Exercícios

1. Usando Dedução Natural, apresente demonstrações para as seguintes fórmulas:

(a) $\mathbf{C} = (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$

(b) $\mathbf{W} = (A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

2. Deduza os seguintes resultados pelo método da Dedução Natural.

(a) $(\neg p \to q) \vdash ((\neg p \to \neg q) \to p)$

(b) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

(c) $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

(d) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

(e) $\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)$

(f) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q$

(g) $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$

(h) $p \vee (q \wedge r) \vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(i) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \vdash p \vee (q \wedge r)$

(j) $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(k) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

3. Demonstre o Teorema da Dedução usando as regras da Dedução Natural. Ou seja, mostre que

$$\Gamma, A \vdash_{\mathrm{DN}} B \textit{ sse } \Gamma \vdash_{\mathrm{DN}} A \to B.$$

4. Prove que toda dedução pelo sistema de axiomatização pode ser simulada pelo método da Dedução Natural.

Dica: Note que já demonstramos todos os axiomas, nos exemplos acima. Note também que a substituição e Modus Ponens fazem parte da Dedução Natural. Resta apenas mostrar como, dada uma dedução axiomática, como compor uma Dedução Natural.

3.4 O Método de Tableaux Analíticos

Os métodos de inferência vistos até agora permitem demonstrar quando uma fórmula pode ser a conclusão de um conjunto de premissas. No entanto, nenhum destes método provê, de maneira óbvia, um *procedimento de decisão.*

Um procedimento de decisão permite determinar a validade de um seqüente, ou seja, determinar se $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$ ou se $B_1, \ldots, B_n \nvdash A_1, \ldots, A_m$. No caso típico, estamos interessados em decidir seqüentes com o conseqüente unitário, da forma $\Gamma \vdash A$. Os métodos do Sistemas Axiomáticos e da Decisão Natural apenas nos permitiam demonstrar como A poderia ser inferido a partir de Γ. Mas estes métodos não nos permitiam inferir que $\Gamma \not\vdash A$, ou seja, não permitiam inferir a falsidade de um seqüente.

É importante notar que $\Gamma \not\vdash A$ *não implica* que $\Gamma \vdash \neg A$. Isto pode ser visualizado mais facilmente através da noção de conseqüência lógica. Considere a (in)conseqüência lógica $p \not\models q$, onde claramente podemos ter uma valoração v que satisfaz p e contradiz q; com isto não podemos afirmar que $p \models \neg q$ pois podemos ter uma valoração v' que satisfaz p e q, falsificando $\neg q$. Desta forma temos que $p \not\models q$ e $p \not\models \neg q$.

Este exemplo, aliás, é muito conveniente para ilustrar o fato de que os métodos baseados em Tabelas da Verdade são procedimentos de decisão. Porém, como já vimos, estes procedimentos têm um crescimento no número de linhas das Tabelas da Verdade exponencial com o número de símbolos proposicionais.

Iremos apresentar agora um método de decisão baseado num sistema de inferência, o qual não necessariamente gera provas de tamanho exponencial com o número de símbolos proposicionais. Tal método é chamado de método dos Tableaux Analíticos ou Tableaux Semânticos[7].

O método dos Tableaux Analíticos é um método de inferência baseado em *refutação*: para provarmos que $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$, iremos *afirmar a veracidade* de $B_1, \ldots, B_n$ e *afirmar a falsidade* de $A_1, \ldots, A_m$, na esperança de derivarmos uma *contradição*. Se a contradição for obtida, teremos demonstrado o seqüente. Por outro lado, se uma contradição não for obtida, teremos obtido um *contra-exemplo* ao seqüente, ou seja, teremos construído uma valoração que satisfaz todas as fórmulas B_i do antecedente e falsifica todas as fórmulas A_j do conseqüente.

