Disciplina: Bioengenharia.

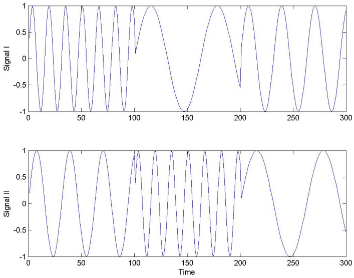
Renata Coelho Borges
renatacoelho@utfpr.edu.br

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

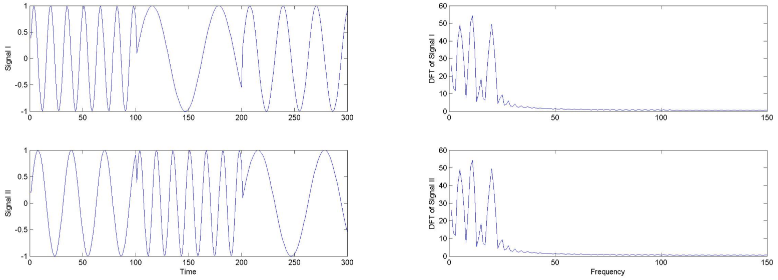
Transformada Wavelet.

- A Transformada Wavelet (*Wavelet Transform* - WT) se tornou uma ferramenta essencial aplicações de processamento de sinal e imagem, pois essa transformação fornece recursos que podem não ser alcançados por outras transformações
- Começaremos justificando a necessidade de tal transformação e, em seguida, adotamos uma abordagem intuitiva em relação à definição da WT

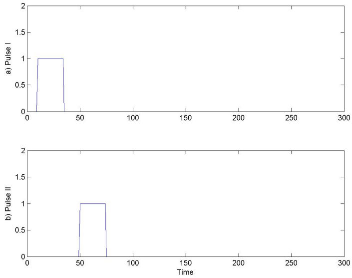
Exemplo 1 (FT):



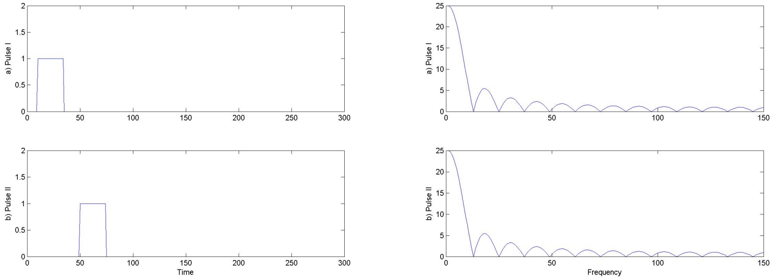
Exemplo 1 (FT):


Signal I
Signal II
Time
DFT of Signal I
DFT of Signal II
Frequency

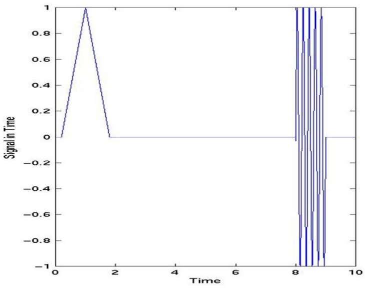
Exemplo 2 (FT):



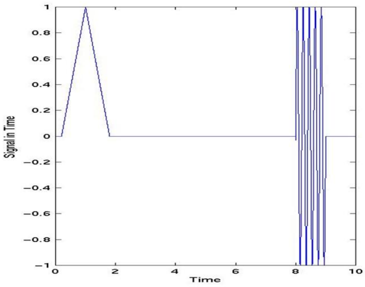
Exemplo 2 (FT):



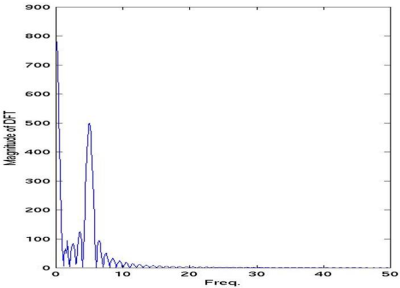
Exemplo 3 (FT):



Exemplo 3 (FT):



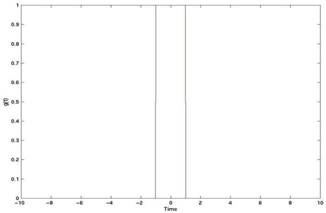
Signal in Time
Time
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
0
2
4
6
8
10



Magnitude of DFT
Freq.
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
0
10
20
30
40
50

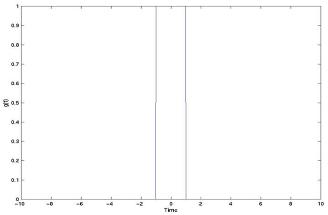
Exemplo 3 (STFT): cont.

