Universidade Estadual do Ceará

Sistemas lineares e interpolação numérica

Fortaleza, 5 de Novembro de 2018

Arthur Cordeiro - 1368098
Sidney Xavier - 1357406
Matheus Monteiro - 1357484
Pedro Henrique - 1368041

Sumário

Introdução

Este relatório tem como objetivo, explicar como funciona as resolução dos sistemas lineares através da Fatoração LU ou pelo método de Gauss-Seidel, onde a Fatoração LU é um método exato, e o método de Gauss-Seidel é um método aproximado, iterativo para a resolução de sistemas lineares. E também o método de interpolação de Lagrange, onde ele expressa por um polinômio para determinar a equação que passa por alguns pontos conhecidos do sistema, no caso a utilização dele serviu para determinar uma reta que passa por dois pontos do sistema, esperando que os demais valores também respeitem aproximadamente este sistema.

Método de Fatoração LU

A Fatoração LU, é um método exato, para a determinação do vetor x, para a solução do sistema de equações: $Ax = b$, onde A é uma matriz, e x e b são vetores. Trata-se de uma fatoração da matriz A , transformando-a em duas matrizes, L e U, chamadas assim pois o nome delas é: matriz Lower(L) e matriz Upper(U), onde a L é uma matriz triangular inferior e a U é uma triangular superior.

Esta fatoração utiliza o método de eliminação de Gauss, para solucionar o sistema de equações, tornando mais simples o cálculo do vetor x. Com essa decomposição a solução do sistema torna-se:

$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

Fazendo $Ux = y$, temos:

$$Ly = b$$

Torna-se fácil resolver este sistema, pois temos apenas uma matriz triangular inferior para determinar os valores do vetor y, resolvendo rapidamente este sistema, inicializando na primeira linhas de L ,portanto calculando primeiramente y_0 ,determinando sucessivamente todos os elementos do vetor y. Dando continuidade ao sistema, podemos voltar para:

$$Ux = y$$

Com o vetor y que acabou de ser calculado podemos encontrar os valores do vetor que queremos descobrir inicialmente, pois agora temos apenas uma matriz triangular superior, para determinar facilmente todos os valores do vetor x.

Esta Fatoração possui um problema, o pivô da matriz não pode ser igual a 0, pois ele acabará dividindo por 0 o valor de x, assim deve-se utilizar pivotamento, para ordenar as linhas da matriz de forma que remova esta divisão por 0, assim temos mais uma matriz no sistema:

$Ax = b$ torna-se $PAx = b$

como $P * P = I$,temos:

$$Ax = Pb$$

Após multiplicar a matriz P pelo vetor b, podemos calcular normalmente , tratando $b = Pb$, em comparação com a demonstração anterior.

Método de Gauss - Seidel

Este método é iterativo, para a resolução de sistemas de equações lineares. Desenvolvido pelos alemães matemáticos Carl Friedrich Gauss e Philipp Ludwig von Seidel.

Este método calcula o valor do vetor x, no sistema de equações: $Ax = b$, por ser um método iterativo, o valor calculado para o vetor x é aproximado em relação ao valor real que resolve o sistema de equações, tendo como condição de parada a diferença relativa de um x calculado, para o anterior, inferior ao ε (epsilon) desejado.

Utilizando os valores que estão sendo calculados e os valores do vetor anterior, para determinar os elementos do próximo vetor x, que busca se aproximar do valor real da solução do sistema de equações lineares.

A forma de calcular o próximo elemento é determinado pela expressão:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{k}), \ i = 1, 2, ..., n$$

Como trata-se de um método iterativo, a solução encontrada para o vetor x é próxima do valor real, da solução do sistema de equações lineares, portanto a multiplicação da matriz A pelo vetor x, não dá o valor do vetor b, existe uma diferença entre o valor calculado de $A * x$, para o vetor b.

Método de Lagrange

O método de Lagrange é um método de interpolação, utilizado para terminar o polinômio que passa por alguns pontos do sistema de equações, quanto mais pontos forem determinados pelo sistema, maior será o grau do polinômio, é garantido que o polinômio passa exatamente pelos pontos utilizados para sua geração.

Para determinar este polinômio primeiramente, calcula-se os polinômios auxiliares determinados pela equação:

$$L_k(x) = \prod_{j=0\, j!=k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

O grau do polinômio final é determinado por quantos pontos estão sendo utilizados para calcular o polinômio parcial, sendo o polinômio de grau $n - 1$,onde n é a quantidade de pontos utilizados, tendo um mínimo de dois pontos para determinar uma reta. Esta equação tem como resposta apenas 0 ou 1, ou seja, $L_k(x) = 1$ ou $L_k(x) = 0$,dependendo se o x foi o ponto conhecido para terminar aquele polinômio ou não, portanto para determinar o valor esperado de y, basta multiplicar pelo polinômio auxiliar que tenha como resposta 1, tornando o polinômio final pela expressão:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

Este polinômio gerado, expressa com exatidão os pontos passados para montá-lo e gera uma equação de reta que aproxima-se dos demais pontos que podem existir no sistema de equações.