



Universidade Estadual de Campinas

Pedro Henrique Martins Belo - RA: 267809
Maria Eduarda da Silva Faria - RA: 240953
Pedro Henrique Lucarini - RA: 199139
Matheus Henrique Aliberto de Francisco - RA: 239930

A Máquina de Atwood

1 Resumo

Neste experimento, estudamos algumas formas de coleta de dados e como analisar dados por meio do uso da Máquina de Atwood. Como detalhado no texto adiante, a Máquina foi utilizada para obter o módulo da aceleração de dois cilindros de massas distintas, suspensos em um fio inextensível, bem como estimar o momento de inércia I e o torque τ_a a que o fio exerce sobre a polia. A partir de relações conhecidas e dados coletados, realizamos uma análise com auxílio de ferramentas próprias e aparatos fornecidos pelo laboratório de Física, com o objetivo de concluir que os resultados obtidos são coerentes e de base confiável, pautados em métodos científicos rigorosos e racionais. Finalmente, incluímos as respectivas incertezas envolvidas durante todo o processo de confecção deste planejamento.

2 Objetivo

Desejamos comparar duas formas diferentes de obtenção e análise de dados, ambos utilizando o modelo da Máquina de Atwood. Desejamos obter o valor da aceleração da queda do cilindro de massa maior pelos seguintes métodos:

- **Primeiro método:** medir o tempo total de queda e utilizá-lo na equação da aceleração média: $a = \frac{2h}{t^2}$
- **Segundo método:** ajustar os dados de posição dos cilindros em função do tempo a uma equação quadrática: $y = \left(y_0 + \frac{a \cdot t_0^2}{2}\right) - a \cdot t_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$, sendo y_0 a posição inicial do contrapeso, t_0 o tempo que o peso começa a cair e a a aceleração.

Além disso, outro objetivo almejado é a obtenção do torque a e o momento de Inércia I pelo cálculo utilizando os dados de uma regressão linear.

3 A Máquina de Atwood

A Máquina de Atwood é um experimento clássico de física utilizado para estudar a dinâmica do movimento uniformemente acelerado e as leis de Newton. Ela consiste em um sistema com duas massas conectadas por uma corda que passa sobre uma polia de raio R e momento de inércia I . As massas são diferentes, e a diferença entre elas causa uma aceleração no sistema.

3.1 Princípio de Funcionamento

- **Duas Massas:** Denotadas como m_1 e m_2 , onde $m_1 > m_2$.
- **Corda e Polia:** A corda é inextensível posto sobre uma polia de raio R e momento de inércia I .
- **Torque e Aceleração:** A tração dos corpos produz um torque τ_a que permite a polia girar em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante ao soltar o corpo de massa m_1 de uma altura h e com aceleração a .
- **Relação entre as medidas:** A partir disto é possível estabelecer a seguinte relação: $\Delta m = \frac{a(I+MR^2)}{gR^2} + \frac{\tau_a}{gR}$, onde g é a aceleração da gravidade, $\Delta m = m_1 - m_2$, e $M = m_1 + m_2$.

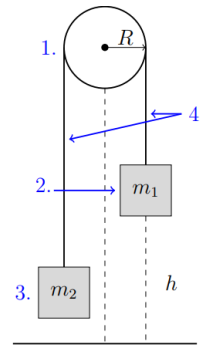


Figura 1: A Máquina de Atwood formada por uma polia de raio R (1), duas caixas de massas m_1 e m_2 (2) e (3), respectivamente, e por um fio inextensível (4).

É importante mencionar que assumimos a inextensibilidade do barbante utilizado em todas as execuções do experimento, ou seja, ignoramos possíveis variações no comprimento do fio devido a força de elongação exercida pelas massas e a possível variação de temperatura, bem como foi assumido que não há deslizamento entre o barbante e a polia, ou seja, existe atrito. Também foi desconsiderada a resistência do ar, visto que nenhum dos corpos atingem altas velocidades e foi tomado o movimento das massas ignorando qualquer tipo de inclinação com o eixo vertical, isto é, restrito à direção vertical.

