Capítulo 2. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidade

Variáveis Aleatórias Unidimensionais e Variáveis Aleatórias Bidimensionais

2.1 Variável Aleatória Unidimensional Real

Noção Geral de Variável Aleatória

Em muitas situações os resultados de um experimento aleatório são diretamente numéricos ou há interesse em associar um número a esses resultados. Isso conduz à introdução do conceito de variável aleatória.

Exemplo 1. Exemplos de variáveis aleatórias.

Exemplo 1a. Lança-se um dado e observa-se o número de pontos na face voltada para cima.

Exemplo 1b. Uma moeda é lançada duas vezes consecutivamente, observando-se a sequência de resultados e, a seguir, registrando-se o número de "caras" ocorridas nos dois lançamentos.

Exemplo 1c. Uma máquina produz peças de certo tipo. Uma peça é selecionada ao acaso da produção e examinada quanto à presença de defeitos. Se a peça não tiver defeito, é atribuído o número 0 (zero) e se tiver defeito é atribuído o número 1 (um).

Exemplo 1d. A demanda por certo tipo de produto em uma loja, durante uma semana.

Exemplo 1e. Suponha-se que todas as peças produzidas pela máquina considerada no exemplo 1c sejam examinadas, registrando-se o número eventual de peças fabricadas até ser encontrada a primeira peça defeituosa.

Exemplo 1f. Uma lâmpada é ensaiada quanto a sua duração, registrando-se o tempo de funcionamento até queimar (tempo de vida).

Definição de Variável Aleatória Unidimensional

Considere-se uma experiência aleatória ε de espaço amostral S. Denomina-se Variável Aleatória Unidimensional Real (ou, simplesmente, Variável Aleatória Unidimensional) qualquer função que associa um número real $x = X(s)$ a cada elemento $s \in S$.

Define-se uma variável aleatória como uma função do espaço amostral S no conjunto dos reais R

$$\begin{aligned} X:\ & S \to R \\ & s \mapsto x = X(s) \end{aligned}$$

Onde S é o espaço amostral do experimento aleatório e $R_X = \{x \in R \,|\, x = X(s)\}$ é o espaço amostral induzido em R pela aplicação X, também denominado espaço imagem de X.

2.1.1 Variável Aleatória Unidimensional do Tipo Discreto

Diz-se que uma variável aleatória unidimensional é do tipo discreto (ou é discreta) se o conjunto dos valores que ela pode assumir é finito ou infinito enumerável.

2.1.2 Variável Aleatória Unidimensional do Tipo Contínuo

Diz-se que uma variável aleatória unidimensional é do tipo contínuo (ou é contínua) se o conjunto dos valores que ela pode assumir é um intervalo ou uma reunião finita de intervalos de números reais.

Exemplo 1 (continuação). Considerando todas as variáveis aleatórias anteriormente apresentadas, tem-se os seguintes espaços amostrais – originais e induzidos pela definição de uma variável aleatória:

1a) S = $R_X = S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1b) S = {CC, CK, KC, KK} e $R_X = \{0, 1, 2\}$

1c) S = {N, D} e $R_X = \{0, 1\}$

1d) S = $R_X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, m\}$ onde m é um número que representa o máximo possível de unidades que podem ser vendidas em uma semana.

1e) S = $R_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$

1f) S = $R_X = \{x \in R \,|\, x > 0\} = R_+$

Portanto, tem-se a seguinte classificação:

i) discretas: as variáveis aleatórias dos exemplos 1a até 1e, sendo que os espaços amostrais correspondentes aos casos 1a até 1d são finitos, enquanto aquele do caso 1e é infinito enumerável;

ii) contínua: a variável aleatória do exemplo 1f, pois nesse caso o espaço amostral é infinito não enumerável.

2.2 Função de Distribuição de uma Variável Aleatória Unidimensional Real

A toda variável aleatória unidimensional X corresponde uma função real $F_X(x)$, denominada Função de Distribuição, definida por

$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad -\infty < x < +\infty$ (ou seja, definida para todo o conjunto dos reais, R).

Uma função de distribuição também é denominada: Função de Distribuição Acumulada, Função de Distribuição Acumulativa ou Função de Repartição.

2.2.1 Propriedades de $F_X(x)$

(I) Propriedades Características:

a) $0 \leq F_X(x) \leq 1$

b) $F_X(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $F_X(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

c) $F_X(x)$ é monótona não decrescente: $x_0 < x_1 \Rightarrow F_X(x_0) \leq F_X(x_1)$

d) $F_X(x)$ é contínua à direita: $\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$ para todo $x_0 \in R$

(II) Utilização no Cálculo de Probabilidades

a) $P\{X = x_0\} = \lim_{x \to x_0^+} F_X(x) - \lim_{x \to x_0^-} F_X(x)$ para todo $x_0 \in R$**;** o que corresponde ao salto de $F_X(x)$ no ponto x_0**.**

b) $P\{a < X \leq b\} = F_X(b) - F_X(a)$

2.3 Função de Probabilidade de uma Variável Aleatória Real Discreta

A cada variável aleatória discreta X corresponde uma função $p_X(x)$, dita Função de Probabilidade, que associa a cada $x \in R$ a probabilidade do evento $P\{X = x\}$:

$$p_X(x) = P\{X = x\} \quad x \in R$$

2.3.1 Suporte (ou domínio) de uma Variável Aleatória Real Discreta

Chama-se suporte de uma variável aleatória discreta X, e representa-se por S_X, ou por R_X, conjunto de números reais para os quais X possui probabilidade positiva:

$$S_X = R_X = \{x \in R \mid P\{X = x\} > 0\}$$

Convenção: Convenciona-se apresentar a expressão analítica de $p_X(x)$ apenas para os valores $x \in S_X$. Assim, o suporte $S_X = R_X$ é o domínio da função de probabilidade.

2.3.2 Propriedades da função de probabilidade $p_X(x)$

(**I) Propriedades Características**:

a) $p_X(x) \geq 0$

b) $\sum_{x \in S_X} p_X(x) = 1$

(II) Utilização no Cálculo de Probabilidades

Para todo $A \subset R$, $P\{X \in A\} = P\{X \in AS_X\} = \sum_{x \in AS_X} p_X(x)$

Nota:

Para uma variável aleatória discreta X é usual denominar-se distribuição de probabilidade a conjugação do seu domínio, R_X, e da sua função de probabilidade, $p(x)$ - ou seja, o par $(R_X, p(x))$.

2.3.3 Função de Distribuição de Variáveis Aleatórias Reais Discretas

Definam-se os conjuntos: $A_x = \{y \in S_X \mid y \leq x\} \quad -\infty < x < +\infty$

Então,

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \in A_x\} = \sum_{y \in A_X} p_X(y) \quad -\infty < x < +\infty$$

Nota:

Para cada $x \in R$, a função de distribuição está expressa como uma soma de probabilidades positivas, as quais correspondem aos saltos de $F_X(x)$ nesses pontos. Assim, a representação gráfica de $F_X(x)$ é a de uma função em escada (*step function*).

