{X_i}$ é separado se, e somente se, todos os espaços $\boldsymbol{X}_i$ são separados.*

Proposição 20.14. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico, $\boldsymbol{Y}$ um espaço topológico separado, $D \subseteq X$ um subconjunto denso em X e $f, g : X \longrightarrow Y$ funções contínuas tais que $f|_D = g|_D$. Então $f = g$.*

20.5 Espaços Regulares

Definição 20.6. Um espaço topológico *regular* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que todo ponto e todo conjunto fechado que não o contém são separado por vizinhanças: para todo $x \in X$ e para todo conjunto fechado $F \subseteq X$,

$$F \cap \{x\} = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{V}_x, \exists V \in \mathcal{V}_F \quad U \cap V = \varnothing.$$

Espaços seprados regulares são também chamados de T_3.

Proposição 20.15. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico regular. Então $\boldsymbol{X}$ é separado se, e somente se, é distinguível.*

Demonstração. Sabemos que todo espaço separado é distinguível. Para demonstrar a recíproca, supondo que $\boldsymbol{X}$ é distinguível, então para todos pontos $x, y \in X$, $x \notin \overline{\{y\}}$ ou $y \notin \overline{\{x\}}$. Sem perda de generalidade, assumamos o primeiro caso. Seja $F := \overline{\{y\}}$. Então F é fechado e $x \notin F$. Da regularidade de $\boldsymbol{X}$, segue que existem $U \in \mathcal{V}_x$ e $V \in \mathcal{V}_F$ tais que $U \cap V = \varnothing$. Como $y \in F$, então $V \in \mathcal{V}_y$, o que implica que $\boldsymbol{X}$ é separado. ■

Proposição 20.16. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. São equivalentes as seguintes propriedades:*

1. *$\boldsymbol{X}$ é regular.*
2. *Para todos ponto $x \in X$ e aberto $A \in \mathcal{V}_x$, existe aberto $V \in \mathcal{V}_x$ tal que*

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq A.$$

Proposição 20.17. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico regular e $Y \subseteq X$. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico regular.*

Proposição 20.18. *Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\bigtimes \boldsymbol{X_i}$ é regular se, e somente se, todos os espaços $\boldsymbol{X}_i$ são regulares.*

20.6 Espaços Completamente Regulares

Definição 20.7. Um espaço topológico *regular* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que todo ponto e todo conjunto fechado que não o contém são separado por função contínua: para todo $x \in X$ e para todo conjunto fechado $F \subseteq X$,

$$\{x\} \cap F = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}(X, [0,1]) \quad f(x) = \{0\} \ \text{ e } \ f(F) = \{1\}.$$

Proposição 20.19. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. Se $\boldsymbol{X}$ é completamente regular, então $\boldsymbol{X}$ é regular.*

Proposição 20.20. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico completamente regular e $Y \subseteq X$. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico completamente regular.*

Proposição 20.21. *Seja $(X_i)_{i \in I}$ uma família não vazia de espaços topológicos não vazios. O espaço produto $\bigtimes \boldsymbol{X_i}$ é completamente regular se, e somente se, todos os espaços $\boldsymbol{X}_i$ são completamente regulares.*

20.7 Espaços Normais

Definição 20.8. Um espaço topológico *normal* é um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ em que todo par de conuntos fechados disjuntos é separado por vizinhanças: para todos fechados $F, G \subseteq X$,

$$F \cap G = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists U \in \mathcal{V}_F,\ V \in \mathcal{V}_G \quad U \cap V = \varnothing.$$

Espaços separados normais são também chamados de T_4.

Proposição 20.22. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico normal. Então $\boldsymbol{X}$ é separado se, e somente se, é acessível.*

Demonstração. Sabemos que todo espaço separado é distinguível. Para demonstrar a recíproca, suponhamos que $\boldsymbol{X}$ é acessível e sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$. Então vale que $\overline{\{x\}} = \{x\}$ e $\overline{\{y\}} = \{y\}$. Como $x \neq y$, da normalidade de $\boldsymbol{X}$ existem $V_x \in \mathcal{V}_x$ e $V_y \in \mathcal{V}_y$ tais que $V_x \cap V_y = \varnothing$; ou seja, $\boldsymbol{X}$ é separado. ■

Proposição 20.23. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico. São equivalentes as seguintes propriedades:*

1. *$\boldsymbol{X}$ é normal.*
2. *Para todos fechado F e aberto $A \in \mathcal{V}_F$, existe aberto $V \in \mathcal{V}_F$ tal que*

$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A.$$

Proposição 20.24. *Sejam $\boldsymbol{X}$ um espaço topológico normal e $Y \subseteq X$ fechado. Então $\boldsymbol{Y}$ é um espaço topológico normal.*

Lema 20.25 (Urysohn)**.** *Um espaço topológico $\boldsymbol{X}$ é normal se, e somente se, todo par de conjuntos fechados é separado por função contínua: para todos conjuntos fechados $F, G \subseteq X$,*

$$F \cap G = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}(X, [0,1]) \quad f(F) = \{0\} \ \ e \ \ f(G) = \{1\}.$$

Demonstração. Primeiro, suponhamos que existe função contínua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$. Definamos $U := f^{-1}(\left[0, \frac{1}{2}\right))$ e $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1))$. Como f é contínua, U e V são abertos. Ainda, $F \subseteq U$ e $G \subseteq V$. Por fim, como $U \cap V = \varnothing$, concluímos que $\boldsymbol{X}$ é normal.

Para demonstrar a recíproca, suponhamos que $\boldsymbol{X}$ é normal. Sejam $F, G \subseteq X$ conjuntos fechados disjuntos. Como $G^{\complement}$ é aberto e $F \subseteq G^{\complement}$, existe aberto $A_{\frac{1}{2}}$ tal que $F \subseteq A_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{2}}} \subseteq G^{\complement}$. Logo existem abertos $A_{\frac{1}{4}}$ e $A_{\frac{3}{4}}$ tais que

$$F \subseteq A_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{4}}} \subseteq A_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{2}}} \subseteq A_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{A_{\frac{3}{4}}} \subseteq G^{\complement}.$$

Seja $D := \{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}^* \text{ e } k \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}\}$. Indutivamente obtemos, para cada $r \in D$, um aberto A_r tal que

$$F \subseteq A_{\frac{1}{2^n}} \subseteq \overline{A_{\frac{1}{2^n}}} \subseteq A_{\frac{2}{2^n}} \subseteq \overline{A_{\frac{2}{2^n}}} \subseteq \cdots \subseteq A_{\frac{2^n-1}{2^n}} \subseteq \overline{A_{\frac{2^n-1}{2^n}}} \subseteq G^{\complement}.$$

...

... ■

Capítulo 21

Invariantes Topológicos

21.1 Conexidade

21.2 Compacidade

21.3 Conjuntos Densos

Definição 21.1. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Um conjunto *denso em* C é um conjunto $D \subseteq M$ tal que $C \subseteq \overline{D}$.

Isso que dizer que, para todo ponto de C, existe uma sequência em D que converge para esse ponto.

Proposição 21.1. *Sejam $\boldsymbol{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $C, D \subseteq M$ conjuntos. Então D é denso em C se, e somente se, para todo conjunto aberto A de $\boldsymbol{M}$, $A \cap C \neq \varnothing$ implica $A \cap D \neq \varnothing$.*

Demonstração. Suponhamos que D é denso em C. Sejam A um conjunto aberto de $\boldsymbol{M}$ tal que $A \cap C \neq \varnothing$ e seja $p \in A \cap C$. Como D é denso em C e $p \in C$, existe uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em D que converge para p. Como A é aberto e $p \in A$, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq A$. Então, como $(p_n) \to p$, existe um número natural N tal que, para todo natural $n \geq N$, $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Mas isso implica que $p_n \in A \cap D$.

Reciprocamente, suponhamos que, para todo conjunto aberto A de $\boldsymbol{M}$, $A \cap C \neq \varnothing$ implica $A \cap D \neq \varnothing$. Se $C = \varnothing$, então $C \subseteq \overline{D}$. Se $C \neq \varnothing$, seja $p \in C$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p)$ é um conjunto aberto que contém p. Mas então $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) \cap C \neq \varnothing$, o que implica $\mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) \cap D \neq \varnothing$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhamos $p_n \in B_{\frac{1}{n}}(p) \cap D$. Assim, temos uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pontos em D que converge

para p, pois, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um natural N tal que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$ e, então

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon \Rightarrow p_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{N}}(p) \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon}(p).$$

Isso mostra que $p \in \overline{D}$ e, portanto, que $C \subseteq \overline{D}$. ■

Proposição 21.2. *Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos e $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ funções contínuas. Então o conjunto*

$$F := \{p \in M_1 : f(p) = g(p)\}$$

é um conjunto fechado.

Demonstração. Se $F = \varnothing$, então F é fechado. Se $F \neq \varnothing$, seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F que converge para $p \in M_1$. Mostraremos que $p \in F$. Como f e g são contínuas em p, segue que

$$(f(p_n)) \to f(p) \ \text{ e } \ (g(p_n)) \to g(p).$$

Como $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em F, as sequências $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(g(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ são a mesma sequência e segue da unicidade do limite que $f(p) = g(p)$, o que mostra que $p \in F$ e que, portanto, F é um conjunto fechado. ■

Proposição 21.3. *Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos, $f, g : M_1 \longrightarrow M_2$ funções contínuas e $C, D \subseteq M_1$ conjuntos tais que D é denso em C. Se $f|_D = g|_D$, então $f|_C = g|_C$.*

Demonstração. Pela proposição anterior, sabemos que $F := \{p \in M_1 : f(p) = g(p)\}$ é um conjunto fechado. Como $f|_D = g|_D$, então $D \subseteq F$. Mas isso significa que $\overline{D} \subseteq \overline{F} = F$ e, como D é denso em C, segue que $C \subseteq \overline{D} \subseteq F$ e, portanto, que $f|_C = g|_C$. ■

Parte IV

Análise

Capítulo 22

Espaços Métricos

22.1 Os Espaços Métricos

22.1.1 Métricas

Definição 22.1. Seja M um conjunto. Uma *métrica* em M é uma função $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. (Definição Positiva) Para todos $p_0, p_1 \in M$,

$$d(p_0, p_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_0 = p_1;$$

2. (Simetria) Para todos $p_0, p_1 \in M$

$$d(p_0, p_1) = d(p_1, p_0);$$

3. (Desigualdade Triangular) Para todos $p_0, p_1, p_2 \in M$,

$$d(p_1, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3).$$

A *distância* de p_0 a p_1 é o número real $d(p_0, p_1)$.

Proposição 22.1. *Sejam M um conjunto e d uma métrica em M. Então*

1. *(Positividade) Para todos $p_0, p_1 \in M$, $d(p_1, p_2) \geq 0$.*
2. *(Desigualdade Triangular Generalizada) Para todos $p_0, \ldots, p_n \in M$,*

$$d(p_0, p_n) \leq \mathop{\mathop{+}\limits_{i=1}}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})$$

Demonstração. 1. Sejam $p_1, p_2 \in M$. Da desigualdade triangular e da simetria de d, segue que

$$d(p_1, p_1) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_1) = 2d(p_1, p_2),$$

Mas $d(p_{1,1}) = 0$, o que implica $d(p_1, p_1) \geq 0$.

2. Para $n = 1$, seja $p_1 \in M$; então $d(p_1, p_1) = 0$ e $+_{i=1}^{0} d(p_i, p_{i+1}) = 0$, pois a soma é vazia. Para $n = 2$, sejam $p_1, p_2 \in M$; então $d(p_1, p_2)$ e $+_{i=1}^{1} d(p_i, p_{i+1}) = d(p_1, p_2)$, e vale a propriedade. Para $n = 3$, sejam $p_1, p_2, p_3 \in M$; então a propriedade é a desigualdade triangulal. Agora, sejam $n \geq 4$, $p_1, \ldots, p_n \in M$ e assumamos que a propriedade vale para todo $k \in \mathbb{N}$, tal que $3 \leq k \leq n-1$. Então

$$d(p_1, p_n) \leq \mathop{+}_{i=1}^{n-3} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_{n-2}, p_n),$$

pois essa soma tem $n-1$ termos e vale a hipótese de indução. Pela desigualdade triangular, vale que $d(p_{n-2}, p_n) \leq d(p_{n-2}, p_{n-1}) + d(p_{n-1}, p_n)$, e, portanto,

$$\begin{aligned} d(p_1, p_n) &\leq \mathop{+}_{i=1}^{n-3} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_{n-2}, p_n) \\ &\leq \mathop{+}_{i=1}^{n-3} d(p_i, p_{i+1}) + d(p_{n-2}, p_{n-1}) + d(p_{n-1}, p_n) \\ &= \mathop{+}_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1}). \end{aligned}$$

■

Proposição 22.2. *Sejam M um conjunto e $d_0, \ldots, d_n$ métricas em M. Então a função*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p_0, p_1) &\longmapsto \mathop{+}_{i=0}^{n} d_i(p_0, p_1) \end{aligned}$$

é uma métrica em M.

Demonstração. 1. (Identidade dos Indiscerníveis) Sejam $p_1, p_2 \in M$. Suponhamos que

$$d(p_1, p_2) = \mathop{+}_{i=1}^{n} d_i(p_1, p_2) = 0.$$

Como, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $d_i(p_1, p_2) \geq 0$, então, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $d_i(p_1, p_2) = 0$. Logo $p_1 = p_2$. Reciprocamente, suponhamos $p_1 = p_2$. Então, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, $d_i(p_1, p_2) = 0$, o que implica

$$d(p_1, p_2) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} 0 = 0.$$

2. (Simetria) Sejam $p_1, p_2 \in M$. Então, pela simetria de d_i para todo $i \in \mathtt{I}_n$,

$$d(p_1, p_2) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} d_i(p_1, p_2) = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} d_i(p_2, p_1) = d(p_2, p_1).$$

3. (Desigualdade Triangular) Sejam $p_1, p_2, p_3 \in M$. Então, para todo $i \in \mathtt{I}_n$, vale $d_i(p_1, p_3) \leq d_i(p_1, p_2) + d_i(p_2, p_3)$ pela desigualdade triangular de d_i, e segue que

$$\begin{aligned} d(p_1, p_3) &= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} d_i(p_1, p_3) \\ &\leq \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} (d_i(p_1, p_2) + d_i(p_2, p_3)) \\ &= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} d_i(p_1, p_2) + \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} d_i(p_2, p_3) \\ &= d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3). \end{aligned}$$

■

Proposição 22.3. *Sejam M um conjunto não vazio e d_1, d_2 métricas em M. Então a função*

$$\begin{aligned} d : M \times M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p_1, p_2) &\longmapsto \max\{d_1(p_1, p_2), d_2(p_1, p_2)\} \end{aligned}$$

é uma métrica em M.

Demonstração. 1. (Definição Positiva) Sejam $p_1, p_2 \in M$. Suponhamos que

$$d(p_1, p_2) = \max\{d_1(p_1, p_2), d_2(p_1, p_2)\} = 0.$$

Então $d_1(p_1, p_2) = 0$ ou $d_2(p_1, p_2) = 0$. Em ambos os casos, temos $p_1 = p_2$. Reciprocamente, suponhamos que $p_1 = p_2$. Então $d_1(p_1, p_2) = 0$ e $d_2(p_1, p_2) = 0$, o que implica $d(p_1, p_2) = \max\{d_1(p_1, p_2), d_2(p_1, p_2)\} = 0$.

2. (Simetria) Sejam $p_1, p_2 \in M$. Então

$$d(p_1, p_2) = \max\{d_1(p_1, p_2), d_2(p_1, p_2)\} = \max\{d_1(p_2, p_1), d_2(p_2, p_1)\} = d(p_2, p_1).$$

3. (Desigualdade Triangular) Sejam $p_1, p_2, p_3 \in M$. Então $d(p_1, p_3) = d_1(p_1, p_3)$ ou $d(p_1, p_3) = d_2(p_1, p_3)$. No primeiro caso, segue que

$$d(p_1, p_3) = d_1(p_1, p_3) \leq d_1(p_1, p_2) + d_1(p_2, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3).$$

No segudo caso, segue que

$$d(p_1, p_3) = d_2(p_1, p_3) \leq d_2(p_1, p_2) + d_2(p_2, p_3) \leq d(p_1, p_2) + d(p_2, p_3).$$

■

Definição 22.2. Um *espaço métrico* é um par $\boldsymbol{M} = (M, d)$ em que M é um conjunto e d é uma métrica em M. Os elementos de M são *pontos*. Um *subespaço métrico* de $\boldsymbol{M}$ é o par $\boldsymbol{S} = (S, d|_{S \times S})$.