3.4.1 Fórmula Marcadas

Para afirmar a veracidade ou a falsidade de fórmula, o método dos Tableaux Analíticos lida com *fórmulas marcadas* pelos símbolos T (de *true*, verdadeiro) e F (falso). Desta forma, em vez de lidar com fórmulas puras, do tipo A, lidaremos com fórmulas marcadas, do tipo $\mathrm{T}A$ e $\mathrm{F}A$. As fórmula marcadas $\mathrm{T}A$ e $\mathrm{F}A$ são chamadas de *fórmulas conjugadas*.

O passo inicial na criação de um tableau para um seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash A_1, \ldots, A_m$ é marcar todas as fórmulas da seguinte maneira. As fórmulas do antecedente (aquelas cuja veracidade queremos afirmar) são marcadas por T. As fórmulas do conseqüente, as quais num processo de refutação queremos afirmar sua falsidade, são marcadas por F. Desta forma, o seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash$

[7]Tanto no singular, *Tableau*, quanto no plural, *Tableaux*, a palavra é pronunciada *tablô*; iremos usar a grafia tradicional em francês.

$A_1, \ldots, A_m$ dá origem ao tableau inicial:

$$\begin{array}{c} \mathrm{T}B_1 \\ \vdots \\ \mathrm{T}B_n \\ \mathrm{F}A_1 \\ \vdots \\ \mathrm{F}A_m \end{array}$$

Este formato inicial do tableau indica que um tableau é uma árvore. Em seguida o tableau é expandido por regras que podem simplesmente adicionar novas fórmulas ao final de um ramo (regras do tipo α) ou podem bifurcar um ramo em dois (regras do tipo β).

3.4.2 Regras de Expansão α e β

As fórmula marcadas de um tableau podem ser de dois tipos: fórmulas do tipo α e fórmulas do tipo β. As fórmulas do tipo α se decompõem em fórmulas α_1 e α_2 conforme ilustrado na Figura 3.3. As fórmulas do tipo β se decompõem em fórmulas β_1 e β_2 conforme ilustrado na Figura 3.4.

α	α_1	α_2
$\mathrm{T}A \wedge B$	$\mathrm{T}A$	$\mathrm{T}B$
$\mathrm{F}A \vee B$	$\mathrm{F}A$	$\mathrm{F}B$
$\mathrm{F}A \rightarrow B$	$\mathrm{T}A$	$\mathrm{F}B$
$\mathrm{T}\neg A$	$\mathrm{F}A$	$\mathrm{F}A$

Figura 3.3: Fórmulas do tipo α

β	β_1	β_2
$\mathrm{F}A \wedge B$	$\mathrm{F}A$	$\mathrm{F}B$
$\mathrm{T}A \vee B$	$\mathrm{T}A$	$\mathrm{T}B$
$\mathrm{T}A \rightarrow B$	$\mathrm{F}A$	$\mathrm{T}B$
$\mathrm{F}\neg A$	$\mathrm{T}A$	$\mathrm{T}A$

Figura 3.4: Fórmulas do tipo β

Note que a escolha de classificar $\mathrm{T}\neg A$ como fórmula do tipo α e $\mathrm{F}\neg A$ como fórmula do tipo β é arbitrária, e foi feita com o intuito de dar simetria ao conjunto de fórmulas marcadas. Assim, se uma fórmula é do tipo α, a fórmula conjugada é do tipo β, e vice-versa.

As regras de expansão de um tableau são as seguintes:

Expansão α: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo α, adiciona-se α_1 e α_2 ao fim de todos os ramos que contém α.

$$\frac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}}$$

Expansão β: Se um ramo do tableau contém uma fórmula do tipo β, este ramo é bifurcado em dois ramos, encabeçados por β_1 e β_2, respectivamente.

$$\begin{array}{c}\beta\\ / \ \backslash\\ \beta_1 \quad \beta_2\end{array}$$

Note que se p é um átomo, Tp e Fp não são nem fórmulas do tipo α nem do tipo β, e portanto não podem gerar expansões do tableau. Em cada ramo, uma fórmula só pode ser expandida uma única vez.

