Resumo de Análise Combinatória

A Análise Combinatória se ocupa com a formação sistemática de agrupamentos de elementos escolhidos de uma coleção de objetos, bem como com a determinação do número (contagem) de agrupamentos formados. Na seleção (escolha) de objetos, há dois casos a considerar, conforme haja ou não a possibilidade de repetição na escolha de elementos da coleção. Assim, a Análise Combinatória divide-se em dois campos:

i) Análise Combinatória Simples – quando não há repetição de objetos escolhidos;

ii) Análise Combinatória Completa ou com Repetição – quando é possível haver a repetição de objetos escolhidos da coleção.

Considere-se uma coleção formada por **n** objetos distintos.

Exemplo: A coleção formada por três objetos distintos: {a, b, c}

I. Análise Combinatória Simples

1) Permutação Simples de n objetos: agrupamento formado pela escolha dos n objetos da coleção; nesse caso um agrupamento somente difere de outro apenas pela ordem de seus elementos.

O número de agrupamentos do tipo permutação simples formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)...3.2.1$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, b, c}, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo permutação simples: {(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)}. O número de permutações nesse caso é igual a 6, valor que pode ser calculado pela expressão: $P_3 = 3! = 3.2.1 = 6$

2) Arranjo Simples de classe r de n objetos: agrupamento formado pela escolha de r dentre os n objetos da coleção, considerando-se a ordem de escolha dos r objetos (sendo $r \leq n$); nesse caso, um agrupamento difere de outro pela ordem de seus elementos ou pela sua composição.

O número de agrupamentos do tipo arranjo simples de classe r formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, b, c}, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo arranjo simples de classe 2: {(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c),

(c, b)}. O número arranjos de classe 2 nesse caso é igual a 6, valor que pode ser calculado pela expressão: $A_3^2 = 3.2 = 6$ ou $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

3) Combinação Simples de classe r de n objetos: agrupamento formado pela escolha de r dentre os n objetos da coleção, sem considerar a ordem de escolha dos r objetos; nesse caso, um agrupamento difere de outro apenas pela sua composição.

O número de agrupamentos do tipo combinação simples de classe r formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdot (r-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, b, c}, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo combinação simples de classe 2: {(a, b), (a, c), (b, c)}. O número de combinações de classe 2 nesse caso é igual a 3, valor que pode ser calculado pela expressão: $C_3^2 = \frac{3.\ 2}{2.1} = 3$ ou $C_3^2 = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$

II. Análise Combinatória Completa ou com Repetição

1) Arranjo com Repetição de classe r de n objetos: agrupamento formado pela escolha de r dentre os n objetos da coleção, podendo cada objeto ser escolhido mais de uma vez e considerando-se a ordem de escolha dos r objetos; nesse caso, um agrupamento difere de outro pela ordem de seus elementos ou pela sua composição.

O número de agrupamentos do tipo arranjo com repetição de classe r formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$AR_n^r = n \cdot n \cdot n \ldots \cdot n = n^r$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, b, c}, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo arranjo com repetição de classe 2: {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, a), (b, c), (c, c), (c, a), (c, b)}. O número arranjos com repetição de classe 2 nesse caso é igual a 9, valor que pode ser calculado pela expressão:

$$AR_3^2 = 3^2 = 9$$

2) Combinação com Repetição de classe r de n objetos: agrupamento formado pela escolha de r dentre os n objetos da coleção, podendo cada objeto ser escolhido mais de uma vez mas sem considerar a ordem de escolha dos r objetos; nesse caso, um agrupamento difere de outro apenas pela sua composição.

O número de agrupamentos do tipo combinação com repetição de classe r formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$CR_n^r = C_{n+r-1}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, b, c}, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo combinação com repetição de classe 2: {(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)}. O número combinações com repetição de classe 2 nesse caso é igual a 6, valor que pode ser calculado pela expressão:

$$CR_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6$$

Considere-se uma coleção formada por **n** <u>objetos com **k** classes de repetição</u>, isto é uma coleção em que há r_i objetos iguais na i-ésima classe, com $i = 1, 2, 3, ..., k$ sendo $r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_k = n$.

Permutação com Classes de Repetição: agrupamento formado pela escolha de n objetos, considerando-se que os objetos de cada classe são iguais (indistinguíveis entre si); nesse caso, um agrupamento difere de outro apenas pela ordem de seus elementos de classes distintas.

O número de agrupamentos do tipo permutação com de classes de repetição $r_1, r_2, r_3, ..., r_k$ formados a partir de uma coleção com n objetos é expresso por

$$P_n^{r_1, r_2, ..., r_k} = \frac{n!}{r_1!\, r_2!\, ...\, r_k!}$$

Exemplo: Considerando-se a coleção de três elementos {a, a, b} que tem duas classes de repetição, com 2 e 1 elementos, tem-se os seguintes agrupamentos do tipo permutação dos tres elementos com classes de repetição 2 e 1: {(a, a, b), (a, b, a), (b, a, a)}. O número de permutações dos tres elementos com classes de repetição 2 e 1, nesse caso, é igual a 3, valor que pode ser calculado pela expressão:

$$P_3^{2,\,1} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3$$

Algumas propriedades importantes das combinações

i) Combinações Complementares: $C_n^r = C_n^{n-r}$

ii) Relação de Stiefel:

$$C_{n+1}^{r} = C_n^r + C_n^{r-1}$$

ou, equivalentemente, tem-se

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

iii) Teorema das Linhas do Triângulo de Pascal: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ e $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

iv) Teorema das Colunas do Triângulo de Pascal: $\sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p} = C_{p+n+1}^{p+1}$

v) Teorema das Diagonais do Triângulo de Pascal: $\sum_{k=0}^{p} C_{n+k}^{k} = C_{n+p+1}^{p}$

vi) Relação de Euler: $\sum_{j=0}^{k} C_n^j C_m^{k-j} = C_{m+n}^{k}$

Referências bibliográficas:

- Hoel, Paul G., Port, Sidney C. e Stone, Charles J. Introdução à Teoria da Probabilidade. Livraria Interciência, Rio de Janeiro, RJ, 1978.

- Meyer, Paul L. Probabilidade – Aplicações à Estatística. LTC, Rio de Janeiro, RJ, 1983. 2ª edição.

- Morgado, Augusto César de Oliveira, Carvalho, João Bosco Pitombeira de, Carvalho, Paulo Cezar Pinto e Fernandez, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. IMPA. Gráfica Wagner Ltda, Rio de Janeiro, RJ, 1983, 2ª edição.

- Nogueira, Rio. Lições de Análise Combinatória. Editora Fundo de Cultura S. A. Rio de Janeiro, GB, 1972, 2ª edição.

- Ross, Sheldon. A First Course in Probability. Mac Millan Publishing Company, Inc. New York, NY, 1976.