Janela retangular:

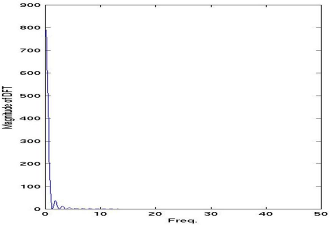


Exemplo 3 (STFT): cont.

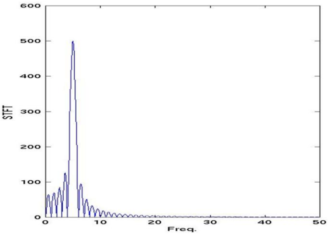
Janela retangular:



Primeiro evento (pulso triagular):



Segundo evento (senóide):



- Wavelet é uma função capaz de decompor e descrever ou representar outra função (ou uma série de dados) originalmente descrita no domínio do tempo (ou outra ou outras várias variáveis independentes, como o espaço), de forma a podermos analisar esta outra função em diferentes escalas de frequência e de tempo
- A decomposição de uma função com o uso de wavelets é conhecida como "transformada wavelet" e tem suas variantes contínua e discreta
- Graças à capacidade de decompor as funções tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo, as funções wavelet são ferramentas poderosas de processamento de sinais, muito aplicadas na compressão de dados, eliminação de ruído, separação de componentes no sinal, identificação de singularidades, detecção de auto-semelhança, e muito mais

Transformada Wavelet 1-D Contínua

- A transformada *wavelet* contínua (CWT) pode ser definida por:

$$W_{(\Psi,X)}(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\Psi^*(\frac{t-b}{a})dt, \qquad a \neq 0$$

Ψ é uma função com duração limitada no tempo
b é o parâmetro de deslocamento
a é um parâmetro escalar (substitui o parâmetro frequência f)

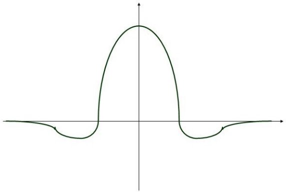
Transformada Wavelet 1-D Inversa

- A transformada inversa *wavelet* contínua (ICWT) pode ser definida por:

$$x(t) = \frac{C_{\Psi}^{-1}}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{(\Psi,X)}(a,b)\Psi(\frac{t-b}{a})dadb, \qquad a \neq 0$$

C_{Ψ}^{-1} é uma função cujo valor depende da escolha exata da "*wavelet* mãe" $\Psi(t)$
a e b são variáveis arbitrárias

- A escolha da wavelet mãe fornece uma CWT específica e, como resultado, estamos lidando com um número infinito de transformações sob o mesmo nome CWT (em oposição a apenas uma transformação para a transformação contínua de Fourier [CFT]).
- A escolha da wavelet mãe fornece propriedades únicas que tornam a transformação resultante em uma escolha adequada para uma tarefa específica.
- A forma de onda representada pelo sinal da figura abaixo é a forma geral das wavelets-mãe mais populares.



- Outras “wavelets mãe” populares são Coiflets, Symlets, Morlet e Meyer.

como escolher uma wavelet mãe para uma aplicação específica?

- Essa questão, na maior parte, é um problema em aberto e não parece ter uma resposta definitiva
- No entanto, duas regras práticas intuitivas são amplamente seguidas ao escolher uma wavelet mãe:
  - wavelets mãe complexas são necessárias para sinais complexos
  - a “wavelet mãe” que se assemelha à forma geral do sinal a ser analisado seria uma escolha mais adequada

Transformada Wavelet 1-D Discreta

- A transformada wavelet discreta (DWT) aceita sinais contínuos e aplica somente deslocamentos e escala para formar a transformada.
- Definindo:
  - $a_{jk} = a_0^j$ e $b_{jk} = ka_0^j T$
  - em que T é a taxa de amostragem e a_0 é uma constante positiva não zero:
- A transformada *wavelet* contínua (DWT) pode ser definida por:

$$W_{(jk)}(t) = \frac{1}{\sqrt{a_{jk}}}\Psi(\frac{t - b_{jk}}{a_{jk}}) = a_0^{-j/2}\Psi(a_0^{-j}t - kT)$$

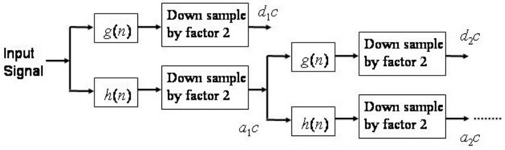
Ψ é uma função com duração limitada no tempo
b é o parâmetro de deslocamento
a é um parâmetro escalar (substitui o parâmetro frequência f)