Um ramo que não possui mais fórmulas para serem expandidas é chamado de ramo *saturado*. Como as expansões α e β sempre geram fórmulas de tamanho menor, eventualmente todas as fórmulas serão expandidas até chegarmos ao nível atômico, quando todos os ramos estarão saturados. Portanto, o processo de expansão sempre termina.

Um ramo do tableau está *fechado* se este possui um par de fórmulas conjugadas do tipo TA e FA. Um ramo fechado não necessita mais ser expandido, mesmo que não esteja ainda saturado. Um tableau está *fechado* se todos os seus ramos estão fechados.

Definição 3.4.1 *Um seqüente $B_1, \ldots, B_n \vdash_{TA} A_1, \ldots, A_m$ foi deduzido pelo método dos Tableaux Analíticos se existir um tableau fechado para ele.*

No caso da dedução de um teorema $\vdash_{\text{TA}} A$ pelo método dos Tableaux Analíticos, devemos construir um tableau fechado para FA.

Vamos a seguir ver alguns exemplos de dedução e de decisão pelo método dos Tableaux Analíticos.

3.4.3 Exemplos

Como primeiro exemplo, vamos provar o teorema $\vdash p \vee \neg p$:

1.	F$p \vee \neg p$	
2.	Fp	$\alpha, 1$
3.	F$\neg p$	$\alpha, 1$
4.	Tp	$\beta, 3$
	$\times$	$2, 4$

Neste primeiro exemplo, não há bifurcações. Iniciamos aplicando uma expansão α numa fórmula do formato (F$\vee$), gerando as linhas 2 e 3. Em seguida, expandimos a fórmula (F$\neg$) da linha 3, que apesar de ser nominalmente do tipo β, não provoca bifurcação. As linhas 2 e 4 fecham o ramo, e como este tableau tem apenas um ramo, o tableau está fechado, e o teorema foi demonstrado. Note que o único ramo está saturado.

Como segundo exemplo, vamos provar que $p \to q, q \to r \vdash p \to r$:

$$\begin{array}{c} \mathrm{T}p \to q \\ \mathrm{T}q \to r \\ \mathrm{F}p \to r \\ \mathrm{T}p \\ \mathrm{F}r \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \begin{array}{c} \mathrm{F}p \\ \times \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{T}q \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \mathrm{F}q & \mathrm{T}r \\ \times & \times \end{array} \end{array} \end{array} \end{array}$$

Neste exemplo, primeiramente aplicou-se uma α em $\mathrm{F}p \to r$; em geral, por motivos de eficiência, aplica-se todas as expansões α antes de aplicar uma β. Em seguida, aplicou-se uma β em $\mathrm{T}p \to q$, fechando o ramo esquerdo; note que este ramo foi fechado sem estar saturado. Em seguida, aplicou-se uma β em $\mathrm{T}q \to$, e os dois ramos foram imediatamente fechados.

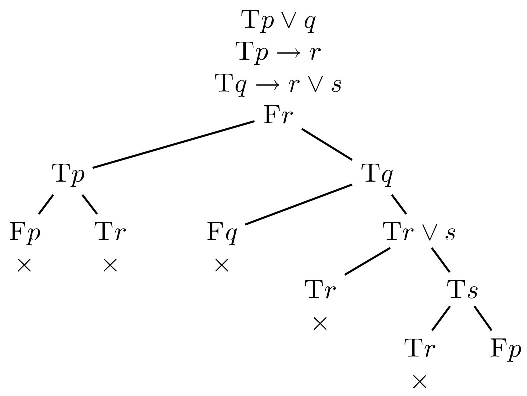
No próximo exemplo, vamos mostrar um seqüente não-dedutível. Vamos considerar $p, p \wedge q \to r \vdash r$:

$$\begin{array}{c} \mathrm{T}p \\ \mathrm{T}p \wedge q \to r \\ \mathrm{F}r \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \begin{array}{c} \mathrm{F}p \wedge q \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \mathrm{T}p & \mathrm{F}q \\ \times & \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{T}r \\ \times \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \end{array}$$

Neste tableau, o ramo mais a direita e o ramo mais a esquerda estão fechados. No entanto, o ramo central está saturado e aberto. Neste ramo, temos as seguintes fórmulas atômicas marcadas: $\mathrm{T}p, \mathrm{F}q, \mathrm{F}r$. Este ramo fornece a valoração v tal que $v(p) = 1, v(q) = v(r) = 0$. Note que esta valoração demonstra que $p, p \wedge q \to r \not\models r$ pois satisfaz p e $p \wedge q \to r$ e falsifica r. Ou seja, o ramo saturado e aberto nos deu um *contra-exemplo* do seqüente.