4 Metodologia e Materiais

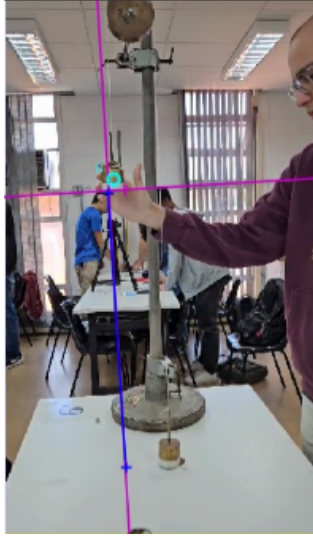


Figura 1: Aparato do experimento (Polia + Cilindros + Massas Auxiliares1).

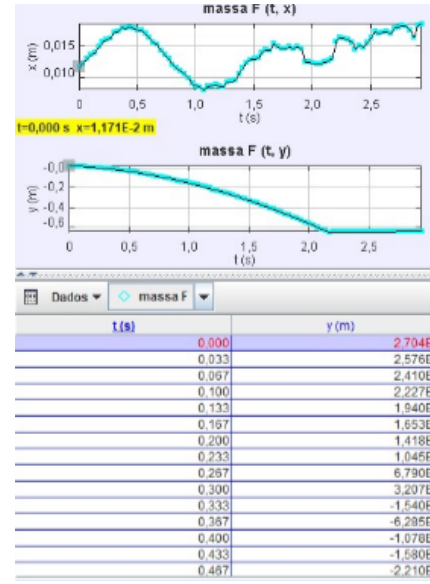


Figura 2: Exemplos de dados gerados pelo tracker.

Para a realização do experimento, utilizamos uma polia de massa $m = 1,9758 \text{ kg}$, de raio $R = (4,9 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$, fixada em uma haste metálica a uma altura fixa $H = (64,1 \pm 0,1) \times 10^{-2} \text{ m}$ e que gira em um eixo de rotação fixo, paralelo ao solo. O diâmetro da polia foi medido com um paquímetro cuja menor medida é $0,05 \text{ mm}$. Dois cilindros de massas $m_1 = 0,873 \pm 0,001 \text{ kg}$ e $m_2 = 0,872 \pm 0,001 \text{ kg}$ foram conectados à polia por meio de um fio leve e considerado inextensível. Massas auxiliares denotadas de A até G foram utilizadas para conferir uma diferença de massa entre os cilindros, necessária para analisar o módulo da aceleração do sistema. Na medida em que adicionávamos a massa, aumentávamos a aceleração e, conseqüente, diminuíamos o tempo de queda. As massas auxiliares são A: $0,021 \text{ kg}$, B: $0,032 \text{ kg}$, C: $0,044 \text{ kg}$, D: $0,060 \text{ kg}$, E: $0,081 \text{ kg}$, F: $0,114 \text{ kg}$, G: $0,165 \text{ kg}$, aferidas em uma balança digital cuja menor medida é $0,006 \text{ kg}$.

O experimento consistiu na queda dos cilindros, adicionando as massas auxiliares e observando a influência do campo gravitacional da Terra. O objetivo foi analisar o torque que a força de atrito do fio exerce sobre a polia, bem como o módulo da aceleração do sistema Polia + Cilindros + Massas auxiliares. Consideramos e analisamos o movimento de m_1 e m_2 ao longo do eixo definido pelo vetor y , ignorando os demais. Além disso, consideramos que o fio não desliza sobre a polia, garantindo assim que os contrapesos se deslocam verticalmente uma altura h enquanto a polia gira um ângulo $\theta = \frac{h}{R}$.