22.1.2 Diâmetro, Bolas Abertas e Bolas Fechadas

Definição 22.3. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto não vazio. O *diâmetro* de C é o número

$$\operatorname{diam}(C) := \sup(d(C \times C)) = \sup\{d(p_0, p_1) \mid p_0, p_1 \in C\}$$

se $d(C \times C)$ é limitado superiormente, e ∞, caso contrário. Um *conjunto limitado em* $\boldsymbol{M}$ é um conjunto $C \subseteq M$ tal que $\operatorname{diam}(C) \in \mathbb{R}$. Uma *sequência limitada* em $\boldsymbol{M}$ é uma sequência $(p_n)_{n \in N}$ em M tal que $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

Definição 22.4. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico, $c \in M$ e $r \in \mathbb{R}$. A *bola aberta* de centro c e raio r em M é o conjunto

$$\mathcal{B}_r(c) := \{p \in M \mid d(c, p) < r\}.$$

A *bola fechada* de centro c e raio r em M é o conjunto

$$\bar{\mathcal{B}}_r(c) := \{p \in M \mid d(c, p) \leq r\}.$$

Proposição 22.4. *Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Então C é um conjunto limitado se, e somente se, existem $c \in M$ e $r \in \mathbb{R}$ tais que $C \subseteq \mathcal{B}_r(c)$.*

22.2 Topologia dos Espaços Métricos

22.2.1 Interior e Pontos Interiores

Definição 22.5. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Um *ponto interior* de C é um ponto $p \in C$ para o qual existe um número real $r > 0$ tal que $\mathcal{B}_r(p) \subseteq C$. O *interior* de C é o conjunto C° de todos pontos interiores de C. Um *conjunto aberto* de $\boldsymbol{M}$ é um conjunto $A \subseteq M$ tal que $A = A^\circ$. O conjunto dos conjuntos abertos de $\boldsymbol{M}$ é denotado $\mathcal{T}_{\boldsymbol{M}}$.

Proposição 22.5. *Seja $\boldsymbol{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Então*

1. *Para todo $c \in M$ e para todo número real $r > 0$, a bola aberta $B_r(c)$ é um conjunto aberto;*

2. *O conjunto $\mathcal{T}_{\boldsymbol{M}}$ é uma topologia de M.*

Demonstração. 1. Sejam $c \in M$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$. Queremos mostrar que $\mathcal{B}_r(c)$ é aberto. Para isso, seja $p \in \mathcal{B}_r(c)$. Então segue que $d := d(c, p) < r$, pela definição de bola aberta, e, portanto, $r - d \in \mathbb{R}_+^*$. Para mostrar que essa bola centrada em p está contida na bola maior centrada em c, seja $p' \in \mathcal{B}_{r-d}(p)$. Então $d(p, p') < r - d$ e, pela desigualdade triangular, segue que

$$d(c, p') \leq d(c, p) + d(p, p') < D + (r - d) = r,$$

o que mostra que $p' \in \mathcal{B}_r(c)$ e que, portanto, $\mathcal{B}_s(p) \subseteq \mathcal{B}_r(c)$. Assim, mostramos que $\mathcal{B}_r(p)$ é aberta.

2. (a) Podemos notar que $\varnothing$ é aberto por vacuidade, pois, se não fosse, existiria $p \in \varnothing$ para o qual não há $r \in \mathbb{R}_+^*$ satisfazendo $\mathcal{B}_r(p) \subseteq A$, o que é absurdo. Para mostrar que M é aberto, sejam $p \in M$ e $r \in \mathbb{R}_+^*$. Então $\mathcal{B}_r(p) \subseteq M$, pois qualquer bola aberta é subconjunto de M. Portanto M é aberto.

   (b) Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de abertos em $\boldsymbol{M}$ e seja $p \in (A_i)_{i \in I}$. Então existe $k \in I$ tal que $p \in A_k$. Como A_k é aberto, então existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\mathcal{B}_r(p) \subseteq A_k$. Como $A_k \subseteq (A_i)_{i \in I}$, segue que $\mathcal{B}_r(p) \subseteq (A_i)_{i \in I}$ e que, portanto, $(A_i)_{i \in I}$ é aberto.

   (c) Seja $(A_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$ uma sequência de abertos em $\boldsymbol{M}$ e seja $p \in (A_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$. Então, para todo $k \in \mathtt{I}_n$, $p \in A_k$. Como, para todo $k \in \mathtt{I}_n$, A_k é aberto, segue que existe $r_k \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\mathcal{B}_{r_k}(p) \subseteq A_k$, Seja $r := \min\{r_k : k \in \mathtt{I}_n\}$. Então, para todo $k \in \mathtt{I}_n$, vale $\mathcal{B}_r(p) \subseteq \mathcal{B}_{r_k}(p)$, e segue que $\mathcal{B}_r(p) \subseteq A_k$ e, portanto, $\mathcal{B}_r(p) \subseteq (A_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$, o que mostra que $(A_i)_{i \in \mathtt{I}_n}$ é aberto.

■

22.2.2 Limites e Convergência de Sequências

Definição 22.6. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em M e $p \in M$. A sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* para o ponto p se, e somente se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p).$$

Denota-se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$. O ponto p é um *limite* da sequência. Caso contrário, a sequência não converge para p. Uma *sequência convergente* é uma sequência que tem limite. Uma sequência *divergente* é uma sequência que não tem limite.

Proposição 22.6. *Todo espaço métrico $\boldsymbol{M}$ é um espaço topológico separado.*

Demonstração. Sejam $p, p' \in M$ pontos distintos. Mostraremos que existe um número real r tal que $0 < r \leq \frac{1}{2}d(p,p')$, e que isso implica que $\mathcal{B}_r(p) \cap \mathcal{B}_r(p') = \varnothing$. Como $p \neq p'$, então $d(p,p') > 0$, portanto existe $r \in \mathbb{R}$ tal que $0 < r \leq \frac{1}{2}d(p,p')$. Suponhamos que existe $p'' \in \mathcal{B}_r(p) \cap \mathcal{B}_r(p')$. Então $d(p,p'') < r$ e $d(p',p'') < r$. Mas, pela desigualdade triangular, segue que

$$d(p,p') \leq d(p,p'') + d(p'',p') < r + r \leq d(p,p'),$$

o que é absurdo. Portanto $\mathcal{B}_r(p) \cap \mathcal{B}_r(p') = \varnothing$. ■

Corolário 22.7. *Toda sequência convergente em um espaço métrico $\boldsymbol{M}$ tem limite único.*

Demonstração. Suponhamos que p, p' são limites de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $p \neq p'$, então $d(p,p') > 0$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}d(p,p')$. Então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N_1$, então $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$, e existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N_2$, então $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p')$. Assim, definindo $N := \max\{N_1, N_2\}$, segue que, se $n \geq N$, então $n \geq N_1$ e $n \geq N_2$, e, portanto, que $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ e $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p')$; ou seja, $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p')$, mas isso é absurdo, pois $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p') = \varnothing$. Portanto $p = p'$. ■

Essa proposição nos permite tratar o limite de uma sequência como um número único e, por isso, podemos usar a notação $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} p_n = p$ para quando $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \to p$.

Proposição 22.8. *Uma sequência de em um espaço métrico $\boldsymbol{M}$ é convergente se, e somente se, todas suas subsequências são convergentes.*

Demonstração. Suponhamos que $(p_n) \to p$ e seja $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon > 0$. Como $(p_n) \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para

todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N$, então $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$; como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é estritamente crescente, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, se $k \geq K$, então $n_k \geq N$. Mas então

$$k \geq K \Rightarrow n_k \geq N \Rightarrow p_{n_k} \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$$

e, portanto, $(p_{n_k}) \longrightarrow p$. Reciprocamente, se toda subsequência de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, em particular, é uma dessas subsequências e, portanto, $(p_n) \to p$. ■

Proposição 22.9. *Toda sequência convergente em um espaço métrico* $\boldsymbol{M}$ *é limitada.*

Demonstração. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em M tal que $(p_n) \to p$. Então, para $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N$, então $p_n \in \mathcal{B}_1(p)$. Assim, seja $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$l > \max(\{1\} \cup \{d(p, p_n) : n \in \mathtt{I}_N\}),$$

seque que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in \mathcal{B}_l(p)$ pois, se $0 \leq n \leq N$, $d(p, p_n) < l$ pela definição de l e, se $n \geq N$, então $p_n \in \mathcal{B}_1(p) \subseteq B_l(p)$, pois $1 < l$. Logo $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

Proposição 22.10. *Sejam* $\boldsymbol{M}$ *um espaço métrico,* $C \subseteq M$ *um conjunto e* $p \in M$*. Então existe uma sequência de pontos em* C *que converge para* p *se, e somente se, para todo número real* $\varepsilon > 0$*,* $C \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p) \neq \varnothing$*.*

Demonstração. Suponhamos que exista uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em C tal que $(p_n) \to p$. Então, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N$, então $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Mas isso implica que $p_n \in C \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Reciprocamente, suponhamos que, para todo número real $\varepsilon > 0$, $C \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p) \neq \varnothing$. Então, em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, escolhamos $p_n \in C \cap \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p)$. Assim, temos a sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para mostrar que $(p_n) \to p$, seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon > 0$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon$. Mas isso implica que, para todo número natural $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, e segue que

$$d(p, p_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$$

e, portanto, $(p_n) \to p$. ■

Proposição 22.11. *Sejam* $\boldsymbol{M}$ *um espaço métrico,* $p, q \in M$ *e* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências em* M *que convergem para* p *e* q *respectivamente. Então a sequência* $(d(p_n, q_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{R}$ *converge para* $d(p, q)$*.*

Demonstração. Para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da desigualdade triangular que

$$d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p) + d(p, q) + d(q, q_n).$$

Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Então existem $N_{1,2} \in \mathbb{N}$ tais que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_1 \Rightarrow d(p, p_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_2 \Rightarrow d(q, q_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $N_3 := \max\{N_1, N_2\}$, segue que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_3 \Rightarrow d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p) + d(p, q) + d(q, q_n) < d(p, q) + \varepsilon;$$

ou seja, $d(p_n, q_n) - d(p, q) < \varepsilon$. Analogamente, achamos $N_6 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N_3 \Rightarrow d(p_n, q_n) \leq d(p_n, p) + d(p, q) + d(q, q_n) < d(p, q) + \varepsilon$$

e fazendo $n := \max\{N_3, N_6\}$, segue que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow |d(p, q) - d(p_n, q_n)| < \varepsilon,$$

o que mostra que $(d(p_n, q_n)) \to d(p, q)$ em $\mathbb{R}$.

■

22.2.3 Fecho e Pontos Aderentes

Definição 22.7. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Um *ponto aderente* a C é um ponto $p \in M$ para o qual existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de C que converge para p. O *fecho* de C é o conjunto $\overline{C}$ de todos os pontos aderentes a C. Um *conjunto fechado* de $\boldsymbol{M}$ é um conjunto $F \subseteq M$ tal que $F = \overline{F}$.

Proposição 22.12. *Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $F \subseteq M$. Então F é um conjunto fechado se, e somente se, $F^{\complement}$ é um conjunto aberto.*

Demonstração. Suponhamos que F é um conjunto fechado. Se $F^{\complement} = \varnothing$, Mas $\varnothing$ é aberto pois, caso contrário, existe $p \in \varnothing$ para o qual não há número real $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq \varnothing$, mas isso é absurdo. Se $F^{\complement} \neq \varnothing$, seja $p \in F^{\complement}$. Se não existe número real $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq F^{\complement}$, então, para todo número real $\varepsilon > 0$, $F \cap \mathcal{B}_\varepsilon(p) \neq \varnothing$. Mas isso implica que existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em F tal que $(p_n) \to p$. Como F é fechado, isso implica $p \in F$, o que é uma contradição. Então existe número real $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq F^{\complement}$, e isso mostra que $F^{\complement}$ é aberto.

Reciprocamente, suponhamos que $F^{\complement}$ é aberto. Se $F = \varnothing$, então F é fechado. Se $F \neq \varnothing$, seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F que converge para $p \in M$. Suponhamos que $p \notin F$. Então $p \in F^{\complement}$ e, como $F^{\complement}$ é aberto, existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq F^{\complement}$. Como $(p_n) \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n \geq N$, então $p_n \in \mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Mas isso implica que $p_N \in \mathcal{B}_\varepsilon(p) \subseteq F^{\complement}$, o que é absurdo, pois $p_n \in F$. Portanto $p \in F$ e isso mostra que F é fechado. ■

Proposição 22.13. *Seja $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico. Então, para todo $c \in M$ e para todo número real $r > 0$, a bola fechada $\bar{\mathcal{B}}_r(c)$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Basta notar que $\bar{\mathcal{B}}_r(c)^{\complement}$ é aberto. ■

22.2.4 Continuidade

Definição 22.8. Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos, $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma função e $p \in M$. A função f é *contínua em p* se, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in M_1 \qquad x \in \mathcal{B}_\delta(p) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(p)).$$

Caso contrário, a função f não é contínua em p, ela é *descontínua* em p.

Denotamos as bolas abertas em $\boldsymbol{M}_1$ e em $\boldsymbol{M}_2$ por $\mathcal{B}$, mas deve-se perceber que elas são relativas a métricas possivelmente diferentes.

Proposição 22.14. *Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos, $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma função e $p \in M_1$. Então f é contínua em p se, e somente se, para toda sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em M_1 que converge para p, a sequência $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em M_2 converge para $f(p)$; ou seja*

$$\lim f(p_n) = f(\lim p_n).$$

Demonstração. Suponhamos que f é contínua em p. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em M_1 que converge para p. Seja um número real $\varepsilon > 0$. Como f é contínua, existe um número real $\delta > 0$ tal que $p_n \in \mathcal{B}_\delta(p)$ implica $f(p_n) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$. Mas, como $(p_n) \to p$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow p_n \in \mathcal{B}_\delta(p) \Rightarrow f(p_n) \in \mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$$

o que mostra que $(f(p_n)) \to f(p)$.

Reciprocamente, suponhamos que, para toda sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M_1 que converge para p, a sequência $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(p)$. Suponhamos, por absurdo, que f não é contínua em p. Então existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que, para todo número real $\delta > 0$, existe $x \in M_1$ tal que $x \in \mathcal{B}_\delta(p)$, mas $f(x) \notin$

$\mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$. Vamos mostrar que isso implica que existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M_1 que converge para p, mas que a sequência $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ não converge para $f(p)$; ou seja, que existe um número real $\varepsilon > 0$ tal que, para todo número natural N, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$, mas $f(p_n) \notin \mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$. Seja $n \in \mathbb{N}$ e tomemos $\delta = \frac{1}{n}$. Então existe $x \in M_1$ tal que $x \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p)$, mas $f(x) \notin \mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$. Nomeando esse $x \in M_1$ de p_n, obtemos uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para p pois, para todo número real $\varepsilon' > 0$, existe um número natural $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} \leq \varepsilon'$ e isso implica que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon' \Rightarrow p_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{n}}(p) \subseteq \mathcal{B}_{\frac{1}{N}}(p) \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon'}(p).$$

No entanto, $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência que não converge para $f(p)$ pois, considerando o ε original tomado da descontinuidade de f, para todo número natural N, $f(p_N) \notin \mathcal{B}_\varepsilon(f(p))$ e isso contradiz a hipótese de que, para toda sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M_1 que converge para p, a sequência $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(p)$. Portanto f é contínua. ■

Definição 22.9. Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos, $D \subseteq M_1$ e $f : D \longrightarrow M_2$ uma função. A função f é *contínua* em D se ela é contínua em todo ponto de D. Caso contrário, a função f é *descontínua* em D. Para $D = M_1$, dizemos simplesmente que f é contínua ou descontínua.

22.2.5 Outras Definições

Definição 22.10. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Um *ponto limite* (ou *ponto de acumulação*) de C é um ponto $p \in M$ para o qual existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de $C \setminus \{p\}$ que converge para p. O *derivado* de C é o conjunto de todos os pontos limites de C.

Da definição, segue que $C' \subseteq \overline{C}$. A inclusão contrária caracteriza a seção a seguir.

Definição 22.11. Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $C \subseteq M$ um conjunto. Um *ponto isolado* de C é um ponto $p \in M$ que é um ponto aderente a C mas que não é um ponto limite de C.

Um ponto isolado de C é um ponto $p \in \overline{C} \setminus C'$.

