Pedro Henrique Martins Belo   RA: 267809
Isadora Santos de Souza   RA: 257032
Sarah Pereira Teixeira Silva   RA: 258968
Cálculo Numérico - MS211F - 1S/2024

Atividade 4

Sejam $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, com $x_i < x_{i+1}$, $Y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\} \subset \mathbb{R}$ e $Z = \{z_0, z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{R}$. Considere o problema de determinar um polinômio p que satisfaça as condições de interpolação:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$p'(x_i) = z_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Seja $\beta = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}$ uma base para $\mathbb{P}_m$, o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a m.

Question 1. Qual deve ser o grau, m, do polinômio interpolador para que o problema tenha solução única?

Para determinar o grau m do polinômio de modo que o problema tenha uma única solução, devemos analisar quantas condições não são impostas e o número suficiente de coeficientes no polinômio para atender a essas condições.

1) Número de condições:

   Como temos $n+1$ nós de interpolação $(0 < i < n)$, e cada ponto impõe duas condições: uma para $P(x_i) = y_i$ e outra para $P'(x_i) = z_i$, temos $2(n+1)$.

2) Condições de Interpolação: Um polinômio de grau m deve ser escrito na forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m \tag{3}$$

   Ou seja, deve ter $m+1$ coeficientes.

   Para que o sistema tenha solução única, o número de condições deve ser igual ao número de coeficientes (veremos mais a frente que isso fornece uma matriz quadrada).

   Daí:

$$2(n+1) = m+1 \rightarrow m = 2n+2-1 \rightarrow m = 2n+1 \tag{4}$$

Logo, o grau m do polinômio interpolador que satisfaz as condições $P(x_i) = y_i$ e $P'(x_i) = z_i$ para $i = 0, 1, ..., n$ deve ser $m = 2n+1$. Em grau garante que o polinômio tem coeficientes suficientes para atender as 2(n+1) condições, resultando em solução única.

Question 2. Escrevendo p na base β, exiba o sistema linear obtido pela imposição das condições (1)-(2).

Representando $P(n)$ na base β:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j q_j(x). \tag{5}$$

Usando as condições de interpolação $P(x_i) = y_i$ e $P'(x_i) = z_i$, para $\quad i = 0, 1, \ldots, n$, temos:

$$\sum_{j=0}^{m} c_j q_j(x_i) = y_i. \tag{6}$$

Representando $P'(n)$ na base β:

(7) $$P'(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j q_j'(x).$$

Usando as condições de interpolação $P(x_i) = y_i$ e $P'(x_i) = z_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, temos:

(8) $$\sum_{j=0}^{m} c_j q_j'(x_i) = z_i.$$

Para $i = 0, 1, \dots, n$, teremos o seguinte sistema linear $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ representado na forma matricial, onde:

$$A = \begin{pmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \cdots & q_m(x_0) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_0) & \cdots & q_m'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0(x_n) & q_1(x_n) & \cdots & q_m(x_n) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_n) & \cdots & q_m'(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

O sistema linear é, portanto:

$$\begin{pmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \cdots & q_m(x_0) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_0) & \cdots & q_m'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0(x_n) & q_1(x_n) & \cdots & q_m(x_n) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_n) & \cdots & q_m'(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ \vdots \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Perceba que a matriz tem dimensões $2(n+1) \times (m+1)$, que condiz com o grau do polinômio interpolador para ter uma única solução, pois como $m = 2n+1 \to 2(n+1) \times (m+1) = 2(n+1) \times (2n+2) = 2(n+1) \times 2(n+1)$, que é uma matriz quadrada.

Question 3. Diremos que β é uma base canônica para um problema de interpolação se a matriz do sistema linear obtido pela imposição das condições de interpolação for a matriz identidade. Determine quais condições devem ser impostas sobre os polinômios q_j, de modo que β seja a base canônica para o problema de interpolação.

Pode ser útil tratar, de forma separada, os polinômios q_j, para $j = 0, 1, \dots, n$ e os polinômios q_j, para $j = n+1, \dots, m$.

Para que $\beta = \{q_0, q_1, \dots, q_m\}$ seja canônica, a matriz do sistema linear deve ser igual a identidade, ou seja, $q_j(x)$ e $q_j'(x)$ devem satisfazer condições específicas.

