Material Didático Auxiliar para o Laboratório 3

Laboratório 3

Tema: Variáveis aleatórias discretas

Referência: Capítulo 2 do livro-texto

1. Revisão de representações de distribuição de probabilidade em variáveis aleatórias discretas: função massa de probabilidade, eventos equivalentes, função distribuição acumulada (fda).

2. Exemplo 1: Generalização do exemplo da sequência de lançamentos de uma moeda.

i) Obtenção do espaço amostral e do evento equivalente.

ii) Simulação de 1.000 sequências e comparação da frequência relativa com a verdadeira probabilidade do evento $X = n$.

3. Exemplo 2: Simulando o jogo de São Petersburgo.

i) Revisão das regras do jogo e sua importância histórica.

https://en.wikipedia.org/wiki/St._Petersburg_paradox

ii) Histogramas e FDAs empíricas.

Exemplo 1. Simulação da geração de sequência de lançamentos de uma moeda.

Recomenda-se que sejam estudados os seguintes exemplos.

(i) no livro-texto: exemplo 2.1, página 34, exemplo 2.2, página 35, e exemplo 2.3, página 36.

(ii) nas notas de aula do capítulo 2: exemplo 1b, na página 1; e exemplo 1.b (continuação), página 2.

A ideia de estrutura probabilística do espaço imagem de uma variável aleatória discreta foi exposta em aula a partir do exemplo 1, acima mencionado, a partir do conceito de eventos equivalentes, mencionando que as probabilidades de eventos elementares definidos no espaço imagem, no caso, $R_X = \{0, 1, 2\}$, da variável aleatória X que representa o número eventual de caras nos dois lançamentos da moeda, são determinadas a partir dos eventos equivalentes definidos no espaço no espaço amostral original do experimento aleatório que, nesse caso, correspondente à sequência de resultados possíveis nos dois lançamentos da moeda, ou seja, S = {CC, KC, CK, KK}. Portanto, desse modo pode-se, facilmente, obter as probabilidades dos eventos $P(X = x)$ que são os valores da função de probabilidade $p_X(x)$, para cada valor x de X (em R_X).

Uma das características interessantes desse exemplo é que, por meio da simulação de um certo número de sequências de n lançamentos de uma moeda, é possível obter-se uma aproximação das probabilidades $p_X(x)$ pela frequência relativa de resultados obtidos, no caso x caras, nas simulações realizadas. Essa é a abordagem frequencial do conceito de probabilidade, explicada em aula e apresentada no livro texto. Supondo que a moeda é equilibrada, é possível determinar os valores exatos das probabilidades $p_X(x)$, os quais devem ser aproximados pelas frequências relativas obtidas nas simulações.

Exemplo 2. Simulação do jogo de São Petersburgo.

Recomenda-se que inicialmente sejam estudados (em revisão) o conceito e a definição de valor esperado (expectância) de uma variável aleatória (do tipo discreto) e o seu correspondente cálculo, que são apresentados nas notas de aula do capítulo 3, página 2; é importante também ver as notas (sobre a expectância), abaixo da definição (na página 2). Ainda nesse sentido de rever o material didático, podem ser citados os exemplos 1 a 4 das notas de aula, bem como o exemplo 3.1, nas páginas 75 e 76 do livro-texto, no qual é mostrado o conceito de “jogo honesto” (ou jogo equilibrado), e o problema resolvido 3.1, na página 85 do livro-texto (cálculo da expectância do ganho de um jogador e o “preço justo” em um jogo). Complementarmente, convém examinar também o exemplo 8, na página 6 das notas de aula.

Em seguida, deve ser lido o texto da Wikipedia sobre o jogo de São Petersburgo, que é suficiente para uma boa compreensão do problema. Esse texto também mostra que a solução do (aparente) paradoxo relaciona-se ao uso do conceito de utilidade, que é estudado em Microeconomia. Alguns pontos que merecem reflexão são os seguintes:

i) O cálculo numérico do valor esperado do ganho de um jogador no jogo de São Petersburgo não existe (pois a série correspondente ao cálculo é divergente). O que isso significa?

ii) Entretanto, apesar da constatação acima, o interesse no problema permanece pois ele constitui um desafio do ponto de vista da decisão a ser tomada por um jogado. Isso motivou as seguidas abordagens propostas por vários estudiosos ao longo do tempo. A solução que foi proposta por Daniel Bernoulli é particularmente interessante para os estudantes de economia pois ela envolve um conceito importante – o de utilidade – que é estudado na disciplina de microeconomia. Com efeito, Daniel Bernoulli publicou em 1738 um ensaio seu cujo tema central destacava que o valor de um item não deve se basear (estritamente) em seu preço mas sim na utilidade que ele possui para um indivíduo. Por isso, Bernoulli refutou o conceito clássico de valor esperado uma vez que, para ele, na tomada de decisões em bases racionais os indivíduos buscavam maximizar a utilidade esperada (ao invés do valor esperado). Desse modo, ele empregou uma função utilidade cujo valor esperado é finito.

No estudo do exemplo 2 desse laboratório é interessante analisar e refletir bem sobre as duas questões propostas: (i) a duração média do jogo; e (ii) o valor máximo obtido.