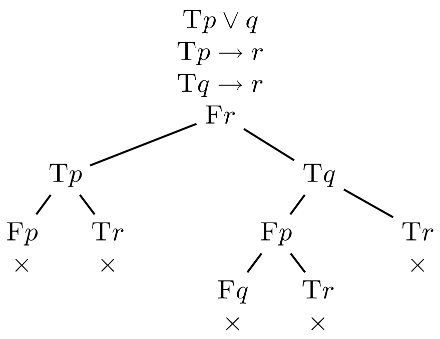
O fato de que há um ramo saturado aberto no tableau implica que $p, p \wedge q \to r \nvdash_{\mathrm{TA}} r$. Não é coincidência que tanto o tableau nos forneça uma valoração que é um contra-exemplo ao seqüente que tentávamos provar, conforme veremos na Seção 3.5, onde provaremos a correção e completude do método de Tableaux Analíticos em relação à semântica de valorações.

Um segundo exemplo que demonstra a geração de contra-exemplos a partir de um ramo saturado aberto é o seqüente não-dedutível $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \vdash r$, que gera o seguinte tableau:

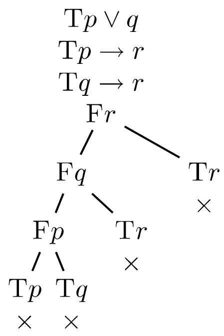


No tableau acima, o ramo mais à direita está aberto e contém as fórmulas atômicas marcadas: Fr, Tq, Ts e Fp. Consideramos então uma valoração v tal que $v(r) = v(p) = 0$ e $v(q) = v(s) = 1$. Com isso, temos que $v(p \vee q) = v(p \to r) = v(q \to r \vee s) = 1$, satisfazendo o antecedente do seqüente, mas falsificando o conseqüente. Do tableau aberto inferimos $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \nvdash_{\mathrm{TA}} r$ e da valoração contra-exemplo inferimos que $p \vee q, p \to r, q \to r \vee s \not\models r$.

Por fim, vamos exemplificar o fato de que um seqüente pode ter mais de um tableau. Considere o seqüente $p \vee q, p \to r, q \to r \vdash r$. Um primeiro tableau aplica as regras β nas fórmulas conforme sua ocorrência de cima para baixo, gerando o seguinte tableau:



No tableau acima, há quatro bifurcações e cinco ramos, todos fechados. Se, no entanto, aplicarmos as bifurcações nas fórmulas β de baixo para cima, teremos o seguinte tableau:



Neste segundo tableau há apenas três bifurcações e quatro ramos. Isto mostra que a ordem em que as bifurcações são feiras pode afetar o tamanho do tableau. Um mesmo seqüente pode ter uma prova de tamanho linear ou exponencial, dependendo da ordem em que as regras são aplicadas.

No entanto, é importante notar que se há um tableau fechado para um seqüente, qualquer outro tableau também irá fechar, independentemente da ordem de aplicação de regras.

