

Introdução ao Controle no Espaço de Estados

Prof. Luciano Frezzatto

Capítulo 1

Introdução

Entre as décadas de 1940 e 1960, diversos avanços em engenharia de controle foram alcançados a partir de abordagens de projeto de controladores via lugar das raízes, diagramas de Bode e de Nyquist e carta de Nichols. Todas essas metodologias estão baseadas na descrição de sistemas dinâmicos por meio de funções de transferência, associando diretamente as variáveis de entrada e as variáveis de saída do sistema. Devido às funções de transferência estarem intrinsecamente relacionadas às características de resposta em frequência de sistemas dinâmicos, as abordagens listadas previamente são ditas abordagens no domínio da frequência.

Com a corrida espacial que acontecera entre o final da década de 1950 e meados da década de 1970, novos avanços foram obtidos na área de engenharia de controle, ocasionados, sobretudo, pelo desenvolvimento da chamada *Teoria de Variáveis de Estado*. Nessa teoria os sistemas dinâmicos são descritos por meio de equações diferenciais, as quais têm a variável tempo como variável independente. Por isso, essa abordagem é dita ser no domínio do tempo.

O *estado* de um sistema dinâmico é um conjunto de quantidades físicas que caracterizam totalmente o comportamento do sistema em qualquer instante de tempo. Usualmente, as variáveis de estado estão intimamente relacionadas à energia interna armazenada nos componentes físicos de um sistema. Assim, explicitar essas variáveis durante o processo de análise e projeto de controladores foi de suma importância para atender requisitos de desempenho mais exigentes, como, por exemplo, minimizar a energia consumida pelo sistema controlado.

Por razões históricas, as abordagens no domínio da frequência são denominadas como *Teoria de Controle Clássico*, ao passo que a abordagem no espaço de estados é dita *Teoria de Controle Moderno*. No entanto, devido a todas as abordagens estarem presentes na literatura há pelo menos 50 anos, atualmente, elas são referidas somente como métodos frequenciais e métodos no espaço de estados.

Existem diversas razões para estudar sistemas dinâmicos descritos no espaço de estados. Destacam-se dentre as quais:

- Estudar modelos mais gerais – sistemas MIMO (*Multi Input Multi Output*), não lineares e variantes no tempo.
- Introduzir noções de geometria em equações diferenciais.
- Conectar as descrições interna e externa – a forma no espaço de estados evidencia o comportamento interno do sistema.
- Facilidade para a utilização de técnicas computacionais.

Ao longo deste curso são estudados, principalmente, sistemas lineares e invariantes no tempo SISO (*Single Input Single Output*).

1.1 Descrição de sistemas no espaço de estados

O comportamento de qualquer sistema dinâmico pode ser expresso como um conjunto de EDOs de primeira ordem. Essa maneira de se descrever o sistema é, frequentemente, referida como representação por variáveis de estado. De forma genérica, o comportamento de um sistema dinâmico é descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\ y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + du(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

com condições iniciais $x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)$. As variáveis envolvidas no sistema de equações (1.1) são denominadas:

- $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$: variáveis de estado.
- $u(t)$: variável de entrada.
- $y(t)$: variável de saída.
- t : variável independente tempo.

Alternativamente, o sistema de equações (1.1) pode ser reescrito em formato compacto utilizando notação matricial

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

com

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \\ C &= [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n], \quad D = d,\end{aligned}$$

sendo $x(t)_{n \times 1}$ o vetor de estados, $x(0)_{n \times 1}$ o vetor de condições iniciais, $A_{n \times n}$ a matriz dinâmica do sistema, $B_{n \times 1}$ a matriz de entrada, $C_{1 \times n}$ a matriz de saída e $D_{1 \times 1}$ o ganho de transmissão direta da entrada para a saída. A Figura 1.1 apresenta o diagrama de blocos do sistema (1.2).

Exemplo 1.1. Considere o deslocamento $y(t)$ de saída decorrente da força $u(t)$ de entrada, aplicada ao sistema mecânico com massa M , mola com constante k e amortecedor de constante b apresentado na Figura 1.2. O solo é suposto perfeitamente liso e sem atrito.

Aplicando a segunda lei de Newton ao corpo de massa M , obtém-se a seguinte equação diferencial que descreve a dinâmica do sistema¹

$$M\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u.$$

Isolando \ddot{y} do lado esquerdo, tem-se

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}u - \frac{b}{M}\dot{y} - \frac{k}{M}y$$

¹Neste ponto, e em diversos outros lugares, a dependência explícita da variável t é omitida por brevidade.

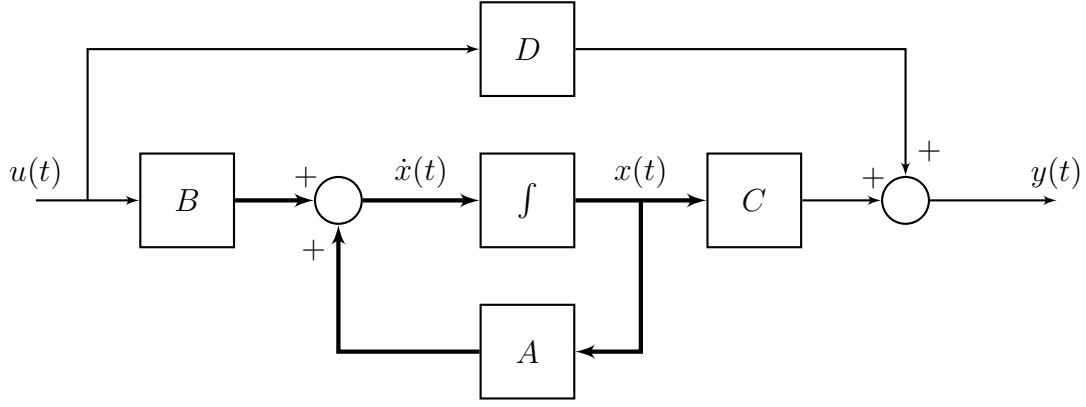


Figura 1.1: Diagrama de blocos de um sistema em variáveis de estado.

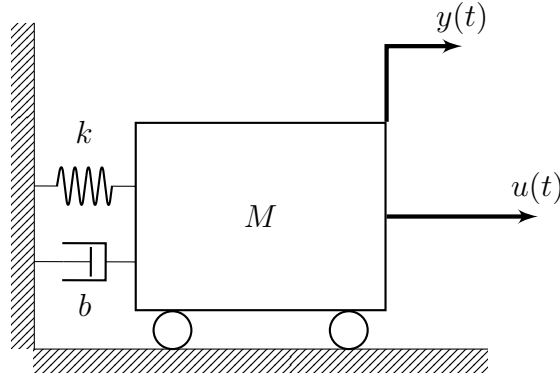


Figura 1.2: Sistema massa-mola-amortecedor.

e escolhendo as variáveis de estado como $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, chega-se a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}u - \frac{b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1\end{aligned}\tag{1.3}$$

que pode ser escrito na forma matricial segundo

$$\begin{aligned}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u(t)\end{aligned}$$

Para concluir este exemplo, na Figura 1.3 é apresentado o diagrama de blocos que descreve a dinâmica do sistema massa-mola-amortecedor.

Exemplo 1.2. Considere o circuito RLC paralelo, apresentado na Figura 1.4, no qual a entrada é a fonte de corrente $i(t)$ e a saída é a corrente $i_L(t)$ no indutor.

Pela lei de Kirchhoff das correntes tem-se que

$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) = i(t).$$

Sabendo que $i_R = \frac{v}{R}$, $i_C = C \frac{dv}{dt}$ e $v = L \frac{di_L}{dt}$, chega-se a

$$\frac{L}{R} \frac{di_L}{dt} + i_L + CL \frac{d^2 i_L}{dt^2} = i.$$

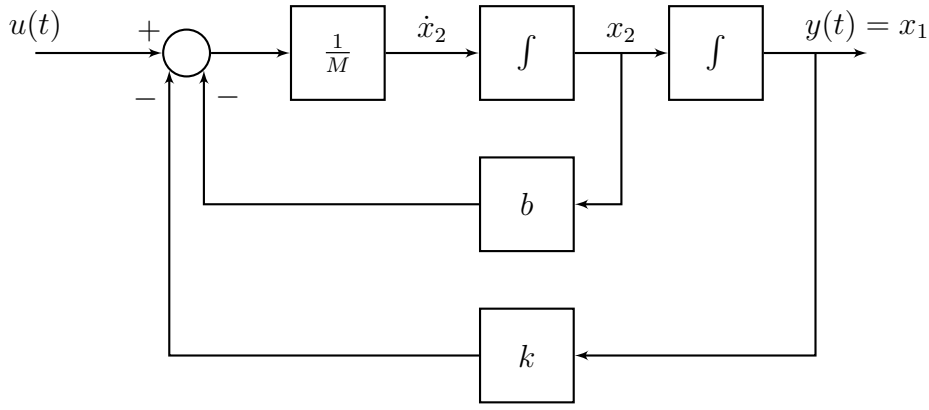


Figura 1.3: Diagrama de blocos para o sistema massa-mola-amortecedor.

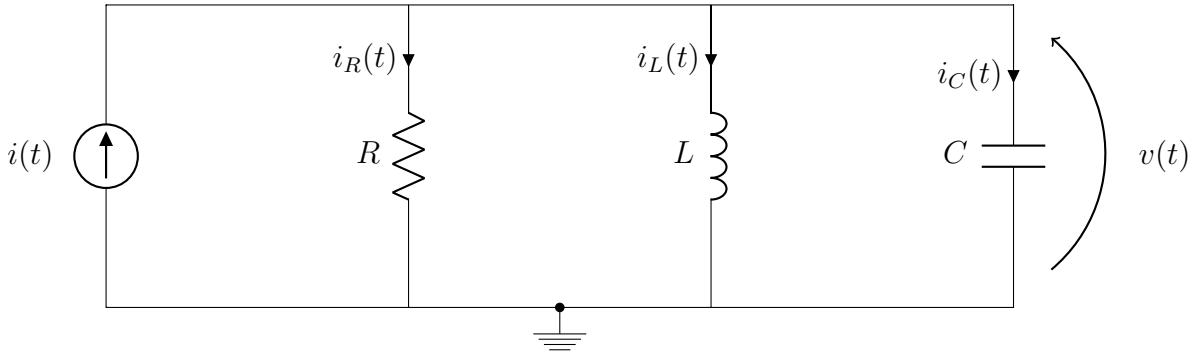


Figura 1.4: Circuito RLC paralelo.

Isolando a derivada de maior ordem do lado esquerdo da equação e rearranjando, obtém-se

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = \frac{1}{LC} i - \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} - \frac{1}{LC} i_L.$$

Definindo, então, as variáveis de estado $x_1 = i_L$ e $x_2 = \frac{di_L}{dt}$ tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{LC} u - \frac{1}{RC} x_2 - \frac{1}{LC} x_1 \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma matricial segundo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}}_B u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u(t)$$

Por fim, a Figura 1.5 mostra o diagrama de blocos referente a equação dinâmica do circuito RLC estudado.

Observação 1.1. É importante notar que as escolhas das variáveis de estado nos Exemplos 1.1 e 1.2 não são únicas. Ao longo do curso será mostrado que, por meio de transformações de similaridade, inúmeras representações distintas podem ser obtidas.

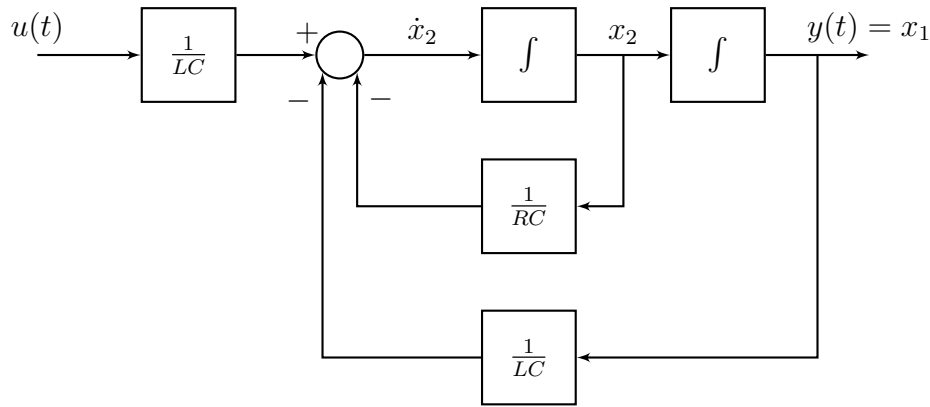


Figura 1.5: Diagrama de blocos para o circuito RLC paralelo.

1.2 Modelagem Matemática

Modelos matemáticos são sempre idealizações dos sistemas reais, válidos somente para excitações dentro de certos limites de amplitude e de frequência. A construção de um modelo matemático normalmente baseia-se em quatro atributos:

- Leis básicas;
- Simplicidade;
- Precisão;
- Validação.

Os três primeiros atributos podem ser adotados com o intuito de atender ao último. Note que particular cautela deve ser adotada para aplicar as leis básicas que regem o comportamento de um fenômeno físico. As hipóteses para aplicação de cada uma delas devem ser absolutamente observadas. A seguir destacam-se alguns fenômenos físicos e leis básicas que podem ser utilizadas para modelá-los:

- Processos mecânicos: Leis de Newton;
- Eletricidade: Leis de Kirchhoff;
- Processos químicos e térmicos: Leis da termodinâmica;
- Processos fluidicos: Leis da mecânica dos fluidos.

É claro que um sistema dinâmico pode conter um ou mais fenômenos físicos envolvidos. Por exemplo, um motor de corrente contínua engloba os fenômenos elétrico (acionamento do motor) e mecânico (rotação de seu eixo).

Particular enfoque será dado aos sistemas elétricos e mecânicos ao longo do curso.

1.2.1 Sistemas Mecânicos

Para tornar a elaboração de um modelo matemático mais simples, os seguintes passos podem ser considerados:

- Decompor o sistema em partes, identificando as interações entre elas (forças e momentos).
- Identificar e modelar forças externas.

- Assumir como dissipativas as forças produzidas por dispositivos básicos (molas e amortecedores) segundo os referenciais inerciais adotados.
- Adotar o Princípio de D'Alembert que afirma:

Em cada instante de tempo, incluída a força (torque) de inércia como dissipativa, a resultantes das forças (torques) que agem no centro de massa (rotação) é nula.

Para ilustrar o processo de obtenção de modelos matemáticos, considere os seguintes três exemplos para mecânicas translacionais, rotacionais e ambas.

Exemplo 1.3 (Mecânica Translacional). Neste exemplo é analisado o sistema de suspensão ativa veicular, cujos principais objetivos são minimizar distúrbios externos frutos de irregularidades no solo e maximizar o conforto dos ocupantes do veículo. Para iniciar o modelamento, considere o modelo de um quarto de veículo apresentado na Figura 1.6.

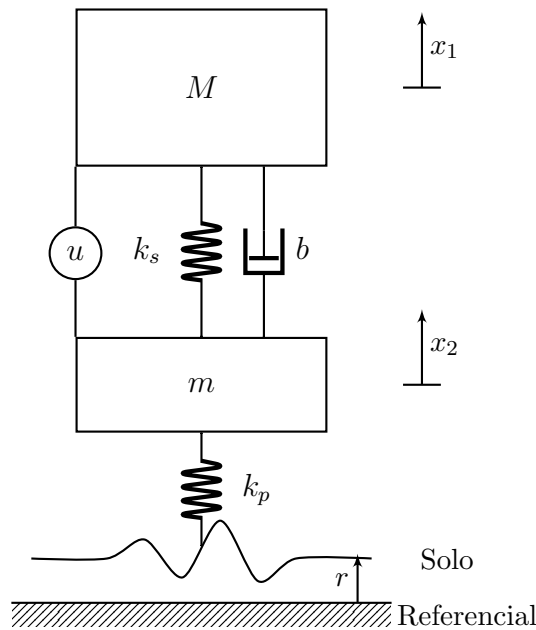


Figura 1.6: Modelo de um quarto de carro.

Os parâmetros dados na figura são os seguintes:

- M – porção da massa do veículo.
- m – massa do conjunto da roda.
- k_s – coeficiente de amortecimento da suspensão.
- k_p – coeficiente de amortecimento do pneu.
- b – coeficiente de atrito viscoso.
- u – atuador.

O primeiro passo é desenhar o diagrama de corpo livre de cada uma das massas e, em seguida, identificar as forças atuantes, como mostrado na Figura 1.7.

As equações que descrevem o comportamento das massas são, portanto,

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_s(x_1 - x_2) &= u \\ m\ddot{x}_2 + b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_s(x_2 - x_1) + k_p(x_2 - r) + u &= 0 \end{aligned}$$

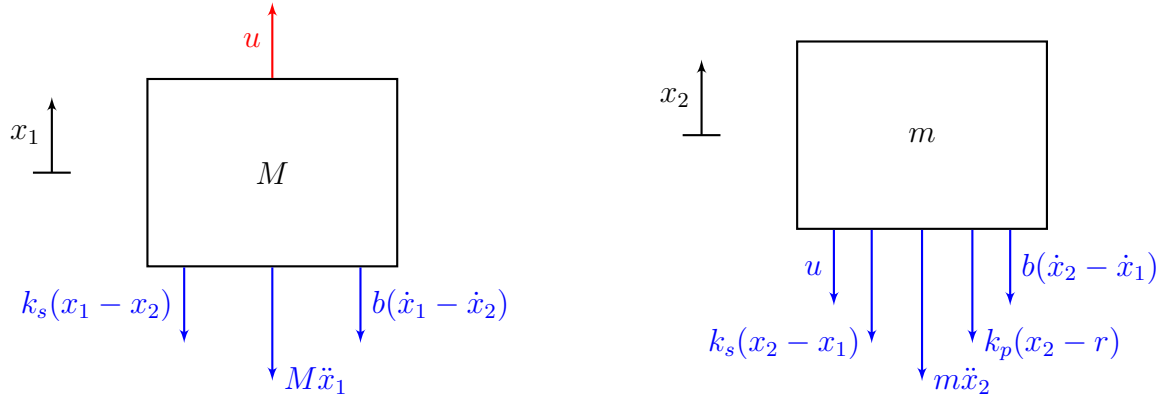


Figura 1.7: Diagramas de corpo livre para o sistema de suspensão ativa.

Definindo as variáveis de estado $v_1 = x_1$, $v_2 = \dot{x}_1$, $v_3 = x_2$ e $v_4 = \dot{x}_2$, o modelo correspondente no espaço de estados é dado por

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \\ \dot{v}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{k_s}{M} & \frac{b}{M} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{k_s+k_p}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} r \quad (1.4)$$

Exemplo 1.4. Neste exemplo é analisado o comportamento de um sistema de transmissão por correia, similar aos utilizados em motores de automóveis. O esquemático desse sistema é apresentado na Figura 1.8, sendo J_1 e J_2 as inércias de cada engrenagem, r_1 e r_2 seus raios e ω_1 e ω_2 as velocidades angulares de rotação das engrenagens. Ambas as engrenagens são conectadas por uma correia, de maneira que, ao se aplicar um torque de intensidade τ na engrenagem 1, a sua rotação produz uma rotação proporcional na engrenagem 2. As tensões nos pontos de contato da correia com as engrenagens são dadas por f_1 e f_2 e não há escorregamentos.

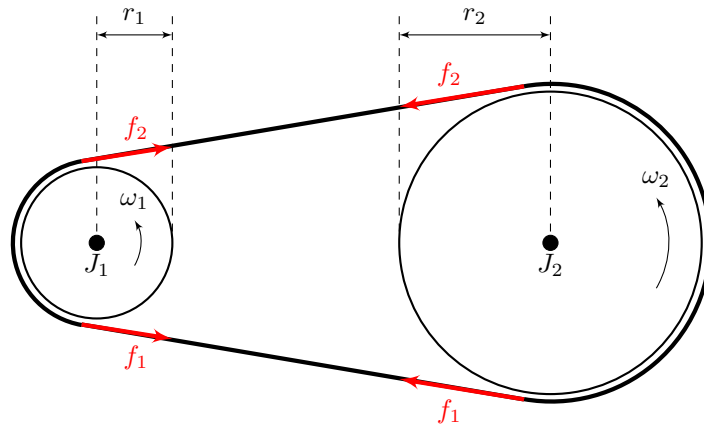


Figura 1.8: Sistema de transmissão por correia.

Para se obter um modelo desse sistema, primeiramente considere os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 1.9.

A partir dos diagramas apresentados, as equações que descrevem o movimento das duas engrenagens são

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + f_2 r_1 - f_1 r_1 &= \tau \\ J_2 \dot{\omega}_2 + f_1 r_2 - f_2 r_2 &= 0 \end{aligned}$$



Figura 1.9: Diagramas de corpo livre para o sistema de transmissão por correia.

Caso queiramos analisar o movimento da engrenagem 2 em função do torque de entrada τ aplicado à engrenagem 1, combinamos ambas as equações, eliminando f_1 , f_2 e ω_1 das relações. Assim, chega-se ao seguinte modelo

$$(J_1 r_2^2 + J_2 r_1^2) \dot{\omega}_2 = r_1 r_2 \tau.$$

Exemplo 1.5. Considere um pêndulo invertido de massa m e comprimento 2ℓ preso sobre um carrinho de massa M que trafega sobre uma superfície com coeficiente de atrito b , como ilustrado na Figura 1.10. A força u atua no carrinho de maneira a manter o pêndulo na posição vertical.

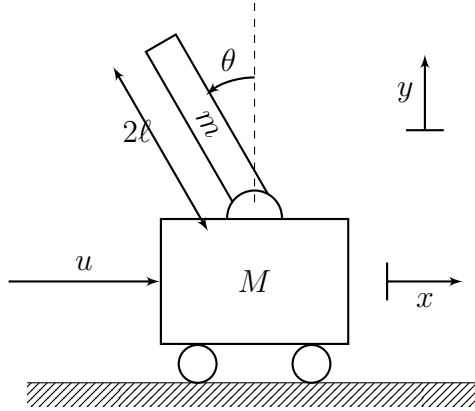


Figura 1.10: Sistema pêndulo invertido sobre carro.

O modelo para o sistema da Figura 1.10 pode ser obtido por meio do princípio de D'Alembert. Considere, portanto, os diagramas de corpo livre apresentados na Figura 1.11.

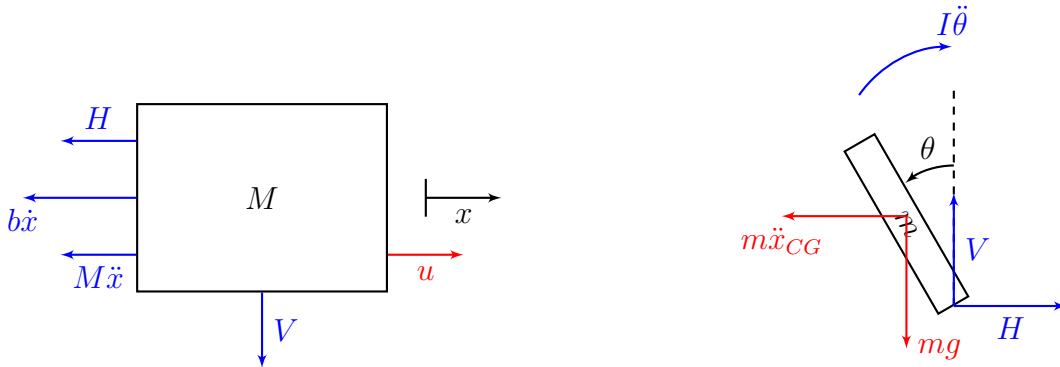


Figura 1.11: Diagramas de corpo livre para o pêndulo invertido sobre um carrinho.

Definindo as coordenadas do centro de gravidade (CG) da haste como

$$x_{CG} = x + \ell \sin \theta, \quad y_{CG} = \ell \cos \theta$$

tem-se que o movimento rotacional da haste em torno do CG é dado por

$$I\ddot{\theta} + H\ell \cos \theta = V\ell \sin \theta. \quad (1.5)$$

O movimento horizontal do CG do pêndulo é

$$H = m\ddot{x}_{CG} = m\frac{d^2}{dt^2}(x + \ell \sin \theta) \quad (1.6)$$

e o movimento vertical do CG é

$$V = mg + m\ddot{y}_{CG} = mg + m\frac{d^2}{dt^2}(\ell \cos \theta). \quad (1.7)$$

Por fim, o movimento horizontal do carrinho é descrito por

$$M\ddot{x} + b\dot{x} + H = u. \quad (1.8)$$

Substituindo, então H e V dados, respectivamente, nas Equações (1.6) e (1.7) em (1.5) e (1.8) e expandindo, temos que

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + m(\ddot{x} - \ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell\ddot{\theta} \cos \theta)\ell \cos \theta &= m\ell^2(-\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta)\sin \theta + mg\ell \sin \theta \\ (I + m\ell^2)\ddot{\theta} + m\ell\ddot{x} \cos \theta - mg\ell \sin \theta &= 0 \\ M\ddot{x} + b\dot{x} + m(\ddot{x} - \ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ell\ddot{\theta} \cos \theta) &= u \\ (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - m\ell\dot{\theta}^2 \sin \theta + m\ell\ddot{\theta} \cos \theta &= u \end{aligned}$$

As equações em destaque acima configuram um modelo não linear para o sistema estudado. No próximo capítulo veremos como obter um modelo linear para o pêndulo invertido em torno de seus pontos de equilíbrio.

1.2.2 Sistemas Elétricos

NO caso de sistemas elétricos, a modelagem é feita, sobretudo, utilizando as Leis de Kirchhoff, também conhecidas como Lei das Malhas e Lei dos Nós, as quais são enunciadas como a seguir:

- **Lei de Kirchhoff das correntes (Lei dos Nós):** A soma algébrica das correntes deixando um nó é igual à soma algébrica das correntes que entram nesse nó.
- **Lei de Kirchhoff das tensões (Lei das Malhas):** A soma algébrica das tensões tomadas em torno de um caminho fechado em um circuito é zero.

Os dois exemplos apresentados ilustram a utilização de cada uma dessas metodologias.

Exemplo 1.6. Considere o circuito em ponte-T apresentado na Figura 1.12. Esse circuito é alimentado por uma tensão de entrada $v_i(t)$ e deseja-se medir a tensão de saída $v_o(t)$. Neste exemplo é utilizada a Lei das Malhas para equacionamento do circuito.

Sejam as correntes i_1 , i_2 e i_3 definidas de modo arbitrário. As equações do circuito são:

$$\begin{aligned} -v_i + R_1(i_1 - i_3) + v_{C_1} &= 0 \\ -v_{C_1} + R_2(i_2 - i_3) + v_o &= 0 \\ v_{C_2} + R_2(i_3 - i_2) + R_1(i_3 - i_1) &= 0 \\ i_2 = 0, \quad i_1 = C_1 \frac{dv_{C_1}}{dt}, \quad i_3 = C_2 \frac{dv_{C_2}}{dt} \end{aligned}$$

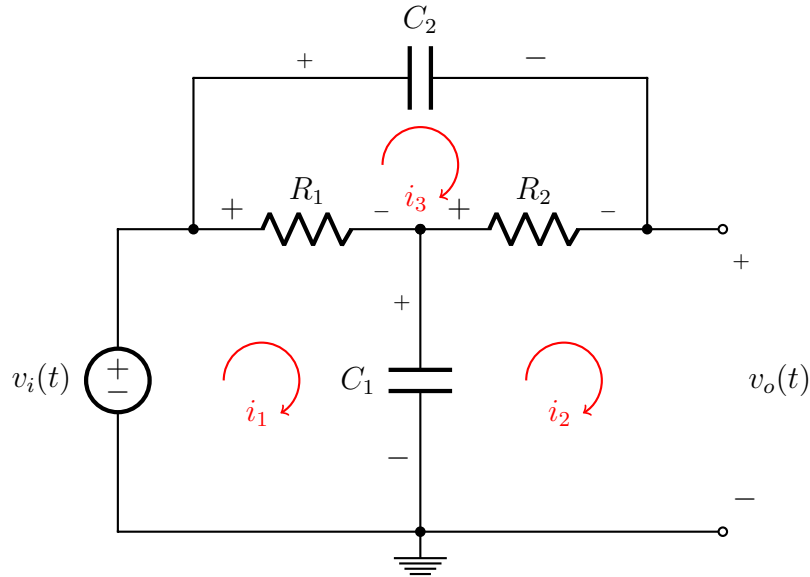


Figura 1.12: Circuito em ponte-T.

Escolhendo as variáveis de estados como as tensões nos capacitores, uma representação do modelo do sistema no espaço de estados é tal que

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_1}}{dt} \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \frac{1}{C_1} & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{1}{C_1} \\ -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} v_i$$

$$v_o = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} - v_i$$

Exemplo 1.7. A Figura 1.13 apresenta um circuito com amplificador operacional, cujo ganho é suposto infinito. Nessa configuração as tensões v_1 e v_2 em suas entradas podem ser consideradas iguais (terra virtual).

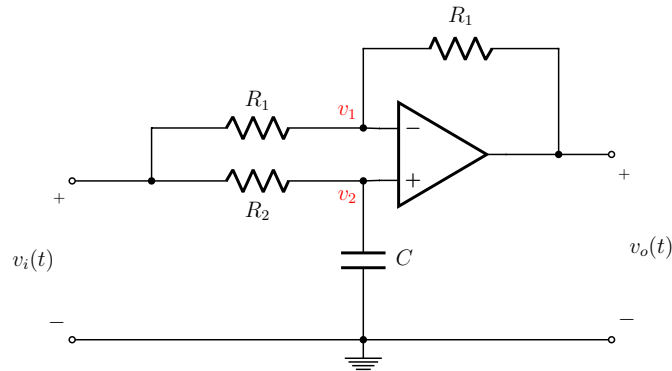


Figura 1.13: Circuito com amplificador operacional.

Aplicando a Lei dos Nós, as equações que descrevem o comportamento do circuito são:

$$\begin{aligned} \frac{v_i - v_1}{R_1} + \frac{v_o - v_1}{R_1} &= 0 \\ \frac{v_i - v_2}{R_2} - C \frac{dv_2}{dt} &= 0 \\ v_1 &= v_2 \end{aligned}$$

Escolhendo a tensão no capacitor como a variável de estado de interesse, o modelo no espaço de estados do sistema é

$$\begin{aligned}\frac{dv_2}{dt} &= \left[-\frac{1}{R_2 C} \right] v_2 + \left[\frac{1}{R_2 C} \right] v_i \\ v_o &= 2v_2 - v_i\end{aligned}$$

Capítulo 2

Variáveis de Estado

2.1 Pontos de Equilíbrio e Linearização

Como mencionado anteriormente, uma das vantagens da representação no espaço de estados é a possibilidade de estudar modelos mais gerais de EDOs. Um sistema dinâmico qualquer pode ser descrito em termos de variáveis de estado como

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

sendo $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ funções que dependem dos estados $x(t)$, da entrada $u(t)$ e do tempo t . Note que a Equação (1.2) é um caso particular da Equação (2.1).

As trajetórias $x(t)$, soluções de (2.1), são univocamente determinadas a partir da condição inicial $x(0)$ e da entrada $u(t)$ do sistema.

Para sistemas dinâmicos que não exibem comportamento linear, a determinação das trajetórias $x(t)$ no espaço de estados e análise de seu comportamento dinâmico, apesar de possível, requer ferramental e conceitos mais avançados. Não obstante, pode-se analisar o comportamento de tais sistemas na vizinhança de certos pontos especiais, chamados *pontos de equilíbrio*. O principal interesse de se analisar sistemas não lineares no entorno dos pontos de equilíbrio se deve ao fato de que esses sistemas, usualmente, apresentam comportamentos lineares nessas regiões. Portanto, dado um ponto de equilíbrio do sistema não linear, é possível determinar um modelo linearizado do sistema no entorno desse ponto e, conseqüentemente, ferramentas para análise de sistemas lineares podem ser empregadas.

Definição 2.1 (Pontos de Equilíbrio). Os pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico correspondem aos pontos nos quais a dinâmica do sistema permanece estacionária para todo instante de tempo uma vez inicializada sobre tais pontos.

Em termos matemáticos, os pontos de equilíbrio correspondem aos pontos de derivada nula do sistema dinâmico, ou seja,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = 0.$$

Note que o conjunto de equações acima deve ser resolvido simultaneamente para x_e e u_e .

Exemplo 2.1 (Oscilador de Lorenz). O sistema de equações abaixo foi proposto por Edward N. Lorenz, em 1963, para descrever comportamentos atmosféricos.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3\end{aligned}$$

A variável x_1 está relacionada à velocidade das correntes de ar e as variáveis x_2 e x_3 estão associadas às temperaturas. As constantes positivas são o número de Rayleigh ρ , o número de Prandtl σ e uma razão β . Determine os pontos de equilíbrio desse sistema.

Solução: Fazendo

$$\begin{bmatrix} \sigma(x_2 - x_1) \\ \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\ x_1 x_2 - \beta x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1(\rho - 1 - x_3) \\ x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ \beta x_3 \end{bmatrix}$$

e, portanto, os pontos de equilíbrio são $(x_{1e}^1, x_{2e}^1, x_{3e}^1) = (0, 0, 0)$, $(x_{1e}^2, x_{2e}^2, x_{3e}^2) = (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ e $(x_{1e}^3, x_{2e}^3, x_{3e}^3) = (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$.

A linearização de um sistema não linear em torno de um ponto de equilíbrio pode ser feita utilizando uma aproximação de primeira ordem do sistema. Tal aproximação pode ser feita por meio da série de Taylor (truncando no elemento de primeira ordem da expansão) ou por meio da matriz Jacobiana, como enunciado na próxima definição.

Definição 2.2. Uma aproximação de primeira ordem do sistema (2.1), em torno de um ponto de equilíbrio, pode ser obtida por meio do jacobiano com as seguintes definições para as matrizes do sistema (1.2):

$$A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{x_e, u_e}, \quad B = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \Big|_{x_e, u_e}, \quad C = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \Big|_{x_e, u_e}, \quad D = \left[\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right] \Big|_{x_e, u_e}.$$

Exemplo 2.2 (Lotka-Volterra). O modelo Lotka-Volterra descreve, de maneira bastante simplificada, a relação entre a quantidade de predadores x_1 e de presas x_2 em um habitat com disponibilidade infinita de alimento para as presas. Esse modelo é chamado muitas vezes de modelo presa-predador.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= bx_1x_2 - ax_1 \\ \dot{x}_2 &= cx_2 - dx_1x_2 \end{aligned}$$

Os parâmetros a , b , c e d são positivos e representam a taxa de morte dos predadores, a taxa de incremento dos predadores (devido a encontros com as presas), a taxa de incremento das presas (na ausência de predadores) e a taxa de morte das presas (devido a encontros com predadores), respectivamente. Um exemplo da interação entre as populações de presas e de predadores é apresentado na Figura 2.1.

Os pontos de equilíbrio desse sistema são $(0, 0)$ (extinção de ambas as populações) e $(c/d, a/b)$. O jacobiano do sistema é dado por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a + bx_2 & bx_1 \\ -dx_2 & c - dx_1 \end{bmatrix}.$$

No ponto $(0, 0)$, o sistema linearizado é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que corresponde a dois sistemas de primeira ordem desacoplados (não há interações entre predadores e presas). O primeiro decresce exponencialmente (morte dos predadores) e o segundo cresce exponencialmente (aumento descontrolado das presas).

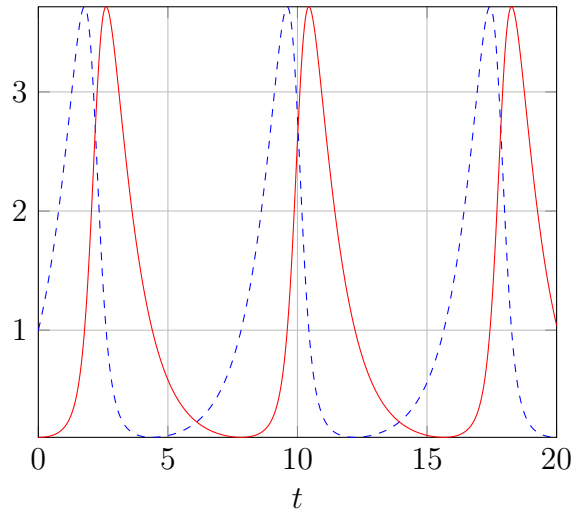


Figura 2.1: Comportamento das populações de predadores (curva contínua) e de presas (curva tracejada) segundo o modelo de Lotka-Volterra.

Por sua vez, no ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$ tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{bc}{d} \\ -\frac{ad}{b} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

indicando que as populações apresentam comportamento oscilatório em torno do ponto de equilíbrio.

Definição 2.3 (Espaço de fases). É a representação espacial das trajetórias de um sistema dinâmica em coordenadas de variáveis de estado, tendo como variável implícita o tempo. Um caso particular é o plano de fases quando somente duas variáveis de estado são representadas.

Exemplo 2.3. Seja o sistema de Lotka-Volterra introduzido no Exemplo 2.2. Assumindo que todos os parâmetros do sistema sejam iguais a 1, as trajetórias no plano de estados são apresentadas na Figura 2.2 para diferentes condições iniciais.

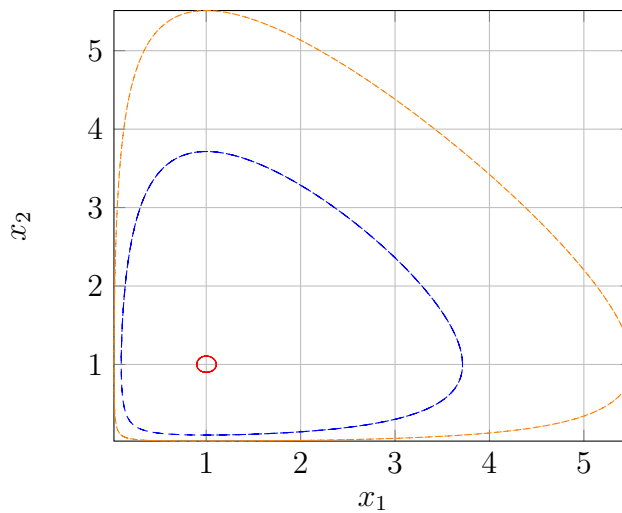


Figura 2.2: Planos de fase para o modelo de Lotka-Volterra considerando condições iniciais $(0.1, 1)$ (curva tracejada), $(0.9, 1.1)$ (curva contínua) e $(0.1, 0.1)$ (curva ponto-tracejada).

2.2 Equações Diferenciais no Espaço de Estados

Algumas representações em variáveis de estado, ditas canônicas, podem ser obtidas por inspeção direta da equação diferencial. Três casos distintos podem ser elucidados com respeito à existência de derivadas da entrada do sistema. Contudo, antes de apresentar cada um dos casos, faz-se a introdução do operador p .

Definição 2.4 (Operador p). Para sistemas contínuos, o operador p equivale à derivada do sinal que o acompanha e o operador p^{-1} equivale à integral. De forma similar, para sistemas discretos, o operador p equivale a um avanço, ao passo que p^{-1} corresponde a um atraso.

Exemplo 2.4. Considere o sistema de quarta ordem descrito pela equação diferencial

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 16\ddot{y} + 24\dot{y} + 16y = \ddot{u} + 6\dot{u} + 9u.$$

Essa equação pode ser reescrita de forma algébrica utilizando o operador p como segue

$$(p^4 + 6p^3 + 16p^2 + 24p + 16)y = (p^2 + 6p + 9)u$$

$$D(p)y = N(p)u$$

2.2.1 Equação Diferencial sem Derivada da Entrada

Seja a equação diferencial

$$D(p)y = \beta_0 u, \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k$$

com $\alpha_m = 1$, α_k e β_0 constantes.

Definindo

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_m = y^{(m-1)}$$

como as variáveis de estado, tem-se

$$\dot{x}_m = y^{(m)} = - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x_{k+1} + \beta_0 u$$

ou, em notação matricial como em (1.2),

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] x + [0] u$$

A estrutura particular da matriz A recebe o nome de forma companheira.

Exemplo 2.5. Encontre a representação no espaço de estados e o correspondente diagrama de blocos da equação diferencial

$$(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)y = 6u.$$

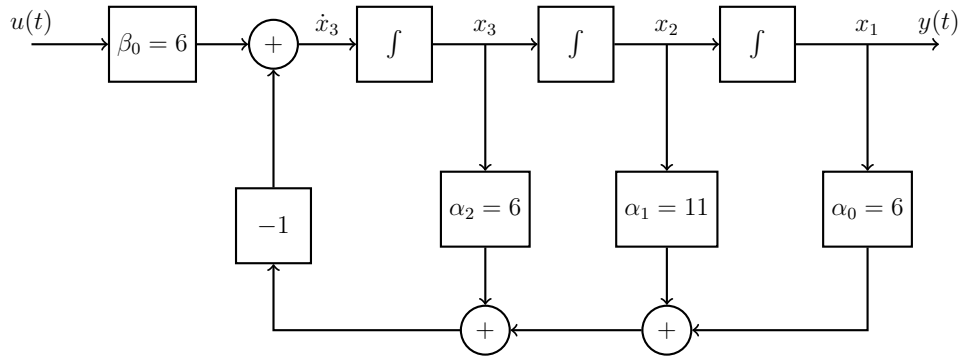


Figura 2.3: Diagrama de blocos de um sistema de terceira ordem.

Solução: Definindo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, tem-se

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

e o diagrama de blocos correspondente é apresentado na Figura 2.3.

2.2.2 Equação Diferencial com Derivada da Entrada – Caso Estritamente Próprio

Considere a equação diferencial estritamente própria

$$D(p)y = N(p)u, \quad D(p) = \sum_{k=0}^m \alpha_k p^k, \quad N(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^k,$$

sendo $\alpha_m = 1$ e os demais coeficientes constantes, uma representação no espaço de estados desse sistema é obtida da seguinte maneira:

- Defina $y = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k x_{k+1}$.
- Escolha as variáveis de estado tais que

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dots, \dot{x}_{m-1} = x_m, \dot{x}_m = \zeta \\ x_m &= p^{-1}\zeta, x_{m-1} = p^{-2}\zeta, \dots, x_2 = p^{-m+1}\zeta, x_1 = p^{-m}\zeta \end{aligned}$$

- Assim, $y = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k p^{k-m}\right) \zeta$.
- Tomando a equação diferencial $D(p)y = N(p)u$ e comparando com a equação acima, tem-se que

$$\left(\sum_{k=0}^m \alpha_k p^{k-m}\right) \zeta = u \Rightarrow \zeta = \dot{x}_m = -\left(\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x_{k+1}\right) + u.$$

- Portanto, combinando as relações apresentadas, chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [\beta_0 \ \beta_1 \ \dots \ \beta_{m-1}] x + [0] u. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A estrutura da representação de estados na Equação (2.2) é chamada de *forma canônica controlável*.

Exemplo 2.6. Considere o sistema estritamente próprio

$$D(p)y = N(p)u \Rightarrow (p^3 + p^2 + 2p - 4)y = (p^2 + 5p)u.$$

Tome

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_3 = 0x_1 + 5x_2 + x_3$$

e defina as variáveis de estado

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \zeta \Rightarrow x_3 = p^{-1}\zeta, x_2 = p^{-2}\zeta, x_1 = p^{-3}\zeta$$

resultando em

$$y = 0x_1 + 5x_2 + x_3 = (0p^{-3} + 5p^{-2} + p^{-1})\zeta.$$

Tomando a equação diferencial $D(p)y = N(p)u$, substituindo a relação anterior e fazendo as mudanças pertinentes, tem-se que

$$\zeta = \dot{x}_3 = -(\alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_3) + u = -(-4x_1 + 2x_2 + x_3) + u.$$

Logo a representação em espaço de estados desse sistema é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \quad 5 \quad 1] x + [0] u. \end{aligned}$$

O diagrama de blocos dado na Figura 2.4 apresenta a realização do sistema em espaço de estados.

Observação 2.1. Uma forma simples de construir a representação no espaço de estados de uma equação diferencial estritamente própria é definir uma matriz A de ordem igual a ordem da equação, cujas primeiras $m - 1$ linhas possuem a estrutura de uma diagonal de uns e a m -ésima linha contém os coeficientes que acompanham as derivadas do sinal $y(t)$ do menor para o maior grau com sinal trocado. A matriz (vetor) B possui todas as entradas nulas, exceto o elemento da m -ésima linha que é igual a 1. A matriz (vetor) C contém os coeficientes que acompanham as derivadas do sinal de entrada $u(t)$ do menor para o maior grau sem troca de sinal. Por fim, a matriz D é nula.

2.2.3 Equação Diferencial com Derivada da Entrada – Caso Próprio

O caso próprio ocorre quando o grau de $D(p)$ é igual ao grau de $N(p)$. Essa situação pode ser tratada realizando a divisão polinomial de ambos os polinômios, utilizando, por exemplo, o procedimento de Briot-Ruffini, o que resulta em

$$N(p) = \beta_m D(p) + R(p) \Rightarrow D(p)y = N(p)u = \beta_m D(p)u + R(p)u$$

com $R(p) = \sum_{k=0}^{m-1} \bar{\beta}_k p^k$, $\bar{\beta}_k = \beta_k - \beta_m \alpha_k$. Logo, definindo

$$y = \bar{y} + \beta_m u \Rightarrow D(p)\bar{y} = R(p)u$$

tem-se um sistema estritamente próprio em \bar{y} . As matrizes A e B do sistema no espaço de estados são idênticas ao caso estritamente próprio e as demais matrizes são

$$C = [\bar{\beta}_0 \quad \bar{\beta}_1 \quad \cdots \quad \bar{\beta}_{m-1}], \quad D = [\beta_m].$$

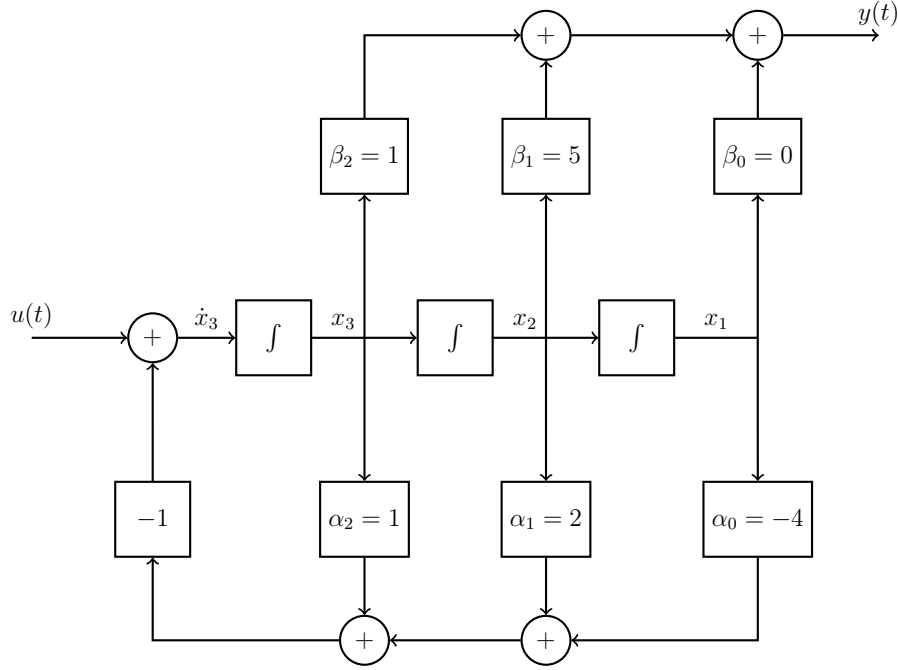


Figura 2.4: Diagrama de blocos do sistema do Exemplo 2.6.

Exemplo 2.7. Considere o sistema de segunda ordem descrito pela equação diferencial

$$D(p)y = N(p)u \Rightarrow (p^2 + 1)y = (2p^2 + p + 2)u.$$

Note que o grau de $N(p)$ é igual ao grau de $D(p)$, portanto, realizando a divisão polinomial $N(p)/D(p)$, tem-se

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{2p^2 + p + 2}{p^2 + 1} = 2 + \frac{p}{p^2 + 1}.$$

Logo,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 0, \bar{\beta}_0 = 0, \bar{\beta}_1 = 1, \beta_2 = 2$$

e a realização no espaço de estados é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

cuja representação em diagrama de blocos é dada na Figura 2.5.

Observação 2.2. Não é possível descrever um sistema na forma de variáveis de estado caso o grau de $N(p)$ seja maior do que o grau de $D(p)$.

2.3 Equações Diferenciais a Partir da Representação de Estados

Na seção anterior foi demonstrado como obter uma representação no espaço de estados de uma equação diferencial (ou a diferenças) ordinária. De forma similar é possível obter a equação

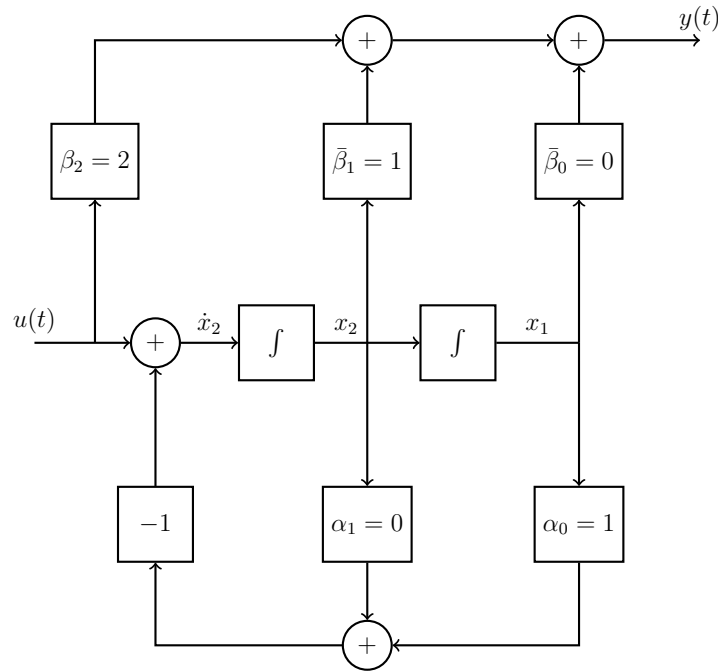


Figura 2.5: Diagrama de blocos do sistema do Exemplo 2.7.

diferencial (ou a diferenças) a partir da representação no espaço de estados. Neste ponto é apresentado somente o caso para sistemas SISO. Para sistemas MIMO há uma equação diferencial para cada par entrada-saída do sistema.

Considere um sistema SISO em sua representação de estados dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du\end{aligned}$$

Utilizando o operador p na primeira equação e isolando a variável x , tem-se

$$px = Ax + bu \Rightarrow x = (pI - A)^{-1}bu$$

e, substituindo na segunda relação, chega-se a forma

$$y = (c(pI - A)^{-1}b + d)u = \frac{N(p)}{D(p)}u. \quad (2.3)$$

Essa equação diferencial é de ordem m , pois $\det(pI - A)$ é um polinômio de ordem m em p . Eventualmente, a equação diferencial resultante pode ter ordem menor do que m se houver cancelamentos entre polos e zeros.

Observação 2.3. Para condições iniciais nulas, a Equação (2.3) quando reescrita no domínio de Laplace (sistema contínuos) ou no domínio da Transformada Z (sistemas discretos) recebe o nome de *Função de Transferência* do sistema denotada por $H(s) = N(s)/D(s)$ (ou $H(z) = N(z)/D(z)$).

Exemplo 2.8. Determine a equação diferencial para o seguinte sistema descrito em variáveis de estado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u.\end{aligned}$$

Solução: Primeiramente, deve-se determinar

$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} p & -1 \\ 1 & p+2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\text{Adj}(pI - A)}{\det(pI - A)} = \frac{1}{p(p+2)+1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix}$$

e, em seguida, a relação $N(p)/D(p)$ é obtida a partir da Equação (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{N(p)}{D(p)} &= (c(pI - A)^{-1}b + d) = [0 \quad -2] \frac{1}{p^2 + 2p + 1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \\ &= \frac{-2p}{p^2 + 2p + 1} + 1 = \frac{p^2 + 1}{p^2 + 2p + 1} \end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial do sistema é

$$D(p)y = N(p)u \Rightarrow (p^2 + 2p + 1)y = (p^2 + 1)u \Rightarrow \ddot{y} + 2\dot{y} + y = \ddot{u} + u$$

com condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

2.3.1 Transformação de Similaridade

Como mencionado previamente, a representação no espaço de estados não é única, apesar da equação diferencial ser. Suponha que exista uma transformação linear biunívoca T tal que

$$\hat{x} = Tx \Rightarrow x = T^{-1}\hat{x}.$$

Substituindo essa relação na Equação (1.2), tem-se

$$\begin{aligned} T^{-1}\dot{\hat{x}} &= AT^{-1}\hat{x} + Bu \\ y &= CT^{-1}\hat{x} + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \underbrace{TAT^{-1}}_{\hat{A}}\hat{x} + \underbrace{TB}_{\hat{B}}u \\ y &= \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}}\hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}}u \end{aligned}$$

O sistema no espaço de estados resultante $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$ é dito similar ao sistema original, pois os autovalores permanecem inalterados, ou seja, sua equação característica não se altera.

Para demonstrar tal fato, considere o caso SISO e faça as alterações correspondentes na Equação (2.3) de modo que

$$\begin{aligned} y &= (\hat{c}(pI - \hat{A})^{-1}\hat{b} + \hat{d})u = (cT^{-1}(pI - TAT^{-1})^{-1}Tb + d)u = \\ &= (c(pT^{-1}T - T^{-1}TAT^{-1}T)^{-1}b + d)u = (c(pI - A)^{-1}b + d)u = \frac{N(p)}{D(p)}u. \end{aligned}$$

Portanto, a equação diferencial é *invariante com transformações lineares* aplicadas à representação em variáveis de estado.

Transformação de similaridade são úteis, sobretudo, para colocar o modelo do sistema em uma estrutura apropriada que possibilite realizar a análise de estabilidade, obter uma solução para o sistema, ou projetar controladores e observadores. Esses tópicos serão vistos com mais detalhes nos próximos capítulos.

2.4 Formas Canônicas

As formas canônicas são representações padrões do sistema no espaço de estados.

2.4.1 Forma Canônica Controlável

A forma canônica controlável é uma representação do modelo do sistema em espaço de estados que assegura a controlabilidade, ou seja, o sinal de controle consegue influenciar cada um dos estados.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.4)$$

$$y = [\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_{m-1}] x + [\beta_m] u.$$

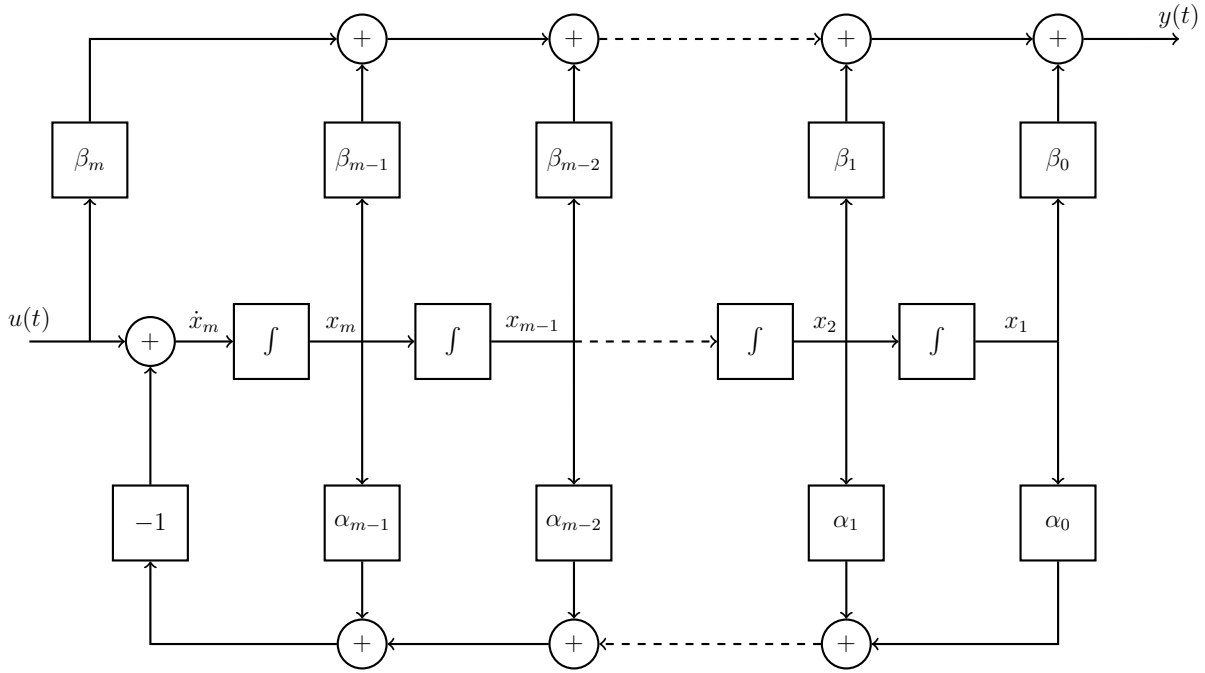


Figura 2.6: Realização da forma canônica controlável.

2.4.2 Forma Canônica Observável

A forma canônica observável pode ser vista como o modelo dualizado da forma canônica controlável. Essa forma assegura que o modelo do sistema é garantidamente observável, isto é, todo estado influencia diretamente a saída do sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{m-1} \end{bmatrix} u \quad (2.5)$$

$$y = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1] x + [\beta_m] u.$$

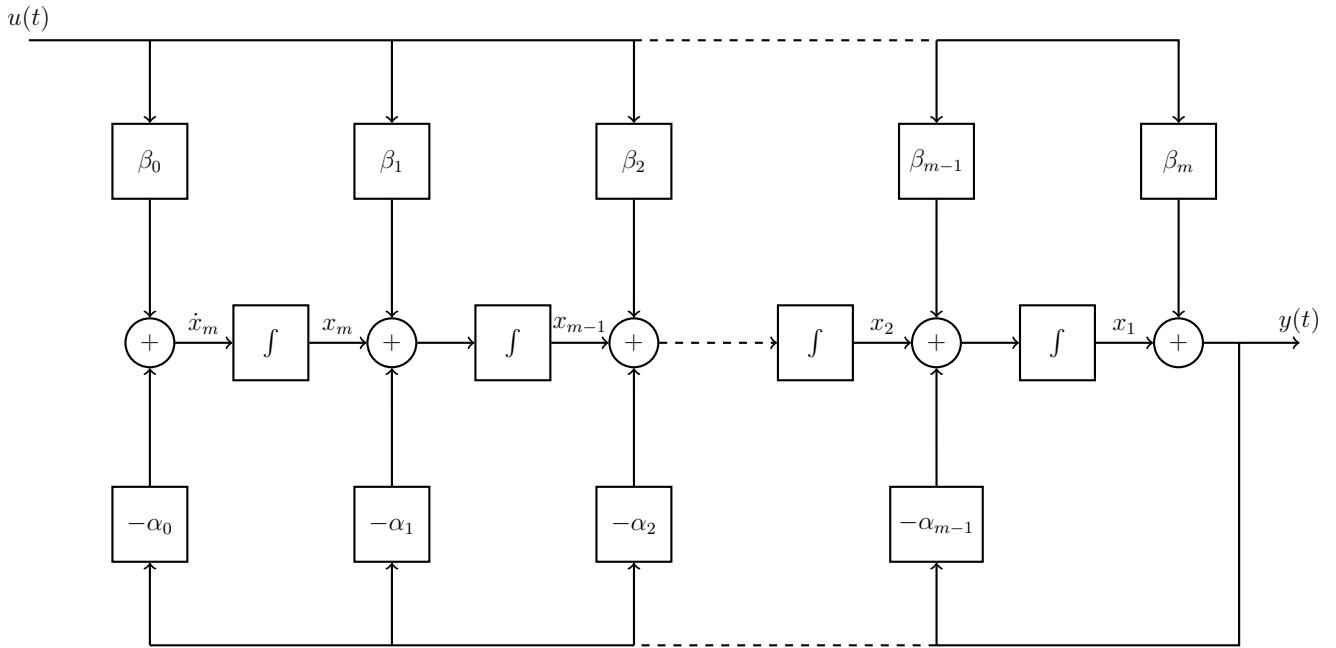


Figura 2.7: Realização da forma canônica observável.

2.4.3 Forma de Jordan

A forma de Jordan é uma terceira variante de forma canônica, na qual a matriz A do sistema é constituída por blocos de Jordan (introduzidos no Capítulo 3). Essa forma canônica é derivada diretamente da expansão em frações parciais da função de transferência do sistema.

Se os polos da função de transferência forem distintos, a representação em espaço de estados é simples de ser obtida.

Considere a função de transferência contínua $H(s)$ cuja expansão em frações parciais é dada por

$$H(s) = \beta_m + \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{r_m}{s - p_m}$$

sendo r_i , $i = 1, \dots, m$, os resíduos da expansão e p_i os polos correspondentes. A representação em espaço de estados é

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_{m-1} \ r_m] x + [\beta_m] u. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Por outro lado, se houverem polos repetidos, a representação no espaço de estados não é tão simples quanto a anterior. Suponha o caso em que

$$H(s) = \frac{r_1}{(s - p)^{\nu_i}} + \frac{r_2}{(s - p)^{\nu_i-1}} + \cdots + \frac{r_m}{s - p}$$

sendo ν_i a multiplicidade algébrica do polo p . Nesse caso, as matrizes do sistema em espaço de

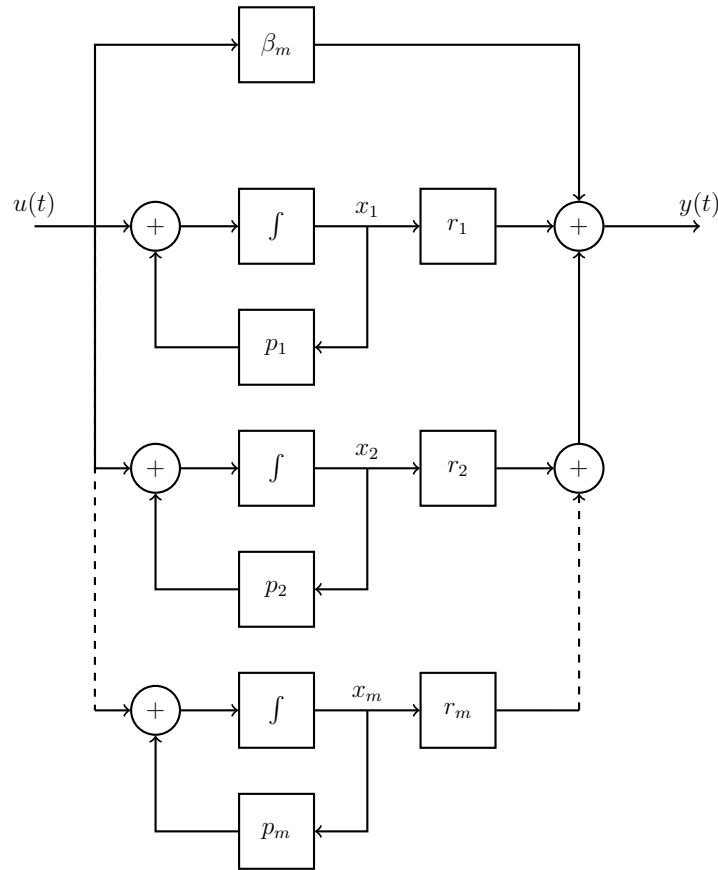


Figura 2.8: Realização da forma canônica de Jordan.

estados são dadas por

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} p & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.7)$$

$$y = [r_1 \ r_2 \ \cdots \ r_{m-1} \ r_m] x + [0] u.$$

Note a diagonal de 1's que aparece na matriz A indicando a interdependência entre os polos do sistema. Além disso, a matriz B possui um único elemento igual a 1, relativo à última linha do bloco de Jordan associado.

Exemplo 2.9. Considere o sistema contínuo cuja função de transferência é dada por

$$H(s) = \frac{s^2 + 9s + 20}{s^5 + 8s^4 + 24s^3 + 34s^2 + 23s + 6}.$$

Determine uma representação em espaço de estados para o sistema.

Solução:

- *Forma canônica controlável*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -23 & -34 & -24 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [20 \quad 9 \quad 1 \quad 0 \quad 0], \quad D = [0].$$

- *Forma canônica observável*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1], \quad D = [0].$$

- *Forma de Jordan*

A expansão em frações parciais de $H(s)$ é dada por

$$H(s) = \frac{6}{(s+1)^3} + \frac{-5.5}{(s+1)^2} + \frac{5.75}{s+1} + \frac{-6}{s+2} + \frac{0.25}{s+3}.$$

Assim, as matrizes no espaço de estados são dadas por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [6 \quad -5.5 \quad 5.75 \quad -6 \quad 0.25], \quad D = [0].$$

Note que a ordem dos blocos de Jordan na matriz A pode ser qualquer, bastando reordenar os coeficientes nas demais matrizes de maneira sistemática.

Capítulo 3

Resolução de Equações de Estado

No capítulo anterior foi visto como representar um sistema descrito por equações diferenciais ou a diferenças na forma de variáveis de estado. No presente capítulo serão apresentadas maneiras de se resolver equações no espaço de estados.

3.1 Equação homogênea

Nesta seção são consideradas equações de estado descritas na forma

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

3.1.1 Série de Potências

Suponha que a solução $x(t)$ da equação homogênea (3.1) possa ser escrita em série de potências, ou seja,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k t^k \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \nu_k t^{k-1}, \quad \nu_0 = x_0$$

sendo ν_k os vetores de expansão da série.

Substituindo a equação acima na Equação (3.1) e igualando os coeficientes de mesmo grau, tem-se

$$\begin{aligned} \nu_1 &= A\nu_0, \\ 2\nu_2 &= A\nu_1 = A^2\nu_0 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = \frac{1}{2}A^2\nu_0, \\ 3\nu_3 &= A\nu_2 = \frac{1}{2}A^3\nu_0 \quad \Rightarrow \quad \nu_3 = \frac{1}{3!}A^3\nu_0, \\ &\vdots \\ \nu_k &= \frac{1}{k!}A^k\nu_0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) x_0$$

com $A^0 = I$.

Lembrando que a série de Maclaurin da função $e^{\lambda t}$ é

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} t^k,$$

por analogia pode-se definir que

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} t^k$$

e, conseqüentemente, a solução da Equação (3.1) é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Fato interessante é que a maioria das propriedades da função exponencial valem, também, para a exponencial de matrizes, exceto a comutatividade com respeito às matrizes, ou seja,

$$e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{At} = e^{(A+B)t} \iff AB = BA.$$

Em outras palavras, o produto das exponenciais de duas matrizes comuta quando as matrizes comutam, o que ocorre somente em casos bastante particulares, por exemplo, quando A e B são diagonais ou quando $B = e^{At}$.

3.1.2 Laplace

Aplicando a transformada de Laplace à Equação (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \quad x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \\ \mathcal{L}\{\dot{x}\} &= s\mathcal{L}\{x\} - x_0 = A\mathcal{L}\{x\} \quad \Rightarrow \\ X(s) &= \mathcal{L}\{x\} = (sI - A)^{-1} x_0 \quad \Rightarrow \\ x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}. \end{aligned}$$

Para o caso escalar, tem-se que

$$X(s) = \frac{x_0}{s - \lambda} = (s - \lambda)^{-1} x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{\lambda t} x_0.$$

Assim, por analogia, a solução $x(t)$ da equação homogênea no caso matricial é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Observação 3.1. A transformada de Laplace de uma matriz equivale à transformada de cada um de seus elementos.

Exemplo 3.1. Determine a solução do sistema homogêneo

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: A inversa da matriz $(sI - A)$ é dada por

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} s+1 & -4 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1) - 8} \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 9} \begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a expansão em frações parciais, tem-se

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1/3}{s+3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1/3}{s-3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} e^{3t}.$$

Logo, a solução da equação é dada por

$$x(t) = e^{At} x_0 = \left(\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} e^{3t} \right) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} + e^{3t} \\ -e^{-3t} + e^{3t} \end{bmatrix}.$$

3.1.3 Cayley-Hamilton

O *Teorema de Cayley-Hamilton* afirma que toda matriz A satisfaz sua equação característica, ou seja,

$$\det(\lambda I - A) = \Delta(\lambda) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0.$$

Definição 3.1 (Equação característica). A equação característica de uma matriz A é obtida por meio de

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

que é uma equação polinomial de ordem n . As raízes λ_i , $i = 1, \dots, n$, são denominadas autovalores da matriz A , satisfazendo

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad v_i \neq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

sendo $v_i \in \mathbb{C}^n$ um autovetor da matriz A associado ao autovalor λ_i .

Uma implicação direta do Teorema de Cayley-Hamilton é a de que a matriz A^n pode ser escrita como uma combinação linear de $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$.

Exemplo 3.2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine A^3 e A^{-1} .

Solução: A equação característica da matriz A é dada por

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$$

Utilizando o teorema de Cayley-Hamilton, tem-se

$$A^3 - A^2 - 5A - 4I = 0 \Rightarrow A^3 = A^2 + 5A + 4I$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \\ 24 & 34 & 15 \end{bmatrix}.$$

Considere novamente o teorema de Cayley-Hamilton, a inversa da matriz A pode ser determinada de maneira simples com o seguinte procedimento:

$$(A^3 - A^2 - 5A - 4I)A^{-1} = 0 \Rightarrow A^2 - A - 5I - 4A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - A - 5I)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1.25 & -0.25 & 0.25 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

De fato, para qualquer polinômio $f(\lambda)$ de grau arbitrário, é sempre possível expressar $f(A)$ como

$$f(A) = \rho_0 I + \rho_1 A + \cdots + \rho_{n-1} A^{n-1} \quad (3.2)$$

para escalares apropriados ρ_i . Em outras palavras, qualquer polinômio de uma matriz $n \times n$ pode ser expresso como uma combinação linear de $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$. Se $f(\lambda)$ possuir grau maior do que $\Delta(\lambda)$, pode-se reescrever a função tal que

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + r(\lambda)$$

sendo $q(\lambda)$ o quociente da divisão polinomial e $r(\lambda)$ o resto, cujo grau é menor do que n . Assim,

$$f(A) = q(A)\Delta(A) + r(A) = q(A)0 + r(A) = r(A).$$

Caso a matriz A possua autovalores repetidos, deve-se derivar $f(\lambda)$ quantas vezes forem necessárias com relação a λ para se obter equações adicionais, de modo a determinar todos os coeficientes ρ_i da Equação (3.2).

Exemplo 3.3. Determine A^{100} para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução: A matriz A é de ordem $n = 3$, logo, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, a função $f(A) = A^{100}$ pode ser escrita com a seguinte combinação linear

$$f(A) = \rho_0 I + \rho_1 A + \rho_2 A^2.$$

A equação característica da matriz é dada por $\Delta(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$. Portanto, os autovalores são idênticos e iguais a $\lambda = -1$. Devido aos autovalores serem iguais, faz-se necessário derivar $f(\lambda) = \lambda^{100}$ duas vezes de maneira a obter equações suficientes para

determinar os coeficientes ρ_i . Assim,

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \rho_0 + \rho_1\lambda + \rho_2\lambda^2 &\Rightarrow (-1)^{100} = \rho_0 + \rho_1(-1) + \rho_2(-1)^2 \\ \frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \rho_1 + 2\rho_2\lambda &\Rightarrow 100(-1)^{99} = \rho_1 + 2\rho_2(-1) \\ \frac{d^2f(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\rho_2 &\Rightarrow 9900(-1)^{98} = 2\rho_2 \end{aligned}$$

o que resulta nos coeficientes

$$\rho_0 = 4851, \quad \rho_1 = 9800, \quad \rho_2 = 4950.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} f(A) &= 4851 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 9800 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} + 4950 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4851 & 9800 & 4950 \\ -4950 & -9999 & -5050 \\ 5050 & 10200 & 5151 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Função de Matriz Quadrada

Suponha que $f(\lambda)$ seja uma função não singular qualquer, não necessariamente polinomial. Logo, é possível expandir $f(\lambda)$ em série de potências na forma

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \rho_k \lambda^k = q(\lambda) \Delta(\lambda) + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \lambda^k}_{r(\lambda)}.$$

Para λ autovalor de A , $\Delta(\lambda) = 0$ e, pelo Teorema de Cayley-Hamilton

$$\Delta(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k.$$

Exemplo 3.4. Utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para determinar a solução do sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Sabe-se que a solução desse sistema é dada na forma

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

portanto, para utilizar o teorema de Cayley-Hamilton deve-se, inicialmente, determinar os autovalores da matriz A .

$$\Delta(\lambda) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 9 = (\lambda + 3)(\lambda - 3)$$

Os coeficientes do polinômio $r(\lambda, t)$ são obtidos resolvendo o sistema de equações

$$\begin{aligned} e^{-3t} &= \rho_0(t) - 3\rho_1(t) \\ e^{3t} &= \rho_0(t) + 3\rho_1(t) \end{aligned}$$

o qual resulta em

$$\rho_0(t) = \frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2}, \quad \rho_1(t) = \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{6}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= (\rho_0(t)I + \rho_1(t)A)x(0) = \left(\frac{e^{3t} + e^{-3t}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{e^{3t} - e^{-3t}}{6} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} + 2e^{-3t} \\ e^{3t} - e^{-3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.2 Similaridade

No capítulo anterior foi introduzido o conceito de transformação de similaridade para sistemas descritos no espaço de estados. Como observado naquele ponto, os autovalores do sistema permanecem inalterados sob transformações biunívocas. De fato, considere o sistema (3.1) e defina a mudança de variáveis T tal que

$$\hat{x} = Tx \quad \Rightarrow \quad T^{-1}\dot{\hat{x}} = AT^{-1}\hat{x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}; \quad \hat{A} = TAT^{-1}.$$

O polinômio característico do sistema transformado é

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \det(\lambda TT^{-1} - TAT^{-1}) = \det(T) \det(\lambda I - A) \det(T^{-1}) = \det(\lambda I - A)$$

o que deixa evidente que $\Delta(\lambda)$ não se altera com transformações de similaridades.

Com escolhas apropriadas da transformação T é possível representar a matriz A do sistema por meio de formas diagonais ou triangulares, por exemplo, que são mais simples de serem tratadas.

O cômputo de funções de matrizes pode ser facilitado por meio de transformações de similaridade. Considere uma matriz A de estrutura arbitrária e seja T uma transformação de similaridade (a ser definida) que leva A a uma forma similar \hat{A} diagonal (ou triangular), ou seja,

$$A = T^{-1}\hat{A}T.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton tem-se

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \underbrace{(T^{-1}\hat{A}T) \cdots (T^{-1}\hat{A}T)}_{k \text{ vezes}} = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k \hat{A}^k \right) T = T^{-1} f(\hat{A}) T.$$

Portanto, uma função de matriz $f(A)$ pode ser determinada a partir da determinação da função da matriz similar $f(\hat{A})$.

Para matrizes diagonais, a determinação de $f(A)$ corresponde a aplicar a função $f(\cdot)$ a cada um dos elementos da diagonal. No caso de matrizes triangulares, recorre-se a funções de bloco de Jordan. Na sequência são apresentadas formas sistemáticas de obter transformações que conduzam a ambas as formas.

3.2.1 Matrizes Diagonalizáveis

Uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é diagonalizável se, e somente se, possui n autovetores linearmente independentes. A transformação V^{-1} construída com os autovetores (colunas) resulta em

$$AV^{-1} = V^{-1}\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = VAV^{-1} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

sendo λ_i , $i = 1, \dots, n$, os autovalores de A . Note que os autovalores não precisam, necessariamente, ser distintos.

Definição 3.2 (Multiplicidade Algébrica). A multiplicidade algébrica do autovalor $\bar{\lambda}$ corresponde ao número de raízes de $\Delta(\lambda) = 0$ iguais a $\bar{\lambda}$.

Autovetores associados a autovalores distintos são sempre linearmente independentes. Portanto, a transformação V^{-1} composta pelos autovetores (colunas) de A diagonaliza a matriz por meio da relação $\hat{A} = VAV^{-1}$.

Exemplo 3.5. Considere o sistema apresentado no Exemplo 3.1

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

cujos autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -3$.

Os autovetores associados aos autovalores podem ser obtidos resolvendo as equações

$$\begin{aligned} (A - 3I)v_1 = 0, \quad \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ (A - (-3)I)v_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 &\Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, a transformação de similaridade resulta na matriz diagonal

$$\hat{A} = \Lambda = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Note que os autovalores na matriz diagonalizada aparecem na ordem em que os autovetores foram dispostos na matriz V^{-1} .

O sistema similar é dado, então, por

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x}, \quad \hat{x}(0) = Vx(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

cuja solução é

$$\hat{x}(t) = e^{\hat{A}t}\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$x(t) = V^{-1}\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} + 2e^{-3t} \\ e^{3t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

que corresponde ao mesmo resultado obtido no Exemplo 3.4.

O procedimento exemplificado acima pode ser empregado, da mesma forma, quando os autovalores são complexo-conjugados. Nesse caso, os autovetores determinados serão, também, complexo-conjugados.

Exemplo 3.6. Determine a transformação de similaridade que diagonaliza a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -13/4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução: A equação característica é dada por

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 13/4 = 0$$

Logo, os autovalores são $\lambda = -3/2 \pm j1$. Os autovetores associados aos autovalores são obtidos a partir da resolução das seguintes equações

$$\begin{aligned} (A - (-3/2 + j1)I)v_1 &= 0, \quad \begin{bmatrix} 3/2 - j1 & -13/4 \\ 1 & -3/2 - j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + j2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ (A - (-3/2 - j1)I)v_2 &= 0, \quad \begin{bmatrix} 3/2 + j1 & -13/4 \\ 1 & -3/2 + j1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - j2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a transformação de similaridade requisitada é dada por

$$V = \begin{bmatrix} 3 + j2 & 3 - j2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes complexas diagonais obtidas por meio do procedimento de diagonalização podem ser convertidas a matrizes reais utilizando uma transformação de similaridade. De fato, as matrizes

$$\begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

são similares por meio da transformação $V = \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix}$.