Exemplo 2. Um dado equilibrado é lançado, observando-se o número de pontos eventualmente obtido na face voltada para cima. Determine a função de probabilidade dessa variável aleatória.

Solução

O espaço amostral correspondente a X é: $R_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Note-se que no caso s = x = X(s), ou seja a função que define a aplicação do espaço amostral original (do experimento aleatório) S no espaço amostral induzido da variável aleatória X, denotado por R_X, é a função identidade.

Como o dado é equilibrado, tem-se: $p(x) = \frac{1}{6}$, para $x = 1, 2, 3, \ldots, 6$

Exemplo 3. Uma máquina produz peças de determinado tipo. Cada peça que é fabricada tem uma probabilidade igual a 10% de ser defeituosa. Uma peça é selecionada ao acaso da produção da máquina e a seguir é examinada para verificar se é defeituosa. Seja X a variável aleatória definida a seguir:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ , se a peça não é defeituosa} \\ 1 \text{ , se a peça é defeituosa} \end{cases}$$

Determine a função de probabilidade de X.

Solução

Seja X a variável aleatória definida a seguir:

$$X = \begin{cases} 0 \text{ , se a peça não é defeituosa} - \text{N} \\ 1 \text{ , se a peça é defeituosa} - \text{D} \end{cases}$$

Então, nesse caso, $R_X = \{0, 1\}$ e a função de probabilidade de X é

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}9 \text{ , se } x = 0 \\ 0{,}1 \text{ , se } x = 1 \end{cases}$$

Exemplo 4. Os clientes de uma locadora de filmes podem efetuar o pagamento do aluguel dos mesmos no dia ou posteriormente, no prazo de até três dias depois da data da locação. Considerando-se apenas os clientes que não pagam no dia mas que realizam efetivamente o pagamento nos dias posteriores (sem atraso), seja X a variável aleatória que representa o número de dias decorridos desde a data do aluguel do filme até a data de pagamento. Admita-se que a função de probabilidade de X é

$$p(x) = \frac{x}{6} \text{ , para } x = 1,\ 2,\ 3$$

Determinar P (X = 2 | X > 1)

Solução

A expressão analítica da função de probabilidade de X é

$$p(x) = \frac{x}{6} \text{ , para } x = 1,\ 2,\ 3$$

Na forma de tabela, a função pode ser apresentada como mostrado a seguir

x	p(x)
1	1/6
2	2/6
3	3/6
Total	1

Portanto,

$$P(X = 2 | X > 1) = \frac{P(X=2)}{P(X>1)} = \frac{P(X=2)}{P(X \geq 2)} = \frac{P(X=2)}{P(X=2)+P(X=3)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}} = \frac{2}{5}$$

Exemplo 5. Determine a função de distribuição acumulada relativa à variável aleatória correspondente ao exemplo anterior (exemplo 6). Em seguida, verifique que a partir do conhecimento da função de distribuição é possível determinar a função de probabilidade.

Solução

Por definição, tem-se que $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$, com $t \in R_X$

Então segue:

i) para x < 1

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t) = 0$$

ii) para $1 \leq x < 2$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t) = p(1) = \frac{1}{6}$$

iii) para $2 \leq x < 3$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t) = p(1) + p(2) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

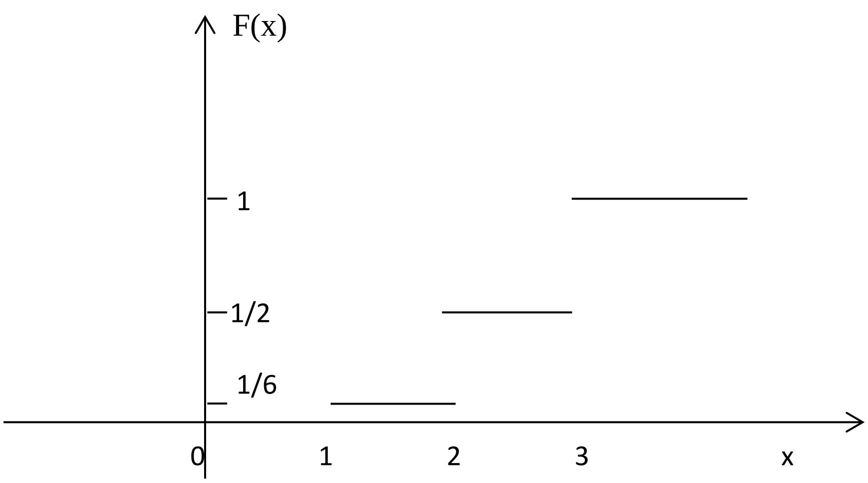
iv) para $3 \leq x$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t) = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Portanto, tem-se:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ para } x < 1 \\ \frac{1}{6}, \text{ para } 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \text{ para } 2 \leq x < 3 \\ \frac{6}{6} = 1, \text{ para } 3 \leq x \end{cases}$$

O gráfico dessa função é mostrado a seguir.



Por outro lado, é fácil verificar que a partir do conhecimento da função de distribuição acima se torna possível obter a função de probabilidade, empregando a seguinte propriedade

$$p(x) = F(x) - \lim_{t \to x-} F(t)$$

Com efeito, efetuando-se o cálculo acima indicado para cada valor x que coincide com um valor possível de X, tem-se:

$$p(1) = F(1) - \lim_{t \to 1-} F(t) = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$p(2) = F(2) - \lim_{t \to 2-} F(t) = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(3) = F(3) - \lim_{t \to 3-} F(t) = \frac{6}{6} - \frac{3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

que são os valores da função de probabilidade de X.

Exemplo 6. Seja X uma variável aleatória discreta com função de probabilidade expressa por

$$p(x) = \frac{1}{2^x} \text{ , para } x = 1, 2, 3, \ldots.$$

Calcular a probabilidade de X ser no máximo igual a 10.

Solução

A função de probabilidade de X é expressa por

$$p(x) = \frac{1}{2^x} \text{ , para } x = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Então segue:

i) Primeira solução (direta)

$$P\left(X \le 10\right) = \sum_{x=1}^{10} p(x) = \sum_{x=1}^{10} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{10}} = \frac{\frac{1}{2^{10}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{10}}$$

ii) Segunda solução, pelo teorema do evento complementar

$$P\left(X\le 10\right)=1-P\left(X>10\right)=1-P\left(X\ge 11\right)=1-\sum_{x=11}^{\infty}\frac{1}{2^x}=1-\left(\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{2^{13}}+\dots\right)=1-\frac{\frac{1}{2^{11}}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{10}}$$

Exemplo 7. Certa loja possui em estoque cinco eixos defeituosos e três perfeitos. Foram vendidos dois eixos. Admita-se que os dois foram escolhidos ao acaso do estoque. Determinar a função de probabilidade do número de eixos defeituosos que foram vendidos.