Exercícios

1. Prove ou refute os seguintes seqüentes pelo método dos Tableaux Analíticos:

(a) $\neg q \to \neg p \vdash p \to q$

(b) $\neg p \to \neg q \vdash p \to q$

(c) $p \to q \vdash p \to q \vee r$

(d) $p \to q \vdash p \to q \wedge r$

(e) $\neg(p \wedge q) \vdash \neg p \wedge \neg q$

(f) $\neg(p \vee q) \vdash \neg p \vee \neg q$

(g) $p \vee q, \neg q \vdash p$ (Modus Tolens)

(h) $p \to q, q \vdash p$ (Modus Erronens)

(i) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

2. Prove os axiomas do *fragmento implicativo* da lógica clássica:

I	$p \to p$
B	$(p \to q) \to (r \to p) \to (r \to p)$
C	$(p \to q \to r) \to (q \to p \to r)$
W	$(p \to p \to q) \to (p \to q)$
S	$(p \to q \to r) \to (p \to q) \to (p \to r)$
K	$p \to q \to p$
Peirce	$((p \to q) \to p) \to p$

3. Considere o conectivo $\leftrightarrow$ (*bi-implicação* ou *equivalência*), com a seguinte tabela da verdade:

$A \leftrightarrow B$	$B = 0$	$B = 1$
$A = 0$	1	0
$A = 1$	0	1

Dê regras de tableau para este conectivo. Estas regras são do tipo α ou β?

4. Usando a regra definida no exercício anterior, prova as seguintes equivalências notáveis pelo método dos Tableaux Analíticos:

(a) $\neg\neg p \leftrightarrow p$ (eliminação da dupla negação)

(b) $p \to q \leftrightarrow \neg p \vee q$ (definição de $\to$ em termos de $\vee$ e $\neg$)

(c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (Lei de *De Morgan* 1)

(d) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (Lei de *De Morgan* 2)

(e) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Distributividade de $\wedge$ sobre $\vee$)

(f) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Distributividade de $\vee$ sobre $\wedge$)

3.5 Correção e Completude

Nesta seção, abordaremos as questões da lógica dentro de um enfoque mais formal e iremos provar a *correção* e *completude* do método de tableaux analíticos em relação à semântica de valorações vista no capítulo anterior. Provaremos também que este método é *decidível*, ou seja, o método sempre termina com uma resposta.

Recorde que a implicação lógica de uma fórmula A a partir de um conjunto de hipóteses Γ é denotada por $\Gamma \models A$, que foi definido como sendo verdadeira quando, para toda valoração v, se v satisfaz todas as formulas $B \in \Gamma$ ($v(\Gamma) = 1$) então v satisfaz A ($v(A) = 1$). Ou seja:

$$\Gamma \models A \text{ sse } v(\Gamma) = 1 \text{ implica } v(A) = 1$$

Por outro lado, representamos por $\Gamma \vdash_{\text{TA}} A$ o fato de existir um tableaux analítico fechado com hipóteses Γ e conclusão A.

Desta forma, definimos que o método de tableaux analíticos é *correto* se sempre que for possível obtermos uma prova de $\Gamma \vdash_{\text{TA}} A$ então será verdade que $\Gamma \models A$. Ou seja, a correção pode ser expressa por:

$$\Gamma \vdash_{\text{TA}} A \Longrightarrow \Gamma \models A.$$

Por outro lado, o método de tableaux analíticos é correto se sempre que uma implicação lógica for verdadeira, $\Gamma \models A$, então conseguiremos prová-la, obtendo $\Gamma \vdash_{\text{TA}} A$. Ou seja, a completude pode ser expressa por

$$\Gamma \vdash_{\text{TA}} A \Longrightarrow \Gamma \models A.$$

Note que, no caso de completude, o fato de que existe uma tableau fechado para $\Gamma \vdash_{\text{TA}} A$ não quer dizer, imediatamente, que exista um algoritmo que produza sempre este tableau. Similarmente, se um conseqüência lógica é falsa, isto não implica automaticamente que haja um algoritmo que sempre consiga um ramo aberto (e, portanto, uma *contra-valoração* ou um contra-exemplo) que falsifique a conseqüência lógica. Definimos, então, o método de tableaux analíticos somo sendo *decidível* se as seguintes condições forem respeitadas:

- Se $\Gamma \models A$ então existe um algoritmo que gera um tableau fechado para $\Gamma \vdash_{\text{TA}} A$.
- Se $\Gamma \not\models A$ então existe um algoritmo que gera um tableau com um ramo saturado aberto.