Deste modo garantimos que a relação entre a diferença de massa dos corpos e a aceleração linear do movimento é dado pela equação $\Delta m = \frac{a(I+MR^2)}{gR^2} + \frac{\tau_a}{gR}$, onde Δm é a diferença entre a massa total dos cilindros e pesos auxiliares, a é a aceleração, g é a constante gravitacional, R é o raio da polia, I é o momento de inércia da polia, M é a massa total do sistema (polia + cilindros + massas auxiliares) e τ é o torque que a força de atrito do fio exerce sobre a polia. Identificamos que a variável independente no experimento é o Δm , que pode ser variado de forma controlada pelo grupo em um conjunto de valores que permita uma análise mais precisa. A variável dependente neste fenômeno é a aceleração, que é diretamente proporcional à Δm .

5 Discussão e Resultados

Gravamos o movimento dos cilindros + pesos auxiliares em 7 configurações distintas, utilizando para tal um celular com taxa de captura de 30 quadros por segundo, correspondendo a uma resolução temporal de 0,03s. Durante o movimento, o cilindro m_1 sobe até o cilindro m_2 atingir a superfície, alcançando então uma altura $h = 61,5$ cm, medida da base do cilindro suspenso até a superfície. Para obter as acelerações, utilizamos duas estratégias distintas. Primeiro, usamos o tempo médio de cada experimento marcado pelo cronômetro para inseri-lo na fórmula $a = \frac{2h}{t^2}$. Outro método empregado foi analisar a posição dos cilindros + pesos auxiliares em relação ao tempo com o uso do programa Tracker e, em sequência, com auxílio do software SciDavis, foi feito o ajuste polinomial da equação: $y = \left(y_0 + \frac{at_0^2}{2}\right) - at_0t + \frac{at^2}{2}$ para descrever o movimento dos cilindros.

Por fim, para obtermos o valor da inércia rotacional I e o valor do torque τ , utilizamos o software SciDavis e o Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). Sendo: $A = \frac{I+MR^2}{gR^2}$ e $B = \frac{\tau}{gR}$

com $M = 3,7208$ kg e $g = 9,8$ m/s², manipulamos a equação dada anteriormente para $\Delta m = A \cdot a + B$ permitindo assim a aplicação do MMQ.

5.1 Análise de Dados

5.1.1 Método 1

Neste método, calculamos a aceleração de uma maneira mais simples a partir da fórmula $a = \frac{2h}{t^2}$, sendo h a altura do cilindro e t o tempo de queda em cada caso, conforme fomos adicionando as massas. Em seguida, utilizamos o software *sciDavis* para analisar os dados coletados, então plotamos um gráfico de aceleração \times variação da massa a fim de calcular os valores de I e τ via Método dos Mínimos Quadrados (MMQ). A equação utilizada foi: $\Delta m = A \cdot a + B$, onde $A = (1,92 \pm 0,16)$ kg \cdot s²/m e $B = (-0,014 \pm 0,01)$ kg

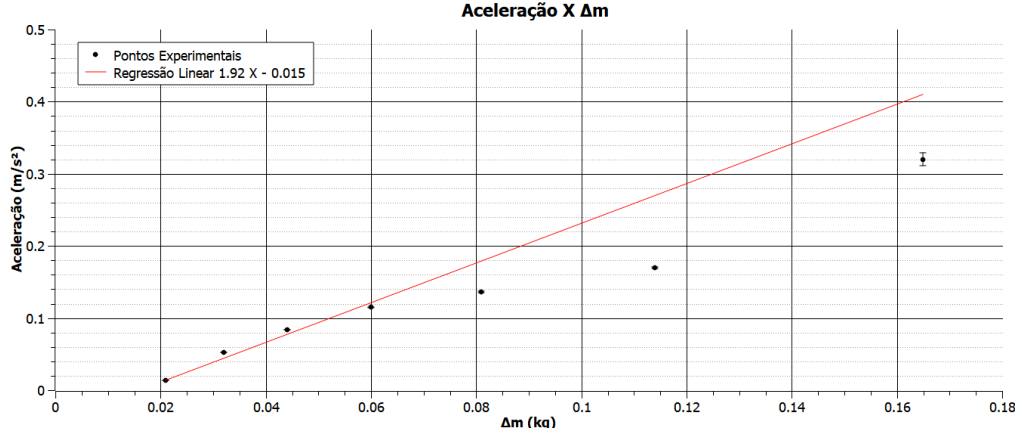


Figura 1: Regressão linear do módulo da aceleração em função da diferença entre as massas com a respectiva barra de incerteza feita a partir dos dados da tabela 4.

Substituindo na fórmula das respectivas variáveis e isolando o momento de inércia I e o torque τ , temos:

$$A = I + MR^2 \implies I = A - MR^2$$

$$B = \tau g R \implies \tau = \frac{B}{gR}$$

onde $M = 3,7208$ kg, $g = 9,8$ m/s²

Substituindo os valores obtidos para A e B , obtemos: $I = (3,62 \pm 0,38) \cdot 10^{-2}$ kg \cdot m² e $\tau = (-6,72 \pm 4,8) \cdot 10^{-3}$ N \cdot m

5.1.2 Método 2

Neste método, analisamos a posição dos cilindros + pesos auxiliares em relação ao tempo com o uso do programa *Tracker* e, em sequência, com auxílio do software *SciDavis*, foi feito o ajuste polinomial da equação: $y = \left(y_0 + \frac{at_0^2}{2}\right) - a \cdot t_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ para descrever o movimento dos cilindros, que descreve as curvas dos gráficos abaixo:

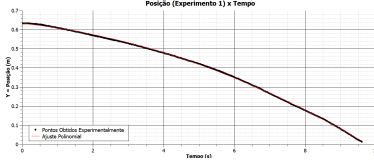


Figura 2: Experimento 1

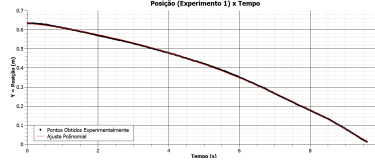


Figura 3: Experimento 2

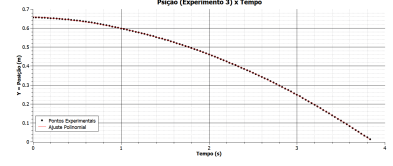


Figura 4: Experimento 3

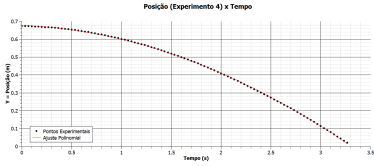


Figura 5: Experimento 4

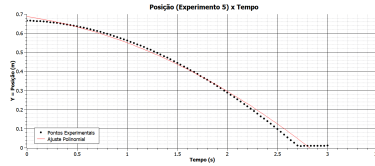


Figura 6: Experimento 5

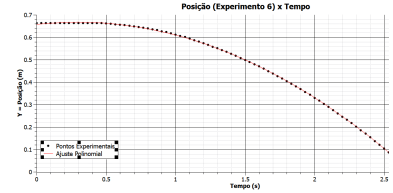


Figura 7: Experimento 6

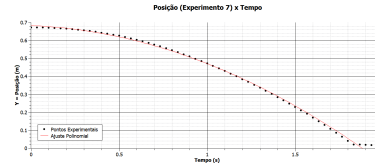


Figura 8: Experimento 7

(Os dados detalhados provenientes de cada gráfico estão disponíveis no Apêndice.)

Consideramos, para uma análise mais sucinta: $A = \left(y_0 + \frac{at_0^2}{2}\right)$, $B = -at_0t$ e $C = \frac{at^2}{2}$, onde A, B e C são dados pelo software *SciDavis*. Substituindo os dados que obtemos através do software pudemos calcular a aceleração de cada caso, como mostrada na tabela abaixo:

Tabela 1: Dados obtidos com o ajuste polinomial de todos os experimentos.

Experimento	Aceleração (m/s^2)	$\Delta m(kg)$
1	$1,37282 \times 10^{-2} \pm 1,12851 \times 10^{-5}$	0,021
2	$5,58276 \times 10^{-2} \pm 1,10125 \times 10^{-8}$	0,032
3	$6,58933 \times 10^{-1} \pm 2,42697 \times 10^{-4}$	0,044
4	$1,27112 \times 10^{-1} \pm 1,17969 \times 10^{-4}$	0,06
5	$1,52757 \times 10^{-1} \pm 1,39436 \times 10^{-3}$	0,081
6	$1,84610 \times 10^{-1} \pm 1,67388 \times 10^{-4}$	0,114
7	$3,65378 \times 10^{-1} \pm 2,11790 \times 10^{-3}$	0,165

E, em seguida, utilizamos novamente o software *SciDavis* para fazer a regressão linear da aceleração em função da diferença de massa em cada experimento e assim obter a inércia e torque como no primeiro método. Podemos ver o gráfico da aceleração (m/s^2) por $\Delta m(kg)$, a seguir:

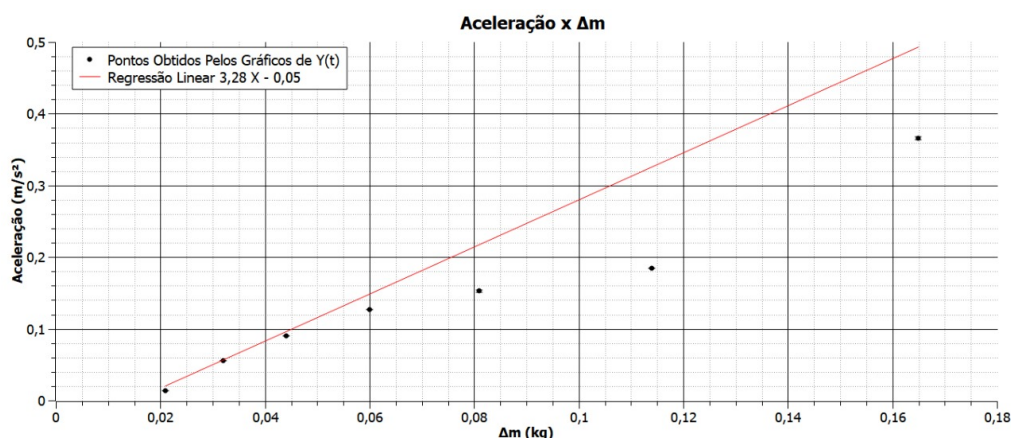


Figura 9: Regressão linear do módulo da aceleração em função da diferença entre as massas feita a partir dos dados da tabela 1.

Utilizando a mesma fórmula para a inércia I e o torque que foi utilizada no método I, pudemos substituir os valores, obtidos através do software, de A e B , sendo eles: $A = 3,28190020096741 \pm 0,000850169147386277$ e $B = -0,0491931858507822 \pm 0,0000272054076880533$ para calcular o valor da Inércia e do Torque. Sendo assim, a partir dos cálculos, obtemos: $I = 6,829 \times 10^{-2} \pm 2,8 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $\tau = -2,362 \times 10^{-2} \pm 5 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m}$.

6 Conclusão

Comparando os resultados obtidos por ambos os métodos, observamos uma boa concordância nas medidas de aceleração. As pequenas discrepâncias entre os resultados podem ser atribuídas às incertezas associadas às medições, como a precisão dos instrumentos e as limitações do software na análise dos dados.

O cálculo da inércia e do torque, baseado nas acelerações obtidas, também revelou consistência com os valores teóricos esperados. A análise das incertezas associadas à medição de massa, distância e tempo contribuiu para uma compreensão mais completa dos possíveis erros e suas influências nos resultados finais.

A combinação dos métodos manual e computacional ofereceu uma abordagem abrangente para a análise da Máquina de Atwood. Ambos os métodos confirmaram que a aceleração dos corpos e as propriedades dinâmicas da máquina estão em concordância com as previsões teóricas. A integração dos resultados dos dois métodos não apenas validou a precisão dos cálculos, mas também destacou a importância da análise cuidadosa das incertezas e da utilização de ferramentas modernas para a validação experimental.

Sendo assim, o experimento demonstrou a eficácia dos métodos utilizados na determinação da aceleração, inércia e torque da Máquina de Atwood.

7 Apêndice

7.1 Dados dos gráficos

Dados obtidos através do software *SciDavis* relacionados aos gráficos do segundo método.

Experimento 1

$$A = -0,0045797453 \pm 0,0000252343$$

$$B = -0,0201335361 \pm 0,0002502477$$

$$C = 0,6325957985 \pm 0,0005200170$$

Experimento 2

$$A = -0,0000222616 \pm 0,0000001304$$

$$B = -0,0287182475 \pm 0,0006558573$$

$$C = 0,6612137413 \pm 0,0006907567$$

Experimento 3

$$A = -0,0382688641 \pm 0,0000738648$$

$$B = -0,0223580135 \pm 0,0002925894$$

$$C = 0,6589327496 \pm 0,0002426971$$

Experimento 4

$$A = -0,0546073817 \pm 0,0002638447$$

$$B = -0,0247556398 \pm 0,0008907189$$

$$C = 0,6783529911 \pm 0,0006295611$$

Experimento 5

$$A = -0,0584672886 \pm 0,0031179186$$

$$B = -0,0788977249 \pm 0,0096671234$$

$$C = 0,6874046592 \pm 0,0062745976$$

Experimento 6

$$A = -0,1161237131 \pm 0,0003743919$$

$$B = 0,0694270175 \pm 0,0010319129$$

$$C = 0,6565562204 \pm 0,0005953073$$

Experimento 7

$$A = -0,1714944511 \pm 0,0039567615$$

$$B = -0,0403857684 \pm 0,0094634870$$

$$C = 0,6826159982 \pm 0,0039567615$$

7.2 Incertezas

Fonte de incerteza	Símbolo	Incerteza-padrão	F.D.P	Tipo de avaliação
Instrumento de medição da altura	μ_h	10^{-3} m	Triangular	Tipo B
Incerteza combinada: $\mu_h = 0,001$ m				

Fonte de incerteza	Símbolo	Incerteza-padrão	F.D.P	Tipo de avaliação
Incerteza da posição da massa	μ_m	4×10^{-4} kg	Triangular	Tipo B
Incerteza combinada: $\mu_m = 4 \times 10^{-4}$ kg				

Fonte de incerteza	Símbolo	Incerteza-padrão	F.D.P	Tipo de avaliação
Incerteza do frame inicial e final	μ_{fq}	0,06 s	Triangular	Tipo B
Incerteza combinada: $\mu_{fq} = 0,06$ s				

7.3 Incerteza da Aceleração

No método 1, obtemos a aceleração através da fórmula $a = \frac{2h}{t^2}$, logo para obter a incerteza combinada seguimos o cálculo mostrado a seguir. Já no método 2, obtemos a incerteza através da fórmula de propagação de incertezas de múltiplas variáveis levando em consideração o erro dado pelo software *SciDavis*, para A, B e C, e as incertezas das outras variáveis.

Exemplificando o Método 1, temos: A aceleração a foi calculada a partir da distância d percorrida e do tempo t gasto usando a fórmula: $a = \frac{2d}{t^2}$

7.3.1 Propagação de Incertezas

Para calcular a incerteza da aceleração Δa , considerando as incertezas associadas à distância Δd e ao tempo Δt , utilizamos a fórmula de propagação de incertezas:

$$\Delta a = a \sqrt{\left(\frac{U_d}{d}\right)^2 + \left(2\frac{U_t}{t}\right)^2}$$

onde temos:

A incerteza na distância é dada pela incerteza da régua utilizada para medir a distância.

$$U_d = 0,001 \text{ m}$$

A incerteza no tempo é dada pela incerteza do cronômetro utilizado para medir o tempo.

$$U_t = 0,01 \text{ s}$$

Para calcular a incerteza padrão combinada da aceleração, consideramos as incertezas associadas à distância e ao tempo. Onde: d é a distância medida, t é o tempo medido, U_d é a incerteza na distância e U_t é a incerteza no tempo.

7.4 Incerteza das Massas

Incerteza da balança: $U_b = 0,006$ kg e incerteza do último dígito: $U_d = 0,001$ kg

A incerteza padrão combinada U_c leva em consideração ambas as incertezas:

$$U_c = \sqrt{(U_d)^2 + (U_b)^2}$$

Substituindo os valores:

$$U_c = \sqrt{(0,001)^2 + (0,006)^2}$$

Logo,

$$U_c \approx 0,00608 \text{ kg}$$

Massa (kg)	Incerteza combinada (kg)	F.D.P	Tipo de avaliação
A: 0,021	$\pm 0,00608$	B	Retangular
B: 0,032	$\pm 0,00608$	B	Retangular
C: 0,044	$\pm 0,00608$	B	Retangular
D: 0,060	$\pm 0,00608$	B	Retangular
E: 0,081	$\pm 0,00608$	B	Retangular
F: 0,114	$\pm 0,00608$	B	Retangular
G: 0,165	$\pm 0,00608$	B	Retangular

Tabela 2: Massas e suas respectivas incertezas combinadas.

Fonte de incerteza	Símbolo	Incerteza-padrão (kg)	F.D.P	Tipo de avaliação
Balança eletrônica	U_b	$\pm 0,006$	Retangular	B
Último dígito	U_d	$\pm 0,001$	-	B
Incerteza padrão combinada	U_c	$\pm 0,00608$	-	-

Tabela 3: Incertezas associadas à massa.

7.5 Incerteza do Momento de Inércia

7.5.1 Propagação da Incerteza do Momento de Inércia

$$\begin{aligned}
 u_I^2 &= \left(\frac{\partial I}{\partial k} \right)^2 u_k^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R} \right)^2 u_R^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial M} \right)^2 u_M^2 \\
 u_I^2 &= (gR^2)^2 u_k^2 + [2R(kg - M)]^2 u_R^2 + (-R^2)^2 u_M^2
 \end{aligned}$$

7.6 Incerteza do raio

Incerteza da paquímetro: $R_p = 0,1 \times 10^{-2} \text{ m}$ e incerteza do último dígito: $R_d = 0,01 \times 10^{-2} \text{ m}$

A incerteza padrão combinada R_c leva em consideração ambas as incertezas:

$$R_c = \sqrt{(R_p)^2 + (R_d)^2}$$

Substituindo os valores:

$$R_c = \sqrt{(0,1 \times 10^{-2})^2 + (0,01 \times 10^{-2})^2}$$

Logo,

$$R_c \approx 0,001 \text{ m} = 0,01 \times 10^{-2} \text{ m}$$

Fonte de incerteza	Símbolo	Incerteza-padrão (m)	F.D.P	Tipo de avaliação
Paquímetro	R_p	$\pm 0,1 \times 10^{-2}$	-	B
Último dígito	R_d	$\pm 0,01 \times 10^{-2}$	-	B
Incerteza padrão combinada	R_c	$\pm 0,01 \times 10^{-2}$	-	-

Tabela 4: Incertezas associadas à massa.

7.7 Incerteza do Torque

7.7.1 Propagação de Incerteza do Torque

$$\begin{aligned} u_{\tau}^2 &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial b} \right)^2 u_b^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial R} \right)^2 u_R^2 \\ u_{\tau}^2 &= (gR)^2 u_b^2 + (bg)^2 u_R^2 \end{aligned}$$