Solução

No estoque há 8 eixos, sendo 5 defeituosos (D) e 3 não defeituosos (N). Então, tem-se:

$$P(X=x)=p(x)=\frac{C_5^x\,C_3^{2-x}}{C_8^2}\text{ , para }x=0,1,2$$

e assim, efetuando os cálculos combinatórios, segue

$$P(X=0)=p(0)=\frac{C_5^0\,C_3^2}{C_8^2}=\frac{1.3}{\frac{8.7}{2.1}}=\frac{3}{28}$$

$$P(X=1)=p(1)=\frac{C_5^1\,C_3^1}{C_8^2}=\frac{5.3}{\frac{8.7}{2.1}}=\frac{15}{28}$$

$$P(X=2)=p(2)=\frac{C_5^2\,C_3^0}{C_8^2}=\frac{\frac{5.4}{2.1}}{\frac{8.7}{2.1}}=\frac{10}{28}$$

2.4 Função de Densidade de Probabilidade de uma Variável Aleatória Real Contínua

A cada variável aleatória contínua X corresponde uma função $f_X\left(x\right)$, dita função de densidade de probabilidade, com a seguinte definição:

$$f_X\left(x\right)=\frac{d}{dx}F_X\left(x\right)$$

2.4.1 Suporte (ou domínio) de uma variável aleatória real contínua X

Chama-se suporte de uma variável aleatória continua X, e representa-se por S_X, ou por R_X, o conjunto dos números reais tais que a função de densidade de X é positiva:

$$S_X = R_X = \{x \in R \,|\, f_X(x) > 0\}$$

Convenção: Convenciona-se apresentar a expressão da função de densidade de X apenas para os valores pertencentes a $S_X = R_X$. Assim, o suporte $S_X = R_X$ é o domínio da função de densidade de probabilidade. Entretanto, em alguns casos, é útil estender a definição da função de densidade de probabilidade para todo o conjunto dos reais. A extensão é feita definindo-se essa função como sendo igual a f(x) para os valores de x que pertencem ao seu domínio (ou suporte) R_X e igual a zero (ou seja, identicamente nula) para todos os outros valores reais.

2.4.2 Propriedades da função de densidade de probabilidade $f_X(x)$

(I) Propriedades Características

a) $f_X(x) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{x \in S_X} f_X(x)dx = 1$

Nota: a primeira integral representa a propriedade (b) no caso de empregar-se a definição da função de densidade estendida a todo o conjunto dos reais.

(II) Utilização no Cálculo de Probabilidades

a) Para todo par de números reais (a, b) tal que $a \leq b$, tem-se:

$$P\{a < X < b\} = P\{a < X \leq b\} = P\{a \leq X < b\} = P\{a \leq X \leq b\} = \int_a^b f_X(x)dx$$

b) $P\{X = x_0\} = P\{x_0 \leq X \leq x_0\} = \int_{x_0}^{x_0} f_X(x)dx = 0$ para todo $x_0 \in R$

Notas:

- Para uma variável aleatória contínua X é usual denominar-se distribuição de probabilidade a conjugação do seu domínio, R_X, e da sua função de densidade de probabilidade, f(x) - ou seja, o par $(R_X, f(x))$.

- Diferentemente da função de probabilidade, a função de densidade de probabilidade não tem uma interpretação simples. Com efeito, f(x) não representa (ao contrário de p(x)) a probabilidade de ocorrência do evento X = x, isto é f(x) não é igual a P(X = x). Entretanto, com base em conceitos do Cálculo Integral e Diferencial é possível obter-se uma interpretação para a função de densidade. O raciocínio é apresentado a seguir. Sendo a função f(x) contínua, pelo Teorema do Valor Médio (do Cálculo Integral) tem-se, para qualquer intervalo $\left(x, x+\Delta x\right)$, que

$$P\left(x \leq X \leq x+\Delta x\right)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(x)\,dx = f\left(\theta\right)\Delta x \qquad \text{para algum } \theta \text{ tal que } x \leq \theta \leq x+\Delta x$$

Então, se Δx for muito pequeno θ será aproximadamente igual a x e, consequentemente,

$$f(x)\,\Delta x \simeq P\left(x \leq X \leq x+\Delta x\right)$$

Nessas condições, tem-se

$$f(x) \simeq \frac{P\left(x \leq X \leq x+\Delta x\right)}{\Delta x}$$

Portanto, em termos mais precisos tem-se

$$f(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x \leq X \leq x+\Delta x\right)}{\Delta x}$$

Com efeito, lembrando a definição da função de distribuição acumulada, F(x), e, também, a de derivada de uma função, tem-se

$$f(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x \leq X \leq x+\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F\left(x+\Delta x\right)-F\left(x\right)}{\Delta x}=\frac{d\,F\left(x\right)}{dx}$$

como foi anteriormente estabelecido.

2.5 Função de Distribuição de Variáveis Aleatórias Reais Contínuas

Em decorrência do Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se:

$$F_X\left(x\right) = \int_{-\infty}^{x} f_X\left(t\right)dt \qquad -\infty < x < +\infty$$

Nota 1:

Como $P\{X = x_0\} = 0$ para todo $x_0 \in R$, a função $F_X(x)$ não possui saltos. Logo, se X é do tipo contínuo, $F_X(x)$ é contínua por toda parte no conjunto dos reais.

Nota 2:

Na determinação da função de distribuição de uma variável aleatória contínua X a partir de sua função de densidade de probabilidade, é frequentemente útil considerar a definição de sua função de densidade de forma estendida para todo o conjunto dos reais (ver o final de 2.4.1).

Exemplo 8. Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade expressa por

$$f(x) = 1 , \text{ para } 0 < x < 1$$

a) Determinar a probabilidade do evento X < 1/2.

b) Qual é a probabilidade de $X = 0,3$?

Solução

A função de densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = 1 , \text{ para } 0 < x < 1$$

Então

a) $P(X < 1/2) = \int_0^{1/2} 1dx = x\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} = 0,5$

b) Como a variável aleatória X é do tipo contínuo, a probabilidade de que ela venha a assumir qualquer valor particular é nula, ou seja, $P(X = 0,3) = 0$.

Exemplo 9. Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade expressa por

$$f(x) = 2x , \text{ para } 0 < x < 1$$

Determinar:

a) a probabilidade do evento X < 1/2;

b) a probabilidade do evento $X \le \frac{1}{2}$ sabendo-se que ocorreu $\frac{1}{3} < X \le \frac{2}{3}$.

