Máxima Verossimilhança Distribuição Pareto

Pedro Henrique S. Ponte

Temos que nossa função densidade probabilidade é dada por,

Parametros $\begin{cases} \alpha - \text{alfa} \\ \theta - \text{theta} \end{cases}$

$$f(x_i;\alpha,\theta) = \frac{\alpha\,\theta^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}} \quad , \quad x_i \geq \theta,\ \alpha,\theta > 0 \quad (FDP)$$

Seja $X = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$, Temos:

$$L(\alpha,\theta;X) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha\,\theta^{\alpha}}{x_i^{\alpha+1}} = (\alpha^{n}\theta^{n\alpha}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^{\alpha+1}} = (\alpha^{n}\theta^{n\alpha}) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{-(\alpha+1)}$$

. Aplicando logaritmo para facilitar as contas:

$$\ln L(\alpha,\theta;X) = \boxed{n.\ln\alpha + n\alpha\ln\theta - (\alpha+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)} = L^{*}(\alpha,\theta,X)$$

. calculando derivada parcial:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{d\alpha} = 0 \\[2ex] \dfrac{dL}{d\theta} = 0 \end{cases}$$

↳ calculando em relação a α; usando propriedade $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$$\frac{dL}{d\alpha} = n.\frac{1}{\alpha} + n\ln\theta - \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$= \boxed{\frac{n}{\alpha} + n\ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

↳ Igualando zero:

$$\frac{n}{\alpha} + n\ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = 0$$

$$\frac{n}{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln\theta$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln\theta}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln\theta}} \leftarrow \text{2º parametro}$$

(*) Para θ, podemos ter outra abordagem. Sabemos que por definição $x_i \geq \theta$ para todo i. É possível observar o único termo que depende de θ é $\ln\theta$. Logo, quanto maior θ, maior o valor da função L^{*}. Então, para que se mantenha que $x_i \geq \theta$, usamos:

$$\boxed{\theta = \min x_i}$$

↑ 1º parametro

∴ Assim, obtemos os melhores parametros

$$\begin{cases} \theta^{*} = \min x_i \\[1ex] \alpha^{*} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln(\theta^{*})} \end{cases}$$