No caso dos autovalores de uma matriz não serem todos distintos, os autovetores associados a um mesmo autovalor podem ser ou linearmente independentes ou linearmente dependentes (autovetores generalizados). No primeiro caso, o procedimento de diagonalização ocorre da forma delineada previamente. Por outro lado, no segundo caso, a matriz A não é diagonalizável; todavia, é possível determinar uma transformação que leva a matriz a uma forma triangular. Nesse contexto, o conceito de multiplicidade geométrica de um autovalor se faz necessário.

Definição 3.3 (Multiplicidade geométrica). A multiplicidade geométrica do autovalor λ corresponde ao número de autovetores linearmente independentes associados a λ , ou seja, corresponde à dimensão do espaço nulo de $A - \lambda I$.

Exemplo 3.7. A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

possui autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 3$. A multiplicidade geométrica do autovalor igual a -2 é dada pela dimensão do espaço nulo de

$$(A - (-2)I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

que é igual a 2. Portanto, existem dois autovetores linearmente independentes associados a $\lambda = -2$. De fato,

$$(A - (-2)I)v = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O autovetor associado a $\lambda_3 = 3$ é dado por

$$(A - 3I)v_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -3 & -7 & 4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, por construção

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 4/3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad V \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -3 & -4 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{bmatrix} V^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Forma de Jordan

Um bloco de Jordan de ordem k , denotado $J_k(\lambda)$ ou simplesmente J_k , é uma matriz quadrada de dimensão k , com seu único autovalor de multiplicidade k na diagonal, 1's na diagonal superior e 0's nos demais elementos. Por exemplo,

$$J_1(\lambda) = [\lambda], \quad J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad J_4 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

No caso de autovalores complexo-conjugados, é possível representar a matriz complexa em blocos de Jordan por meio de uma matriz real. Por exemplo, considere a matriz com autovalores complexos na forma de Jordan dada por

$$J_2 = \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + j\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha + j\beta \end{bmatrix}.$$

Tal matriz é similar a matriz

$$J_2 = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

pois ambas possuem os mesmos autovalores. A matriz acima é dita estar na *forma modal de Jordan*.

A forma de Jordan de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ qualquer é dada por

$$\hat{A} = VAV^{-1} = \text{diag}(J_{k_1}, J_{k_2}, \dots, J_{k_r})$$

sendo V uma matriz não singular e J_{k_i} , $i = 1, \dots, r$ os blocos de Jordan (não necessariamente diagonais).

O procedimento para obtenção da forma de Jordan segue os passos apontados a seguir. Por simplicidade, considere uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com um autovalor λ de multiplicidade algébrica igual a n .

- Determine

$$M = A - \lambda I$$

e compute a dimensão r do espaço nulo de M , denotado por

$$\nu(M) = n - \text{rank}(M).$$

O número de blocos de Jordan é igual a r e a soma dos tamanhos de cada bloco é igual a n . Note que r é a multiplicidade geométrica de λ , isto é, o número de autovetores linearmente independentes.

- A dimensão do maior bloco é igual ao menor k tal que

$$M^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(M^k) = n$$

- O número de blocos de dimensão i , $1 \leq i \leq k$, é igual a

$$2\nu(M^i) - \nu(M^{i-1}) - \nu(M^{i+1}) \quad \text{ou} \quad \text{rank}(M^{i-1}) - 2\text{rank}(M^i) + \text{rank}(M^{i+1})$$

Observação 3.2. Note que $M^0 = I$ para qualquer matriz M . Desse modo, ao realizar a determinação da quantidade de blocos de Jordan de dimensão i , $1 \leq i \leq k$, seguindo o procedimento acima, deve-se considerar $\text{rank}(M^0) = n$ (mesma dimensão da matriz A sendo analisada) ou, equivalentemente, $\nu(M^0) = 0$.

Exemplo 3.8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 4)^4.$$

Computando M^i tem-se

$$\begin{aligned} M = (A - 4I) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, & \nu(M) &= 2, \\ M^2 &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, & \nu(M^2) &= 3, \\ M^3 &= 0, & \nu(M^3) &= 4. \end{aligned}$$

Portanto, a forma de Jordan possui dois blocos, pois a dimensão do espaço nulo de M é 2, e o maior bloco tem dimensão 3, pois $M^3 = 0$ e $M^2 \neq 0$. Consequentemente, o outro bloco possui dimensão 1. A forma de Jordan da matriz A é

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

O procedimento para autovalores distintos segue os mesmos passos apresentados anteriormente, sendo que cada autovalor é avaliado de forma individual.

Exemplo 3.9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 7 \end{bmatrix}, \quad \Delta(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 1).$$

Para $\lambda = 2$, cuja multiplicidade algébrica é 3, tem-se

$$\begin{aligned} M_2 &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 5 \end{bmatrix}, \quad \nu(M_2) = 4 - 3 = 1, \\ M_2^2 &= \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ -8 & 20 & -14 & 3 \\ -24 & 52 & -34 & 7 \end{bmatrix}, \quad \nu(M_2^2) = 4 - 2 = 2, \\ M_2^3 &= \begin{bmatrix} -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \nu(M_2^3) = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Note que 3 é o maior valor possível para a dimensão do espaço nulo de M_2^i , pois a multiplicidade geométrica de $\lambda = 2$ é no máximo igual à multiplicidade algébrica.

Como o valor de dimensão do espaço nulo igual a 3 foi atingido para $i = 3$, há apenas um bloco de Jordan associado ao autovalor $\lambda = 2$.

Calculando M_1 , tem-se

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & 20 & -18 & 6 \end{bmatrix}, \quad \nu(M_1) = 4 - 3 = 1$$

logo, há apenas um bloco de Jordan (de tamanho 1) associado ao autovalor $\lambda = 1$.

A forma de Jordan é dada por

$$\hat{A} = \text{diag}(J_3(2), J_1(1)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim como no caso de matrizes diagonalizáveis, é possível determinar uma transformação de similaridade V não singular, tal que a matriz A seja expressa em sua forma de Jordan. Essa transformação é composta, para cada bloco de Jordan de tamanho k , de uma cadeia de k vetores linearmente independentes, sendo o primeiro um autovetor e os demais autovetores *generalizados*.

Por exemplo, para o primeiro bloco (tamanho $k = 4$, autovalor λ), tem-se

$$\begin{aligned} A \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}}_{V^{-1}} &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} J_4 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ Av_1 &= \lambda v_1, \quad Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \quad Av_3 = v_2 + \lambda v_3, \quad Av_4 = v_3 + \lambda v_4. \end{aligned}$$

com v_1 autovetor. A cadeia de 4 autovetores generalizados é dada por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Exemplo 3.10. A matriz de transformação de similaridade V do Exemplo 3.8 pode ser calculada pelo seguinte procedimento.

$$M = A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Mv_1 = M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} b - d = 0 \\ 2a + b - 2c - d = 0 \\ b - d = 0 \\ -2a + b + 2c - d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix}$$

Note que com a escolha apropriada de a e b pode-se determinar uma base para o espaço nulo de M (dimensão 2). As escolhas para a e b são feitas a partir das demais equações da cadeia de autovetores generalizados.

Assim, v_1 e v_2 devem satisfazer

$$Mv_2 = v_1 \Rightarrow M \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} f - h = a \\ 2e + f - 2g - h = b \\ f - h = a \\ -2e + f + 2g - h = b \end{cases}$$

Para que exista v_2 é necessário que $a = b$, portanto,

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} e \\ f \\ e \\ f - a \end{bmatrix}$$

Por sua vez, os autovetores generalizados v_2 e v_3 devem satisfazer

$$Mv_3 = v_2 \Rightarrow M \begin{bmatrix} i \\ j \\ k \\ \ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \\ e \\ f - a \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} j - \ell = e \\ 2i + j - 2k - \ell = f \\ j - \ell = e \\ -2i + j + 2k - \ell = f - a \end{cases}$$

Assim,

$$v_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} e \\ e + a/2 \\ e \\ e - a/2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} i \\ j \\ i - a/4 \\ j - e \end{bmatrix}$$

Consequentemente, a cadeia de autovetores generalizados desejada é dada por

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Note que, se $a \neq b$, não existe v_2 nem v_3 , a cadeia associada tem tamanho 1 e, desse modo, o autovetor associado ao bloco J_1 pode ser escolhido como

$$v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação V é, então, dada por

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Função de Bloco de Jordan Considere um bloco de Jordan de ordem k e uma função $f(\lambda)$ diferenciável $k - 1$ vezes. Então,

$$f(J_k(\sigma)) = \begin{bmatrix} f(\sigma) & \dot{f}(\sigma) & \ddot{f}(\sigma)/2! & \cdots & f^{(k-1)}(\sigma)/(k-1)! \\ 0 & f(\sigma) & \dot{f}(\sigma) & \cdots & f^{(k-2)}(\sigma)/(k-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \dot{f}(\sigma) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\sigma) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Exemplo 3.11. Considere o bloco de Jordan

$$J_4 = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

e determine $e^{J_4 t}$.

Solução: A função da matriz em bloco de Jordan pode ser determinada a partir da relação (3.3) da seguinte forma

$$e^{J_4 t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2 & t^3/6 \\ 0 & 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.12. Determine $e^{\hat{A}t}$, sendo \hat{A} a matriz na forma modal de Jordan

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Solução:

$$e^{\hat{A}t} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) & t \cos(\beta t) & -t \text{sen}(\beta t) \\ \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) & t \text{sen}(\beta t) & t \cos(\beta t) \\ 0 & 0 & \cos(\beta t) & -\text{sen}(\beta t) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}$$

3.3 Solução da Equação Não Homogênea

Considere as equações de estado e de saída do sistema SISO

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad y = Cx + Du \quad (3.4)$$

3.3.1 Laplace

Aplicando a transformada de Laplace à Equação (3.4), tem-se

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s), \quad Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Portanto,

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)U(s) + C(sI - A)^{-1}x_0$$

A função de transferência é dada por (condições iniciais nulas)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Exemplo 3.13. Considere o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Computando $(sI - A)^{-1}$ por Cayley-Hamilton, tem-se

$$(sI - A)^{-1} = \rho_0(s)I + \rho_1(s)A$$

com $\rho_0(s)$ e $\rho_1(s)$ obtidos das equações

$$\begin{aligned} (s+1)^{-1} &= \rho_0(s) - \rho_1(s), & (s+2)^{-1} &= \rho_0(s) - 2\rho_1(s) \\ \rho_0(s) &= \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, & \rho_1(s) &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ (sI - A)^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para a entrada $U(s) = 1/s$ (degrau unitário):

$$\begin{aligned} Y(s) &= C(sI - A)^{-1}(x_0 + BU(s)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} (sI - A)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/s \end{bmatrix} = \frac{s^2 + 3s + 1}{s(s+1)(s+2)} \\ Y(s) &= \frac{1/2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{-1/2}{s+2} \end{aligned}$$

3.3.2 Convolução

Considere novamente o sistema (3.4). Multiplicando ambos os lados da equação de estados por e^{-At} e reagrupando, tem-se

$$e^{-At}\dot{x} - e^{-At}Ax = \frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}Bu$$

Integrando de 0 a t

$$e^{-At}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-A\tau}Bu(\tau)u_d(t-\tau)d\tau$$

Multiplicando por e^{At} e considerando $x(t) = x(t)u_d(t)$, tem-se

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{x_{\text{en}}(t)} + \underbrace{(e^{At}u_d(t)) * (Bu(t))}_{x_{\text{cin}}(t)}$$

Note as contribuições isoladas devido à entrada ($x_{\text{cin}}(t)$) e devido à condição inicial ($x_{\text{en}}(t)$).

A equação da saída é

$$y = Cx + Du \quad \Rightarrow \quad y(t) = Ce^{At}x_0 + C(e^{At}u_d(t)) * (Bu(t)) + Du(t)$$

Exemplo 3.14. Considere o sistema dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, & x(0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned}$$

Computando e^{At} por Cayley-Hamilton, tem-se

$$e^{At} = \rho_0(t)I + \rho_1(t)A$$

com $\rho_0(t)$ e $\rho_1(t)$ obtidos das equações

$$\begin{aligned} e^{-t} &= \rho_0(t) - \rho_1(t), & e^{-2t} &= \rho_0(t) - 2\rho_1(t) \\ \Rightarrow \quad \rho_0(t) &= 2e^{-t} - e^{-2t}, & \rho_1(t) &= e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A resposta à entrada nula $x_{\text{en}}(t)$ é dada por

$$x_{\text{en}}(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

e a resposta à condição inicial nula $x_{\text{cin}}(t)$ para $u(t) = u_d(t)$ (degrau unitário) é

$$\begin{aligned} x_{\text{cin}}(t) &= (e^{At}u_d(t)) * (Bu_d(t)) = (e^{At}Bu_d(t)) * u_d(t) \\ &= \left(\begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} u_d(t) \right) * u_d(t) = \begin{bmatrix} 0.5 - e^{-t} + 0.5e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A solução $x(t)$ é dada por

$$x(t) = x_{\text{en}}(t) + x_{\text{cin}}(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + e^{-t} - 0.5e^{-2t} \\ -e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix} u_d(t)$$

Em termos da saída

$$y(t) = (0.5 + e^{-t} - 0.5e^{-2t})u_d(t)$$

Capítulo 4

Estabilidade

Sistemas instáveis podem explodir, saturar ou desintegrar mesmo quando um sinal de pequena amplitude é aplicado as suas entradas. Consequentemente, sistemas instáveis são inúteis na prática. Para sistemas não lineares ou variantes no tempo existem diversas definições de estabilidade; entretanto, para sistemas lineares e invariantes no tempo, a situação é mais simples. Para esses sistemas duas definições de estabilidade são deveras importantes: a estabilidade de entrada-saída (BIBO estabilidade) e a estabilidade interna.

4.1 Estabilidade de Entrada-Saída

Um sistema é dito BIBO estável se sua saída é limitada para toda entrada limitada.

$$|x(t)| \leq b \quad \Rightarrow \quad |y(t)| < +\infty$$

Ademais, um sistema linear e invariante no tempo é BIBO estável se, e somente se, a resposta ao impulso do sistema for absolutamente integrável.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Teorema 4.1. *Um sistema linear e invariante no tempo descrito por uma função de transferência racional*

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

é BIBO estável se, e somente se, todos os polos p_i tiverem parte real negativa.

Note que determinar os autovalores de um sistema dinâmico de ordem elevada não é uma tarefa trivial. Assim, formas alternativas para se certificar a estabilidade do sistema devem ser buscadas. Um dos métodos mais aplicados para verificar a estabilidade é a Tabela de Routh-Hurwitz.

Teorema 4.2 (Tabela de Routh-Hurwitz). *Considere o polinômio descrito por*

$$\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_k > 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Todas as raízes do polinômio possuem parte real negativa se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da Tabela 4.1 forem positivos. A ocorrência de um zero ou de um número negativo indica que o polinômio não é Hurwitz e, portanto, possui ao menos uma raiz com parte real não negativa.

Exemplo 4.1. Certifique a estabilidade do sistema cujo denominador da função de transferência é dado por

$$D(s) = s^5 + 8s^4 + 25s^3 + 40s^2 + 34s + 12$$

Tabela 4.1: Tabela de Routh-Hurwitz

s^n	α_n	α_{n-2}	\cdots	α_0
s^{n-1}	α_{n-1}	α_{n-3}	\cdots	α_1
s^{n-2}	$\beta_{n-2} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}-\alpha_n\alpha_{n-3}}{\alpha_{n-1}}$	$\beta_{n-4} = \frac{\alpha_{n-1}\alpha_{n-4}-\alpha_n\alpha_{n-5}}{\alpha_{n-1}}$	\cdots	
s^{n-3}	$\gamma_{n-3} = \frac{\beta_{n-2}\alpha_{n-3}-\beta_{n-4}\alpha_{n-1}}{\beta_{n-2}}$	\cdots	\cdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
s^0	α_0			

Solução: A Tabela de Routh para esse polinômio é

s^5	1	25	34
s^4	8	40	12
s^3	20	65/2	
s^2	27	12	
s^1	1275/54		
s^0	12		

Como todos os elementos da primeira coluna da tabela são positivos, conclui-se que todas as raízes de $D(s)$ possuem parte real negativa. De fato, as raízes são: -1 , -2 , -3 , $-1 + j$ e $-1 - j$.

4.2 Estabilidade Interna

A BIBO estabilidade é definida como a resposta às condições iniciais nulas, por sua vez a estabilidade interna corresponde à resposta à entrada nula.

Considere o sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (4.1)$$

cujos pontos de equilíbrio são dados por

$$f(\bar{x}) = 0$$

Um ponto de equilíbrio pode ser (assintoticamente) estável ou instável.

Definição 4.1 (Estabilidade de um ponto de equilíbrio). Um ponto de equilíbrio \bar{x} é dito estável se, para $\epsilon > 0$, existir $\phi(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \phi(\epsilon), \quad \forall x(0) \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

Definição 4.2 (Estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio). Um ponto de equilíbrio \bar{x} é assintoticamente estável se for estável e, além disso, se existir $\phi > 0$ tal que

$$\|x(0) - \bar{x}\| < \phi, \quad \forall x(0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$$

Note que as definições acima indicam que sempre existe uma vizinhança em torno do ponto de equilíbrio que é um domínio de atração, ou seja, toda trajetória iniciada dentro desse domínio permanecerá confinada em seu interior, podendo tender assintoticamente ao ponto de equilíbrio.

As definições 4.1 e 4.1 se aplicam a quaisquer classes de sistemas. Para um sistema linear autônomo descrito por

$$\dot{x} = Ax$$

a seguinte definição pode ser utilizada.

Definição 4.3. Um sistema linear autônomo é assintoticamente estável se, e somente se, a parte real de todos os autovalores (raízes de $\Delta(\lambda) = 0$) da matriz A for negativa.

Um outro ponto importante a ser notado é que a estabilidade interna do sistema implica em BIBO estabilidade. Entretanto, o inverso não é verdade, ou seja, o sistema pode ser BIBO estável, mas internamente instável. Tal fato se deve a possíveis cancelamentos entre polos e zeros do sistema.

Exemplo 4.2. Considere o sistema linear e invariante no tempo dado no espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

A função de transferência desse sistema é

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

cujos polos são $p_1 = -2$ e $p_2 = -3$, portanto, esse sistema é BIBO estável.

Por outro lado, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ e $\lambda_3 = 1$. Logo, o sistema não é internamente estável.

4.3 Lyapunov

Uma maneira alternativa de se certificar a estabilidade de um sistema, sem a necessidade de se determinar os autovalores de uma matriz ou os polos da função de transferência, é utilizar uma abordagem baseada na energia do sistema. Nesse sentido, o sistema é dito estável se a sua energia decair monotonicamente ao longo do tempo. Tal abordagem é bastante interessante, principalmente, na análise de estabilidade de sistemas não lineares, para os quais a análise de autovalores (quando existirem) não provê meios suficientes para concluir sobre a estabilidade do sistema.

Teorema 4.3 (Teorema de Lyapunov). *Seja $\bar{x} = 0$ um ponto de equilíbrio do sistema $\dot{x} = f(x)$ e $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um domínio contendo $\bar{x} = 0$. Se existir uma função $V(x)$ continuamente diferenciável tal que*

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0, \quad \forall x \in \Omega - \{0\} \quad e \quad \dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega - \{0\}$$

então, $\bar{x} = 0$ é estável. Além disso, se

$$\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega - \{0\}$$

então, $\bar{x} = 0$ é assintoticamente estável.