Solução

A função de densidade de probabilidade de X é

$$f(x) = 2x\ ,\ \text{para } 0 < x < 1$$

Então:

a) $$P\left(X<1/2\right)=\int_0^{1/2} 2\,x\,dx = x^2\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}=0,25$$

b) $$P\left(X<1/2|1/3<X\le 2/3\right)=\frac{P\left(1/3<X\le 1/2\right)}{P\left(1/3<X\le 2/3\right)}=\frac{\int_{1/3}^{1/2} 2\,x\,dx}{\int_{1/3}^{2/3} 2\,x\,dx}=\frac{x^2\Big|_{1/3}^{1/2}}{x^2\Big|_{1/3}^{2/3}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}-\frac{1}{9}}=\frac{\frac{9-4}{36}}{\frac{4-1}{9}}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{3}{9}}=\frac{5}{12}$$

Cabe ressaltar que a comparação das probabilidades de ocorrência do evento $(X < 1/2)$ calculadas nesse exemplo e no anterior permite uma melhor compreensão do conceito de densidade de probabilidade.

Exemplo 10. A demanda mensal de certo produto, expressa em milhares de unidades, é uma variável aleatória X que tem a seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x)=\frac{a}{x^3}\ ,\ \text{para } x>1$$

a) Determinar o valor da constante a;

b) Calcular a probabilidade de que a demanda seja superior a 10.000 unidades.

Solução

A função de densidade de probabilidade da variável aleatória X é a seguinte

$$f(x)=\frac{a}{x^3}\ ,\ \text{para } x>1$$

Portanto, segue que

a) O valor da constante a pode ser determinado impondo-se a condição $\int_{R_X} f(x)\,dx = 1$. De fato,

$$\int_1^{\infty} \frac{a}{x^3}\,dx = 1 \text{ donde } a\int_1^{\infty} x^{-3}\,dx = a\left.\frac{x^{-2}}{(-2)}\right|_1^{\infty} = \frac{a}{2}\left.\left(\frac{1}{x^2}\right)\right|_{\infty}^{1} = \frac{a}{2}\left(1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\right) = \frac{a}{2}(1-0) = \frac{a}{2} = 1$$

e assim a = 2

b) Considerando que a demanda X está expressa em 1.000 unidades, então o evento

A = "a demanda é superior a 10.000 unidades" equivale a X > 10. Logo

$$P(A) = P(X>10) = \int_{10}^{\infty} \frac{2}{x^3}\,dx = 2\int_{10}^{\infty} x^{-3}\,dx = 2\left.\frac{x^{-2}}{(-2)}\right|_{10}^{\infty} = \left.\frac{1}{x^2}\right|_{\infty}^{10} = \frac{1}{100} = 0,01$$

Exemplo 11. Determinar a função de distribuição acumulada da variável aleatória considerada no exemplo 8.

Solução

A variável aleatória contínua X tem a seguinte função de densidade de probabilidade

$$f(x) = 1, \text{ para } 0 < x < 1$$

Para efeito de determinação da função de distribuição, convém empregar a extensão da definição da função de densidade para todo o conjunto dos números reais, que é mostrada a seguir

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , para } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ , para outros valores} \end{cases}$$

Como a variável X é do tipo contínuo, na determinação da função de distribuição emprega-se a definição

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ , } \forall x \in R$$

A seguir, na avaliação da expressão acima, deve-se levar em conta todos os intervalos com definições distintas da expressão da função de densidade (estendida), o que é feito na sequência:

i) para x < 0

Nesse caso, tem-se

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$ pois o integrando, f(t), é identicamente nulo fora do intervalo (0 , 1)

ii) para $0 \le x < 1$, tem-se

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{x} f(t)\,dt=0+\int_{0}^{x} 1\,dt= t\Big|_0^x = x$, onde, como se pode verificar, a integral inicial foi decomposta em duas de modo a considerar-se, explicitamente, as duas definições distintas da função de densidade de probabilidade no intervalo $(-\infty, x)$, com $0 \le x < 1$, a saber: $(-\infty,0)$, onde $f(t)=0$ e $(0,1)$, onde $f(t)=1$

iii) para $1 \le x$, tem-se

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt+\int_{1}^{x} f(t)\,dt =0+\int_{0}^{1} dt+0 = t\Big|_0^1 = 1$

Aqui, novamente, a integral foi decomposta, agora em três integrais, de modo a considera-se explicitamente as três definições distintas da função de densidade abrangidas no intervalo $(-\infty, x)$, com $1 \le x$, a saber:

$(-\infty,0)$, onde $f(t)=0$; $[0,1)$, onde $f(t)=1$; e $[1,\infty)$, onde $f(t)=0$

Portanto, em resumo, a função de distribuição é

$$F(x)=\begin{cases} 0 & ,\text{para } x<0 \\ x & ,\text{para } 0\le x<1 \\ 1 & ,\text{para } x\ge 1 \end{cases}$$

Por outro lado, é fácil verificar que a partir dessa função é possível obter-se a função de densidade de probabilidade de X, pois

$$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} = \begin{cases} 0 \text{ , para } x < 0 \\ 1 \text{ , para } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ , para } x > 1 \end{cases}$$

Ou seja,

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ , para } 0<x<1\\ 0 \text{ , para outros valores}\end{cases}$$

Exemplo 12. Considerando a variável aleatória referente ao exemplo 9, pede-se:

a) determinar a sua função de distribuição acumulada;

b) calcular as probabilidades dos seguintes eventos:

i) $P(X \leq 0{,}2)$

ii) $P(0{,}3 < X < 0{,}9)$

iii) $P(X > 0{,}7)$

Solução

Nesse caso, a função de densidade de probabilidade foi definida por

$$f(x) = 2\,x \text{ , para } 0 < x < 1$$

Analogamente ao que foi feito no exemplo anterior, é conveniente considerar a definição da função de densidade estendida para R, mostrada a seguir:

$$f(x)=\begin{cases}2\,x \text{ , para } 0<x<1\\ \;0 \;\text{ , para outros valores}\end{cases}$$

Então segue

a) considerando a definição de função de distribuição, tem-se

$$F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \text{ , } \forall\, x\in R$$

Logo

i) para $x < 0$, tem-se

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=0$ pois o integrando, f(t), é identicamente nulo fora do intervalo (0 , 1)

ii) para $0\leq x<1$, tem-se

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{x} 2\,t\,dt = t^2\Big|_0^x = x^2$, onde a integral inicial foi decomposta em duas e consideradas, explicitamente, as duas expressões distintas da função de densidade de probabilidade estendida no intervalo $(-\infty, x)$, com $0 \le x < 1$, a saber: $(-\infty, 0)$, onde $f(t) = 0$ e $[0,1)$, onde $f(t) = 2\,t$

iii) para $1 \le x$, tem-se

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 0 + \int_{0}^{1} 2\,t\,dt + 0 = t^2\Big|_0^1 = 1$$

