SERIES DE TAYLOR

Estefany Rueda Romero, Pedro Felipe Gómez Bonilla

I. Introducción

En este presente documento se piensa hablar sobre la serie de Taylor , la cual es reconocida por tener una estructura y funcionalidad en diferentes campos , no solamente educativos sino también empresariales.

Para ello vamos a empezar diciendo sobre que es , como es su estructura, su definición y finalmente un ejemplo de su implementación.

II. Descripción

Si hablamos de un enfoque matemático , una serie de Taylor son un conjunto de funciones que se aproximan a una función general mediante una *series de potencia o suma de potencias* con la forma:

$$(x-a)^n$$

Esta serie es calculada mediante la realización de derivadas de una función principal en cierto punto o valor a donde converja dicha serie. Al momento de identificar una serie centrada en un punto cero, se puede denominar como una *serie de Maclaurin*.

III. Utilización

Hay que destacar que esto será funcional para los siguientes casos :

- Calcular la precisión de dicha aproximación.
- Calcular valores aproximados de funciones.
- Integración término a término , resultando en operaciones triviales.

Aún asi tengan estas ventajas, se debe reconocer que no todas las funciones se pueden implementar en este tipo de series por algún tipo de singularidad , como lo son las series con potencias negativas de x como lo es

$$f(x) = exp(-1/x^2)$$

, la cual se puede solucionar mediante la serie de Laurent.

IV. Definición

La estrucura general de una serie de Taylor sigue la siguiente secuencia de potencias :

$$f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \tfrac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

en la cual podemos entender $n!$ como el factorial de N. También lo podemos entender mediante la sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

V. Ejemplo

A. Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$ en $x = 0$

Hay varias maneras de realizar el ejercicio , donde primero lo adaptamos para que se pueda derivar n veces.

Sabiendo que la estructura de Taylor es la siguiente:

$$f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \tfrac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

y nos piden determinarlo cuando $x = 0$, entonces $a = 0$ y por ende la formula quedaría asi:

$$f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}(x-0) + \tfrac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + ... + \tfrac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n$$

Si evaluamos las derivadas necesarias en $x = 0$, podemos sustituir los resultados de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} f(x) = e^x \to f(0) = e^0 = 1 \\ f'(x) = e^x \to f'(0) = e^0 = 1 \\ f''(x) = e^x \to f''(0) = e^0 = 1 \\ f'''(x) = e^x \to f'''(0) = e^0 = 1 \\ ... \\ f^n(x) = e^x \to f^n(0) = e^0 = 1 \end{gathered}$$

Teniendo dichos resultados , y sustituyendo en la principal , quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}(x-0) + \tfrac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + ... + \tfrac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n \\ \Downarrow \\ f(x) = 1 + \tfrac{1}{1!}x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + ... \\ \Downarrow \\ f(x) = 1 + \tfrac{x^1}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + ... \\ \Downarrow \end{gathered}$$

Donde nos quedaría como respuesta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$