Transformada wavelet discreta em sinais discretos

- Em quase todas as aplicações práticas, os sinais são formados por medições discretas e, portanto, na prática, normalmente lidamos com sinais amostrados
- Assumimos que o sinal discreto, se amostrado de um sinal contínuo, foi amostrado de acordo com a taxa de Nyquist (ou mais rápida)
  - Garante que todas as informações do sinal contínuo sejam preservadas no sinal discreto
- Para esse sinal discreto, o DWT pode ser calculado de diferentes maneiras, com base no tipo exato de wavelets mãe usadas para a transformação
- Os melhores tipos de wavelets mãe são os que formam um conjunto ortogonal

- O método descrito a seguir, chamado algoritmo piramidal de Mallat ou filtro de espelho de quadratura (QMF), permite a criação sistemática de um número ilimitado de conjuntos de bases ortogonais para DWT.
- A característica interessante desse método é o fato de o método depender apenas da escolha de um filtro passa-baixo digital $h(n)$
- Com base no algoritmo QMF, o DWT para um sinal unidimensional (1-D) é calculado sistematicamente da seguinte maneira. Assumindo um filtro digital $h(n)$, formamos outro filtro $g(n)$ da seguinte maneira:

$$g(n) = h(2N - 1 - n)$$



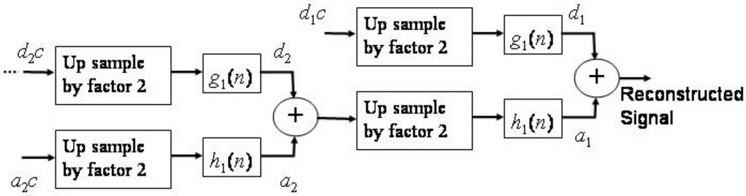
Quantos níveis de decomposição são necessários para uma transformação adequada?

- Um critério intuitivo para escolher o nível da decomposição seria a decomposição contínua até que as frequências mais altas conhecidas em o sinal de interesse sejam extraídas e identificadas
- Em termos gerais, se for necessário ter uma decomposição mais detalhada do sinal em frequências mais altas será necessário calcular níveis mais altos de decomposição
    - Isso simplesmente permitiria uma descrição mais específica dos componentes de alta frequência de um sinal

- Os filtros $h_1(n)$ e $g_1(n)$ são definidos com base em $h(n)$ e $g(n)$ da seguinte maneira:

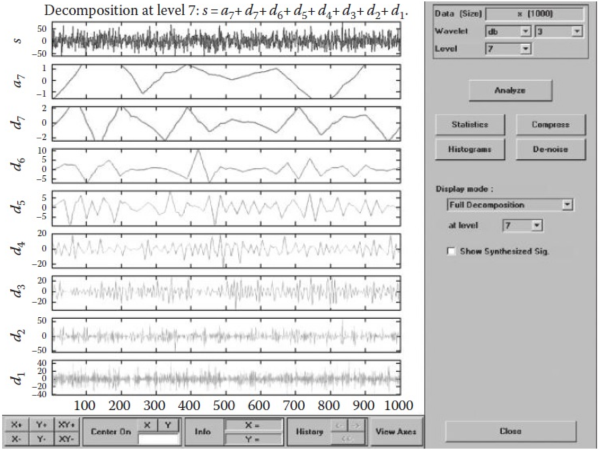
$$h_1(n) = (-1)^{1-n} h(1-n)$$

$$g_1(n) = h_1(2N-1-n)$$



Exemplo:

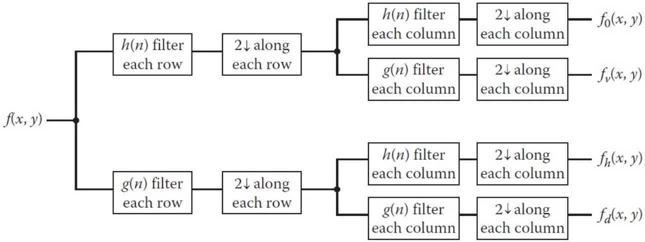
- Neste exemplo, um sinal EEG é decomposto usando o método QMF (`wavemenu`)
- No menu principal da Toolbox seleciona-se Wavelet 1-D em depois carrega-se o sinal
- Para analisar o sinal são fornecidas várias opções para a "*wavelet* mãe" bem como os níveis de decomposição
- Neste exemplo foi utilizada a wavelet db3 e sete níveis de decomposição



- A potência dos sinais reconstruídos em diferentes níveis tem significados fisiológicos importantes
- Em um sinal de EEG, um componente de baixa frequência muito forte (segundo gráfico a partir do topo) identifica que o paciente pode estar dormindo ou prestes a adormecer