Considerando a matriz A do sistema anterior:

$$A = \begin{pmatrix} q_0(x_0) & q_1(x_0) & \cdots & q_m(x_0) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_0) & \cdots & q_m'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_0(x_n) & q_1(x_n) & \cdots & q_m(x_n) \\ q_0'(x_0) & q_1'(x_n) & \cdots & q_m'(x_n) \end{pmatrix}$$

Para que A seja a matriz identidade I, a base β deve satisfazer as seguintes condições:

Para $j = 0, 1, \dots, n$, os polinômios q_j devem ser construídos de forma que:

1) $q_j(x_i) = \delta_{ij}$, $q_j'(x_i) = 0$ $\forall$i;
   onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, que é 1 se $i = j$ e 0 caso $i \neq j$.

Para $j = n+1, n+2, \dots, m$, os polinômios q_j' devem ser construídos de forma que:

1) $q_j(x_i) = 0$, $q_j'(x_i) = \delta_{i,j-(n+1)}$ para todos os $i = 0, 1, \dots, n$;
   onde $\delta_{i,j-(n+1)}$ é o delta de Kronecker, que é 1 se $i = j - (n+1)$ e 0 caso $i \neq j$.

Question 4. Considere o caso em que $X = \{0, 1\}$. Determine a base canônica para $\mathbb{P}_m$, como descrita no item anterior. Exiba o gráfico de todos os polinômios da base canônica, no intervalo $[0, 1]$.

Como $X = \{0, 1\}$ tem apenas dois elementos (x_o, x), determinamos a base canônica para P_3, pois $m = 2n + 1$, e como $n = 1 \to m = 3$.

Condições para a base canônica com $x = 0, 1$, o polinômio $P(x)$ deve satisfazer:

$$P(0) = y_0 \text{ e } P'(0) = z_0$$
$$P(1) = y_1 \text{ e } P'(1) = z_1$$
$$\beta = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

Pelas condições impostas anteriormente:

Para $j = 0, 1, \ldots, n$;

1) $q_j(x_i) = 1$, se $i = j$;
2) $q_j'(x_i) = 0$, ∀i.

Para $j = n + 1, n + 2, \ldots, m$;

1) $q_j(x_i) = 1$, ∀i;
2) $q_j'(x_i) = 1$, se $i = j - (n + 1)$;
   $q_j'(x_i) = 0, sei \neq j - (n + 1)$.

Agora vamos calcular cada um dos polinômios da base:

Para $j = 0$:

$q_0(0) = 1 = a_0$

$q_0'(0) = 0 \to a_1 = 0$

$q_0(1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$

$q_0'(1) = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

Resolvendo o sistema linear:

$$a_2 + a + 3 = -1,$$
$$2a_2 + 3a_3 = 0,$$
$$a_3 = 2,$$
$$a_2 + 2 = -1 \to a_2 = -3.$$

Daí,

$$q_0(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3 \tag{9}$$

Para $j = 1$:

$q_1(0) = 0 = a_0$

$q_1'(0) = a_1 = 0$

$q_1(1) = 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \to a_2 + a_3 = 1$

$q_1'(1) = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \to 2a_2 + 3a_3 = 0$

Resolvendo o sistema linear:

$$a_3 = -2,$$
$$a_2 = 3,$$

Daí,

$$q_1(x) = 3x^2 - 2x^3 \tag{10}$$

Para $j = 2$:

$q_2(0) = 0 = a_0$

$q_2'(0) = a_1 = 1$

$q_2(1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \to a_2 + a_3 = 0$

$q_2'(1) = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \to 2a_2 + 3a_3 = -1$

Resolvendo o sistema linear:

$$a_3 = 1,$$
$$a_2 = -2,$$

Daí,

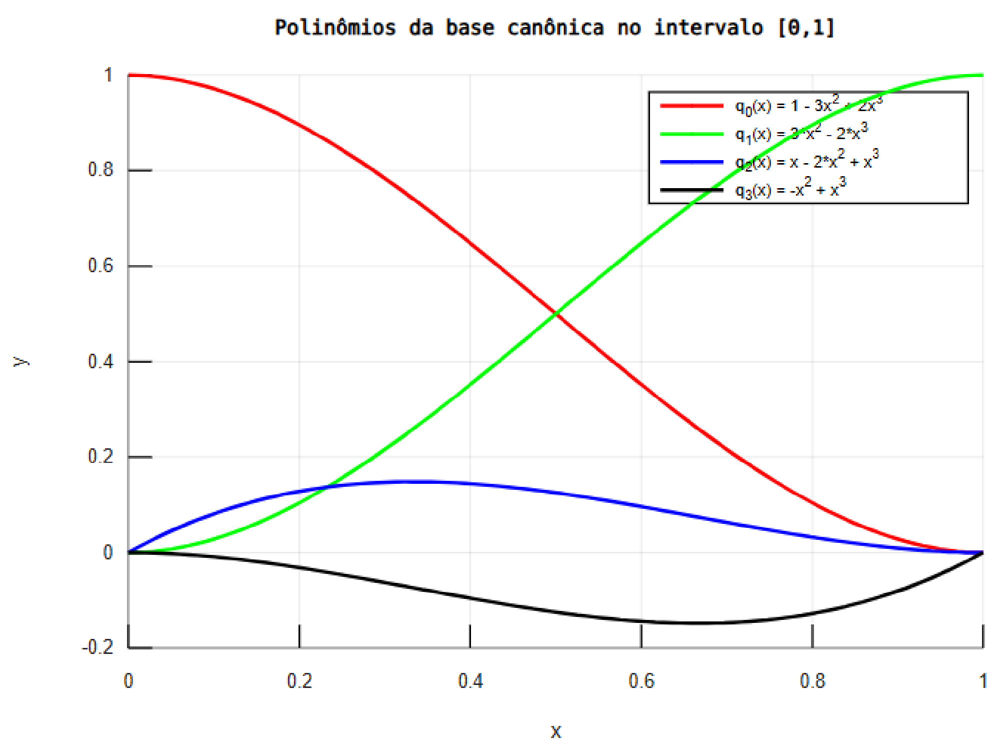
(11) $$q_2(x) = x - 2x^2 + x^3$$

Para $j = 3$:
$q_3(0) = 0 = a_0$
$q_3'(0) = a_1 = 0$
$q_3(1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \to a_2 + a_3 = 0$
$q_3'(1) = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \to 2a_2 + 3a_3 = 1$
Resolvendo o sistema linear:

$$a_3 = 1,$$
$$a_2 = -1,$$

Daí,

(12) $$q_3(x) = -x^2 + x^3$$



Question 5. Determine a base canônica quando $X = [a, b]$, $a < b$, a partir da base determinada no item anterior.

Através de uma transformação linear, em que t é uma variável no intervalo $[0, 1]$ e x uma variável no intervalo $[a, b]$:

$$x = a + (b - a)t$$

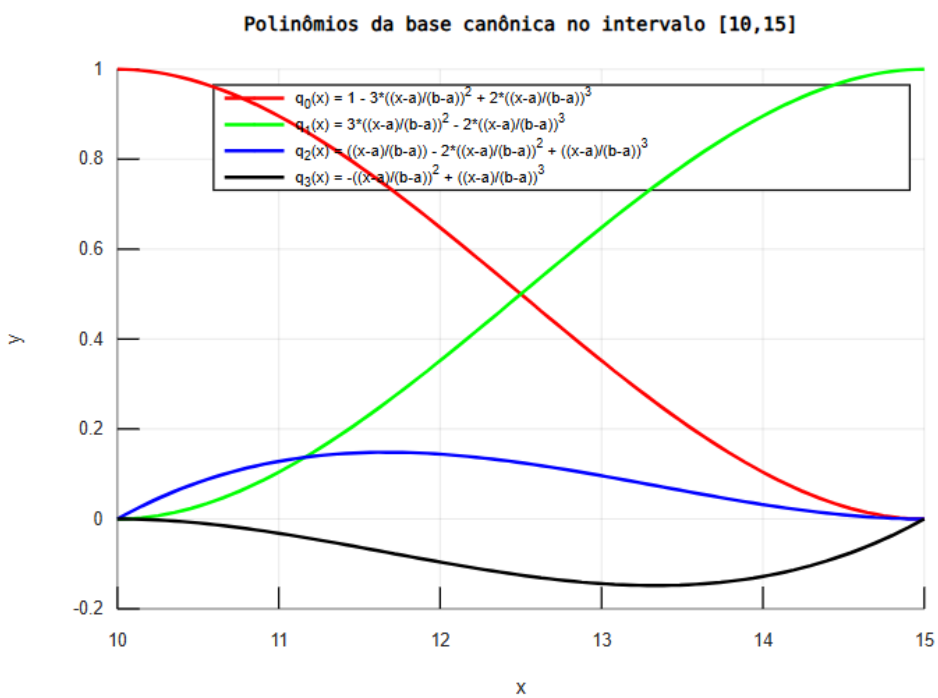
A função inversa é dada por:

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$

Podemos reescrever os polinômios em termos de x com a transformação linear $t = \frac{x-a}{b-a}$. Assim, temos:

$$q_0\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = 1 - 3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3$$
$$q_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = 3\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3$$
$$q_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3$$
$$q_3\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = -\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 + \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^3$$

Assim, escolhendo valores quaisquer para a e b, desde que $a < b$, pode-se plotar o gráfico:
Sendo $a = 10$ e $b = 15$:



Question 6. Discuta como seria uma estratégia de interpolação por partes para resolver o problema (1)–(2).

Vamos fazer da seguinte forma:

1 - Dividir o intervalo $[x_0, x_n]$ em subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ para i = 0, 1, 2, ..., n - 1.

2 - Fazer interpolação de Hermite em cada subintervalo:

- Para cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, vamos construir um polinômio de Hermite que satisfaça:

$$H_i(x_i) = y_i,\ H_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$H_i\text{'}(x_i) = z_i,\ H_i\text{'}(x_{+1}) = z_{i+1}$$

- O polinômio de Hermite de grau três H_i(x) pode ser escrito na forma

$$H_i(\mathrm{x}) = h_0(\mathrm{x})y_i + h_1(\mathrm{x})y_{i+1} + h_2(\mathrm{x})x_i + h_3(\mathrm{x})z_{i+1}$$

onde $h_0(\mathrm{x})$, $h_1(\mathrm{x})$, $h_3(\mathrm{x})$ são funções de base de Hermite

3 - Combinar os polinômios de subintervalos: $\mathrm{P(x)} = H_i(\mathrm{x})$ para x $\in[x_i,\, x_{i+1}]$

Question 7. (Bônus) Utilizando o Octave, determine o polinômio interpolador por partes para

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$sin(x) \equiv y$	0	1	0	-1	0
$cos(x) \equiv z$	1	0	-1	0	1

Faça os gráficos da função seno e do polinômio interpolador por partes, determinado pela imposição das condições (1)–(2).

Para determinar o polinômio interpolador foi criado o código abaixo no Octave:

```
% Dados
x = [0, pi/2, pi, 3*pi/2, 2*pi];
y = [0, 1, 0, -1, 0];
z = [1, 0, -1, 0, 1];

% Funções de base de Hermite
h0 = @(t) 2*t.^3 - 3*t.^2 + 1;
h1 = @(t) -2*t.^3 + 3*t.^2;
h2 = @(t) t.^3 - 2*t.^2 + t;
h3 = @(t) t.^3 - t.^2;

% Função de interpolação de Hermite
hermite_interpolate = @(x_i, x_ip1, y_i, y_ip1, z_i, z_ip1, x_val) ...
    h0((x_val - x_i) / (x_ip1 - x_i)) * y_i + ...
    h1((x_val - x_i) / (x_ip1 - x_i)) * y_ip1 + ...
    h2((x_val - x_i) / (x_ip1 - x_i)) * (x_ip1 - x_i) * z_i + ...
    h3((x_val - x_i) / (x_ip1 - x_i)) * (x_ip1 - x_i) * z_ip1;

% Gerando pontos para plotagem
x_plot = linspace(0, 2*pi, 1000);
y_plot = zeros(size(x_plot));

% Interpolação de Hermite por partes
for i = 1:length(x)-1
    indices = (x_plot >= x(i) & x_plot <= x(i+1));
    y_plot(indices) = hermite_interpolate(x(i), x(i+1), y(i), y(i+1), z(i), z(i+1), x_plot(indices));
end

% Plotando os gráficos
figure;
hold on;
plot(x_plot, sin(x_plot), 'b-', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'sin(x)');  % Função seno
plot(x_plot, y_plot, 'r--', 'LineWidth', 2, 'DisplayName', 'Interpolação de Hermite');  % Interpolação de Hermite
plot(x, y, 'ko', 'MarkerSize', 8, 'DisplayName', 'Pontos de Interpolação');  % Pontos de interpolação
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Interpolação de Hermite vs. Função seno');
```

```
legend show;
grid on;
hold off;
```

LISTING 1. Interpolação eremita

Onde foi possível encontrar o seguinte gráfico: