

## Primeira Lista de Exercícios: Revisão de Probabilidade

Tente justificar e/ou desenvolver os cálculos de suas respostas.

**Exercício 1.** Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Considere os seguintes eventos aleatórios:

- $A$  = soma maior ou igual a 4.
- $B$  = soma ímpar.
- $C$  = um dos lançamentos foi 2.
- $D$  = o máximo das faces é 3.

Calcule as seguintes probabilidades:  $P(A)$ ,  $P(B|C)$ ,  $P(A \cap D)$  e  $P(C \cup D)$ .

**Exercício 2.** Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 95% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?

**Exercício 3.** Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 6 bolas pretas, 3 brancas e 4 vermelhas; a urna II contém 3 bolas pretas, 5 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 2 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4 ou 6, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2 ou 3, então uma bola da urna III é retirada.

- (a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser vermelha.
- (b) Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna II, sabendo-se que a bola retirada foi vermelha.

**Exercício 4.** Uma moeda é viciada de modo que a probabilidade de sair cara é 4 vezes maior do que a probabilidade de sair coroa. Para dois lançamentos independentes dessa moeda, determine:

- (a) O espaço amostral.
- (b) A probabilidade de sair somente uma cara.
- (c) A probabilidade de sair pelo menos uma cara.
- (d) A probabilidade de dois resultados iguais.

**Exercício 5.** Os amigos David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page desejam fazer um *amigo oculto* entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto não dê errado.

**Obs:** um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma.

**Exercício 6.** Seja  $X$  uma variável aleatória tal que

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 3) = \frac{2}{6} \quad \text{e} \quad P(X = 5) = \frac{3}{6}.$$

- (a) Calcule  $P(X > 2)$ .
- (b) Calcule  $P(X \leq 2)$ .
- (c) Calcule a esperança e a variância de  $X$ .
- (d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de  $X$ .

**Exercício 7.** Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados  $(i, j)$ , em que  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória  $X$  que é dada por:

$$X = \text{o máximo das faces dos dois dados.}$$

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi  $(2, 4)$ , teremos que o valor de  $X$  neste ponto será 4, pois

$$X(2, 4) = \text{máximo}\{2, 4\} = 4.$$

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi  $(5, 5)$ , então  $X$  assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória  $X$ , responda:

- (a) Quais os valores que  $X$  assume?
- (b) Para cada valor  $k$  que  $X$  assume, determine  $P(X = k)$ .
- (c) Calcule  $P(X < 3)$  e  $P(X \geq 3)$ .
- (d) Calcule  $P(X > 2 | X < 5)$ .
- (e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de  $X$ .

**Exercício 8.** Seja  $X \sim \mathcal{N}(5, 16)$ . Obtenha:

- (a)  $P(X \leq 13)$ .

- (b)  $P(X > 1)$ .
- (c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).
- (d) O valor de  $a$  tal que  $P(X \leq a) = 0.04$ .

**Exercício 9.** Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera  $T$ , tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t - 4), & 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{20}, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de  $f$ .
- (b) Prove que  $f$  é, de fato, uma função densidade.
- (c) Calcule  $P(0 < T \leq 12)$ .
- (d) Calcule  $P(9 < T \leq 12)$ .