Aqui a integral inicial foi dividida em três, de modo a considerar-se explicitamente todas as três definições distintas que a função de densidade de probabilidade estendida apresenta no intervalo $(-\infty, x)$, com $1 \le x$, a saber:

$(-\infty, 0)$, onde $f(t) = 0$; $[0,1)$, onde $f(t) = 2\,t$; e $[1, \infty)$, onde $f(t) = 0$

Portanto, a função de distribuição de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{para } x < 0 \\ x^2 & , \text{para } 0 \le x < 1 \\ 1 & , \text{para } x \ge 1 \end{cases}$$

Note-se que, assim como no exemplo anterior, a derivada dessa função é a função de densidade de probabilidade. Com efeito, a derivada da função de distribuição é nula fora do intervalo (0,1) e é igual a $f(x) = 2x$, para $0 < x < 1$.

b) A função de distribuição acumulada pode ser empregada no cálculo das probabilidades, como mostrado a seguir:

b-i) $P(X \le 0{,}2) = F(0{,}2) = 0{,}2^2 = 0{,}04$

b-ii) $P(0{,}3 < X < 0{,}9) = F(0{,}9) - F(0{,}3) = 0{,}9^2 - 0{,}3^2 = 0{,}81 - 0{,}09 = 0{,}72$

b-iii) $P(X > 0{,}7) = 1 - P(X \le 0{,}7) = 1 - F(0{,}7) = 1 - 0{,}7^2 = 1 - 0{,}49 = 0{,}51$

Deve-se notar que a função de distribuição acumulada constitui uma ferramenta (alternativa à função de densidade) para cálculo da probabilidade de eventos relacionados à variável aleatória X.

O exemplo a seguir ilustra uma aplicação dos conceitos em um problema que apresenta interesse no campo da Economia, envolvendo um problema de tomada de decisão.

Exemplo 13. Uma bomba de gasolina é abastecida uma única vez em cada semana, às segundas-feiras, antes do início do expediente. O volume da demanda semanal de gasolina no posto possui a seguinte função de densidade de probabilidade, expressa em dezena de milhares de litros:

$$f(x) = 5(1-x)^4 \quad 0 < x < 1$$

Qual deve ser a capacidade de armazenamento da gasolina para que o posto possa atender à demanda semanal, com probabilidade 0,99?

Solução

A função de densidade de probabilidade de X (expressa em milhares de litros) é

$$f(x) = 5(1-x)^4 \text{ , para } 0 < x < 1$$

Seja c a capacidade do tanque a ser determinada. Então, deve-se ter

$$P(X \le c) = 0{,}99$$

Mas $P(X \le c) = \int_0^c 5(1-x)^4\,dx = -(1-x)^5\Big|_0^c = (1-x)^5\Big|_c^0 = 1-(1-c)^5$ logo

$1-(1-c)^5 = 0{,}99$ donde $(1-c)^5 = 0{,}01$ e assim $1-c = \sqrt[5]{0{,}01} = 0{,}3981$

Portanto, $c = 1 - 0{,}3981 = 0{,}6019$ (em unidade de 10.000 litros).

Ou seja, a capacidade do tanque deve ser c = 6.019 litros.

2.6 Variáveis Aleatórias Bidimensionais

Considere-se uma experiência aleatória de espaço amostral S. Sejam X=X(s) e Y=Y(s) funções que associam, cada uma, um número real a cada elemento $s \in S$. O par ordenado (X,Y) denomina-se variável aleatória bidimensional associada a S.

Nota: X e Y são variáveis aleatórias unidimensionais, denominadas componentes marginais de (X,Y).

2.7 Variáveis Aleatórias Bidimensionais do Tipo Discreto

2.7.1 Definição

Uma variável aleatória bidimensional (X,Y) é do tipo discreto (ou é discreta) se as suas componentes marginais X e Y são do tipo discreto.

2.7.2 Função de Probabilidade Conjunta

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional do tipo discreto. Denomina-se Função de Probabilidade Conjunta associada à variável bidimensional (X,Y) a função definida por

$$p_{XY}(x,y) = P\{X = x\,;\,Y = y\}$$

O conjunto $R^2{}_{XY} = \{(x,y) \in R^2 \mid p_{XY}(x,y) > 0\}$ denomina-se suporte da distribuição conjunta de (X,Y).

2.7.3 Propriedades da Função de Probabilidade Conjunta

Toda função de probabilidade conjunta possui as seguintes propriedades:

a) $p_{XY}(x,y) \geq 0$

b) $\displaystyle\sum_{(x,y) \in R^2{}_{XY}} \sum p_{XY}(x,y) = 1$

c) Para todo $A \subset R^2{}_{XY}$ $\quad P\{(X,Y) \in A\} = \displaystyle\sum_{(x,y)} \sum_{\in A} p_{XY}(x,y)$

Nota: Uma função real definida no R^2_{XY} é função de probabilidade de alguma variável aleatória bidimensional se e somente se satisfaz as duas primeiras propriedades anteriores, ditas Propriedades Características.

2.7.4 Determinação das Distribuições MarginaisA partir do conhecimento da função de probabilidade conjunta de (X,Y), as funções de probabilidade marginais das variáveis aleatórias componentes X e Y podem ser determinadas como segue:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) \quad x \in R_X \qquad p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y) \quad y \in R_Y$$

2.7.5 Distribuições Condicionadas

Para cada variável aleatória bidimensional do tipo discreto definem-se duas famílias de variáveis aleatórias condicionadas:

i) $\{X|Y = y\}$ onde $x \in R_{X|y}$ e $y \in R_Y$

e

ii) $\{Y|X = x\}$ onde $y \in R_{Y|x}$ e $x \in R_X$,

cujas funções de probabilidade são denotadas, respectivamente, por $p_{X|Y}(x|y)$ ou

$p_{X|y}(x)$ e por $p_{Y|X}(y|x)$ ou $p_{Y|x}(y)$.

Os conjuntos

$$R_{X|y} = \{x \in R | p_{X|Y}(x|y) > 0\} \quad \text{e} \quad R_{Y|x} = \{y \in R | p_{Y|X}(y|x) > 0\}$$

são denominados suportes de $\{X|Y = y\}$ e de $\{Y|X = x\}$, respectivamente.

As funções de probabilidades condicionadas são obtidas da seguinte maneira:

$$p_{X|Y}(x|y) = P\{X = x | Y = y\} = \frac{P\{X = x; Y = y\}}{P\{Y = y\}} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} \quad x \in R_{X|y}$$

para todo $y \in R_Y$.

$$p_{Y|X}(y|x) = P\{Y = y | X = x\} = \frac{P\{Y = y; X = x\}}{P\{X = x\}} = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)} \quad y \in R_{Y|x}$$

para todo $x \in R_X$.

Dessas expressões resulta:

$$p_{XY}(x,y) = p_Y(y) p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) p_{Y|X}(y|x)$$

2.7.6 Independência de Variáveis Aleatórias Discretas

As variáveis aleatórias discretas X e Y são ditas independentes se e somente se

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$$

ou, equivalentemente, se e somente se

$$p_Y(y) = p_{Y|X}(y|x)$$

ou, ainda, se e somente se

$$p_X(x) = p_{X|Y}(x|y)$$

Exemplos de distribuições conjuntas discretas e de determinação das distribuições marginais

Exemplo 14. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional do tipo discreto, com a seguinte função de probabilidade conjunta:

X	Y		
	1	2	3
1	0,0	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0,2	0,1	0,1

a) Verificar que essa função atende as condições para ser uma função de probabilidade conjunta;

b) Determinar P(X=1,Y=2), P(X=2,Y<3) e P(Y=2);

c) Determinar as funções de probabilidade marginais de X e de Y.

Solução

a) Verificação

A função $p_{XY}(x,y)$ definida na tabela acima atende as duas seguintes condições:

i) $p_{XY}(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in R^2_{XY}$

ii) $\sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{3} p_{XY}(x,y) = 1$

b) Cálculos das probabilidades

As probabilidades a serem determinadas são:

$$P(X=1, Y=2) = p_{XY}(1,2) = 0,1;$$

$$P(X = 2, Y < 3) = P(X = 2, Y \leq 2) = p_{XY}(2,1) + p_{XY}(2,2) = 0,1 + 0,2 = 0,3;$$

$$P(Y=2) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=2)$$

$$P(Y=2) = p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,2) + p_{XY}(3,2) = 0,1+0,2+0,1=0,4$$

c) As distribuições marginais de X e de Y são apresentadas a seguir

$$p_X(x) = \begin{cases} 0{,}2 \text{ se } x = 1 \\ 0{,}4 \text{ se } x = 2 \\ 0{,}4 \text{ se } x = 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad p_Y(y) = \begin{cases} 0{,}3 \text{ se } y = 1 \\ 0{,}4 \text{ se } y = 2 \\ 0{,}3 \text{ se } y = 3 \end{cases}$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente pela tabela, efetuando-se as somas dos valores de probabilidades nas células, por linha e por coluna, como indicado a seguir.

X	Y			$p_X(x)$
	1	2	3	
1	0,0	0,1	0,1	0,2
2	0,1	0,2	0,1	0,4
3	0,2	0,1	0,1	0,4
$p_Y(y)$	0,3	0,4	0,3	1,0

Exemplo 15. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional do tipo discreto com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$$p(x,y) = \frac{x - y}{4} \text{ , para } x = 1,2 \text{ e } y = 0,1$$

Determinar as funções de probabilidade marginais de X e de Y:

a) algebricamente, por meio das expressões analíticas das funções de probabilidade marginais;

b) numericamente, por meio de somas de probabilidades de linhas e de colunas na tabela da distribuição conjunta.

Solução

a) determinação das expressões analíticas das funções de probabilidade marginais.

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{1} \frac{x - y}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{y=0}^{1} x - \sum_{y=0}^{1} y\right) = \frac{1}{4}(2x - 1) = \frac{2x - 1}{4}, \text{ para } x = 1, 2$$

$$p_Y(y) = \sum_{x=1}^{2} \frac{x - y}{4} = \frac{1}{4}\left(\sum_{x=1}^{2} x - \sum_{x=1}^{2} y\right) = \frac{1}{4}(3 - 2y) = \frac{3 - 2y}{4}, \text{ para } y = 0, 1$$

b) determinação numérica, por meio de somas de probabilidades de linhas e colunas na tabela da distribuição conjunta.

Um exame da expressão analítica da distribuição conjunta de (X,Y) permite calcular facilmente as probabilidades associadas a cada par de valores possíveis, (x,y), das variáveis X e Y, que são (1,0) , (1,1) , (2,0) e (2,1). Com efeito, tem-se:

$p_{XY}(1,0) = \frac{1 - 0}{4} = \frac{1}{4}$ e $p_{XY}(1,1) = \frac{1 - 1}{4} = 0$; $p_{XY}(2,0) = \frac{2 - 0}{4} = \frac{2}{4}$ e
$p_{XY}(2,1) = \frac{2 - 1}{4} = \frac{1}{4}$

Portanto, tem-se a seguinte tabela para a distribuição conjunta e para as distribuições marginais.

	Y		
X	0	1	$p_X(x)$
1	1/4	0	1/4
2	2/4	1/4	3/4
$p_Y(y)$	3/4	1/4	1

Também é fácil verificar que as expressões analíticas das distribuições marginais obtidas no item anterior fornecem esses mesmos valores de probabilidades obtidos na solução numérica apresentada.

2. 8 Variáveis Aleatórias Bidimensionais do Tipo Contínuo

2.8.1 Definição

Uma variável aleatória bidimensional (X,Y) é do tipo contínuo (ou é contínua) se as suas componentes marginais X e Y são do tipo contínuo.

2.8.2 Função de Densidade de Probabilidade Conjunta e Propriedades

A toda variável aleatória bidimensional do tipo contínuo corresponde uma função, $f_{XY}(x,y)$ dita Função de Densidade de Probabilidade Conjunta, com as seguintes propriedades:

a) $f_{XY}(x,y) \geq 0$

b) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int\int_{(x,y)\in R^2_{XY}} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = 1$

onde o conjunto $R^2_{XY} = \{(x,y) \in R^2 | f_{XY}(x,y) > 0\}$ é o suporte de (X,Y).

c) para todo $A \subset R^2_{XY}$, $P\{(X,Y) \in A\} = \int\int_{(x,y)\in A} f_{XY}(x,y)\,dydx$

Notas:

- Uma função real definida no R^2_{XY} é função de densidade de probabilidade de alguma variável aleatória bidimensional (X,Y) se e somente se satisfaz as duas primeiras propriedades, ditas Propriedades Características.
- Para todo $(a,b) \in R^2_{XY}$, $P\{X = a\ ;\ Y = b\} = P\{a \leq X \leq a\ ;\ b \leq Y \leq b\} =$
  $= \int_a^a\int_b^b f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = 0$
- Convenciona-se representar analiticamente as funções de densidade conjunta apenas nos pontos pertencentes ao suporte de (X,Y).