22.3 Isometrias

Definição 22.12. Sejam $\boldsymbol{M_1}$ e $\boldsymbol{M_2}$ espaços métricos. Uma *isometria* de $\boldsymbol{M_1}$ para $\boldsymbol{M_2}$ é uma função $f : M_1 \longrightarrow M_2$ que satisfaz, para todos $p, p' \in M_1$,

$$d_1(p, p') = d_2(f(p), f(p')).$$

Proposição 22.15. *Toda isometria é injetiva.*

22.4 Estrutura Uniforme

22.4.1 Sequências Aproximantes

Definição 22.13. Seja $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico. Uma sequência *aproximante* em $\boldsymbol{M}$ é uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos em M tal que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural N satisfazendo

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d(p_n, p_m) < \varepsilon.$$

Essa sequências são conhecidas como *sequências de Cauchy*. O nome aproximante se dá pelo fato de que os termos da sequência ficam cada vez mais próximos entre si, e será adotado por ser mais intuitivo, embora não seja a nomenclatura padrão.

Proposição 22.16. *Toda sequência convergente em um espaço métrico $\boldsymbol{M}$ é aproximante.*

Demonstração. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em M que converge para p. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon > 0$. Então $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ é um número real e segue que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo número natural $n \geq N$, $p_n \in \mathcal{B}_{\frac{1}{2}\varepsilon}(p)$. Assim, segue que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d(p_n, p_m) \leq d(p_n, p) + d(p, p_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que mostra que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência aproximante. ■

Proposição 22.17. *Toda sequência aproximante em um espaço métrico $\boldsymbol{M}$ que tem uma subsequência convergente é convergente.*

Demonstração. Seja $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para p. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Como $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ é um número real, existe um número natural N tal que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d(p_n, p_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $(p_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência convergente, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad k \geq K_1 \Rightarrow d(p, p_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência estritamente crescente, existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo número natural $k \geq K_2$, $n_k \geq N$. Assim, tomando $K := \max\{K_1, K_2\}$,

segue que, para todo número natural $n \in \mathbb{N}$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq N$ e, pela desigualdade triangular, que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Rightarrow d(p_n, p) \leq d(p_n, p_{n_k}) + d(p_{n_k}, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Proposição 22.18. *Toda sequência aproximante em um espaço métrico $\boldsymbol{M}$ é limitada.*

Demonstração. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência aproximante em $\boldsymbol{M}$. Então, para $\varepsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d(p_n, p_m) < 1.$$

Definamos $P := \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. Então segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(P) &= \sup\{d(p_n, p_m) \mid n, m \in \mathbb{N}\} \\ &= \max\{1 \cup \{d(p_n, p_m) \mid 0 \leq n, m \leq N\}\} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que mostra que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. ■

22.4.2 Continuidade Uniforme

Definição 22.14. Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos. Uma função *uniformemente contínua* é uma função $f : M_1 \longrightarrow M_2$ tal que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que

$$\forall p_1, p_2 \in M_1 \qquad d_1(p_1, p_2) < \delta \Rightarrow d_2(f(p_1), f(p_2)) < \varepsilon.$$

Proposição 22.19. *Sejam $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ espaços métricos, $f : M_1 \longrightarrow M_2$ uma função uniformemente contínua e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência aproximante em M_1. Então a sequência $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ em M_2 é aproximante.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ um número real. Da continuidade uniforme de f, existe um número real $\delta > 0$ tal que, para todo $p, p' \in M_1$, $d_1(p, p') < \delta$ implica $d_2(f(p), f(p')) < \varepsilon$. Como $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência aproximante, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d_1(p_n, p_m) < \delta.$$

Mas, da continuidade uniforme de f, isso implica que

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \qquad n, m \geq N \Rightarrow d_1(p_n, p_m) < \delta \Rightarrow d_2(f(p_n), f(p_m)) < \varepsilon,$$

e isso mostra que $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequênca aproximante. ■

22.4.3 Espaços Métricos Completos

Definição 22.15. Um espaço métrico *completo* é um espaço métrico em que todas sequências aproximantes convergem.

Proposição 22.20. *Seja $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico. Todo subespaço completo de $\boldsymbol{M}$ é um conjunto fechado em $\boldsymbol{M}$.*

Demonstração. Sejam $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{M}$ subsepaço métrico completo e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente em C. Então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é aproximante e, como C é completo, converge para um ponto em C, o que significa que C é fechado. ■

Proposição 22.21. *Sejam $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico, $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{M}$ um subespaço completo e $F \subseteq C$ um conjunto fechado em $\boldsymbol{M}$. Então $\boldsymbol{F}$ é completo.*

Demonstração. Seja $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência aproximante em F. Então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência aproximante em C e, como C é completo, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Porém, como F é fechado, então $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto em F, o que mostra que F é completo. ■

Teorema 22.22. *Seja $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico. Então $\boldsymbol{M}$ é completo se, e somente se, para toda sequência descrescente $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos não vazios e fechados em $\boldsymbol{M}$ tais que $(\operatorname{diam}(F_n))_{n\in\mathbb{N}} \to 0$ em $\mathbb{R}$, vale que*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \varnothing.$$

Teorema 22.23. *Sejam $\boldsymbol{M}_1$ um espaço métrico, $\boldsymbol{M}_2$ espaço métrico completo, $D \subseteq M_1$ um conjunto denso em M_1 e $f : D \longrightarrow M_2$ uma função uniformemente contínua. Então f tem uma única extensão para uma função uniformemente contínua $f^* : M_1 \longrightarrow M_2$. Ainda, se f é uma isometria, então f^* é uma isometria.*

Demonstração. Seja $p \in M_1$. Como D é denso em M_1, existe uma sequência $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D que converge para p. Como $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, é uma sequência de Cauchy e, como f é uniformemente contínua em D, segue que $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M_2. Mas M_2 é completo, o que implica que $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $p' \in M_2$. Definimos, portanto, a função f^* em p como $f^*(p) = p'$. Precisamos mostrar que f^* independe da escolha da sequência em D que converge para p. Se $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em D que converge para p, definamos a sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D por

$$r_n := \begin{cases} p_n & \text{se } n = 2k \\ q_n & \text{se } n = 2k+1. \end{cases}$$

A sequência $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p e, portanto, é uma sequência de Cauchy. A continuidade uniforme de f implica que a sequência $(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy e, portanto, como $(f(p_n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(r_{2k}))_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência que converge para p', a sequência $(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para p', o que implica que a subsequência $(f(q_n))_{n\in\mathbb{N}} = (f(r_{2k+1}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para p'. Assim, mostramos que f^* está bem definida. Claramente, se $p \in D$, então $f(p) = f^*(p)$, pois, como D é denso em M_1, se $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em D que converge para p, então, como f é contínua, segue que $f(p_n) \to f(p)$, o que mostra que $f^*(p) = f(p)$.

Agora, devemos mostrar que f^* é uniformemente contínua. Seja $\varepsilon > 0$ um número real, então $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$ é um número real e, como f é uniformemente contínua, existe número real $\delta > 0$ tal que

$$\forall p, p' \in M_1 \qquad d_1(p, p') < \delta \Rightarrow d_2(f(p), f(p')) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, sejam $p, q \in M_1$ tais que $d_1(p, q) < \delta$. Quremos mostrar que $d_2(f(p), f(p')) < \varepsilon$. Sejam $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências que convergem para p e q, respectivamente. Então $d_1(p_n, q_n) \to d_1(p, q)$ em $\mathbb{R}$.

...

A unicidade de f^* ocorre pois, se existem f^* e f'^* uniformemente contínuas que extendem f, como D é denso em M_1 e $f^*|_D = f'^*|_D$, segue que $f^* = f'^*$.

Por fim, mostramos que a isometria se preserva... ■

Definição 22.16. Seja $\boldsymbol{M}_1$ um espaço métrico. Um *completamento* de $\boldsymbol{M}$ é um espaço métrico $\boldsymbol{M}_2$ completo tal que M_1 é denso em M_2.

Proposição 22.24. *Seja $\boldsymbol{M}$ um espaço métrico e $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ completamentos de $\boldsymbol{M}$. Então existe uma isometria entre $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{M}_2$ que é a função identidade quando restrita a M.*

Demonstração. Seja f a função identidade em M. Pela proposição anterior, existe uma única extensãouniformemente contínua de f^* em M_1 ...

... ■

Proposição 22.25. *Sejam $K \subseteq M$ compacto e $f : M \longrightarrow \bar{M}$ contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f não é uniformemente contínua. Então existem $\varepsilon > 0$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências em K tais que

$$\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon.$$

Como K é compacto, existem subsequências $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergindo a $x \in K$ com $\|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})\| \geq \varepsilon$. Por continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que, se $x_{n_k}, y_{n_k} \in B(x, \delta)$, então $\|f(x_{n_k}) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $\|f(y_{n_k}) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pela desigualdade triangular, temos um absudo. ■

Capítulo 23

Espaços Normados

23.1 Normas

Definição 23.1. Seja $\boldsymbol{E}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{C}$. Uma *norma* em $\boldsymbol{E}$ é uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

1. (Homogeneidade absoluta) Para todos $c \in C$ e $v \in E$,
$$\|av\| = |a| \, \|v\| \, ;$$
2. (Subaditividade) Para todos $v_0, v_1 \in E$,
$$\|v_0 + v_1\| \leq \|v_0\| + \|v_1\| \, ;$$
3. (Definição positiva) Se $\|v\| = 0$, então $v = 0$.

Claramente $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma norma em $\mathbb{C}$.

Proposição 23.1. *Sejam $\boldsymbol{E}$ um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{C}$ e $\|\cdot\|$ uma norma em $\boldsymbol{E}$. Então*

1. $\|0\| = 0$;
2. *Para todo $v \in E$, $\|-v\| = -\|v\|$;*
3. *Para todo $v \in E$, $\|v\| \geq 0$.*
4. *(Subaditividade generalizada) Sejam $v_0, \ldots, v_{n-1} \in E$. Então*
$$\left\| \mathop{+}_{0 \leq i < n} v_i \right\| \leq \mathop{+}_{0 \leq i < n} \|v_i\|$$

Definição 23.2. Um *espaço normado* é um par $\mathbb{E} = (\boldsymbol{E}, \|\cdot\|)$ em que $\boldsymbol{E}$ é um espaço vetorial sobre um corpo $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{C}$ e $\|\cdot\|$ é uma norma em $\boldsymbol{E}$. A dimensão de $\mathbb{E}$ é a dimensão do espaço vetorial $\boldsymbol{E}$.

Proposição 23.2. *Seja $\mathbb{E}$ um espaço normado. A função*

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_0, v_1) &\longmapsto \|v_0 - v_1\|. \end{aligned}$$

é uma métrica em E.

Demonstração. (Definição positiva) Sejam $v, \bar{v} \in E$. Se $v = \bar{v}$, então segue da positividade que

$$d(v, \bar{v}) = d(v, v) = \|v - v\| = \|v - v\| = \|0\| = 0.$$

Reciprocamente, se $d(v, \bar{v}) = 0$, então $\|v - \bar{v}\| = 0$. Segue da definição positiva $v - \bar{v} = 0$, logo $v = \bar{v}$. (Simetria) Sejam $v, \bar{v} \in E$. Então segue da homogeneidade absoluta que

$$d(v, \bar{v}) = \|v - \bar{v}\| = \|-1(\bar{v} - v)\| = |-1| \, \|\bar{v} - v\| = d(\bar{v}, v).$$

(Desigualdade triangular) Sejam $v_0, v_1, v_2 \in E$. Então segue da subaditividade que

$$\begin{aligned} d(v_0, v_2) &= \|v_0 - v_2\| \\ &= \|v_0 - v_1 + v_1 - v_2\| \\ &\leq \|v_0 - v_1\| + \|v_1 - v_2\| \\ &= d(v_0, v_1) + d(v_1, v_2). \end{aligned}$$

■

Definição 23.3. Seja $\mathbb{E}$ um espaço normado. A *métrica* em $\mathbb{E}$ é a função

$$\begin{aligned} d : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, \bar{v}) &\longmapsto \|v - \bar{v}\|. \end{aligned}$$

A *topologia de* $\mathbb{E}$ é a topologia de (E, d).

Definição 23.4. Seja $\mathbb{E}$ um espaço vetorial normado. O *disco unitário* de $\mathbb{E}$ é o conjunto

$$\mathbb{D} := \{v \in E \mid \|v\| = 1\}.$$

O disco unitário é a bola fechada, de raio 1 e centro na origem, com respeito à métrica induzida pela norma.

Proposição 23.3. *Seja $\mathbb{E}$ um espaço normado. O disco unitário de $\mathbb{D}$ é um conjunto convexo e centro-ssimétrico na origem.*

Demonstração. Sejam $t \in]0,1[$ e $v, \bar{v} \in \mathbb{D}$. Então

$$\|(1-t)v + t\bar{v}\| \leq (1-t)\|v\| + t\|\bar{v}\| = (1-t) + t = 1,$$

logo $(1-t)v + t\bar{v} \in \mathbb{D}$, o que mostra que $\mathbb{D}$ é convexo. Agora, seja $v \in \mathbb{D}$. Então $1 \geq \|v\| = \|-v\|$, logo $-v \in \mathbb{D}$, o que mostra a centrossimetria. ■

23.2 Espaços Normados de Dimensão Finita

Espaços vetoriais de dimensão finita $\boldsymbol{E}$ sobre um corpo $\boldsymbol{C}$ podem ser identificados com $\boldsymbol{C^d}$, que que d é a dimensão de E. Nesses casos, a menos que seja mencionado o contrário, sempre consideraremos a base canônica

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$$

em $\boldsymbol{C^d}$ e todo vetor $v \in \boldsymbol{C^d}$ será representado como $v = (v_0, \ldots, v_{d-1})$.

Definição 23.5. Sejam $\boldsymbol{E}$ um espaço vetorial finito sobre um corpo $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{C}$ e $p \in [1, \infty[$. A *p-norma* em $\boldsymbol{E}$ é a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \left(\mathop{\bigplus}_{i=0}^{d-1} |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

A ∞*-norma* em $\boldsymbol{E}$ é a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_\infty : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \max_{0 \leq i < d} |v_i|. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que $\lim_{p \to \infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$.

Proposição 23.4. *Para todo $p \in [1, \infty]$, a p-norma em $\mathbb{E}$ é uma norma.*

Definição 23.6. *Normas equivalentes* são normas $\|\cdot\|, |\cdot| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ para as quais existem $c, C \in \mathbb{R}$ tais que $0 < c$ e, para todo $v \in E$,

$$c\|v\| \leq |v| \leq C\|v\|.$$

Proposição 23.5. *Equivalência de norma é uma relação de equivalência.*

Proposição 23.6. *Sejam $\boldsymbol{E}$ um espaço vetorial finito sobre um corpo $\boldsymbol{C} \subseteq \mathbb{C}$. Então toda norma em $\boldsymbol{E}$ são equivalentes.*

Demonstração. Vamos mostrar que toda norma em $\boldsymbol{E}$ é equivalente a $\|\cdot\|_1$ e, como equivalência de normas é uma relação de equivalência, seguirá que todas normas são equivalentes em $\boldsymbol{E}$. Seja $\|\cdot\|$ uma norma em $\boldsymbol{E}$. Para todo $v \in E$, definindo $C \coloneqq \max_{0 \leq i < d} \|e_i\|$, em que $\{e_i\}_{0 \leq i < d}$ é a base canônica de $\boldsymbol{E}$, segue que

$$\|v\| = \left\| \mathop{+}_{i=0}^{d-1} v_i e_i \right\| \leq \mathop{+}_{i=0}^{d-1} |v_i| \, \|e_i\| \leq C \, \|v\|_1 .$$

A outra parte da equivalência segue do fato de que toda todo conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}$ é sequencialmente compacto. ■

23.3 Funções Multilineares

Proposição 23.7. *Sejam $\boldsymbol{E_0}, \ldots, \boldsymbol{E_{n-1}}, \boldsymbol{E}$ espaços normados e $T : E_0 \times \cdots \times E_{n-1} \longrightarrow E$ uma função n-linear. São equivalentes*

1. *T é contínua;*
2. *T é contínua em 0;*
3. *Existe real $C > 0$ tal que, para todos $v_0 \in \boldsymbol{E_0}$, …, $v_{n-1} \in \boldsymbol{E_{n-1}}$,*

$$\|f(v_0, \ldots, v_{n-1})\| \leq C \, \|v_0\| \cdots \|v_{n-1}\| ;$$

Proposição 23.8. *Sejam $\boldsymbol{E_1}, \ldots, \boldsymbol{E_n}$ espaços normados de dimensão finita, $\boldsymbol{E}$ um espaço normado e $T : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E$ uma função n-linear. Então existe $C \in \mathbb{R}_+$ tal que, para todos $v_1 \in \boldsymbol{E_1}$, …, $v_n \in \boldsymbol{E_n}$,*

$$\|T(v_1, \ldots, v_n)\| \leq C \, \|v_1\| \cdots \|v_n\| .$$

Demonstração. Para todo $1 \leq i \leq n$, sejam $d_i \coloneqq \dim E_i$ e $\{(b_i)_k\}_{0 \leq k < d_n}$ uma base de $\boldsymbol{E_i}$. Todas normas em $\boldsymbol{E_i}$ são equivalentes, portanto usaremos a norma $\|\cdot\|_\infty$.

Assim, para todos $v_1 \in \boldsymbol{E_1}$, ..., $v_n \in \boldsymbol{E_n}$,

$$\begin{aligned}
\|T(v_1,\ldots,v_n)\| &= \left\| \mathop{+}_{\substack{0\le k_1<d_1\\ \cdots \\ 0\le k_n<d_n}} (v_{k_1})_1 \cdots (v_{k_n})_n T\Big((b_{k_1})_1, \cdots, (b_{k_n})_n\Big) \right\| \\
&\le \mathop{+}_{\substack{0\le k_1<d_1\\ \cdots \\ 0\le k_n<d_n}} |(v_{k_1})_1| \cdots |(v_{k_n})_n| \left\| T\Big((b_{k_1})_1, \cdots, (b_{k_n})_n\Big) \right\| \\
&\le \|v_1\| \cdots \|v_n\| \mathop{+}_{\substack{0\le k_1<d_1\\ \cdots \\ 0\le k_n<d_n}} \left\| T\Big((b_{k_1})_1, \cdots, (b_{k_n})_n\Big) \right\| .
\end{aligned}$$

Definindo

$$C := \mathop{+}_{\substack{0\le k_1<d_1\\ \cdots \\ 0\le k_n<d_n}} \left\| T\Big((b_{k_1})_1, \cdots, (b_{k_n})_n\Big) \right\| ,$$

segue que

$$\|T(v_1,\ldots,v_n)\| \le C \|v_1\| \cdots \|v_n\| .$$

■

23.4 Espaço Real

23.4.1 Notação de Vetores e Funções

23.5 Compactos

Teorema 23.9 (Heine-Borel)**.** *Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto. Então são equivalentes:*

1. *C é compacto.*
2. *C é fechado e limitado.*
3. *Para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$, existe subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in C$.*

Proposição 23.10. *Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, para toda função $f : C \longrightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, $f(C)$ é limitado.*

Demonstração. ■

Exercício Vale o mesmo se trocarmos limitado por fechado na proposição anterior?

Proposição 23.11. *Sejam $C \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, $X \subseteq \mathbb{R}^m$ e $f : X \times C \longrightarrow \mathbb{R}^l$ contínua. Seja $x_0 \in X$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in X$ e $|x - x_0| < \delta$, então, para todo $\alpha \in C$, $|f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponha que existe $\varepsilon > 0$ e $x_k \longrightarrow x_0$ e $\alpha_k \in C$ tal que $|f(x_k, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| \geq \varepsilon$, α_k tem subcobertura $\alpha_{k_n} \longrightarrow \alpha_0$ ■

Capítulo 24

Diferenciabilidade no Espaço Real

O espaço real $\mathbb{E}$ estudado neste capítulo será o espaço vetorial normado $(\mathbb{R}^d, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{R}$. A base canônica de $\mathbb{R}^d$ será representada pelos vetores $\{\boldsymbol{e}_0, \ldots, \boldsymbol{e}_{d-1}\}$. Um vetor $x \in \mathbb{R}^d$ será também representado por $x = (x_0, \ldots, x_{d-1})$ e uma função $f : \mathbb{R}^{d_0} \longrightarrow \mathbb{R}^{d_1}$ será também representada por $f = (f_0, \ldots, f_{d_1-1})$, de modo que $f_i := \pi_i \circ f$, sendo π_i a i-ésima projeção de $\mathbb{R}^{d_1}$ em $\mathbb{R}$. Como todas normas em $\mathbb{R}^d$ são equivalentes, não será feita referência à norma utilizada, apenas será usado o fato de que $\mathbb{R}^d$ é um espaço vetorial normado (e completo). Se necessário, a norma utilizada será explicitada e, quando não for, a norma usada será $\|\cdot\|_2$. O estudo da diferenciabilidade em espaços de dimensão maior que 1 envolve o uso de funções contínuas e transformações lineares, e também de funções de um espaço real em um espaço de tranformações lineares. Por esse motivo, a notação pode ser confusa. Para simplificar a notação, uma transformação linear T aplicada a um vetor v será sempre denotada por $T \cdot v$. Desenvolveremos, a seguir, a teoria de diferenciabilidade de funções entre espaços reais, e as funções consideradas serão sempre da forma

$$f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c,$$

mas toda teoria poderia ser desenvolvida para funções definidas em abertos de $\mathbb{R}^d$. O tratamento que adotaremos, no entanto, não prejudica a generalidade, pois todas propriedades desenvolvidas podem ser compreendidas localmente.

24.1 Diferenciabilidade

A ideia por trás dessa definição de diferenciabilidade é a de que a função f pode ser aproximada em uma vizinhança de um ponto p por seu valor no ponto mais o valor de uma transfomação linear aplicada num vetor v de variação que mede quanto afastou-se do ponto p. Ser aproximada, nesse sentido, quer dizer que o erro da aproximação será da ordem da norma do vetor variação v, de modo que a

razão entre os dois vá a zero quando a variação vai a zero. A definição de função contínua, de fato, pode ser pensada como um caso análogo: a função f numa vizinhança do ponto p pode ser aproximada por seu valor em p, e aproximada aqui quer dizer que a norma da diferença vai a zero quando o vator variação vai a zero. Mais à frente, as k-ésimas diferenciais da função f serão definidas analogamente, considerando nesses casos funções multilineares.

Definição 24.1. Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função. Uma *diferencial* de f em p é uma transformação linear $T : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ que satisfaz

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - T \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

Uma função *diferenciável* em p é uma função que tem diferencial em p.

É válido notar que são equivalentes a essa condição

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p) - T \cdot (x-p)}{\|x-p\|} = 0.$$

e

$$\lim_{v \to 0} \frac{\|f(p+v) - f(p) - T \cdot v\|}{\|v\|} = 0.$$

Proposição 24.1 (Diferenciabilidade implica continuidade)**.** *Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função. Se f é diferenciável em p, então f é contínua em p.*

Demonstração. Se f é diferenciável em p, então, como $\lim_{v \to 0} T \cdot v = 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{v \to 0}(f(p+v) - f(p)) &= \lim_{v \to 0}(f(p+v) - f(p) - T \cdot v) \\
&= \lim_{v \to 0} \|v\| \, \frac{f(p+v) - f(p) - T \cdot v}{\|v\|} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

logo f é contínua em p. ■

Proposição 24.2 (Unicidade da diferencial)**.** *Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função diferenciável em p. Então existe uma única diferencial de f em p.*

Demonstração. Sejam $T, S : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ diferenciais de f em p. Nesse caso, temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{v \to 0} \frac{T \cdot v - S \cdot v}{\|v\|} = \\
&= \lim_{v \to 0} \frac{T \cdot v - (f(p+v) - f(p)) + (f(p+v) - f(p)) - S \cdot v}{\|v\|} \\
&= -\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - T \cdot v}{\|v\|} + \lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - S \cdot v}{\|v\|} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como T e S são transformações lineares, sabemos que $T \cdot 0 = S \cdot 0 = 0$. Para todo $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, temos que, quando $t \to 0$, $tv \to 0$. Ainda, como T e S são transformações lineares, $T \cdot (tv) = t(T \cdot v)$ e $S \cdot (tv) = t(S \cdot v)$, e segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{tv \to 0} \frac{\|T \cdot (tv) - S \cdot (tv)\|}{\|tv\|} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{|t| \, \|T \cdot v - S \cdot v\|}{|t| \, \|v\|} \\ &= \frac{\|T \cdot v - S \cdot v\|}{\|v\|}, \end{aligned}$$

o que implica $T \cdot v = S \cdot v$, pois $\|v\| \neq 0$. Portanto $T = S$. ■

Notação. Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função diferenciável em p. A diferencial de f em p é denotada $\mathrm{D}f(p) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ e satisfaz

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \mathrm{D}f(p) \cdot v}{\|v\|} = 0.$$

Podemos ver que, se f é diferenciável, então $\mathrm{D}f : \mathbb{R}^d \longrightarrow L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^c)$ é uma função que leva $p \in \mathbb{R}^d$ na diferencial $\mathrm{D}f(p)$ de f em p.

Proposição 24.3 (Regra da cadeia)**.** *Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável em $p \in \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ diferenciável em $f(p)$. Então $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^l$ é diferenciável em p e*

$$\mathrm{D}(g \circ f)(p) = \mathrm{D}g(f(p)) \circ \mathrm{D}f(p).$$

Demonstração. Definamos

$$r_1(v) \coloneqq f(p+v) - f(p) - \mathrm{D}f(p) \cdot v$$

e

$$r_2(v) \coloneqq g(f(p)+v) - g(f(p)) - \mathrm{D}g(f(p)) \cdot v,$$

de modo que da diferenciabilidade de f em p e de g em $f(p)$ segue

$$\lim_{v \to 0} \frac{r_1(v)}{\|v\|} = \lim_{v \to 0} \frac{r_2(v)}{\|v\|} = 0.$$

Calculando $(g \circ f)(p+v)$, obtemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(p+v) &= g(f(p+v)) = g(f(p) + \mathrm{D}f(p) \cdot v + r_1(v)) \\ &= g(f(p)) + \mathrm{D}g(f(p)) \cdot (\mathrm{D}f(p) \cdot v + r_1(v)) \\ &\quad + r_2(\mathrm{D}f(p) \cdot v + r_1(v)) \\ &= (g \circ f)(p) + \Big(\mathrm{D}g(f(p)) \circ \mathrm{D}f(p)\Big) \cdot v + \mathrm{D}g(f(p)) \cdot r_1(v) \\ &\quad + r_2(\mathrm{D}f(p) \cdot v + r_1(v)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}(g\circ f)(p+v)-(g\circ f)(p)-\Big(\mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}f(p)\Big)\cdot v\\ =\mathrm{D}g(f(p))\cdot r_1(v)+r_2(\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v)).\end{aligned}$$

Como $\mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}f(p)$ é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^l$, basta mostrar que a expressão acima, dividida por $\|v\|$, vai a zero. Mas

$$\lim_{v\to 0}\frac{\mathrm{D}g(f(p))\cdot r_1(v)}{\|v\|}=\lim_{v\to 0}\mathrm{D}g(f(p))\cdot\frac{r_1(v)}{\|v\|}=0$$

e, como $\lim_{v\to 0}\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v)=0$ e $\mathrm{D}f(p)\cdot\frac{v}{\|v\|}$ é limitado,

$$\begin{aligned}&\lim_{v\to 0}\frac{r_2(\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v))}{\|v\|}\\ &\quad=\lim_{v\to 0}\frac{r_2(\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v))}{\|\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v)\|}\frac{\|\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v)\|}{\|v\|}\\ &\quad=\lim_{v\to 0}\frac{r_2(\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v))}{\|\mathrm{D}f(p)\cdot v+r_1(v)\|}\left\|\mathrm{D}f(p)\cdot\frac{v}{\|v\|}+\frac{r_1(v)}{\|v\|}\right\|=0.\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{v\to 0}\frac{(g\circ f)(p+v)-(g\circ f)(p)-\Big(\mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}f(p)\Big)\cdot v}{\|v\|}=0,$$

e concluímos que $\mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}f(p)$ é a diferencial de $g\circ f$ em p. ■

Proposição 24.4 (Regra da cadeia iterada)**.** *Sejam $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 2-diferenciável em $p\in\mathbb{R}^n$ e $g:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^l$ diferenciável em $f(p)$. Então $g\circ f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^l$ é diferenciável em p e*

$$\mathrm{D}^2(g\circ f)(p,p)=\mathrm{D}^2g(f(p),f(p))\circ \mathrm{D}f(p)+\mathrm{D}g(f(p))\circ \mathrm{D}^2f(p)$$

Proposição 24.5. *Sejam $f,g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ diferenciáveis em $p\in\mathbb{R}^n$. Então*

1. $D(f+g)(p)=Df(p)+Dg(p)$;
2. $D(f\cdot g)=Df(p)\cdot g(p)+f(p)\cdot Dg(p)$;
3. *Se $g(a)\neq 0$,*
$$D\left(\frac{f}{g}\right)(p)=\frac{g(p)\cdot Df(a)-Dg(a)\cdot f(p)}{g(p)^2}$$

24.1.1 Diferenciais de Ordem Superior

Generalizamos, agora, a ideia de uma diferencial para uma k-diferencial. Para isso, denotaremos um vetor $(v, \ldots, v)$ com i entradas por $(v)^{\otimes i}$

Definição 24.2. Seja $p \in \mathbb{R}^d$. Uma função *k-diferenciável* em p é uma função $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ tal que, para todo $i \leq k$, existe uma função i-linear simétrica

$$T_i : \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$$

satisfazendo

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i}}{\|v\|^k} = 0.$$

Uma função T_i como acima é uma *diferencial de ordem i* (ou *i-ésima diferencial*) da f em p.

Proposição 24.6. *Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função k-diferenciável em p. Então f é $(k-1)$-diferenciável em p.*

Demonstração. Primeiro notemos que

$$\lim_{v \to 0} \frac{T_k \cdot (v)^{\otimes k}}{\|v\|^{k-1}} \leq \lim_{v \to 0} \frac{\|T_k\| \, \|v\|^k}{\|v\|^{k-1}} = \lim_{v \to 0} \|T_k\| \, \|v\| = 0.$$

Portanto segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i}}{\|v\|^{k-1}} \\
&= \lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i} - \frac{1}{k!} T_k \cdot (v)^{\otimes k}}{\|v\|^{k-1}} \\
&= \lim_{v \to 0} \|v\| \, \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i}}{\|v\|^k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

Proposição 24.7. *Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função k-diferenciável em p. Então as i-ésimas diferenciais de f em p são únicas.*

Demonstração. Mostraremos por indução em k. Para $k = 1$, temos a definição de função diferenciável, portanto a diferencial de f em p é única. Para o passo indutivo, suponhamos que toda função $(k-1)$-diferenciável tem únicas i–ésimas diferenciais para $0 \leq i \leq k-1$. Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ k-diferenciável em p. Então ela é $(k-1)$-diferenciável em p pela proposição anterior e segue que, para todo $i \leq k$, existe uma única função i-linear simétrica

$$T_i : \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$$

satisfazendo

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i}}{\|v\|^k} = 0.$$

Agora, sejam T, S diferenciais de ordem k de f em p e definamos

$$A(v) \coloneqq f(p+v) - f(p) - \mathop{+}_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i!} T_i \cdot (v)^{\otimes i}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{v \to 0} \frac{T \cdot (v)^{\otimes k} - S \cdot (v)^{\otimes k}}{\|v\|^k} \\
&= \lim_{v \to 0} \frac{\frac{1}{k!} T \cdot (v)^{\otimes k} - A(v) + A(v) - \frac{1}{k!} S \cdot (v)^{\otimes k}}{\|v\|^k} \\
&= -\lim_{v \to 0} \frac{\frac{1}{k!} T \cdot (v)^{\otimes k} - A(v)}{\|v\|^{\otimes k}} + \lim_{v \to 0} \frac{A(v) - \frac{1}{k!} S \cdot (v)^{\otimes k}}{\|v\|^k} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como T e S são transformações k-lineares, sabemos que $T \cdot (0)^{\otimes k} = S \cdot (0)^{\otimes k} = 0$. Para $v \in (\mathbb{R}^d)^k \setminus \{(0)^{\otimes k}\}$, temos que, quando $t \to 0$, $(tv)^{\otimes k} \to (0)^{\otimes k}$. Ainda, como T e S são k-lineares, $T \cdot (tv)^{\otimes k} = t^k T \cdot (v)^{\otimes k}$ e $S \cdot (tv)^{\otimes k} = t^k S \cdot (v)^{\otimes k}$, e segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{tv \to 0} \frac{T \cdot (tv)^{\otimes k} - S \cdot (tv)^{\otimes k}}{\|tv\|^k} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(t)^k \Big(T \cdot (v)^{\otimes k} - S \cdot (v)^{\otimes k} \Big)}{|t|^k \, \|v\|^k} \\
&= \pm \frac{\Big(T \cdot (v)^{\otimes k} - S \cdot (v)^{\otimes k} \Big)}{\|v\|^k}
\end{aligned}$$

o que implica $T \cdot (v)^{\otimes k} = S \cdot (v)^{\otimes k}$, pois $\|v\| \neq 0$. Por fim, essa relação e a simetria de T e S implicam que elas são iguais em todos os pontos, portanto $T = S$. ■

Notação. Sejam $p \in \mathbb{R}^d$ e $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ uma função k-diferenciável em p. A diferencial de ordem k de f em p é denotada $\mathrm{D}^k f(p) : \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^c$ e satisfaz

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \displaystyle\mathop{+}_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathrm{D}^i f(p) \cdot (v)^{\otimes i}}{\|v\|^k} = 0.$$

O polinômio

$$P(v) = f(p) + \mathop{+}_{i=1}^{k} \frac{1}{i!} \mathrm{D}^i f(p) \cdot (v)^{\otimes i}$$

é o *polinômio diferencial de ordem* k de f em p.

24.2 Derivadas Direcionais e a Geometria da Diferenciabilidade

A partir dessa seção, cosideraremos funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^c$, em que $A \subseteq \mathbb{R}^d$ é um aberto. Toda a discussão feita na seção anterior considerou a diferenciabilidade em pontos do domínio. Agora, consideraremos a diferenciabilidade em conjuntos. A definição de diferenciabilidade da seção anterior pode ser facilmente adaptada parra funções $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^c$ pois essa função pode ser definida em $\mathbb{R}^d$ todo escolhendo qualquer valor para f em $A^{\complement}$. Como as definições e resultados trataram de pontos, isso não atrapalha em nada. Os abertos serão necessários agora pois consideraremos curvas numa vizinhança de um ponto e relacionaremos as derivadas por essas curvas com derivadas parciais da função f.

Definição 24.3. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $p \in A$, $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $p + v \in A$ e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. A *derivada direcional* de f em p na direção de v é

$$\partial_v f(p) := \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}.$$

Como A é aberto, existe ε tal que $p + tv \in A$ para todo $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Tomemos então a curva

$$\begin{aligned} \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[&\longrightarrow A \\ t &\longmapsto p + tv, \end{aligned}$$

de modo que temos $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então, pela regra da cadeia,

$$\partial_v f(p) = D(f \circ \gamma)(0) = \mathrm{D}f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) = \mathrm{D}f(p) \cdot v.$$

Disso concluímos que a derivada direcional de f em p na direção de v é a imagem de v sob a transformação linear $\mathrm{D}f(p)$. Portanto definindo as derivadas direcionais $\partial_i f(x) \coloneqq \mathrm{D}f(x) \cdot e_i$ temos que

$$\mathrm{D}f(x) \cdot v = \mathop{\bigplus}_{i=0}^{d-1} v_i \partial_i f(x).$$

Capítulo 25

Equações Diferenciais Ordinárias

25.1 Equações Diferenciais Ordinárias e Soluções

Definição 25.1. Sejam $n, d \in \mathbb{N}^*$ Uma *equação diferencial ordinária de ordem n e dimensão d* é uma expressão E da forma

$$x^{(n)} = F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)}),$$

em que $t \in \mathbb{R}$ é a variável *tempo*, $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função, $A \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$ é um aberto e $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função contínua.

Definição 25.2. Seja $E : x^{(n)} = F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ uma equação diferencial ordinária de dimensão d. Uma *solução de E* é uma curva $\varphi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ n-diferenciável tal que

$$\varphi^{(n)} = F(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

Proposição 25.1 (Redução de ordem)**.** *Seja $E : x^{(n)}(t) = F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$ uma equação diferencial ordinária de dimensão d definida num aberto $A \subseteq \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^d)^n$. Então existe equação diferencial ordinária $\boldsymbol{E}$ de dimensão dn*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$$

tal que existe ϕ solução de E se, e somente se, existe $\boldsymbol{\phi}$ solução de $\boldsymbol{E}$.

Demonstração. Definimos $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1}) := (x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})$, de modo que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}' &= ((x_0)', \ldots, (x_{n-1})', (x_{n-1})') \\
&= (x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}) \\
&= (x_1, \ldots, x_{n-1}, F(t, x, x^{(1)}, \cdots, x^{(n-1)})) \\
&= (x_1, \ldots, x_{n-1}, F(t, \boldsymbol{x}))
\end{aligned}$$

Assim, definimos a função

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} : A &\longrightarrow \mathbb{R}^{dn} \\ (t, \boldsymbol{x}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{n-1}, F(t, \boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

e então $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$. Por fim, devemos mostrar que as soluções são equivalentes. Seja $\phi : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ solução de E. Então, para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\phi^{(k)} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Assim, definindo $\boldsymbol{\phi} := (\phi, \phi^{(1)}, \ldots, \phi^{(n-1)})$, segue que $\boldsymbol{\phi}$ é solução de $\boldsymbol{E}$. ■

Por causa dessa proposição, podemos representar qualquer equação diferencial ordinária como uma de ordem 1.

25.2 Existência e Unicidade de Soluções

25.3 Soluções Maximais

Definição 25.3. Seja $E : x' = F(t, x)$ uma equação diferencial ordinária de dimensão d. Uma *solução maximal de* E é uma solução $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de E para a qual vale que, para toda solução $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de E tal que $I \subseteq J$ e $\psi|_I = \phi$, então $I = J$ e $\phi = \psi$. O intervalo I é o *intervalo maximal*.

Definição 25.4. Dado $(t_0, x_0) \in U$, defina

$$S_{(t_0,x_0)} := \left\{ \phi : I_\phi \longrightarrow \mathbb{R}^d \;\middle|\; \phi \text{ é solução do problema de Cauchy} \right\}.$$

Dados $\phi, \psi \in S_{(t_0,x_0)}$, definimos $\phi \leq \psi$ se, e somente se, $I_\phi \subseteq I_\psi$ e $\psi|_{I_\phi} = \phi$.

Proposição 25.2. *A relação acima de fato é relação de ordem parcial.*

Teorema 25.3. *Seja $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ uma função contínua definida num aberto $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Então, para cada $(t_0, x_0) \in U$ existe solução maximal para o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Capítulo 26

Teoria da Medida

26.1 Espaço Mensurável

26.1.1 Sigma-Álgebras e Sub-Sigma-Álgebras

Definição 26.1. Seja X um conjunto. Uma *sigma-álgebra* sobre X é um conjunto $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos X que satisfaz

1. (Vazio) $\varnothing \in \Sigma$.
2. (Fechamento por complementação) Para todo $M \in \Sigma$, $M\complement \in \Sigma$.
3. (Fehamento por união enumerável) Para toda sequência $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de Σ,
$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i \in \Sigma$$

Vale notar que uma sigma-álgebra Σ é uma álgebra booleana (15.3) e, portanto, todas propriedades de álgebras booleanas valem para uma sigma-álgebra. De fato, o *sigma* no nome vem da terceira propriedade das sigma-álgebras, pois veremos que essa propriedade tem a ver com um tipo de soma de medidas a ser definido adiante.

Proposição 26.1. *Seja X um conjunto não vazio e Σ uma sigma-álgebra sobre X. Então*

1. *(Universo) $X \in \Sigma$;*
2. *(Fechamento por interseção enumerável) Para toda sequência $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de Σ,*
$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i \in \Sigma.$$

Demonstração. 1. Da primeira propriedade de Σ, tem-se que $\varnothing \in \Sigma$. Da segunda propriedade de Σ, tem-se que $X = \varnothing^{\complement} \in \Sigma$.

2. Da segunda propriedade, tem-se que, para todo $i \in \mathbb{N}$, $M_i^{\complement} \in \Sigma$. Da terceira propriedade de Σ, tem-se que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i^{\complement} \in \Sigma$. Das Leis de De Morgan (15.12), tem-se que

$$\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} M_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} (M_i)^{\complement} \in \Sigma,$$

e conclui-se que $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i \in \Sigma$.

■

Exemplo 26.1. $\Sigma = \{\varnothing, X\}$ *e* $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ *são sigma-álgebras sobre* X.

Definição 26.2. Seja X um conjunto não vazio e Σ uma sigma-álgebra sobre X. Uma *sub-sigma-álgebra* de Σ é um conjunto $\Sigma' \subseteq \Sigma$ que é uma sigma-álgebra sobre X.

Definição 26.3. Um *espaço mensurável* é um par (X, Σ) em que X é um conjunto não vazio e Σ é uma sigma-álgebra sobre X. Um *conjunto mensurável* é um elemento da sigma-álgebra Σ.

26.1.2 Sigma-Álgebras Geradas

Proposição 26.2. *Seja* X *um conjunto não vazio e* $(\Sigma_i)_{i\in I}$ *uma família de sigma-álgebras sobre* X. *Então*

$$\Sigma := \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$$

é uma sigma-álgebra sobre X.

Demonstração. Como Σ_i são sigma-álgebras, então $\varnothing \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$. Assim, segue que $\varnothing \in \Sigma$. Ainda, se $A \in \Sigma$, então $A \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$. Logo $A^{\complement} \in \Sigma_i$ para todo $i \in I$, o que implica $A^{\complement} \in \Sigma$. Por fim, se $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em Σ, então $A_j \in \Sigma$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Mas isso implica que $A_j \in \Sigma_i$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $i \in I$, o que, por sua vez, implica que, para todo $i \in I$,

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma_i.$$

Então conclui-se que $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \Sigma$ e, portanto, Σ é uma sigma-álgebra sobre X. ■

Definição 26.4. Seja X um conjunto e $\mathcal{C} \in \mathcal{P}(X)$ um conjunto de subconjuntos de X. A *sigma-álgebra gerada por* $\mathcal{C}$ é a interseção da família de todas as sigma-álgebras sobre X de que $\mathcal{C}$ é subconjunto, denotada $\langle \mathcal{C} \rangle$.

A sigma-álgebra gerada por um conjunto é a menor sigma-álgebra que contém esse conjunto no sentido que não existe subconjunto dessa sigma-álgebra que contenha o conjunto e também seja uma sigma-álgebra.

Exemplo 26.2. *A sigma-álgebra sobre X gerada por $\varnothing$ é $\{\varnothing, X\}$.*

26.1.3 Limites de Conjuntos

Definição 26.5. Sejam X um conjunto e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X. O *limite inferior* de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjunto

$$\liminf A_n := \bigcup_{m=0}^{\infty} \left(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \right).$$

Esse conjunto é o conjuto dos pontos que não pertencem todos menos finitos conjuntos A_n. O *limite superior* de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é o conjunto

$$\limsup A_n := \bigcap_{m=0}^{\infty} \left(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \right).$$

Esse conjunto é o conjunto dos pontos que pertencem a infinitos conjuntos A_n.

Proposição 26.3. *Sejam X um conjunto e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X. Então*

$$\varnothing \subseteq \liminf A_n \subseteq \limsup A_n \subseteq X.$$

Proposição 26.4. *Sejam X um conjunto e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X. Então*

1. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona cresente,*

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \limsup A_n.$$

2. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decresente,*

$$\liminf A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \limsup A_n.$$

Definição 26.6. Sejam X um conjunto e $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de subconjuntos de X. Um *limite* de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um conjunto $\lim A_n$ tal que

$$\lim A_n = \liminf A_n = \limsup A_n.$$

26.2 Funções mensuráveis

Definição 26.7. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \Sigma_X)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ espaços mensuráveis. Uma *função mensurável* de $\boldsymbol{X}$ para $\boldsymbol{Y}$ é uma função $f : X \longrightarrow Y$ que satisfaz

$$\forall M \in \Sigma_Y \qquad f^{-1}(M) \in \Sigma_X.$$

Denota-se $f : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{Y}$.

Proposição 26.5. *Seja $\boldsymbol{X}$ um espaço mensurável. A função $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ é uma função mensurável.*

Proposição 26.6. *Sejam $\boldsymbol{X_0}$, $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ espaços mensuráveis e $f_0 : \boldsymbol{X_0} \longrightarrow \boldsymbol{X_1}$ e $f_1 : \boldsymbol{X_1} \longrightarrow \boldsymbol{X_2}$ funções mensuráveis. Então $f_1 \circ f_0 : \boldsymbol{X_0} \longrightarrow \boldsymbol{X_2}$ é uma função mensurável.*

26.2.1 Sigma-Álgebras Puxadas e Empurradas

Definição 26.8. Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A *sigma-álgebra puxada* por f é

$$f^*(\Sigma_Y) := \left\{ f^{-1}(M) \;\middle|\; M \in \Sigma_Y \right\}.$$

Proposição 26.7. *Sejam X um conjunto, $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então $\Sigma_X := f^*(\Sigma_Y)$, a sigma-álgebra puxada por f, é uma sigma-álgebra sobre X.*

Demonstração. Primeiro, notemos que $\varnothing \in \Sigma_X$, pois $\varnothing \in \Sigma_Y$ e $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ (3.14). Segundo, seja $B \in \Sigma_X$. Então existe $A \in \Sigma_Y$ tal que $B = f^{-1}(A)$. Como Σ_Y é uma sigma-álgebra, então $A^{\complement} \in \Sigma_Y$, o que implica $f^{-1}(A^{\complement}) \in \Sigma_X$. Mas $(f^{-1}(A))^{\complement} = f^{-1}(A^{\complement})$ (3.14). Então $B^{\complement} \in \Sigma_X$. Terceiro, seja $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos de Σ_X. Então, para todo $i \in I$, existe $A_i \in \Sigma_Y$ tal que $B_i = f^{-1}(A_i)$. Como Σ_Y é uma sigma-álgebra, então $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma_Y$. Isso implica que $f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \in \Sigma_X$. Mas $f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i)$ (3.14). Então $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \in \Sigma_X$ e, assim, conclui-se que Σ_X é uma sigma-álgebra sobre X. ■

Definição 26.9. Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \Sigma_X)$ um espaço mensurável, Y um conjunto e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. A *sigma-álgebra empurrada* por f é

$$f_*(\Sigma_X) := \left\{ M \subseteq Y \;\middle|\; f^{-1}(M) \in \Sigma_X \right\}.$$

Proposição 26.8. *Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \Sigma_X)$ um espaço mensurável, Y um conjunto e $f : X \longrightarrow Y$ uma função. Então $\Sigma_Y := f_*(\Sigma_X)$, a sigma-álgebra empurrada por f, é uma sigma-álgebra sobre Y.*

Demonstração. Primeiro, notemos que $\varnothing \in \Sigma_Y$, pois $\varnothing \in \Sigma_X$ e $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ (3.14). Segundo, seja $A \in \Sigma_Y$. Então $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$, o que implica $(f^{-1}(A))^{\complement} \in \Sigma_X$, pois Σ_X é sigma-álgebra. Mas $(f^{-1}(A))^{\complement} = f^{-1}(A^{\complement})$ (3.14), o que implica $f^{-1}(A^{\complement}) \in \Sigma_X$ e, portanto, $A^{\complement} \in \Sigma_Y$. Terceiro, seja $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos de Σ_Y. Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(A_i) \in \Sigma_X$, o que implica que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) \in \Sigma_X$, pois Σ_X é uma sigma-álgebra. Mas, como $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i)$ (3.14), segue que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \Sigma_Y$ e, assim, conclui-se que Σ_Y é uma sigma-álgebra sobre Y. ■

Proposição 26.9. *Sejam $\boldsymbol{X} = (X, \Sigma_X)$ e $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ espaços mensuráveis. Uma função $f : X \longrightarrow Y$ é função mensurável de $\boldsymbol{X}$ para $\boldsymbol{Y}$ se, e somente se, a sigma-álgebra $f^*(\Sigma_Y)$ puxada por f é uma sub-sigma-álgebra de Σ_X.*

$$f \in \mathscr{M}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \quad \Longleftrightarrow \quad f^*(\Sigma_Y) \subseteq \Sigma_X.$$

Demonstração. Suponha que f é uma função mensurável. Seja $B \in f^*(\Sigma_Y)$. Então existe $A \in \Sigma_Y$ tal que $B = f^{-1}(A)$. Como f é mensurável, vale $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$, o que implica $B \in \Sigma_X$ e, portanto, $f^*(\Sigma_Y) \subseteq \Sigma_X$. Como $f^*(\Sigma_Y)$ é uma sigma-álgebra sobre X pela proprosição acima, segue que $f^*(\Sigma_Y)$ é uma sub-sigma-álgebra de Σ_X. Reciprocamente, suponha que $f^*(\Sigma_Y)$ é uma sub-sigma-álgebra de Σ_X. Seja $A \in \Sigma_Y$. Então $f^{-1}(A) \in f^*(\Sigma_Y)$. Mas como $f^*(\Sigma_Y)$ é uma sub-sigma-álgebra de Σ_X, segue que $f^{-1}(A) \in \Sigma_X$, o que mostra que f é mensurável. ■

26.3 Produto de espaços mensuráveis

Definição 26.10. Seja $(\boldsymbol{X_i})_{i\in I} = (X_i, \Sigma_i)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis. O *produto* da família $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I}$ é o par

$$\prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i} := (X, \Sigma),$$

em que $X := \prod_{i\in I} X_i$ é o produto de conjuntos e

$$\Sigma := \left\langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^*(\Sigma_i) \right\rangle.$$

Proposição 26.10. *Seja $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I} = (X_i, \Sigma_i)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis. Então o produto $\prod_{i\in I} \boldsymbol{X}_i$ é um espaço mensurável.*

Demonstração. Sejam $X := \prod_{i\in I} X_i$ e $\Sigma = \langle \bigcup_{i\in I} \pi_i^*(\Sigma_i)\rangle$. Devemos somente argumentar que Σ é uma sigma-álgebra sobre $X = \prod_{i\in I} X_i$. Para isso, notemos que, para cada $i \in I$, a sigma-álgebras $\pi_i^*(\Sigma_i)$ é a sigma-álegebras puxada por $\pi_i : X \longrightarrow X_i$, portanto uma sigma-álgebra sobre X. Assim, sendo, $\bigcup_{i\in I} \pi_i^*(\Sigma_i) \subseteq \mathcal{P}(X)$ e, portanto, a sigma-álgebra Σ gerada por esse conjunto é uma sigma-álgebra sobre X. ■

Proposição 26.11. *Seja $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I} = (X_i, \Sigma_i)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis. Para todo $i \in I$, a projeção canônica $\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ é uma função mensurável.*

Demonstração. Sejam $i \in I$ e $M \in \Sigma_i$. Então $\pi_i^{-1}(M) \in \pi_i^*(\Sigma_i)$ e, portanto, $\pi_i^{-1}(M) \in \Sigma$. ■

Proposição 26.12 (Propriedade Universal)**.** *Seja $(\boldsymbol{X}_i)_{i\in I} = (X_i, \Sigma_i)_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis, $\boldsymbol{Y} = (Y, \Sigma_Y)$ um espaço mensurável e, para todo $i \in I$, $f_i : \boldsymbol{Y} \longrightarrow \boldsymbol{X_i}$ uma função mensurável. Então existe uma única função mensurável $f : \boldsymbol{Y} \longrightarrow \prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i}$ tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$ (o diagrama comuta).*

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} \boldsymbol{X_i} \arrow[d, "\pi_i"] \\
\boldsymbol{Y} \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "f_i"'] & \boldsymbol{X_i}
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Defina a função

$$\begin{aligned} f : Y &\longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \\ y &\longmapsto (f_i(y))_{i \in I}. \end{aligned}$$

Da propriedade universal para o produto de conjutos, f é a única função tal que, para todo $i \in I$, $\pi_i \circ f = f_i$. Basta mostrar que f é uma função mensurável. Para simplificar a notação, definamos $(X, \Sigma) \coloneqq \prod_{i \in I} \boldsymbol{X_i}$. Todo elemento de Σ é formado a partir de complementos e uniões de elementos de $\bigcup_{i \in I} \pi_i^*(\Sigma)$. Sendo assim, como f^{-1} preserva complemento e união, e $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, se mostrarmos que, para todo $M \in \bigcup_{i \in I} \pi_i^*(\Sigma_i)$, $f^{-1}(M) \in \Sigma_Y$, seguirá que, para todo $M \in \Sigma$, $f^{-1}(M) \in \Sigma_Y$. Seja $M \in \bigcup_{i \in I} \pi_i^*(\Sigma_i)$. Então existe $i \in I$ tal que $M \in \pi_i^*(\Sigma_i)$ e, portanto, existe $M_i \in \Sigma_i$ tal que $M = \pi_i^{-1}(M_i)$. Então segue que

$$f^{-1}(M) = f^{-1}(\pi_i^{-1}(M_i)) = (\pi_i \circ f)^{-1}(M_i) = f_i^{-1}(M_i)$$

e portanto, como f_i é mensurável, $f_i^{-1}(M_i) \in \Sigma_Y$, portanto $f^{-1}(M) \in \Sigma_Y$. Isso prova, pelos comentários anteriores, que para todo $M \in \Sigma$, $f^{-1}(M) \in \Sigma$ e, portanto, f é mensurável. ■

26.4 Espaços Mensuráveis Topológicos

26.4.1 Boreliano e função mensurável em $\mathbb{R}$

Definição 26.11. A *álgebra de Borel* $\mathscr{B}$ é a sigma-álgebra sobre $\mathbb{R}$ gerada pelo conjunto de intervalos abertos de $\mathbb{R}$ da forma (a, b), com $a, b \in \mathbb{R}$. Um *conjunto de Borel* é um elemento de $\mathscr{B}$.

Definição 26.12. A *álgebra de Borel extendida* $\overline{\mathscr{B}}$ é o conjunto de todos os conjuntos de Borel e de todos conjuntos de Borel unidos a $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$ ou $\{-\infty, +\infty\}$.

Definição 26.13. Seja (X, Σ) um espaço mensurável. Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *X-mensurável* (ou *mensurável*) é uma função que satisfaz

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma.$$

Proposição 26.13. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Então as quatro afirmações abaixo são equivalentes*

1. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad A_\alpha := \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$;
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad B_\alpha := \{x \in X \mid f(x) < \alpha\} \in \Sigma$;
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad C_\alpha := \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$;
4. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad D_\alpha := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \Sigma$.

Demonstração. Claramente, como $A_\alpha^{\complement} = D_\alpha$, (1) e (4) são equivalentes; do mesmo modo, como $B_\alpha^{\complement} = C_\alpha$, (2) e (3) são equivalentes. Vamos demonstrar que (1) e (2) são equivalentes, o que demonstrará a proposição.

... ■

Proposição 26.14. *Seja (X, Σ) um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Então f é uma função mensurável de (X, Σ) para $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ se, e somente se,*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma.$$

Demonstração. Se f é mensurável, seja $E \in$

... ■

26.5 Medida e Espaço de Medida

Definição 26.14. Seja $\boldsymbol{X} = (X, \Sigma)$ um espaço mensurável. Uma *medida* sobre $\boldsymbol{X}$ é uma função $\mu : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_\infty$ que satisfaz

1. $\mu(\varnothing) = 0$;
2. Para todo $M \in \Sigma$,
$$\mu(M) \geq 0;$$
3. Para toda sequência $(M_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ de conjuntos mensuráveis disjuntos aos pares,
$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i\right) = \mathop{+}_{i\in\mathbb{N}} \mu(M_i).$$

Definição 26.15. Um *espaço de medida* é uma tripla (X, Σ, μ) em que (X, Σ) é um espaço mensurável e μ é uma medida sobre (X, Σ).

Proposição 26.15. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $M_1, M_2 \in \Sigma$ conjuntos mensuráveis tais que $M_1 \subseteq M_2$. Então*

1. $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$;
2. $\mu(M_1) < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$.

Demonstração. Como $M_2 = M_1 \cup (M_2 \setminus M_1)$ e $M_1 \cap (M_2 \setminus M_1) = \varnothing$, segue que
$$\mu(M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2 \setminus M_1).$$

1. Daí, como $\mu(M_2 \setminus M_1) \geq 0$, segue que $\mu(M_2) \geq \mu(M_1)$.
2. Se $\mu(M_1) < +\infty$, então, subtraindo-a dos dois lados da equação, temos $\mu(M_2) - \mu(M_1) = \mu(M_2 \setminus M_1)$.

■

Proposição 26.16. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos mensuráveis.*

1. *Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, então*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(M_n);$$
2. *Se $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é descresente e $\mu(M_1) < +\infty$, então*
$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(M_n).$$

Demonstração. ... ■

Capítulo 27

Integração por Medida

27.1 Integral de Função Simples

Definição 27.1. Sejam X um conjunto e $C \subseteq X$. A *função indicadora* de C em X é a função

$$\begin{aligned} \chi_C : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C. \end{cases} \end{aligned}$$

Proposição 27.1. *Sejam X um conjunto e $A, B \subseteq X$, e $I = \{0, \cdots, n\}$.. Então*

1. $\chi_{\varnothing} = 0$;
2. $\chi_X = 1$;
3. $(\chi_A)^2 = \chi_A$;
4. $\chi_A \chi_B = \chi_B \chi_A$;
5. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$;
6. $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$;
7. $\chi_{A^{\complement}} = 1 - \chi_A$;
8. $\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_A \chi_B$;
9. $\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A \chi_B$;
10. $\chi_{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigtimes_{i \in I} \chi_{A_i}$;

11. $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \mathop{\bigplus}\limits_{\substack{S\subseteq I\\ S\neq\varnothing}} \left((-1)^{|S|-1} \mathop{\bigtimes}\limits_{i\in S} \chi_{A_i} \right);$

12. $\chi_{\triangle_{i\in I} A_i} = \mathop{\bigplus}\limits_{\substack{S\subseteq I\\ S\neq\varnothing}} \left((-2)^{|S|-1} \mathop{\bigtimes}\limits_{i\in S} \chi_{A_i} \right);$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\chi_{A\triangle B} &= \chi_{A\setminus B\cup B\setminus A}\\
&= \chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} - \chi_{A\setminus B}\chi_{B\setminus A}\\
&= \chi_A - \chi_A\chi_B + \chi_B - \chi_B\chi_A - (\chi_A - \chi_A\chi_B)(\chi_B - \chi_B\chi_A)\\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B - (\chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B - \chi_A\chi_B + \chi_A\chi_B)\\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{A\triangle B\triangle C} &= \chi_{A\triangle B} + \chi_C - 2\chi_{A\triangle B}\chi_C\\
&= \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B + \chi_C - 2(\chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B)\chi_C\\
&= \chi_A + \chi_B + \chi_C - 2(\chi_A\chi_B + \chi_A\chi_C + \chi_B\chi_C) + 4\chi_A\chi_B\chi_C.
\end{aligned}$$

■

Definição 27.2. Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Uma função *simples* em X é uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(X)$ é finito.

Definição 27.3. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ as constantes distintas tais que $f(X) = \{c_1, \cdots, c_n\}$ e $I := \{1, \cdots, n\}$. A *partição associada* a f é o conjunto $\{P_i \mid i \in I\}$ em que, para todo $i \in I$,

$$P_i := f^{-1}(c_i) = \{x \in X \mid f(x) = c_i\}.$$

Proposição 27.2. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples, $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ as constantes distintas tais que $f(X) = \{c_1, \cdots, c_n\}$, $I := \{1, \cdots, n\}$ e $\{P_i \mid i \in I\}$ a partição associada a f. Então $\{P_i \mid i \in I\}$ é uma partição de X e*

$$f = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i\chi_{P_i}.$$

Proposição 27.3. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples. Então existem únicas constantes distintas $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ e uma única partição de X em conjuntos mensuráveis $P_1, \cdots, P_n \in \Sigma$ satisfazendo*

$$f = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i\chi_{P_i}.$$

Demonstração. Como $f(X)$ é finito, existem únicos $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$ distintos tais que $f(X) = \{c_1, \cdots, c_n\}$. Seja $I := \{1, \cdots, n\}$. Definem-se os conjuntos

$$P_i := \{x \in X \mid f(x) = c_i\}.$$

Esses conjuntos formam claramente uma partição de X. Além disso, são mensuráveis pelos resultados do capítulo anterior. Por fim, seja $x \in X$. Existe $j \in I$ tal que $f(x) = c_j$ e $x \in P_j$. Nesse caso, $\chi_{P_j}(x) = 1$ e, para todo $i \in I \setminus \{j\}$, $\chi_{P_i}(x) = 0$, pois os conjuntos P_i são disjuntos. Portanto

$$f(x) = c_j = c_j \chi_{P_j}(x) + \mathop{\bigplus}_{i \in I \setminus \{j\}} c_i \chi_{P_i}(x) = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i \chi_{P_i}(x),$$

o que mostra que

$$f = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i \chi_{P_i}.$$

■

Definição 27.4. Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função simples tal que $f = \bigplus_{i=1}^{n} c_i \chi_{P_i}$ e $M \in \Sigma$ um conjunto mensurável. A *integral* de f sobre M com respeito a μ é o número

$$\int_M f := \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i \mu(P_i \cap M).$$

Quando for necessário explicitar a medida μ usada, escreveremos $\displaystyle\int_{\mu, M} f$. No caso em que $M = X$, temos

$$\int_X f = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i \mu(f^{-1}(c_i)) = \mathop{\bigplus}_{i=1}^{n} c_i \mu(P_i).$$

$$\int_M f$$

$$\mu\int_M f$$

$$\int_M f \mathrm{d}\mu$$

$$\mu\text{-}\int_{x\in X} f(x)$$

Para denotar a integral, a notação

$$\int_{x\in X} f(x)$$

também pode ser usada, e tem a vantagem de se assemelhar mais com a notação de somatório

$$\mathop{+}_{i\in I} f_i.$$

A notação da definição, no entanto, tem a vantagem de evitar escrever a variável x, que é de fato desnecessária na maioria dos contextos. A notação adotada para a integral é comumente $\int_M f \mathrm{d}\mu$, mas não adotaremos essa convenção.

Proposição 27.4. *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funções simples, $M \in \Sigma$ um conjunto mensurável e $c \in \mathbb{R}$. Então*

1. $\displaystyle\int_M cf = c\int_M f.$
2. $\displaystyle\int_M (f+g) = \int_M f + \int_M g.$

Demonstração. Sejam $f = +_{i=1}^n c_i\chi_{P_i}$, $g = +_{j=1}^m d_j\chi_{Q_j}$, $I := \{1, \cdots, n\}$ e $J := \{1, \cdots, m\}$.

1. Se $c = 0$, vale a igualdade, pois $0f = 0\chi_X$, logo

$$\int_M 0f = 0\mu(M \cap X) = 0 = 0\int_M f.$$

Se $c \neq 0$, então $cf(X) = \{cc_1, \cdots, cc_n\}$ e as constantes $cc_1, \cdots, cc_n$ são todas distintas. Definindo, para todo $i \in I$, $R_i := \{x \in X \mid cf(x) = cc_i\}$, os conjuntos $R_1, \cdots, R_n$ formam uma partição de X em conjuntos mensuráveis. Além disso, temos $R_i = P_i$ para todo $i \in I$ porque, como $c \neq 0$, segue que $f(x) = c_i$ se, e somente se, $cf(x) = cc_i$. Portanto

$$\int_M cf = \mathop{+}_{i=1}^n cc_i\mu(R_i \cap M) = c\mathop{+}_{i=1}^n c_i\mu(P_i \cap M) = c\int_M f.$$

2. Como $f(X)$ e $g(X)$ são conjuntos finitos,

$$(f+g)(X) \coloneqq \{c_i + d_j \mid (i,j) \in I \times J\}$$

é um conjunto finito. No entanto, não necessariamente $(f+g)(X)$ tem mn elementos, pois podem existir $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in I \times J$ distintos tais que $c_{i_1} + d_{j_1} = c_{i_2} + d_{j_2}$. Sejam $e_1, \cdots, e_l \in \mathbb{R}$ as constantes distintas tais que $(f+g)(X) = \{e_1, \cdots, e_l\}$, $K \coloneqq \{1, \cdots, l\}$ e $R_k \coloneqq \{x \in X \mid (f+g)(x) = e_k\}$. Nesse caso, $\{R_k \mid k \in K\}$ é uma partição de X em conjuntos mensuráveis e

$$f + g = \mathop{\mathbin{+}}_{k=1}^{l} e_k \chi_{R_k}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} c_i \chi_{P_i}(x) + \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{m} d_j \chi_{Q_j}(x) \\ &= \end{aligned}$$

$$f + g = \mathop{\mathbin{+}}_{i=1}^{n} \mathop{\mathbin{+}}_{j=1}^{m} (c_i + d_j) \chi_{P_i \cap Q_j}.$$

Isso significa que os conjuntos

■

Parte V

Geometria

Capítulo 28

Variedades

28.1 Estrutura Diferencial

28.1.1 Cartas e Atlas

Definição 28.1. Sejam V um conjunto e $d \in \mathbb{N}$. Uma *carta* d-dimensional de V é um par (A, φ) em que $A \subseteq V$ é um conjunto e $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função injetiva tal que $\varphi(A)$ é um aberto de $\mathbb{R}^d$. O *domínio* de (A, φ) é A, o domínio de φ, e a função φ é o *mapa de coordenadas* de (A, φ).

Definição 28.2. Sejam V um conjunto e $(A, \varphi), (\bar{\text{L}}A, \bar{\varphi})$ cartas d-dimensionais de V. A *transição de coordenadas* de (A, φ) para $(\bar{A}, \bar{\varphi})$ é a função

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(A \cap \bar{A}) \longrightarrow \bar{\varphi}(A \cap \bar{A}).$$

A composição $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ não está necessariamente definida em todo $\varphi(A)$, mas somente na interseção do domínio de φ^{-1} com a imagem inversa do domínio de $\bar{\varphi}$ por φ^{-1}. Para ver que esse é o conjunto acima, basta notar que da injetividade de φ segue

$$\varphi(A) \cap (\varphi^{-1})^{-1}(\bar{A}) = \varphi(A \cap \bar{A}).$$

Da mesma forma definimos o contradomínio como acima.