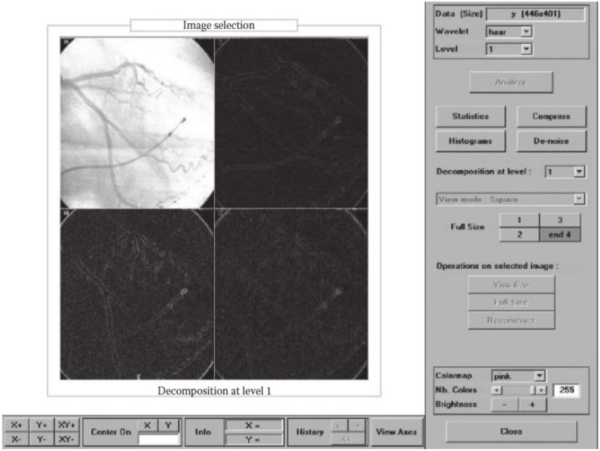
- A idéia básica do WT 1-D pode ser estendida para o espaço bidimensional (2-D)
- Essa extensão pode ser feita em ambientes contínuos e discretos
- A abordagem adotada aqui para descrever a DWT 2-D é baseada nos principais conceitos descritos para a DWT 1-D

- A DWT 2-D pode ser facilmente descrita e implementada usando o diagrama de blocos abaixo, que aplica os princípios e operações da DWT 1-D

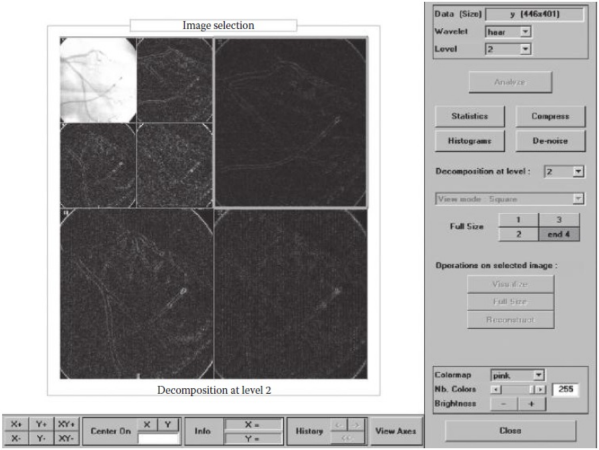


Exemplo:

- A imagem a ser analisada é uma imagem digital das artérias coronárias capturadas durante uma angiografia



- A figura abaixo mostra a decomposição da imagem no segundo nível
- Os componentes de segundo nível fornecem uma resolução mais alta na do conteúdo da imagem em cada direção e, portanto, podem capturar informações mais detalhadas sobre a imagem



- Principais aplicações da DWT em processamento de sinais e imagens em biomédica são:
  - Filtragem
  - Redução de ruído
  - Compressão
  - Extração de características

Filtragem e Redução de Ruído

- É comum o ruído existir em altas frequências (ou seja, escalas baixas) de sinais e imagens
  - Por exemplo, desvios eletromagnéticos que aparecem nos fios e eletrodos são ruídos de alta frequência
- É desejável filtrar esse ruído e extrair a parte informativa dos sinais gravados
- Dois tipos principais de denoising baseado em DWT são usados no processamento de sinal:
  - Limiar rígido
    - Todos os coeficientes de alguns níveis particulares de decomposição inferiores a um limiar são definidos como zero, e os coeficientes restantes são utilizados para a reconstrução do sinal
  - Limiar suave
    - todos os coeficientes abaixo do limiar são eliminados, no entanto, todos os outros coeficientes também são ajustados pelo valor limite

- O processo de compressão usando DWT é muito semelhante ao denoising:
  - Primeiro: sinal ou a imagem é decomposto em seus coeficientes DWT e, em seguida, os coeficientes inferiores a um valor limite são eliminados
  - Segunda regra: como o ruído geralmente corrompe os componentes de alta frequência, eliminando os componentes de frequência muito alta, as informações úteis em um sinal não mudam consideravelmente.
  - A terceira regra para compactação afirma que componentes de frequência muito baixa podem não conter informações vitais e seus coeficientes correspondentes podem ser eliminados ou reduzidos no processo de compactação

Exemplo:
Como mencionado anteriormente, na decomposição da imagem, a componente passa-baixa requer apenas 25% do espaço de armazenamento para fornecer uma versão quase idêntica da imagem original. A decomposição de segundo nível da imagem foi mostrada no slide seguinte. Como mostrado, a componente passa-baixa, embora possua apenas 6,25% da imagem original, ainda fornece uma aproximação aceitável da imagem original. Essas observações demonstram os recursos da DWT em aplicações de compactação. É por isso que as versões mais recentes das tecnologias de compactação de imagem, como alguns padrões JPEG, aplicam DWT à compactação.