2.8.3 Determinação das Densidades Marginais

A partir do conhecimento da função de densidade conjunta de (X,Y), as funções de densidade marginais das componentes X e Y podem ser determinadas como segue:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy \quad x \in R_X \quad \text{e} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dx \quad y \in R_Y$$

2.8.4 Distribuições Condicionadas (ou Condicionais)

Para cada variável aleatória bidimensional do tipo contínuo definem-se duas famílias de variáveis aleatórias condicionadas, a saber:

i) $\{X | Y = y\}$ onde $y \in R_Y$

e

ii) $\{Y|X=x\}$ onde $x \in R_X$

cujas funções de densidade de probabilidade são denotadas respectivamente por

$$f_{X|Y}(x|y) \text{ ou } f_{X|y}(x) \text{ e } f_{Y|X}(y|x) \text{ ou } f_{Y|x}(y).$$

Os conjuntos

$$R_{X|y} = \{x \in R | f_{X|Y}(x|y) > 0\} \quad \text{e} \quad R_{Y|x} = \{y \in R | f_{Y|X}(y|x) > 0\}$$

são denominados suportes de $\{X|Y=y\}$ e de $\{Y|X=x\}$, respectivamente.

As funções de densidade de probabilidades condicionadas são obtidas da seguinte maneira:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \quad x \in R_{X|y} \quad \text{para todo } y \in R_Y$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} \quad y \in R_{Y|x} \quad \text{para todo } x \in R_X$$

Dessas expressões resulta:

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x)$$

2.8.5 Independência de Variáveis Aleatórias Contínuas

As variáveis aleatórias contínuas X e Y são ditas independentes se e somente se

$$f_{XY}(x,y) = f_Y(y) f_X(x)$$

ou, equivalentemente, se e somente se

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x)$$

ou, ainda, se e somente se

$$f_X(x) = f_{X|Y}(x|y)$$

Exemplos de distribuições conjuntas contínuas e de determinação das distribuições marginais

Exemplo 16. Seja (X, Y) uma variável aleatória do tipo contínuo com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_{XY}(x,y) = 2 - x - y \text{ , para } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1$$

a) Verificar que a função acima satisfaz as condições necessárias para ser uma função de densidade de probabilidade conjunta;

b) Determinar as funções de densidade marginais de X e de Y.

Solução

a) verificação

a-i) A função atende a condição de que $f_{XY}(x,y) \geq 0$, para $(x,y) \in R^2_{XY}$

e

a-ii) verifica-se também que a integral da função de densidade conjunta em R^2_{XY} é 1

$$\int_0^1\int_0^1 (2-x-y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(2\int_0^1 dy - x\int_0^1 dy - \int_0^1 y\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2\,y\big|_0^1 - x\,y\big|_0^1 - \frac{1}{2}y^2\big|_0^1 \right) dx = \int_0^1 \left(2 - x - \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}dx - \int_0^1 x\,dx = \frac{3}{2}x\big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

b) as distribuições marginais são

b-i)

$$f_X(x) = \int_0^1 (2-x-y)\,dy = 2\int_0^1 dy - x\int_0^1 dy - \int_0^1 y\,dy = 2\,y\big|_0^1 - x\,y\big|_0^1 - \frac{1}{2}y^2\big|_0^1 =$$

$$= 2 - x - \frac{1}{2} \quad \text{donde } f_X(x) = \frac{3}{2} - x, \text{ para } 0 < x < 1$$

e

b-ii)

$$f_Y(y) = \int_0^1 (2-x-y)\,dx = 2\int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx - y\int_0^1 dx = 2\,x\big|_0^1 - \frac{1}{2}x^2\big|_0^1 - y\,x\big|_0^1 =$$

$$2 - \frac{1}{2} - y \quad \text{donde } f_Y(y) = \frac{3}{2} - y, \text{ para } 0 < y < 1$$

Exemplo 17. Seja (X, Y) uma variável aleatória do tipo contínuo com a seguinte função de densidade de probabilidade:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{3x}{8} \text{ , para } 0 < y < x < 2$$

a) Calcular P (X > 0,5 e Y < 1);

b) Determinar as funções de densidade de probabilidade marginais de X e de Y.

Solução

a) Cálculo da probabilidade do evento (X > 0,5 ; Y < 1)

$$P(X>0{,}5;Y<1)=\int_{0,5}^{1}\int_{0}^{x}\frac{3}{8}x\,dy\,dx+\int_{1}^{2}\int_{0}^{1}\frac{3}{8}x\,dy\,dx=\frac{3}{8}\left[\int_{0,5}^{1}x\int_{0}^{x}dy\;dx+\int_{1}^{2}x\int_{0}^{1}dy\;dx\right]=$$

$$=\frac{3}{8}\left[\int_{0,5}^{1}x\left(y\Big|_{0}^{x}\right)dx+\int_{1}^{2}x\left(y\Big|_{0}^{1}\right)dx\right]=\frac{3}{8}\left[\int_{0,5}^{1}x^{2}\,dx+\int_{1}^{2}x\,dx\right]=$$

$$=\frac{3}{8}\left[\frac{1}{3}x^{3}\Big|_{0,5}^{1}+\frac{1}{2}x^{2}\Big|_{1}^{2}\right]=\frac{3}{8}\left[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{2}(4-1)\right]=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2}3\right)$$

$$=\frac{3}{8}\left(\frac{7}{24}+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{8}\cdot\frac{7+36}{24}=\frac{3}{8}\cdot\frac{43}{24}=\frac{43}{64}$$

b) Determinação das funções de densidade marginais de X e de Y

b-i) $f_X(x)=\int_{0}^{x}\frac{3}{8}x\,dy=\frac{3}{8}x\int_{0}^{x}dy=\frac{3}{8}x\left(y\Big|_{0}^{x}\right)=\frac{3}{8}x\,x=\frac{3}{8}x^{2}$, para $0<x<2$

b-ii) $f_Y(y)=\int_{y}^{2}\frac{3}{8}x\,dx=\frac{3}{8}\int_{y}^{2}x\,dx=\frac{3}{8}\frac{1}{2}\left(x^{2}\Big|_{y}^{2}\right)=\frac{3}{16}(4-y^{2})$, para $0<y<2$

Exemplos de distribuições condicionadas e de independência

Variáveis aleatórias bidimensionais discretas

Exemplo 18. Para a distribuição de probabilidade da variável aleatória bidimensional do exemplo 15, anteriormente apresentado, pede-se:

a) determinar as distribuições condicionadas associadas a (X, Y);

b) verificar se as variáveis X e Y são independentes.

Solução

A função de probabilidade conjunta de X e de Y no referido exemplo é

$$p_{XY}(x,y) = \frac{x - y}{4} \text{ , para } x = 1,2 \text{ e } y = 0,1$$

a-i) A partir da tabela com os valores numéricos das distribuições conjunta e marginais, tem-se a determinação numérica das distribuições condicionadas, apresentada a seguir.