Definição 28.3. Seja V um conjunto. Cartas (A, φ) e $(\bar{A}, \bar{\varphi})$ de V são $\mathscr{C}^k$-*compatíveis* se, e somente se, $\varphi(A \cap \bar{A})$ e $\bar{\varphi}(A \cap \bar{A})$ são abertos e a transição de coordenadas

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(A \cap \bar{A}) \longrightarrow \bar{\varphi}(A \cap \bar{A}).$$

é um $\mathscr{C}^k$-difeomorfismo. Para $k = 0$, as cartas são *topologicamente compatíveis*, para $k > 0$, são *diferencialmente compatíveis*, sendo para $k = \infty$ *suavemente compatíveis*.

A relação de compatilibilade entre cartas não é uma relação de equivalência, mas a compatibilidade de atlas, uma noção associada a ela, é. A seguir, definimos o que é um atlas. A primeira condição, além de aparentemente necessária para que todos os pontos de V tenham cartas, será uma hipótese essencial para que a compatibilidade de atlas seja uma relação de equivalência. Isso é um resultado muito simples, mas que indica que nossa axiomatização é boa, de certa forma, pois ao termos a estrutura de um atlas do conjunto, não temos simplesmente várias cartas, mas cartas que se comportam de acordo com certa relação de equivalência. Essa relação de equivalência nos permitirá definir um objeto abstrato chamado atlas maximal, que na prática nunca é calculado, mas que como objeto teórico é belo e conveniente.

Definição 28.4. Seja V um conjunto. Um $\mathscr{C}^k$-*atlas* d-dimensional de V é um conjunto $\mathcal{A}$ de cartas d-dimensionais de V tal que

1. (Cobertura) O conjunto V é coberto pelos domínios das cartas de $\mathcal{A}$
$$V = \bigcup_{(A,\varphi)\in\mathcal{A}} A;$$
2. (Compatibilidade) Todas cartas $(A,\varphi),(\bar{A},\varphi) \in \mathcal{A}$ são $\mathscr{C}^k$-compatíveis.

Para $k = 0$, $\mathcal{A}$ é um atlas *topológico*, para $k > 0$, um atlas *diferencial*, sendo para $k = \infty$ um atlas *suave*.

Na definição de atlas, se não especificássemos que todos atlas devem ser d-dimensionais, poderíamos ter partes do conjunto V que fossem mapeadas em espaços reais de dimensão diferente. No entanto, nas cartas $(A,\varphi),(\bar{A},\varphi) \in \mathcal{A}$ em que $A\cap\bar{A} \neq \varnothing$, teríamos ao menos um homeomorfismo entre os conjuntos $\varphi(A\cap\bar{A})$ e $\bar{\varphi}(A\cap\bar{A})$, de modo que as cartas poderíam ser restritas a espaços reais de mesma dimensão; se $k \geq 1$, diferenciando a transição de coordenadas $\bar{\varphi}\circ\varphi^{-1}$ teríamos um homeomorfismo linear entre os espaços reais, garantindo a mesma dimensão. Isso mostra que, a menos de cartas que não tenham interseção no domínio, teríamos que ter espaços reais de mesma dimensão modelando o conjunto V. A partir de agora, sempre consideraremos que os atlas têm a mesma dimensão, e a dimensão de um atlas só será mencionada quando necessário.

Definição 28.5. Seja V um conjunto. Atlas $\mathscr{C}^k$-*compatíveis* de V são $\mathscr{C}^k$-atlas $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ de V tais que todas as cartas $(A,\varphi) \in \mathcal{A}$ e $(\bar{A},\bar{\varphi}) \in \bar{\mathcal{A}}$ são $\mathscr{C}^k$-compatíveis.

Essa definição é equivalente a dizer que $\mathcal{A}\cup\bar{\mathcal{A}}$ é um $\mathscr{C}^k$-atlas.

Proposição 28.1. *Seja V um conjunto. A relação de $\mathscr{C}^k$-compatibilidade de atlas de V é uma relação de equivalência.*

Demonstração. A reflexividade e a simetria são evidentes, pois valem entre cartas. Para conferir a transitividade, sejam $\mathcal{A}, \bar{\mathcal{A}}$ e $\{(A_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ atlas de V e sejam $(A, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(\bar{A}, \bar{\varphi}) \in \bar{\mathcal{A}}$ cartas. Como $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ são compatíveis com $\{(A_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$, para todo $i \in I$, $\varphi(A \cap A_i)$ e $\varphi_i(A_i \cap \bar{A})$ são abertos de $\mathbb{R}^d$ e as transições de coordenadas

$$\varphi_i \circ \varphi^{-1} : \varphi(A \cap A_i) \longrightarrow \varphi_i(A \cap A_i).$$

e

$$\bar{\varphi} \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(A_i \cap \bar{A}) \longrightarrow \bar{\varphi}(A_i \cap \bar{A}).$$

são $\mathscr{C}^k$-difeomorfismos. Compondo essas transições de coordenada, e notando que

$$\varphi(A \cap A_i) \cap (\varphi_i \circ \varphi^{-1})^{-1}(\varphi_i(A_i \cap \bar{A})) = \varphi(A \cap A_i \cap \bar{A})$$

(e analogamente para $\bar{\varphi}(A \cap A_i \cap \bar{A})$), concluímos que

$$(\bar{\varphi} \circ \varphi_i^{-1}) \circ (\varphi_i \circ \varphi^{-1}) : \varphi(A \cap A_i \cap \bar{A}) \longrightarrow \bar{\varphi}(A \cap A_i \cap \bar{A})$$

e é um $\mathscr{C}^k$-difeomorfismo.

Agora, notemos que o conjunto $\varphi(A \cap A_i \cap \bar{A})$ é um aberto de $\mathbb{R}^d$ já que $\varphi(A \cap A_i)$ e $\varphi_i(A_i \cap \bar{A})$ são abertos e $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ é contínua. Como

$$V = \bigcup_{i\in I} A_i,$$

segue que

$$\bigcup_{i\in I} \varphi(A \cap A_i \cap \bar{A}) = \varphi\left(A \cap \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bar{A}\right) = \varphi(A \cap \bar{A}),$$

então $\varphi(A \cap \bar{A})$ é aberto de $\mathbb{R}^d$. Analogamente, o contradomínio de $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é $\bar{\varphi}(A \cap \bar{A})$ e é aberto de $\mathbb{R}^d$. Portanto $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é uma função bem definida em $\varphi(A \cap \bar{A})$ e segue que

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(A \cap \bar{A}) \longrightarrow \bar{\varphi}(A \cap \bar{A}).$$

é um $\mathscr{C}^k$-difeomorfismo, o que mostra que (A, φ) e $(\bar{A}, \bar{\varphi})$ são $\mathscr{C}^k$-compatíveis, e finalmente $\mathcal{A}$ e $\bar{\mathcal{A}}$ são $\mathscr{C}^k$-compatíveis. ■

Isso implica, em particular, que os $\mathscr{C}^k$-atlas d-dimensionais de V podem ser particionados em classes de equivalência. Além disso, segue da proposição anterior que se dois atlas são compatíveis, sua união é um atlas, o que motiva a próxima definição.

Definição 28.6. Seja V um conjunto. Um $\mathscr{C}^k$-atlas *maximal* (ou uma $\mathscr{C}^k$-*estrutura diferencial*) d-dimensional de V é a união de todos os atlas de uma classe de equivalência de $\mathscr{C}^k$-atlas d-dimensionais de V.

Como comentado acima, o atlas maximal é um atlas, pois é uma união de atlas compatíveis. Com essa definição, podemos finalmente definir uma variedade. Mas antes faremos um breve comentário acerca de orientabilidade.

28.1.2 Orientabilidade

Definição 28.7. Seja V um conjunto. Duas cartas d-dimensionais (A_0, φ_0), (A_1, φ_1) diferencialmente compatíveis de V são *coorientadas* se o determinante da diferencial da transição de coordenadas entre elas é positivo em todo $p \in V$

$$\det(\mathrm{D}(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(p)) > 0$$

e são *contraorientadas* caso contrário

$$\det(\mathrm{D}(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(p)) < 0.$$

O caso em que $\det(\mathrm{D}(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(p)) = 0$ não ocorre, pois as cartas são diferencialmente compatíveis, o que implica que a da transição de coordenadas é difeomorfismo, logo $\mathrm{D}(\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1})(p) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é invertível.

Definição 28.8. Um atlas diferencial *orientado* é um atlas cujas cartas são coorientadas aos pares. Atlas diferenciais orientados *coorientáveis* são atlas diferenciais orientados cujas cartas são coorientáveis aos pares.

Pode-se verificar que a relação de coorientabilidade de atlas é uma relação de equivalência.

28.2 Variedades e Topologia

Definição 28.9. Uma *$\mathscr{C}^k$-variedade* d-dimensional é um par $\boldsymbol{V} = (V, \mathcal{A})$ em que V é um conjunto e $\mathcal{A}$ é um $\mathscr{C}^k$-atlas maximal d-dimensional de V. Para $k = 0$, a variedade $\boldsymbol{V}$ é uma variedade *topológica* e, para $k > 0$, é uma variedade *diferencial*, sendo para $k = \infty$ uma variedade *suave* (caso especial de variedade diferencial).

Quando não for necessário explicitar detalhes, uma $\mathscr{C}^k$-variedade d-dimencional será simplesmente referida como uma variedade. É possível mostrar que toda variedade diferencial tem um subatlas maximal suave, de modo que não há perda de informação quando se separam as variedades apenas em topológicas e diferenciais, mas isso não será feito aqui.

Definição 28.10. Seja $\boldsymbol{V}$ uma variedade. Para $p \in V$, uma *carta* em p é uma carta $(A, \varphi) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in A$, e a *i-ésima coordenada* com respeito a (A, φ) é a função

$$\begin{aligned} \mathrm{x}_i : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \pi_i \circ \varphi(p) \end{aligned}$$

Definição 28.11. Seja $\boldsymbol{V}$ uma variedade. A *topologia* de $\boldsymbol{V}$ é o conjunto

$$\mathcal{T}_{\boldsymbol{V}} := \left\langle \bigcup_{(A,\varphi)\in\mathcal{A}} \varphi^\star(\mathcal{T}) \right\rangle,$$

em que $\mathcal{T}$ é a topologia de $\mathbb{R}^d$.

Na notação acima, $\langle C\rangle$ indica a topologia gerada pelo conjunto $C \subseteq \mathcal{P}(V)$ e $\varphi^\star(\mathcal{T})$, a topologia puxada de $\mathcal{T}$ pela função φ, ou seja, o conjunto de imagens inversas por φ de abertos da topologia $\mathcal{T}$. Essa é a menor topologia tal que todos os mapas de coordenadas φ das cartas do atlas maximal são contínuos. Pode-se ver que essa é a topologia cuja base são os domínios das cartas do atlas maximal. Ainda, vale notar que essa é a mesma topologia da gerada pelas topologias puxadas de $\mathcal{T}|_{\varphi(A)}$, a topologia induzida de $\mathcal{T}$ em $\varphi(A)$. Isso ocorre porque os mapas de coordenadas φ são bijeções no seu domínio, logo puxam qualquer subconjunto de $\varphi(A)^\complement$ no vazio. De fato, há várias definições equivalentes de como induzir uma topologia em uma variedade, e a acima parece ser a mais bem definida em questão de teoria; no entanto, em geral só conseguimos conhecer um atlas de uma variedade, e não o atlas maximal todo, portanto saber gerar a topologia sem precisar do atlas maximal seria uma ferramenta muito boa, essencial às vezes. É isso que as proposições a seguir oferecem. A primeira afirma que, se gerarmos uma topologia a partir de uma atlas, qualquer carta compatível com esse atlas terá um mapa de coordenadas contínuo, o que implica, em particular, que as topologias geradas pelo atlas maximal e as geradas por qualquer subatlas são a mesma.

Proposição 28.2. *Sejam V um conjunto, $\mathcal{A} = \{(A_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ um atlas de V e*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} := \left\langle \bigcup_{i\in I} \varphi_i^\star(\mathcal{T}) \right\rangle,$$

a menor topologia tal que φ_i é contínua para todo $i \in I$. Se (A, φ) é uma carta compatível com $\mathcal{A}$, então φ é uma função contínua de $(A, \mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_A)$ para $(\mathbb{R}^d, \mathcal{T})$.

Demonstração. Seja $U \in \mathcal{T}$ um aberto de $\mathbb{R}^d$. Para todo $i \in I$, definamos $U_i := (\varphi \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(A_i))$ e $S := \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$. Então

$$U = U \cap \mathbb{R}^d = \bigcup_{i\in I} (U \cap U_i) \cup (U \cap S).$$

Como $V = \bigcup_{i\in I} A_i$ e, para todo $i \in I$, $\varphi^{-1}(U_i) = A \cap A_i$, então

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(S) &= \varphi^{-1}(\mathbb{R}^d) \cap \varphi^{-1}\left(\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)^{\complement}\right) \\
&= A \cap \left(\bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(U_i)\right)^{\complement} \\
&= A \cap \left(\bigcup_{i\in I} A \cap A_i\right)^{\complement} \\
&= A \cap (A \cap V)^{\complement} = A \cap (A)^{\complement} = \varnothing.
\end{aligned}$$

Disso, segue que $\varphi^{-1}(U \cap S) = \varnothing$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(U) &= \bigcup_{i\in I} \varphi^{-1}(U \cap U_i) \cup \varphi^{-1}(U \cap S) \\
&= \bigcup_{i\in I} (A \cap A_i) \cup (A \cap \varnothing) \\
&= \bigcup_{i\in I} A \cap A_i.
\end{aligned}$$

Mostraremos, agora, que $A \cap A_i$ é aberto para todo $i \in I$, e com isso concluiremos que φ^{-1} é aberto. Para isso, notemos que

$$\varphi_i(A \cap A_i) = \varphi_i(A_i) \cap (\varphi_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(A)).$$

Como $\varphi(A)$ é aberto, pois (A, φ) é carta, e $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ é difeomorfismo, pois (A, φ) é compatível com $\mathcal{A}$, então $(\varphi_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(A))$ é aberto e, portanto, $\varphi_i(A \cap A_i)$ é aberto, o que implica que $\varphi_i^{-1}(\varphi_i(A \cap A_i)) = A \cap A_i$ é aberto. Assim, concluímos que $\varphi^{-1}(U)$ é aberto de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$, portanto φ é contínua. ■

Proposição 28.3. *Sejam $\boldsymbol{V} = (V, \mathcal{A})$ uma variedade e $\bar{\mathcal{A}}$ um atlas compatível com o atlas maximal $\mathcal{A}$. A topologia*

$$\bar{\mathcal{T}} := \left\langle \bigcup_{(A,\varphi)\in\bar{\mathcal{A}}} \varphi^{\star}(\mathcal{T}_{\varphi(A)}) \right\rangle,$$

é igual à topologia $\mathcal{T}$ de $\boldsymbol{V}$.

Demonstração. Por definição da topologia de $\boldsymbol{V}$, temos imediatamente que $\bar{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}_{\boldsymbol{V}}$. Para a inclusão contrária, a proposição anterior mostra que toda carta de $\mathcal{A}$ tem mapa de coordenadas contínuo em $\bar{\mathcal{T}}$, o que implica que $\mathcal{T} \subseteq \bar{\mathcal{T}}$. ■

Uma consequência óbvia das definições é que qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^d$ é uma variedade.

28.2.1 Propriedades Topológicas

Proposição 28.4. *Seja* $\boldsymbol{V}$ *uma variedade. Então*

1. $\boldsymbol{V}$ *é um espaço topológico acessível;*

2. *Cada componente conexa de* $\boldsymbol{V}$ *é conexa por caminhos.*

Demonstração. 1. Sejam $p, \bar{p}$ pontos distintos de V. Queremos mostrar que existe vizinhança de cada um que nao contém o outro. Para isso, tomamos carta (A, φ) em p. Se A não contém $\bar{p}$, então A é vizinhança de p que não contém $\bar{p}$; caso contrário, como $\varphi(p)$ e $\varphi(\bar{p})$ são distintos, pois φ é injetiva, segue que existe vizinhança U de $\varphi(p)$ que não contém $\varphi(p)$, pois $\mathbb{R}^d$ é acessível, logo $\varphi^{-1}(p)$ é uma vizinhança de p que não contém $\bar{p}$. Analogamente, mostramos o mesmo para $\bar{p}$, portanto V eles são separados e concluímos que $\boldsymbol{V}$ é um espaço topológico acessível.

2. Sejam $C(p)$ uma componente conexa de $\boldsymbol{V}$ em p e U o conjunto de todos pontos de $C(p)$ ligados por um caminho a p. Mostraremos que U é aberto e fechado, portanto igual a $C(p)$. Mostremos primeiro que U é aberto. Seja $q \in C(p)$ e A uma vizinhança de q homeomorfa a uma bola de $\mathbb{R}^d$. Como a bola é conexa por caminhos e homeomorfa a A, segue que A é conexa por caminhos. Portanto todo ponto de A está em $C(p)$, já que existe caminho do um ponto de A a q e caminho de q a p. Isso mostra que U é aberto. Agora, seja $q \in U^{\complement}$. Novamente, tomamos uma vizinhança A de q homeomorfa a uma bola de $\mathbb{R}^d$ e segue que A é conexa por caminhos. Nesse caso, nenhum ponto de A está em $C(p)$, caso contrário existiria caminho ligando q a p, o que contradiz a hipótese. Isso mostra que $U^{\complement}$ é fechado, portanto U aberto. Assim, como U é aberto e fechado, $C(p)$ é conexo e $p \in U$, segue que $C(p) = U$.

■

Uma variedade definida como acima não precisa necessariamente ser um espaço separado, ou seja, espaço cujos pontos distintos são separados por vizinhanças. Em geral, na definição de variedade consideram-se espaços separados, mas aqui não faremos essa distinção. Ainda, outra hipótese comum é que a topologia admita base enumerável. Isso é equivalente, para uma variedade, a existir um subatlas enumerável.

28.3 Espaço Tangente e Funções Diferenciáveis

28.3.1 Curvas Equivelozes e Espaço Tangente

Definição 28.12. Sejam $\boldsymbol{V}$ uma variedade diferencial e $p \in V$. Duas curvas $\gamma_0 : I_0 \longrightarrow V$ e $\gamma_1 : I_1 \longrightarrow V$ iniciadas em p ($\gamma(0) = p$) são *equivelozes* se, e somente se, existe uma carta (A, φ) em p tal que

$$(\varphi \circ \gamma_0)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0).$$

Denota-se $\gamma_0 \asymp \gamma_1$.

A relação está bem definida, no sentido de que não depende da escolha de carta, e é uma relação de equivalência.

Demonstração. Sejam (A, φ), $(\bar{A}, \bar{\varphi})$ cartas em p. Então, para $i = 0$ e $i = 1$,

$$\bar{\varphi} \circ \gamma_i = (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_i)$$

e, diferenciando essas funções em 0, obtemos pela regra da cadeia que

$$\begin{aligned}(\bar{\varphi} \circ \gamma_i)'(0) &= \mathrm{D}\Big((\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma_i)\Big)(0) \\ &= \mathrm{D}(\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma_i(0)) \circ (\varphi \circ \gamma_i)'(0) \\ &= \mathrm{D}(\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) \circ (\varphi \circ \gamma_i)'(0).\end{aligned}$$

Como $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ é difeomorfismo, $\mathrm{D}(\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ é invertível, portanto

$$(\varphi \circ \gamma_0)'(0) = (\varphi \circ \gamma_1)'(0)$$

se, e somente se,

$$(\bar{\varphi} \circ \gamma_0)'(0) = (\bar{\varphi} \circ \gamma_1)'(0).$$

■

Definição 28.13. Sejam $\boldsymbol{V}$ uma variedade diferencial, $p \in V$ e $\gamma : I \longrightarrow V$ uma curva iniciada em p. O *vetor tangente a* $\boldsymbol{V}$ *em* p, denotado $\gamma'(0)$, é a classe de equivalência de γ sob a relação $\asymp$ de equivelocidade de curvas.

O *espaço tangente* a $\boldsymbol{V}$ em p é o conjunto de vetores tangentes a $\boldsymbol{V}$ em p, denotado

$$\mathrm{T}_p\boldsymbol{V} := \{\gamma'(0) \mid \gamma : I \longrightarrow V, \gamma(0) = p\},$$

em que os I são intervalos abertos de $\mathbb{R}$ contendo o 0.

O *fibrado tangente* de $\boldsymbol{V}$ é a união disjunta dos espaços tangentes a $\boldsymbol{V}$ em todos pontos de V

$$\mathrm{T}\boldsymbol{V} := \bigsqcup_{p \in V} \mathrm{T}_p\boldsymbol{V} = \{(p, v) \mid p \in V, v \in \mathrm{T}_p\boldsymbol{V}\}.$$

Os elementos do espaço tangente a $\boldsymbol{V}$ em um ponto $p \in V$ são chamados de vetores porque $\mathrm{T}_p\boldsymbol{V}$ é um espaço vetorial se definidas operações apropriadas. Isso que fazemos a seguir.

28.3.2 Funções Diferenciáveis

Definição 28.14. Sejam $\boldsymbol{V_0}$ e $\boldsymbol{V_1}$ $\mathscr{C}^k$-variedades de dimensões d_0 e d_1, respectivamente. Uma função *$\mathscr{C}^k$-diferenciável* de $\boldsymbol{V_0}$ para $\boldsymbol{V_1}$ é uma função contínua $f : V_0 \longrightarrow V_1$ que satisfaz

1. Para todo $p \in V_0$, existem cartas $(A_0, \varphi_0) \in \mathcal{A}_0$ em p e $(A_1, \varphi_1) \in \mathcal{A}_1$ em $f(p)$ tais que $f(A_0) \subseteq A_1$ e

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_0^{-1} : \varphi_0(A_0) \longrightarrow \varphi_1(A_1)$$

   é uma função $\mathscr{C}^k$-diferenciável de $\varphi_0(A_0) \subseteq \mathbb{R}^{d_0}$ para $\varphi_1(A_1) \subseteq \mathbb{R}^{d_1}$.

Denota-se $f : \boldsymbol{V_0} \longrightarrow \boldsymbol{V_1}$. O conjunto de todas essas funções é denotado $\mathscr{C}^k(\boldsymbol{V_0}, \boldsymbol{V_1})$.

A diferenciabilidade independe da carta escolhida no seguinte sentido.

Demonstração. Sejam (A_0, φ_0), $(\bar{A}_0, \bar{\varphi}_0)$ cartas em p e (A_1, φ_1), $(\bar{A}_1, \bar{\varphi}_1)$ cartas em $f(p)$ tais que $f(A_0) \subseteq A_1$ e $f(\bar{A}_0) \subseteq \bar{A}_1$. Então $f(A_0 \cap \bar{A}_0) \subseteq A_1 \cap \bar{A}_1$, $p \in A_0 \cap \bar{A}_0$ e $f(p) \in A_1 \cap \bar{A}_1$. Restringindo domínios adequadamente,

$$\bar{\varphi}_1 \circ f \circ \bar{\varphi}_0^{-1} = (\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ f \circ \varphi_0^{-1}) \circ (\varphi_0 \circ \bar{\varphi}_0^{-1})$$

Como as transições de coordenadas $(\bar{\varphi}_1 \circ \varphi_1^{-1})$ e $(\varphi_0 \circ \bar{\varphi}_0^{-1})$ são $\mathscr{C}^k$-difeomorfismos, então $(\varphi_1 \circ f \circ \varphi_0^{-1})$ é $\mathscr{C}^k$-diferenciável se, e somente se, $(\bar{\varphi}_1 \circ f \circ \bar{\varphi}_0^{-1})$ o é. ■

Como uma $\mathscr{C}^k$-variedade é também uma $\mathscr{C}^l$-variedade para todo $l \leq k$, sempre se pode definir entre $\mathscr{C}^k$ e $\mathscr{C}^l$-variedade funções $\mathscr{C}^m$-diferenciáveis para qualquer $m \leq \min\{k, l\}$.

Proposição 28.5. *Sejam $\boldsymbol{V_0}$, $\boldsymbol{V_1}$ e $\boldsymbol{V_2}$ $\mathscr{C}^k$-variedades e $f_0 : \boldsymbol{V_0} \longrightarrow \boldsymbol{V_1}$ e $f_1 : \boldsymbol{V_1} \longrightarrow \boldsymbol{V_2}$ funções $\mathscr{C}^k$-diferenciáveis. Então $f_1 \circ f_0 : \boldsymbol{V_0} \longrightarrow \boldsymbol{V_1}$ é uma função $\mathscr{C}^k$-diferenciável.*

Casos particulares relevantes são quando uma das duas variedades é um subconjunto de $\mathbb{R}^d$. Toma-se assim a carta trivial nesse subconjunto. Um desses caso é evidenciado a seguir.

Definição 28.15. Sejam $\boldsymbol{V}$ uma $\mathscr{C}^k$-variedade e $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Uma *$\mathscr{C}^k$-curva* em $\boldsymbol{V}$ é uma função $\gamma : I \longrightarrow V$ $\mathscr{C}^k$-diferenciável.

Isso é equivalente a dizer que, para todo $p \in \gamma(V)$ existe carta (A, φ) em p tal que

$$\varphi \circ \gamma : I \longrightarrow \varphi(A)$$

é uma função $\mathscr{C}^k$-diferenciável, ao escolher acima a função identidade.

28.3.3 Diferenciais e Estrutura Vetorial do Espaço Tangente

Definição 28.16. Sejam $\boldsymbol{V}$ e $\bar{\boldsymbol{V}}$ variedades, $p \in V$ e $f : \boldsymbol{V} \longrightarrow \bar{\boldsymbol{V}}$ uma função diferenciável em p. A *diferencial* de f em p é a função

$$\begin{aligned} \mathrm{D}f(p) : \mathrm{T}_p\boldsymbol{V} &\longrightarrow \mathrm{T}_{f(p)}\bar{\boldsymbol{V}} \\ \gamma'(0) &\longmapsto (f \circ \gamma)'(0). \end{aligned}$$

Devemos mostrar que essa função está bem definida.
Tomando uma carta (A, φ) em p, definimos a função

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\varphi(p) : \mathrm{T}_p\boldsymbol{V} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ \gamma'(0) &\longmapsto (\varphi \circ \gamma)'(0) \end{aligned}$$

de modo que a regra da composição é simulada. Essa função é uma bijeção e é usada para puxar as operações de $\mathbb{R}^d$ para $\mathrm{T}_p\boldsymbol{V}$, de modo que $\mathrm{T}_p\boldsymbol{V}$ é um espaço vetorial. Essas operações puxadas não dependem da carta (A, φ) escolhida.

28.4 Exemplos de Variedades

28.4.1 A Esfera

Definição 28.17. A *esfera* d-dimensional é o conjunto

$$\mathbb{S}^d := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}.$$

A partir dessa notação de esfera unitária, podemos escrever facilmente qualquer n-esfera de raio $r \in \mathbb{R}$ e centro $c \in \mathbb{R}^{d+1}$ em $\mathbb{R}^{d+1}$ como $c + r\mathbb{S}^d$ usando a notação de adição e multiplicação de um elemento de um anel com um subconjunto do anel.

Vamos considerar, na esfera, um atlas com apenas duas cartas: as *projeções estereográficas* focadas no norte e no sul.

Definição 28.18. O *pólo norte* de $\mathbb{S}^d$ é o ponto $N := (0, \ldots, 0, 1)$ e a *projeção estereográfica norte* de $\mathbb{S}^d$ é a função

$$\begin{aligned} \pi_N : \mathbb{S}^d \setminus \{N\} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 - x_d}(x_0, \ldots, x_{d-1}). \end{aligned}$$

O *pólo sul* de $\mathbb{S}^d$ é o ponto $S := (0, \ldots, 0, -1)$ e a *projeção estereográfica sul* de $\mathbb{S}^d$ é a função

$$\begin{aligned} \pi_S : \mathbb{S}^d \setminus \{S\} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + x_d}(x_0, \ldots, x_{d-1}). \end{aligned}$$

Proposição 28.6. *Sejam π_N e π_S as projeções estereográficas norte e sul de $\mathbb{S}^d$. O conjunto*

$$\mathcal{A} := \{(\mathbb{S}^d \setminus \{N\}, \pi_N), (\mathbb{S}^d \setminus \{S\}, \pi_S)\}$$

é um atlas de $\mathbb{S}^d$.

Demonstração. As inversas de π_N e π_S são dadas por

$$\begin{aligned} \pi_N^{-1} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ x &\longmapsto \frac{1}{\|x\|^2 + 1}\left(2x_0, \ldots, 2x_{d-1}, \|x\|^2 - 1\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ x &\longmapsto \frac{1}{1 + \|x\|^2}\left(2x_0, \ldots, 2x_{d-1}, 1 - \|x\|^2\right). \end{aligned}$$

A transição de coordenadas entre as cartas é dada por

$$\begin{aligned} \pi_N \circ \pi_S^{-1} : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\|x\|^2} x. \end{aligned}$$

Claramente, todas as funções são suaves. ■

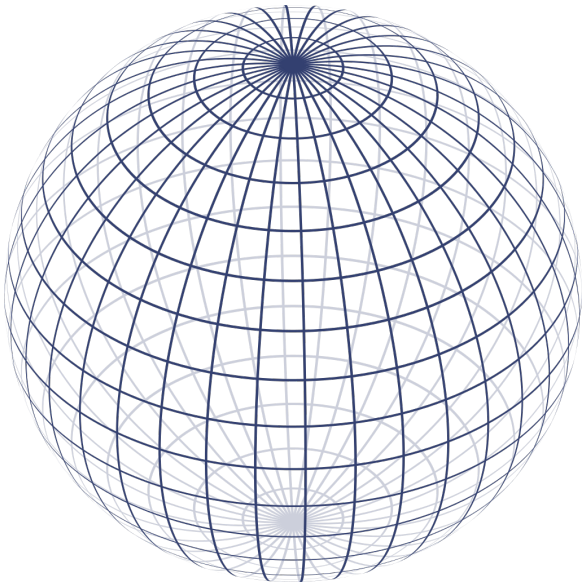

Figura 28.1: Esfera 2-dimensional

28.4.2 O Espaço Projetivo

Definição 28.19. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^d$. A relação de *equivalência homogênea* entre os pontos é definida por

$$x : y \quad \Longleftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R}^* \qquad x = ty.$$

Essa relação é realmente uma relação de equivalência, pois tomando $t = 1$ temos a reflexividade, tomando $\bar{t} = t^{-1}$ temos a simetria e tomando $t_1 t_0$ temos a transitividade. A classe de equivalência de um ponto $x \in \mathbb{R}^d$ é a reta sem a origem de $\mathbb{R}^d$ que passa pela origem e por x, e é denotada por $[x_0 : \cdots : x_{d-1}] \coloneqq [x]$.

Definição 28.20. O *espaço projetivo real* d-dimensional é o conjunto

$$\mathbb{PR}^d \coloneqq \left\{ [x_0 : \cdots : x_d] \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}.$$

Considerando os conjuntos

$$A_i := \left\{ [x_0 : \cdots : x_d] \in \mathbb{PR}^d \;\middle|\; x_i \neq 0 \right\}.$$

e as funções

$$\begin{aligned} \varphi_i : A_i &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ [x_0 : \cdots : x_d] &\longmapsto \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d), \end{aligned}$$

cujas inversas são

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^d &\longrightarrow A_i \\ x &\longmapsto [x_0 : \ldots, x_{i-1} : 1 : x_i :, \ldots : x_{d-1}]. \end{aligned}$$

Uma descrição equivalente é

$$\mathbb{PR}^d := \left\{ \{x, -x\} \;\middle|\; x \in \mathbb{S}^d \right\} = \mathbb{S}^d / \mathbb{Z}_2.$$

28.4.3 O Toro

Definição 28.21. O *toro* d-dimensional é o conjunto

$$\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d.$$

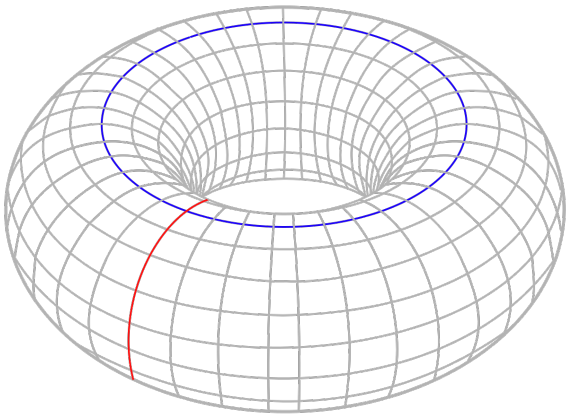

Figura 28.2: Toro

28.4.4 Hiperboloide

Definição 28.22. O *hiperboloide* d-dimensional é o conjunto

$$\mathbb{H}^d := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1} \;\middle|\; \|x\|^2 + 1 = t^2 \;\text{ e }\; t > 0 \right\}.$$