Um fato importante a ser notado é que as condições propostas no Teorema 4.3 são apenas suficientes, ou seja, caso $\dot{V}(x)$ não seja negativa, nada se pode afirmar sobre a estabilidade do sistema. Pode-se dizer, somente, que a escolha da função $V(x)$ não foi adequada e que uma outra função deve ser buscada para se certificar a estabilidade do sistema.

Exemplo 4.3. Considere o sistema não linear dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2\end{aligned}$$

A função candidata de Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0$$

possui derivada temporal

$$\dot{V}(x) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \frac{1}{3}x_1^3x_2 - x_2^2$$

a qual pode ser tanto positiva quanto negativa. Logo, nada se pode afirmar sobre a estabilidade do sistema.

Por outro lado, tome a seguinte função candidata de Lyapunov

$$\begin{aligned}V(x) &= \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 = \frac{1}{4}x_1^2(1 - \frac{1}{3}x_1^2) + \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \\ &= \frac{1}{4}x_1^2(1 - \frac{1}{3}x_1^2) + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}}_{>0} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

tem derivada temporal

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_1^2(1 - \frac{1}{3}x_1^2) - \frac{1}{2}x_2^2$$

a qual é negativa para todo $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$ tal que $1 - \frac{1}{3}x_1^2 > 0$, ou seja, o domínio de validade é

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3} \right\} - \{0\}.$$

Portanto, o sistema é assintoticamente estável dentro da região de análise.

Para sistemas representados no espaço de estados é possível utilizar a *Desigualdade de Lyapunov* para certificar a estabilidade do sistema.

Teorema 4.4. *O sistema linear autônomo*

$$\dot{x} = Ax$$

é assintoticamente estável se, e somente se, existir $P > 0$ tal que

$$A^T P + P A < 0$$

Demonstração. Tome uma função de Lyapunov candidata na forma

$$V(x) = x^T P x > 0$$

assim,

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x < 0$$

Se as desigualdades acima forem satisfeitas, então o sistema é assintoticamente estável. \square

A escolha de uma matriz simétrica definida positiva P que satisfaz as desigualdades do Teorema 4.4 pode ser feita pela solução da equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

com $Q = Q^T > 0$ arbitrária.

Teorema 4.5. Para qualquer matriz $Q = Q^T > 0$, a solução da equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

é única, simétrica e definida positiva se, e somente se, todos os autovalores da matriz A tiverem parte real negativa.

Demonstração. Primeiramente, supõe-se que A possua todos os autovalores com parte real negativa e prova-se que a solução da equação é única, simétrica e definida positiva.

Como A e A^T possuem os mesmos autovalores e todos têm parte real negativa, então não existem dois deles tal que a soma seja nula. Logo, a solução P é única.

A solução pode ser expressa como

$$P = \int_0^{+\infty} e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

Substituindo na equação, tem-se

$$\begin{aligned} A^T P + P A &= \int_0^{+\infty} \left(A^T e^{A^T t} Q e^{A t} + e^{A^T t} Q e^{A t} A \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} Q e^{A t} \right) dt = e^{A^T t} Q e^{A t} \Big|_0^{+\infty} = -Q \end{aligned}$$

pois, como A tem autovalores com parte real negativa, $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{A t} = 0$.

Como Q é simétrica, P também o é. Como Q é definida positiva, então existe uma fatoração $Q = R^T R$, com R não singular, tal que

$$x^T P x = \int_0^{+\infty} x^T e^{A^T t} R^T R e^{A t} x dt = \int_0^{+\infty} \|R e^{A t} x\|^2 dt > 0, \forall x \neq 0$$

Logo, P é definida positiva.

Para concluir a prova, demonstra-se que se $P = P^T > 0$, então A possui todos os autovalores com parte real negativa.

Pré multiplicando a equação de Lyapunov por¹ x^* e pós multiplicando por x , com x autovetor de A associado ao autovalor λ , tem-se

$$x^* A^T P x + x^* P A x = (\lambda^* + \lambda) x^* P x = 2\text{Re}(\lambda) x^* P x = -x^* Q x$$

Como $x^* P x$ e $x^* Q x$ são reais positivos, tem-se $\text{Re}(\lambda) < 0$. \square

¹O símbolo \star corresponde ao complexo conjugado transposto de um vetor ou uma matriz.

Exemplo 4.4. Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x$$

Resolvendo a equação de Lyapunov

$$A^T P + P A = -I$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -4p_2 & p_1 - 3p_2 - 2p_3 \\ p_1 - 3p_2 - 2p_3 & 2p_2 - 6p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como os menores principais líderes de P são 1.25 e 1, a matriz P é definida positiva, indicando que o sistema é assintoticamente estável.

Capítulo 5

Controlabilidade e Observabilidade

5.1 Controlabilidade

Definição 5.1. Um sistema é dito controlável se e somente se for possível, por meio da entrada, levar o sistema de um estado inicial $x(t) = x_t$ para *qualquer* outro estado $x(T) = x_T$ em um tempo *finito* $T - t \geq 0$.

Note que as palavras em destaque *qualquer* e *finito* desempenham um papel crucial na definição de controlabilidade. Se for possível, somente, levar o sistema de *alguns* estados para *alguns* outros, então o sistema é dito não controlável. Do mesmo modo, o sistema é igualmente não controlável se for necessário um tempo infinito para ir de um estado inicial arbitrário para qualquer outro estado final.

Para sistemas lineares e invariantes no tempo, um teste simples para inferir sobre a controlabilidade do sistema é verificar se a matriz de controlabilidade possui posto completo de linhas.

Definição 5.2. O sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $u \in \mathbb{R}^m$ é controlável se e somente se a matriz de controlabilidade

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}$$

possuir posto completo de linhas, ou seja, $\text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) = n$.

Para sistemas do tipo SISO, o teste acima é equivalente a $\det(\text{Ctrb}(A, B)) \neq 0$.

Exemplo 5.1. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= [7 \ 6 \ 4 \ 2] x \end{aligned}$$

A matriz de controlabilidade do sistema é dada por

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -10 & 28 \\ 2 & -6 & 18 & -54 \\ -1 & 3 & -9 & 27 \end{bmatrix}$$

cujos determinantes são $\det(\text{Ctrb}(A, B)) = 0$. De fato, a quarta linha da matriz de controlabilidade corresponde à soma da primeira e da segunda linhas e, além disso, a terceira linha é múltiplo escalar da quarta linha. Assim, apenas duas linhas da matriz de controlabilidade são linearmente independentes e, conseqüentemente, $\text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) = 2$.

Exemplo 5.2. O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} x\end{aligned}$$

é controlável, pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, B)) = \det([B \ AB]) \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\right) = -6$$

5.2 Observabilidade

Definição 5.3. Um sistema com entrada nula é dito observável se e somente se for possível determinar *qualquer* estado (arbitrário inicial) $x(t) = x_t$ usando somente um registro finito de saídas $y(\tau)$, $\tau \in [t, T]$.

A definição de observabilidade implica que é possível determinar o estado inicial do sistema independentemente da localização desse estado no espaço de estados. Caso somente *alguns*, mas não todos, estados iniciais possam ser determinados, então o sistema é não observável.

A observabilidade de sistemas lineares e invariantes no tempo é certificada se a matriz de observabilidade possuir posto completo de colunas.

Definição 5.4. O sistema linear e invariante no tempo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax \\ y &= Cx\end{aligned}$$

com $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^p$ é observável se e somente se a matriz de observabilidade

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}$$

possuir posto completo de colunas, ou seja, $\text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = n$.

Para sistemas do tipo SISO, o teste acima é equivalente a $\det(\text{Obsv}(A, C)) \neq 0$.

Exemplo 5.3. Considere novamente o sistema do Exemplo 5.1. A matriz de observabilidade é

$$\text{Obsv}(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 2 \\ -10 & -9 & -6 & -3 \\ 16 & 15 & 10 & 5 \\ 28 & -27 & -18 & -9 \end{bmatrix}$$

A matriz de observabilidade do sistema é quadrada, logo a análise pode ser feita tanto pelas linhas quanto pelas colunas da matriz. Note que a segunda e a terceira colunas são múltiplos escalares da quarta coluna. Portanto, esse sistema é não observável, pois a matriz de observabilidade possui somente duas linhas linearmente independentes, ou seja, $\text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = 2$. De fato, $\det(\text{Obsv}(A, C)) = 0$.

Exemplo 5.4. O sistema do Exemplo 5.2 é observável, pois

$$\det(\text{Obsv}(A, C)) = \det \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \right) = 4.$$

5.3 Invariância sob transformações de similaridade

Outro ponto importante a ser frisado é que transformações de similaridade não alteram nem a controlabilidade, nem a observabilidade de um sistema linear e invariante no tempo.

Para demonstrar tal fato, tome um sistema qualquer na forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

e seja $x = T\hat{x}$, com T não singular. Então,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u \\ y &= CT\hat{x} = \hat{C}\hat{x} \end{aligned}$$

O posto da matriz de controlabilidade do sistema transformado é

$$\begin{aligned} \text{rank}(\text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{B})) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \dots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{bmatrix} \right) = \\ \text{rank} \left(T^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) \end{aligned}$$

Logo, o sistema transformado é controlável se e somente se o sistema original também o for.

De forma similar demonstra-se a invariância da observabilidade do sistema sob uma transformação de similaridade. O posto da matriz de observabilidade do sistema transformado é

$$\begin{aligned} \text{rank}(\text{Obsv}(\hat{A}, \hat{C})) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} T \right) \\ &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) \end{aligned}$$

5.4 Decomposição canônica

No Capítulo 2 foram apresentadas as formas canônicas controlável, observável e em bloco de Jordan que são bastante utilizadas na área de controle. Não obstante, visto que existem inúmeras representações no espaço de estados para o mesmo sistema, é interessante ter uma metodologia para levar a representação original em uma das formas canônicas de interesse. De forma similar, é, também, interessante separar a representação do sistema em modos controláveis (observáveis) e não controláveis (não observáveis). A decomposição canônica é empregada, justamente, para realizar a separação dos modos do sistema.

5.4.1 Modos não controláveis

Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{5.1}$$

e a transformação de similaridade $\hat{x} = Px$, com P não singular, que produz

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \underbrace{PAP^{-1}}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{PB}_{\hat{B}} u \\ y &= \underbrace{CP^{-1}}_{\hat{C}} \hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}} u\end{aligned}$$

Se a matriz de controlabilidade do sistema

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

possuir posto $r < n$, então

$$P^{-1} = [q_1 \quad \dots \quad q_r \quad q_{r+1} \quad \dots \quad q_n]$$

é construída com r colunas linearmente independentes de $\text{Ctrb}(A, B)$ e demais colunas arbitrárias para garantir a existência de P^{-1} . Essa transformação leva o sistema para

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_c \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [\hat{C}_c \quad \hat{C}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \hat{x}_c \\ \hat{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \hat{D}u\end{aligned}$$

O subsistema de ordem r

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_c &= \hat{A}_c \hat{x}_c + \hat{B}_c u \\ y &= \hat{C}_c \hat{x}_c + \hat{D}u\end{aligned}$$

é controlável e possui a mesma função de transferência que o sistema original. Os dados associados aos modos controláveis estão no vetor $\hat{x}_c \in \mathbb{R}^r$.

Além disso, a parcela do sistema referente à submatriz $\hat{A}_{\bar{c}}$ não é afetada pela entrada de controle u , por isso é denominada parcela não controlável. Se os autovalores de $\hat{A}_{\bar{c}}$ possuírem parte real negativa, isto é, possuírem dinâmica estável, o sistema como um todo é dito ser *estabilizável*.

5.4.2 Modos não observáveis

Considere novamente o sistema (5.1). Se o posto da matriz de observabilidade do sistema for tal que $\text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = r < n$, então a transformação de similaridade $\hat{x} = Px$, com P não singular dada por

$$P = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ p_{r+1} \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

construída com r linhas linearmente independentes de $\text{Obsv}(A, C)$ e demais linhas arbitrárias, para garantir a existência de P^{-1} , leva o sistema original para

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_o \\ \dot{\hat{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_o & 0 \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_o \\ \hat{B}_{\bar{o}} \end{bmatrix} u$$

$$y = [\hat{C}_o \quad 0] \begin{bmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{x}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \hat{D}u$$

O subsistema de ordem r

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_o &= \hat{A}_o \hat{x}_o + \hat{B}_o u \\ y &= \hat{C}_o \hat{x}_o + \hat{D}u \end{aligned}$$

é observável e possui a mesma função de transferência que o sistema original. Os dados associados aos modos observáveis estão no vetor $\hat{x}_o \in \mathbb{R}^r$.

Ademais, o sistema (5.1) é dito *detectável* se a parcela referente aos modos não observáveis $\hat{A}_{\bar{o}}$ possuir dinâmica estável, ou seja, autovalores com parte real negativa.

Exemplo 5.5. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1 \quad 0] x \end{aligned}$$

A função de transferência desse sistema é

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{-2}{s+3}$$

Note que dois modos próprios não aparecem na função de transferência do sistema. O sistema é não controlável, pois

$$\begin{aligned} \det(\text{Ctrb}(A, B)) &= \det([B \quad AB \quad A^2B]) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -3 & 9 & -27 \\ 9 & -27 & 81 \end{bmatrix}\right) = 0, \\ \text{rank}(\text{Ctrb}(A, B)) &= 1 \end{aligned}$$

Definindo a transformação

$$P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\hat{A} = P_c A P_c^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -20 & -6 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = P_c B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = C P_c^{-1} = [-2 \quad 1 \quad 0]$$

Note que as parcelas controlável (autovalor -3) e não controlável (autovalores -1 e -2) aparecem separadas no sistema transformado.

O sistema é, também, não observável, pois

$$\det(\text{Obsv}(A, C)) = \det \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & -11 & -5 \end{bmatrix} \right) = 0, \quad \text{rank}(\text{Obsv}(A, C)) = 2$$

Definindo

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\hat{A} = P_o A P_o^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 0 \\ -6 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = P_o B = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = C P_o^{-1} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

No sistema transformado, os modos observáveis (autovalores -2 e -3) e não observáveis (autovalor -1) aparecem dissociados.

Capítulo 6

Projeto de Controladores no Espaço de Estados

Nos capítulos anteriores foi apresentado um vasto material de análise de sistemas no espaço de estados. Esse ferramental estudado é utilizado neste capítulo para realizar a síntese de controladores por realimentação de estados para sistemas lineares invariantes no tempo.

6.1 Realimentação de estados

A técnica de realimentação de estados consiste em projetar um ganho $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ de modo que cada uma das n componentes do ganho multiplique uma variável de estado, a fim de sintetizar o sinal de controle $u(t)$. Note que o número de componentes do ganho deve ser igual à ordem do sistema para o qual se deseja projetar a lei de controle. Isso se deve ao fato de que, para alocar precisamente todos os polos de um sistema de ordem n em posições pré-determinadas no espaço de estados, é necessário um controlador com, no mínimo, n parâmetros.

Uma hipótese essencial para aplicação da técnica de realimentação de estados é de que haja acesso a todos os estados do sistema, obrigando, portanto, o projetista a medir as n variáveis de estado, ou, caso não seja possível fazê-lo, estimar tais variáveis. Geralmente, é muito forte a hipótese de se ter acesso a todos os estados do sistema, logo observadores de estados podem ser concebidos com o intuito de estimar os estados não acessíveis. Os observadores de estados serão foco de estudo no próximo capítulo.

Considere o sistema na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, & x(0) &= x_0 \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{6.1}$$

para o qual deseja-se projetar uma lei de controle na forma

$$u = K(Mr - x)\tag{6.2}$$

que aloque os polos em malha fechada em posições pré-determinadas, sendo K o ganho de realimentação de estados a ser projetado e M um ganho de entrada (pré-filtro) cuja finalidade é assegurar o desempenho em regime permanente. A estrutura geral de controle por realimentação de estados é apresentada na Figura 6.1.

O sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + BKM r, & x(0) &= x_0 \\ y &= (C - DK)x + DKMr\end{aligned}$$

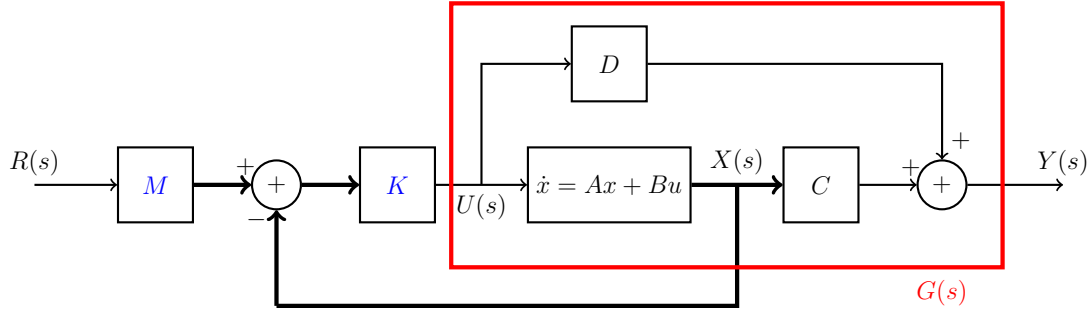


Figura 6.1: Estrutura de controle por realimentação de estados.

cuja função de transferência é

$$\begin{aligned} H(s) &= (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}BKM + DKM \\ &= ((C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D)KM \end{aligned}$$

Note que a função de transferência evidencia um ponto importante no projeto de controladores por realimentação de estados: é possível projetar separadamente o ganho K e o ganho M . Assim, o projeto resume-se a dois pontos:

1. Projetar K tal que os polos de $F(s) = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1}B + D$ estejam posições especificadas pelo projeto.
2. Projetar M tal que o erro em regime permanente para uma entrada do tipo degrau unitário seja nulo. Utilizando o Teorema do valor final $H(0) = F(0)KM = 1$, ou seja,

$$M = F(0)^{-1}K^T(KK^T)^{-1}. \quad (6.3)$$

Outro ponto de suma importância para um projeto bem sucedido é que o sistema para o qual se deseja projetar o controlador seja controlável. Se o sistema não for controlável, ainda é possível sintetizar uma lei de controle que aloca *parte* dos polos em malha fechada em posições pré-especificadas. No entanto, a resposta do sistema pode não ser a desejada ou o sistema pode divergir, caso exista algum polo instável não controlável.

Para projetar o ganho de realimentação de estados, considere que a entrada $r(t) = 0$ e que o ganho K seja dado por

$$K = [k_0 \quad k_1 \quad \cdots \quad k_{n-1}]$$

Ademais, assuma, por hora, que o sistema (6.1) esteja na forma canônica controlável. A equação característica do sistema em malha fechada é

$$\begin{aligned} \det(sI - (A - BK)) &= s^n + (a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + a_0 + k_0 \\ &= s^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k_i)s^i \end{aligned} \quad (6.4)$$

Deseja-se alocar os polos do sistema em malha fechada nas posições p_1, p_2, \dots, p_n . Para tanto, computa-se o polinômio

$$Q(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = s^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i s^i$$

e igualam-se os coeficientes de mesmo grau com o polinômio característico do sistema (6.4). Desse modo, os ganhos de controle são tais que $k_i = q_i - a_i$, $i = 0, \dots, n-1$, ou seja,

$$K = [q_0 - a_0 \quad q_1 - a_1 \quad \cdots \quad q_{n-1} - a_{n-1}]$$

Exemplo 6.1. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] x\end{aligned}$$

Deseja-se projetar uma lei de controle que aloque os polos em malha fechada do sistema nas posições $p_1 = -2 + j4$, $p_2 = -2 - j4$ e $p_3 = -10$ e apresente erro nulo no seguimento da referência.

Primeiramente, deve-se verificar se o sistema é controlável para garantir que os polos do sistemas em malha fechada possam ser alocados em posições arbitrárias. A matriz de controlabilidade do sistema é dada por

$$\text{Ctrb}(A, B) = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \end{bmatrix}$$

e $\det(\text{Ctrb}(A, B)) = -1$, portanto, o sistema é controlável.

O polinômio característico do sistema em malha fechada, em função do ganho K , é

$$\det(sI - (A - BK)) = s^3 + (6 + k_2)s^2 + (5 + k_1)s + 1 + k_0$$

e o polinômio correspondente aos polos em malha fechada é

$$Q(s) = (s + 2 - j4)(s + 2 + j4)(s + 10) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$$

Igualando os coeficientes de mesmo grau de ambos os polinômios, tem-se

$$6 + k_2 = 14 \Rightarrow k_2 = 8, \quad 5 + k_1 = 60 \Rightarrow k_1 = 55, \quad 1 + k_0 = 200 \Rightarrow k_0 = 199.$$

Portanto, a lei de controle procurada é

$$K = [199 \ 55 \ 8].$$

De posse do ganho de controle, resta determinar M para que o erro em regime permanente para uma entrada do tipo degrau seja nulo. A partir da relação (6.3) tem-se

$$M = F(0)^{-1} K^T (K K^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.9323 \\ 0.2577 \\ 0.0375 \end{bmatrix}.$$

A resposta do sistema em malha fechada para o controle projetado é apresentado na Figura 6.2.

Por outro lado, o sistema no espaço de estados (6.1) pode não estar na forma canônica controlável, sendo, portanto, necessário determinar uma transformação de similaridade T que leve o sistema original (A, B, C, D) à sua forma controlável $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \underbrace{TAT^{-1}}_{\hat{A}} \hat{x} + \underbrace{TB}_{\hat{B}} u, \quad \hat{x}(0) = Tx_0 \\ y &= \underbrace{CT^{-1}}_{\hat{C}} \hat{x} + \underbrace{D}_{\hat{D}} u \end{aligned}$$

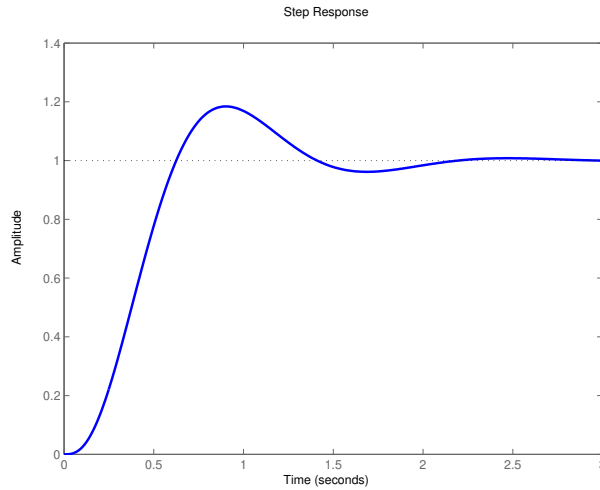


Figura 6.2: Resposta do sistema em malha fechada para o sistema do Exemplo 6.1.

Aplica-se, então, o procedimento apresentado acima ao sistema transformado, obtendo o ganho de controle \hat{K} . O ganho de realimentação do sistema transformado se relaciona com o ganho do sistema original segundo $K = \hat{K}T$. Uma forma sistemática de determinar a transformação T é pela relação

$$T^{-1} = \text{Ctrb}(A, B) \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{B})^{-1}$$

$$= [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

sendo α_i , $i = 0, \dots, n-1$, os coeficientes do polinômio característico

$$\Delta(s) = \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

Exemplo 6.2. Considere o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -26/15 & 2/15 & -1 \\ 52/15 & 41/15 & 3 \\ -37/5 & -41/5 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/15 \\ -2/15 \\ 2/5 \end{bmatrix} u$$

$$y = [2 \ 1 \ 0] x$$

Deseja-se projetar uma lei de controle que aloque os polos em malha fechada do sistema nas posições $p_1 = -2 + j4$, $p_2 = -2 - j4$ e $p_3 = -10$ e apresente erro nulo no seguimento da referência.

O sistema é controlável, pois

$$\det(\text{Ctrb}(A, B)) = \det \left(\begin{bmatrix} 1/15 & -8/15 & 49/15 \\ -2/15 & 16/15 & -83/15 \\ 2/5 & -11/5 & 53/5 \end{bmatrix} \right) = -1/15 \neq 0$$

O sistema não se encontra na forma canônica controlável. Logo, uma transformação T deve ser determinada de modo a levar o sistema à forma desejada. Assim,

$$T^{-1} = \text{Ctrb}(A, B) \text{Ctrb}(\hat{A}, \hat{B})^{-1} = \text{Ctrb}(A, B) \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & -2/15 & 1/15 \\ 1/5 & 4/15 & -2/15 \\ -3/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

pois $\Delta(s) = \det(sI - A) = s^3 + 6s^2 + 5s + 1$.

O sistema transformado é

$$\hat{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = TB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = CT^{-1} = [1 \ 0 \ 0]$$

Note que o sistema transformado é exatamente o sistema apresentado no Exemplo 6.1; assim, os ganhos buscados são

$$\hat{K} = [199 \ 55 \ 8] \Rightarrow K = [429/5 \ -154/15 \ 137/15]$$

$$M = F(0)^{-1}K^T(KK^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3158 \\ -0.0378 \\ 0.0336 \end{bmatrix}$$

6.1.1 Equação de Lyapunov

A determinação do ganho de realimentação de estados K pode ser feita utilizando a equação de Lyapunov.

Considere o sistema (6.1) com a lei de controle (6.2). Se o sistema for controlável e os polos em malha fechada não coincidirem com os autovalores da matriz A , então o ganho K pode ser determinado por meio da equação de Lyapunov de acordo com o seguinte procedimento:

1. Escolha uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com os autovalores desejados.
2. Escolha um ganho \hat{K} arbitrário tal que o par (F, \hat{K}) seja observável.
3. Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov

$$AT - TF = B\hat{K}$$

4. O ganho K é dado por

$$K = \hat{K}T^{-1}$$

Exemplo 6.3. Considere novamente o sistema do Exemplo 6.1 dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] x \end{aligned}$$

Os polos em malha fechada devem ser alocados nas posições $p_1 = -2 + j4$, $p_2 = -2 - j4$ e $p_3 = -10$, ou seja, o polinômio característico é $\Delta(s) = s^3 + 14s^2 + 60s + 200$. Logo, uma escolha para a matriz F é

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -200 & -60 & -14 \end{bmatrix}$$

Com $\hat{K} = [1 \ 0 \ 0]$, o par (F, \hat{K}) é observável. Assim, resolvendo a equação de Lyapunov, tem-se

$$T = \begin{bmatrix} -0.0109 & -0.0036 & -0.0002 \\ 0.0464 & 0.0031 & -0.0004 \\ 0.0762 & 0.0693 & 0.0084 \end{bmatrix}$$

e o ganho de realimentação buscado é

$$K = \hat{K}T^{-1} = [199 \quad 55 \quad 8]$$

que corresponde ao ganho previamente determinado.

6.2 Regulador linear quadrático

As técnicas apresentadas na seção anterior são bastante úteis para a determinação de ganhos de realimentação para sistemas SISO. Entretanto, a posição dos polos em malha fechada deve ser especificada *a priori*, o que é uma tarefa complicada de se fazer. Polos estáveis muito distantes do eixo imaginário implicam em:

- Maior velocidade de resposta do sistema em malha fechada.
- Maior faixa de passagem do sistema em malha fechada e, conseqüentemente, o sistema pode não atenuar de forma satisfatória os ruídos em alta frequência.
- Maiores ganhos de realimentação e, portanto, o controlador deve gerar sinais de grande amplitude para controlar o sistema.

Ademais, a alocação de polos para sistemas MIMO não é totalmente caracterizada por meio das técnicas apresentadas.

Uma forma de se contornar os problemas apresentados é utilizar técnicas de controle ótimo para definir um ganho de realimentação que aloque os polos em malha fechada em posições adequadas. Nesse sentido, ao invés de buscar um ganho que aloque os polos do sistema em posições específicas, busca-se um ganho que minimize um critério de custo J especificado (ou “função de custo”). Essa função de custo consiste, geralmente, de um termo quadrático no estado x e um termo quadrático no sinal de controle u , isto é,

$$J = \int_t^\infty x(\tau)^T Q x(\tau) + u(\tau)^T R u(\tau) d\tau \quad (6.6)$$

sendo $Q \succeq 0$ e $R \succ 0$ matrizes simétricas. O controlador obtido a partir da minimização da função de custo (6.6) caracteriza o chamado Regulador Linear Quadrático (LQR, na sigla em inglês).

As matrizes Q e R caracterizam, respectivamente, a penalidade referente ao desvio do estado x com relação à origem e o custo de controle. Tais matrizes são parâmetros de projeto fornecidos e devem ser escolhidas de forma ponderada entre si, ou seja, incrementar ou decrementar na mesma proporção ambas as matrizes não altera a lei de controle projetada e, conseqüentemente, o custo J será o mesmo. Se $Q \gg R \succ 0$, então o desvio dos estados com relação à origem é mais penalizado do que o sinal de controle; o sinal de controle pode assumir valores elevados (risco de saturação dos atuadores); o sistema responde com maior velocidade. Por outro lado, se $R \gg Q \succeq 0$, o sinal de controle tem maior peso no cálculo do critério de custo; as componentes do ganho de controle assumem valores baixos; o sistema demora mais para responder.

Considere o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0$$

com a lei de controle

$$u = -Kx$$

Substituindo a lei de controle em (6.6), tem-se

$$J = \int_t^\infty x(\tau)^T (Q + K^T R K) x(\tau) d\tau$$

Por hipótese, o sistema em malha fechada é assintoticamente estável; logo $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. O custo J pode, então, ser minimizado definindo

$$\begin{aligned} x(t)^T P x(t) &= \int_t^\infty x(\tau)^T (Q + K^T R K) x(\tau) d\tau \implies \\ \frac{d}{dt} x(t)^T P x(t) &= -x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) \end{aligned}$$

sendo $P = P^T \succ 0$.

Expandindo a relação acima, tem-se

$$-x^T (Q + K^T R K) x = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A - BK)^T P x + x^T P (A - BK) x$$

Note que ambos os lados da relação devem valer para quaisquer valores de $x(t)$, portanto

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) + Q + K^T R K = 0$$

que corresponde a uma equação de Lyapunov para o sistema em malha fechada. Essa equação deve ser resolvida simultaneamente para K e P , o que nem sempre é possível. Felizmente, tem-se por hipótese que $R \succ 0$, sendo não singular. Assim, completando quadrados, a equação acima pode ser reescrita como

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P + (K^T - PBR^{-1})R(K - R^{-1}B^T P) = 0$$

Nesse formato, o ganho K está restrito ao termo

$$(K^T - PBR^{-1})R(K - R^{-1}B^T P) \succeq 0$$

logo, escolhendo K tal que

$$K = R^{-1}B^T P \tag{6.7}$$

resulta na equação algébrica de Riccati

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{6.8}$$

que independe do ganho K .

Portanto, o ganho de realimentação de estados K que minimiza o critério de desempenho J é computado segundo o procedimento:

1. Determine a solução única $P = P^T \succ 0$ da equação algébrica de Riccati (6.8);
2. Calcule o ganho K por meio da relação (6.7), utilizando a matriz P encontrada no passo anterior.

O valor ótimo do critério de custo pode ser determinado por

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt \\ &= -x^T P x \Big|_0^\infty = -x(\infty)^T P x(\infty) + x(0)^T P x(0) \\ &= x_0^T P x_0 \end{aligned}$$

Exemplo 6.4. Considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0 \ 0] x\end{aligned}$$

Determine o ganho de realimentação de estados K de um regulador linear quadrático, considerando $Q = I_3$ e $R = 10^{-3}$. Em seguida, determine o ganho M que garante que a saída siga uma entrada do tipo degrau com erro nulo.

Utilizando a equação (6.8), tem-se

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \implies P = \begin{bmatrix} 1.7701 & 1.0614 & 0.0306 \\ 1.0614 & 1.8322 & 0.0511 \\ 0.0306 & 0.0511 & 0.0277 \end{bmatrix}$$

Assim, o ganho de realimentação de estados, calculado por meio da equação (6.7), é

$$K = R^{-1} B^T P = [30.6386 \ 51.1053 \ 27.7374]$$

Finalmente, o valor do ganho M que garante o correto seguimento de uma entrada do tipo degrau é dado por

$$M = F(0)^{-1} K^T (K K^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.2244 \\ 0.3743 \\ 0.2031 \end{bmatrix}$$

A comparação entre as respostas do controlador sintetizado no Exemplo (6.1) e o controlador do tipo LQR para uma entrada do tipo degrau unitário é apresentada na Figura 6.3.

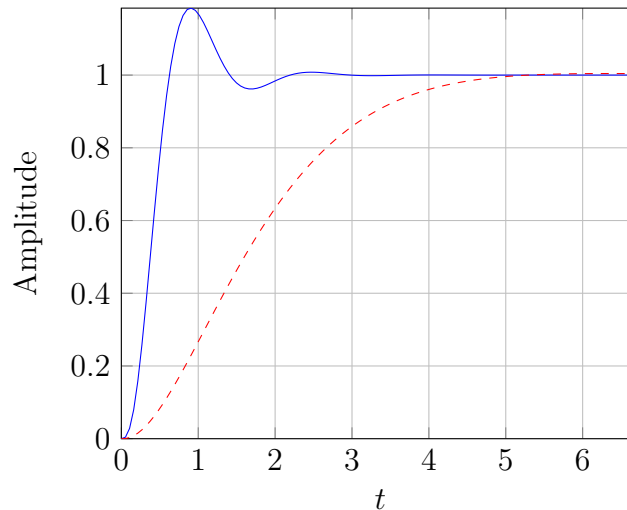


Figura 6.3: Resposta do sistema em malha fechada para o sistema do Exemplo 6.1 com um controlador por alocação de polos (curva contínua) e com um controlador do tipo LQR (curva tracejada).

Capítulo 7

Observadores de Estado

A principal vantagem do projeto de controladores por realimentação de estados consiste em poder alocar todos os polos do sistema em posições convenientes do espaço de estados. No entanto, nem sempre todos os estados do sistema estão disponíveis para realimentação, seja por impossibilidades físicas de instalar um sensor, seja por razões de custo. Uma maneira de contornar esse contratempo é estimar os estados do sistema por meio de sua saída medida e, de posse dos estados estimados, realizar a realimentação como se fossem os estados verdadeiros. Observadores são estimadores de estado para sistemas determinísticos.

Um observador de estados é a estrutura que permite estimar os estados internos de um sistema dinâmico a partir da saída do sistema e do sinal de entrada fornecido. A estrutura geral de um observador, como proposto por Luenberger, é mostrada na Figura 7.1.

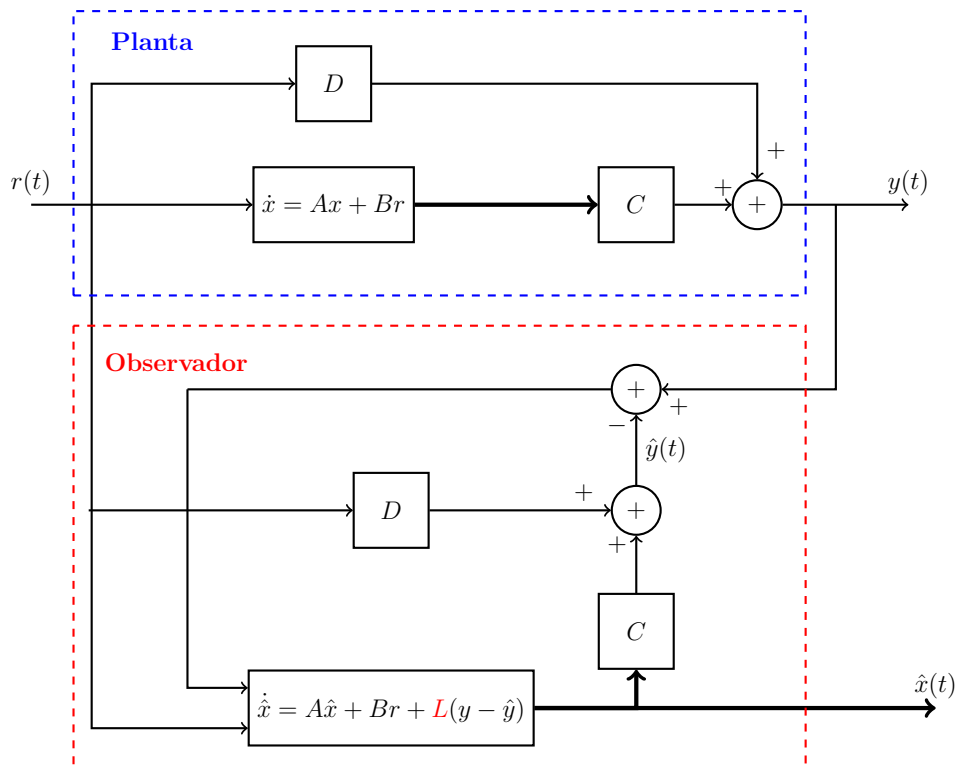


Figura 7.1: Estrutura de um observador de estados.

Para sintetizar um observador de estados é necessário conhecer com boa precisão o modelo do sistema que se deseja controlar, para que as estimativas dos estados sejam fieis aos valores reais. Ademais, como as condições iniciais do sistema físico e do estimador são, geralmente, diferentes, é necessário que a dinâmica do observador seja rápida o suficiente para que o estado estimado convirja para o estado verdadeiro no menor tempo possível.

O modelo da planta é

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Br \\ y &= Cx + Dr\end{aligned}\tag{7.1}$$

e, a partir da Figura 7.1, as equações que descrevem o observador são

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Br + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Dr\end{aligned}\tag{7.2}$$

Note que a comparação entre a saída real e a saída estimada é fundamental para assegurar que o estado estimado convirja para o estado verdadeiro. Além disso, o ganho $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ deve ser determinado para que $\hat{x}(t)$ se aproxime de $x(t)$ de modo adequado.

Definindo, então, o erro de estimação como

$$e = x - \hat{x}$$

a dinâmica do erro é dada por

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Br - (A\hat{x} + Br + L(Cx + Dr - C\hat{x} - Dr)) \\ &= (A - LC)(x - \hat{x}) \\ &= \hat{A}e\end{aligned}\tag{7.3}$$

Portanto, a dinâmica do erro é descrita por um sistema autônomo, isto é, independente da entrada. Para que o erro se aproxime de zero assintoticamente, é necessário que a matriz $\hat{A} = A - LC$ possua autovalores no semiplano esquerdo do plano complexo. Ademais, alocando adequadamente os autovalores da matriz \hat{A} , pode-se controlar a taxa com a qual o erro tende a zero. Para alocar arbitrariamente os autovalores da matriz A no plano complexo, é necessário que o par (A, C) seja observável.

O problema de alocação de polos para o observador de estados pode ser encarado como o problema dual de alocação de polos para o controlador por realimentação de estados. De fato, sendo $A - BK$ a matriz em malha fechada no problema de controle, transpondo a matriz \hat{A} tem-se $\hat{A}^T = A^T - C^T L^T$. Logo, escolhendo $A = A^T$, $B = C^T$ e $K = L^T$, pode-se aplicar qualquer técnica para alocação de polos apresentada no Capítulo 6.

7.1 Equação de Lyapunov

Suponha que o sistema (7.1) seja observável e que se deseja alocar os polos de \hat{A} em posições distintas dos polos da matriz A . O ganho L do observador pode, então, ser determinado por meio da equação de Lyapunov segundo o seguinte procedimento:

1. Escolha uma matriz $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com os autovalores desejados.
2. Escolha um ganho \hat{L} arbitrário tal que o par (F, \hat{L}) seja controlável.
3. Obtenha a solução única T da equação de Lyapunov

$$TA - FT = \hat{L}C$$

4. A equação de estado

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + TBr + \hat{L}(y - Dr) \\ \hat{x} &= T^{-1}z\end{aligned}$$

gera um estimador para x .

5. O ganho L é dado por

$$L = T^{-1}\hat{L}$$

Definindo $e = z - Tx$, tem-se

$$\dot{e} = \dot{z} - T\dot{x} = Fz + TBr + \hat{L}(Cx + Dr - Dr) - TA x - TBr$$

e como $TA = FT + \hat{L}C$

$$\dot{e} = Fz + \hat{L}Cx - (FT + \hat{L}C)x = F(z - Tx) = Fe$$

Se F é estável, então $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ e, conseqüentemente, $z \rightarrow Tx$. Portanto, $T^{-1}z$ é um estimador para x .

Exemplo 7.1. Considere o sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0714 & -0.1429 & -0.0714 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= [1 \ 0 \ 0] \end{aligned}$$

O polo mais rápido do sistema é -0.9 , logo projetamos um observador com todos os seus polos em -3 , ou seja, com a dinâmica um pouco mais rápida que a do sistema. O polinômio característico é $\Delta(s) = s^3 + 9s^2 + 27s + 27$, logo

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -27 & -27 & -9 \end{bmatrix}$$

Com $\hat{L} = [1 \ 0 \ 0]^T$, o par (F, \hat{L}) é controlável. Assim, resolvendo a equação de Lyapunov, tem-se

$$T = \begin{bmatrix} 2.2832 & 0.0989 & 1.3347 \\ -3.1879 & -0.1907 & -2.2797 \\ 3.0252 & 0.3258 & 3.1600 \end{bmatrix}$$

e o ganho do observador buscado é

$$L = T^{-1}\hat{L} = \begin{bmatrix} 7.9286 \\ 180.0147 \\ -26.1482 \end{bmatrix}$$

Na Figura 7.2 são apresentados os comportamentos dos estados do sistema (curvas contínuas), assumindo $x(0) = [1 \ \pi/3 \ 0]^T$ e $r(t) = \pi/3$ para todo $t \geq 0$, e dos estados estimados pelo observador (curvas tracejadas), partindo de condições iniciais nulas. Note que após um transi-tório de, aproximadamente, 5 s , os estados estimados correspondem aos estados verdadeiros do sistema.

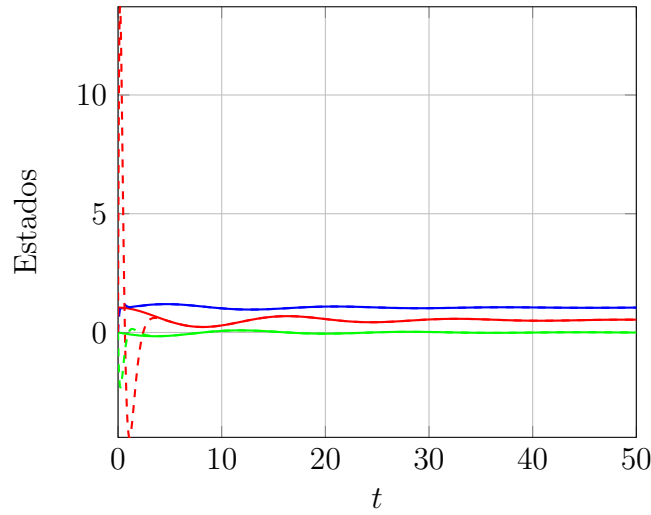


Figura 7.2: Dinâmica dos estados do sistema e dos estados estimados para o sistema do Exemplo 7.1.

7.2 Equação algébrica de Riccati

O observador projetado na seção anterior não presumia a existência de ruídos aditivos afetando a dinâmica do sistema. De modo mais generalista, a dinâmica do sistema é dada por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Br + w \\ y &= Cx + Dr + v\end{aligned}\tag{7.4}$$

sendo $w(t)$ e $v(t)$ dois ruídos brancos não correlacionados.

O erro de observação, nesse caso, é regido pela seguinte equação

$$\dot{e} = \hat{A}e + w - Lv$$

a partir da qual pode-se concluir que o aumento do ganho do observador faz com que a dinâmica do erro seja mais rápida, entretanto, intensifica a influência do ruído aditivo na dinâmica, tornando o processo de estimação menos confiável. Assim, é necessário estabelecer um compromisso entre uma boa estimação e rejeição a ruídos.

Supondo que as matrizes de covariância dos ruídos aditivos sejam¹ $\mathcal{E}[ww^T] = W \succeq 0$ e $\mathcal{E}[vv^T] = V \succ 0$ e, além disso, sendo os ruídos não correlacionados, tem-se $\mathcal{E}[wv^T] = 0$. O melhor compromisso é estabelecido por meio da resolução do problema linear quadrático

$$AP + PA^T + W - PC^TV^{-1}CP = 0\tag{7.5}$$

que fornece o valor ótimo do ganho do observador dado por

$$L = PC^TV^{-1}\tag{7.6}$$

Exemplo 7.2. Considere o sistema do Exemplo 7.1 sujeito a ruídos aditivos w e v . As matrizes de covariância dos ruídos são, respectivamente, $W = 10^{-2}BB^T$ e $V = 10^{-4}$.

Aplicando a equação algébrica de Riccati (7.5), tem-se

$$AP + PA^T + W - PC^TV^{-1}CP = 0 \implies P = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.9044 & 0.0006 & 0.0060 \\ 0.0006 & 0.0244 & 0 \\ 0.0060 & 0 & 0.0035 \end{bmatrix}$$

¹O símbolo $\mathcal{E}[\cdot]$ corresponde ao operador valor esperado.

e o ganho do observador, obtido a partir de (7.6), é

$$L = PC^TV^{-1} = \begin{bmatrix} 9.0439 \\ 0.0060 \\ 0.0603 \end{bmatrix}$$

Na Figura 7.3a são apresentados os estados estimados para o sistema proposto sujeito a ruídos de entrada utilizando o ganho de observação determinado no Exemplo 7.1. Por sua vez, a Figura 7.3b apresenta os estados estimados por meio do ganho de observação obtido a partir da equação de Riccati. Note que as estimativas são menos suscetíveis aos ruídos de entrada quando é utilizado o ganho advindo da equação de Riccati.

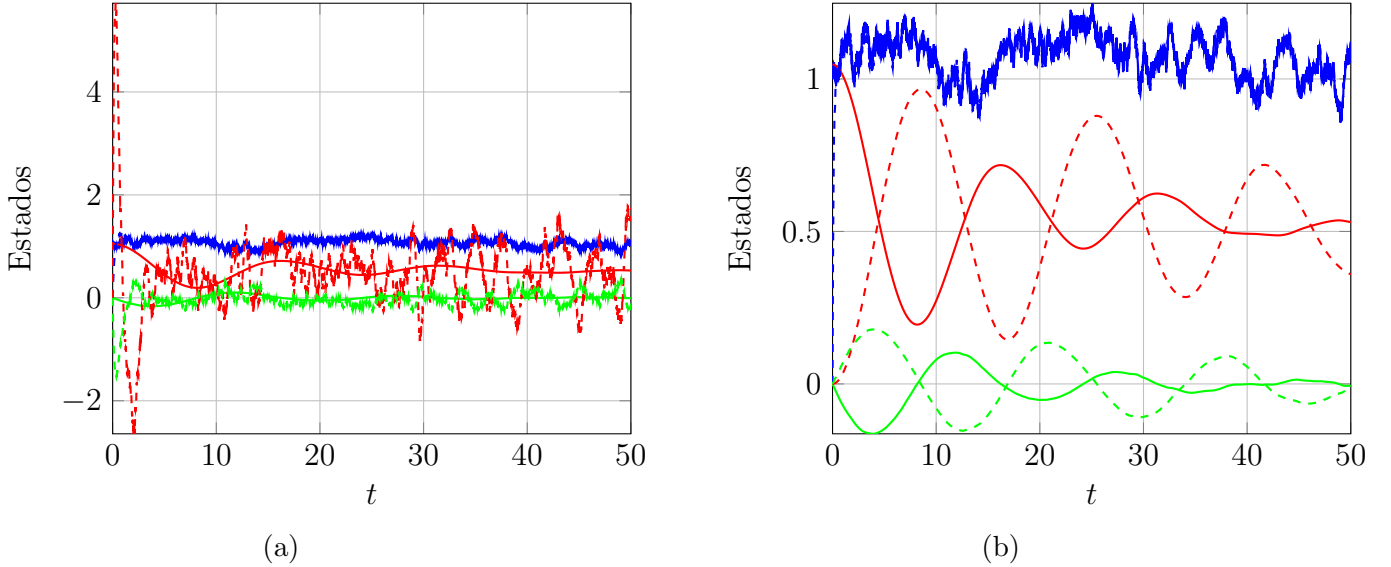


Figura 7.3: Estados verdadeiros (curvas contínuas) e estados estimados (curvas tracejadas) para um sistema sujeito a ruído de entrada por meio do observador projetado no Exemplo 7.1 (Figura 7.3a) e por meio do ganho ótimo obtido por meio da equação de Riccati (Figura 7.3b).

Fato curioso é que os estados estimados e os estados verdadeiros na Figura 7.3b apresentam uma defasagem de 180° . Tal característica é perfeitamente aceitável na estimação de parâmetros, pois deseja-se inferir os estados a partir de uma saída qualquer medida. Assim, o estimador tende a ajustar os estados internos da melhor forma para que a mesma saída seja observada.

7.3 Estimadores de ordem reduzida

Anteriormente foram projetados observadores com a mesma ordem do sistema, isto é, observadores de ordem completa. Todavia, é razoável assumir que parte das variáveis de estado pode ser mensurada na saída do sistema, não sendo, portanto, necessário realizar sua estimação. Assim, o projeto de observadores de estado pode se restringir a estimar as $n - q$ variáveis não mensuráveis do sistema, sendo n a ordem do sistema e q o número de variáveis medidas diretamente.

Para se determinar um estimador de ordem reduzida, considere por simplicidade o sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

com $\text{rank}(C) = q$. Defina a transformação de similaridade

$$X = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}$$

com $R \in \mathbb{R}^{(n-q) \times n}$ escolhida de modo que exista $X^{-1} = Y$, que por sua vez pode ser particionada na forma

$$Y = X^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix}, \quad Y_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}, \quad Y_2 \in \mathbb{R}^{n \times (n-q)}$$

Como $XY = I$, tem-se

$$I = XY = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CY_1 & CY_2 \\ RY_1 & RY_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{bmatrix}$$

Aplicando a transformação de similaridade $\bar{x} = Xx$ no sistema, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= XAX^{-1}\bar{x} + XBu \\ y &= CX^{-1}\bar{x} = CY\bar{x} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x} \end{aligned}$$

que, reescrevendo em termos de partições, leva a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \end{bmatrix} u \\ y &= CX^{-1}\bar{x} = CY\bar{x} = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \bar{x}_1 \end{aligned}$$

Note que a saída y do sistema transformado coincide com os primeiros q estados \bar{x}_1 , então somente os demais $n - q$ estados do vetor \bar{x} precisam ser estimados.

A equação de estados pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \bar{A}_{11}\bar{x}_1 + \bar{A}_{12}\bar{x}_2 + \bar{B}_1u \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{B}_2u \end{aligned}$$

Definindo, então,

$$\bar{u} = \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{B}_2u, \quad w = \dot{y} - \bar{A}_{11}\bar{x}_1 - \bar{B}_1u$$

tem-se

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_2 &= \bar{A}_{22}\bar{x}_2 + \bar{u} \\ w &= \bar{A}_{12}\bar{x}_2 \end{aligned}$$

Logo, pode-se inferir que o par (A, C) é observável se e somente se o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ o for. Um estimador para $\hat{\bar{x}}_2$ pode ser construído na forma

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}w + \bar{u} = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{L}(\dot{y} - \bar{A}_{11}\bar{x}_1 - \bar{B}_1u) + \bar{A}_{21}\bar{x}_1 + \bar{B}_2u$$

Definindo $z = \hat{\bar{x}}_2 - \bar{L}y$, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})(z + \bar{L}y) + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11})y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u \\ \dot{z} &= (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})z + ((\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})\bar{L} + (\bar{A}_{21} - \bar{L}\bar{A}_{11}))y + (\bar{B}_2 - \bar{L}\bar{B}_1)u \end{aligned}$$

sendo que $z + \bar{L}y$ é uma estimativa para \bar{x}_2 .

Com o erro dado por

$$e = \bar{x}_2 - (z + \bar{L}y)$$

sua equação dinâmica é

$$\dot{e} = \dot{\hat{x}}_2 - (\dot{z} + \bar{L}\dot{y}) = (\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12})e$$

Por hipótese, o par $(\bar{A}_{22}, \bar{A}_{12})$ é observável, conseqüentemente, é possível alocar os autovaleiros de $\bar{A}_{22} - \bar{L}\bar{A}_{12}$ em posições arbitrárias do plano complexo.

O estado estimado é composto pela informação exata obtida da saída y mais a estimativa $z + \bar{L}y$, ou seja,

$$\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\hat{x}}_1 \\ \hat{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z + \bar{L}y \end{bmatrix}$$

Voltando às coordenadas originais, tem-se

$$\hat{x} = X^{-1}\hat{\hat{x}} = Y\hat{\hat{x}} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z + \bar{L}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ \bar{L} & I_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

O ganho de observação \bar{L} pode ser determinado utilizando quaisquer métodos apresentados anteriormente para a síntese de estimadores de ordem completa.

Exemplo 7.3. Considere o sistema do Exemplo 7.1 lembrado a seguir

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0.0714 & -0.1429 & -0.0714 \end{array} \right] x + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Neste exemplo será projetado um observador de ordem reduzida para o sistema. Note que a matriz C de saída encontra-se na forma $[I \ 0]$, logo não é necessário realizar uma transformação de similaridade no sistema. Definindo as partições como indicadas nas matrizes do sistema, escolhendo todos os polos do observador em -3 e $\hat{\hat{L}} = [I \ 0]^T$, aplica-se a equação de Lyapunov ao sistema reduzido obtendo o ganho de observação

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 61.9811 \\ -5.9286 \end{bmatrix}$$

A Figura 7.4 apresenta a evolução temporal dos estados verdadeiros do sistema (curvas contínuas) e dos estados estimados pelo observador de ordem reduzida (curvas tracejadas). Note que o tempo necessário para que os estados estimados convirjam para os estados verdadeiros do sistema é inferior a 5 s, como aconteceu no Exemplo 7.1. Dado que o primeiro estado do sistema é medido na saída (não é necessária sua estimação), o erro de estimação associado é nulo para todo instante de tempo.

7.4 Realimentação de estados a partir dos estados estimados

Considere a representação no espaço de estados do sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{7.7}$$

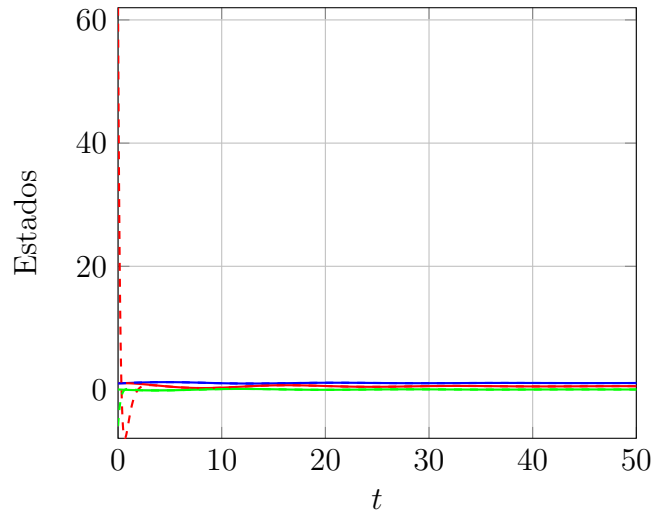


Figura 7.4: Dinâmica dos estados do sistema e dos estados estimados por um observador de ordem reduzida para o sistema do Exemplo 7.1.

e a representação de estados do observador

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= C\hat{x} + Du\end{aligned}\tag{7.8}$$

Devido à impossibilidade de se medir todos os estados, deseja-se projetar uma lei de controle por realimentação de estados na forma

$$u = K(Mr - \hat{x})\tag{7.9}$$

isto é, o sinal de controle depende dos estados estimados pelo observador e não mais dos estados internos do sistema. A Figura 7.5 apresenta a estrutura padrão de um sistema sendo controlado por um controlador baseado em observador.

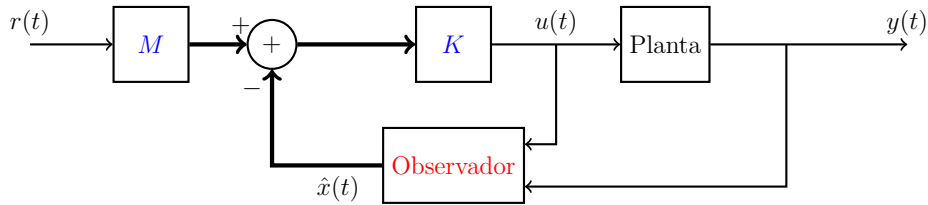


Figura 7.5: Estrutura de controle baseado em observador para sistemas dinâmicos.

Substituindo a lei de controle (7.9) tanto na equação do sistema (7.7) quanto na equação do observador (7.8) e definindo $e = x - \hat{x}$ e $x_a = \begin{bmatrix} x^T & e^T \end{bmatrix}^T$, o sistema aumentado é

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BKM \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= [C - DK \quad DK] \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + DKMr\end{aligned}\tag{7.10}$$

Note que a representação aumentada do sistema possui duas propriedades importantes. A primeira refere-se à equação característica de grau $2n$ dada por

$$\det(sI - (A - BK)) \det(sI - (A - LC)) = 0$$

cujos polos são alocados por meio da escolha do ganho de controle K e do ganho do observador L . Logo, a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada são consequência de escolhas *independentes* de K e L . A segunda propriedade relaciona-se com a função de transferência do sistema aumentado. Aplicando a transformada de Laplace ao sistema (7.10) tem-se

$$H(s) = (C - DK)(sI - (A - BK))^{-1} BKM + DKM$$

que é precisamente a função de transferência do sistema realimentado como se todos os estados estivessem disponíveis. Como feito outrora, o ganho M pode ser determinado posteriormente de modo a assegurar o desempenho em regime permanente do sistema. Tais propriedades são decorrentes devido às estruturas particulares das matrizes que definem o sistema aumentado. Particularmente, a matriz dinâmica é triangular superior e as n últimas linhas da matriz de entrada são nulas.

Tais propriedades advêm de um resultado mais geral denominado *Princípio da Separação*. Tal resultado permite que o procedimento de projeto de servomecanismos seja decomposto em duas partes. Inicialmente, o ganho do observador L é determinado satisfazendo critérios de desempenho restritos à observação e, em seguida, escolhem-se os ganhos de controle K e M para atender aos critérios de desempenho em malha fechada do sistema.