	Y		
X	0	1	$p_X(x)$
1	1/4	0	1/4
2	2/4	1/4	3/4
$p_Y(y)$	3/4	1/4	1

Com base nessa tabela tem-se:

$$p_{X|Y}(x|0) = \begin{cases} \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3} & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{2/4}{3/4} = \dfrac{2}{3} & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad p_{X|Y}(x|1) = \begin{cases} \dfrac{0}{1/4} = 0 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{1/4}{1/4} = 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$p_{Y|X}(y|1) = \begin{cases} \dfrac{1/4}{1/4} = 1 & \text{se } y = 0 \\ \dfrac{0}{1/4} = 0 & \text{se } y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad p_{Y|X}(y|2) = \begin{cases} \dfrac{2/4}{3/4} = \dfrac{2}{3} & \text{se } y = 0 \\ \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3} & \text{se } y = 1 \end{cases}$$

a-ii) a partir das expressões analíticas das distribuições marginais, tem-se diretamente:

$$p_{XY}(x,y) = \frac{x - y}{4} \text{ e } p_Y(y) = \frac{3 - 2y}{4}\text{, para } y = 0, 1 \text{ logo}$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{x-y}{3-2y}, \quad \text{para } x = 1, 2\text{; com } y = 0,1$$

$$p_{XY}(x,y) = \frac{x - y}{4} \text{ e } p_X(x) = \frac{2x - 1}{4}\text{, para } x = 1, 2 \text{ logo}$$

$$p_{Y|X}(y|x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{x-y}{2x-1}, \text{ para } y = 0,1; \text{ com } x = 1,2$$

b) Em qualquer dos casos é fácil verificar que X e Y não são independentes pois a função de probabilidade conjunta não é igual ao produto das funções marginais.

Variáveis aleatórias bidimensionais contínuas

Exemplo 19. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional do tipo contínuo, com a seguinte função de densidade de probabilidade conjunta:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}x \quad , \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 1 < y < 3$$

a) Determinar as funções de densidade marginais de X e de Y;
b) determinar as funções de densidade condicionais associadas a X e Y;
c) verificar se X e Y são independentes.

Solução

A função de densidade de probabilidade conjunta de (X, Y) é:

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x \quad \text{para} \quad 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 1 < y < 3$$

Então:

a) as distribuições marginais são:

a-i)

$$f_X(x) = (x/4)\int_1^3 dy = \frac{x}{2} \qquad 0 < x < 2$$

a-ii)

$$f_Y(y) = (1/4)\int_0^2 x\,dx = (1/4)\left(x^2/2\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2} \qquad 1 < y < 3$$

b) as distribuições condicionadas são:

b-i) $f_{X|Y}(x) = \dfrac{x/4}{1/2} = \dfrac{x}{2}$, para $0 < x < 2$

b-ii) $f_{Y|X}(y) = \dfrac{x/4}{x/2} = \dfrac{1}{2}$, para $1<y<3$

c) Inicialmente, verifica-se que o domínio da função de densidade é

$R^2_{XY} = \{(x,y) \in R^2 \mid 0<x<2 \text{ e } 1<y<3\}$

o qual é da forma retangular de lados paralelos aos eixos coordenados.

Além disso, $f_{X|Y}(x) = f_X(x)$, logo X e Y são independentes.

Alternativamente, também se verifica que

$f_{XY}(x,y) = \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{2}x \cdot \dfrac{1}{2} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ portanto X e Y são independentes.

Exemplo 20. Considerando a variável aleatória bidimensional contínua do exemplo 16, anteriormente apresentado, determinar as funções de densidade de probabilidades das distribuições condicionadas associadas à (X, Y) e verificar se X e Y são independentes.

Solução

A função de densidade de probabilidade conjunta de X e de Y do exemplo é

$$f_{XY}(x,y) = 2 - x - y \text{ , para } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < 1$$

Na solução do exemplo 16 foi visto que as funções de densidade marginais de X e de Y são:

i) $f_X(x) = \dfrac{3}{2} - x$, para $0<x<1$

e

ii) $f_Y(y) = \dfrac{3}{2} - y$, para $0<y<1$

Então as distribuições condicionadas são:

i) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-y} = \dfrac{2(2-x-y)}{3-2y}$, para $0<x<1$, com $0<y<1$

ii) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2-x-y}{\frac{3}{2}-x} = \dfrac{2(2-x-y)}{3-2x}$, para $0<y<1$, com $0<x<1$

Também se verifica que nesse caso o domínio é da forma retangular (de lados paralelos aos eixos coordenados) pois corresponde ao conjunto definido a seguir

$$R^2_{XY} = \left\{(x, y)\in R^2 \mid 0<x<1 \text{ e } 0<y<1\right\}$$

Porém, a expressão da função de densidade conjunta de X e de Y não é igual ao produto das funções de densidade marginais de X e de Y. Com efeito, tem-se

$$f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y) \quad \text{pois} \quad 2 - x - y \neq \left(\frac{3}{2}-x\right)\left(\frac{3}{2}-y\right)$$

Logo X e Y não são independentes.

Exemplo 21. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional do tipo contínuo, com a seguinte densidade de probabilidade:

$$f_{XY}(x,y) = 2 \ , \ \text{para} \ 0 < x < 1 \ \text{ e } \ 0 < y < x$$

a) Determinar as distribuições condicionadas associadas a (X, Y);

b) verificar se X e Y são independentes.

Solução

A função de densidade de probabilidade conjunta de (X, Y) é:

$$f_{XY}(x,y) = 2 \quad \text{para} \ 0 < x < 1 \ \text{ e } \ 0 < y < x$$

Portanto:

a) As funções de densidade marginais de X e de Y são:

a-i) $f_X(x) = 2\int_0^x dy = 2x \quad 0<x<1$

a-ii) $f_Y(y) = 2\int_y^1 dx = 2(1-y) \quad 0<y<1$

As funções de densidade condicionadas associadas a (X, Y) são:

a-iii) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{2}{2(1-y)} = \dfrac{1}{1-y}$ para $y < x < 1$ com $0 < y < 1$

a-iv) $f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$ para $0 < y < x$ com $0 < x < 1$

Finalmente, deve-se observar que as duas funções de densidade acima são constantes, pois tanto o valor y de Y na primeira quanto o valor x de X na segunda são fixados. Diz-se que uma variável aleatória T possui distribuição Uniforme no intervalo (a, b) se a sua função de densidade de probabilidade for uma constante, expressa na seguinte forma

$$f_T(t) = \frac{1}{b-a}\text{ , para } a < t < b.$$

Portanto, nesse caso as duas distribuições condicionadas têm distribuições do tipo Uniforme: {X|Y=y} possui distribuição Uniforme no intervalo (y,1) e {Y | X=x} possui distribuição Uniforme no intervalo (0, x).

b) Verificação da independência

Como $f_X(x)f_Y(y) = 4x(1-y)$ então

$f_X(x)f_Y(y) \neq f_{XY}(x,y)$ portanto X e Y não são independentes.