A seguir veremos como demonstrar estas propriedades.

3.5.1 Conjuntos Descendentemente Saturados

Um conjunto de fórmulas marcadas Θ é dito *descendentemente saturado* se as seguintes condições forem respeitadas:

1. Nenhuma fórmula marcada e seu conjugado estão simultaneamente em Θ.
2. Se existe alguma fórmula marcada em Θ do tipo α, então $\alpha_1 \in \Theta$ e $\alpha_2 \in \Theta$.-
3. Se existe alguma fórmula marcada em Θ do tipo β, então $\beta_1 \in \Theta$ ou $\beta_2 \in \Theta$ (ou ambos).

Os conjuntos descendentemente saturados são às vezes chamados de *conjuntos de Hintikka*, e são importantes para o estudo de tableaux devido ao seguinte fato.

Lema 3.5.1 *Todo ramo saturado e aberto de um tableau é um conjunto descendentemente saturado.*

Demonstração: Como o ramo é aberto, nenhuma fórmula e seu conjugado podem estar presentes no ramo, satisfazendo a primeira condição.

Devido à saturação, se há uma fórmula do tipo α no ramo, então tanto α_1 como α_2 estão no ramo, satisfazendo a segunda condição.

Também devido à saturação, se há uma fórmula do tipo β no ramo, então ou β_1 ou β_2 estão no ramo, satisfazendo a terceira condição. ■

Nem todo conjunto descendentemente saturado é um ramo. Por exemplo, podemos ter um conjunto infinito de fórmulas que é descendentemente saturado, mas como iremos ver na prova de decidibilidade, não é possível termos ramos infinitos em um tableau para a lógica proposicional clássica.

Por outro lado, o resultado acima indica que a expansão de um ramo é uma tentativa de se construir um conjunto descendentemente saturado a partir de um conjunto qualquer de fórmulas. Note que isto é apenas uma tentativa, pois pode ser impossível a construção do conjunto descendentemente saturado exatamente nos casos em que todos os ramos do tableau fecham, e a proibição de uma fórmula e seu conjuga pertencerem ao conjunto não pode ser respeitada.

O próximo passo é estender a noção de valoração para fórmulas marcadas. Isto pode ser facilmente obtido da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} v(\mathrm{T}A) = 1 \text{ sse } v(A) = 1 \\ v(\mathrm{F}A) = 1 \text{ sse } v(A) = 0 \end{array}$$

Desta forma, podemos dizer que uma valoração v satisfaz um conjunto Θ de fórmulas marcadas se para toda fórmula marcada $\psi \in \Theta$, $v(\psi) = 1$. Um conjunto de fórmulas marcadas Θ é *satisfazível* se existir um v tal que $v(\Theta) = 1$, ou seja, tal que $v(\psi) = 1$ para todo $\psi \in \Theta$.

Iremos provar agora dois lemas que irão nos fornecer o caminho para as provas de correção e completude do método dos Tableaux Analíticos.

Lema 3.5.2 *Seja Θ um conjunto satisfazível de fórmulas marcadas. Então:*

(a) Se $\alpha \in \Theta$, então $\Theta \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ é satisfazível também.

(b) Se $\beta \in \Theta$, então $\Theta \cup \{\beta_1\}$ é satisfazível ou $\Theta \cup \{\beta_2\}$ é satisfazível.

Demonstração:

(a) Suponha que $\alpha \in \Theta$ é da forma $\mathrm{T}A \wedge B$. Como Θ é satisfazível, existe v tal que $v(\Theta) = 1$. Em particular, $v(\alpha) = 1$ e portanto $v(A) = v(B) = 1$, logo $v(\Theta \cup \{\mathrm{T}A, \mathrm{T}B\}) = 1$.

A prova é totalmente análoga nos casos em que α é da forma $\mathrm{F}A \vee B$, $\mathrm{F}A \to B$ e $\mathrm{T}\neg A$. Ver Exercício 1.

(b) Suponha que $\beta \in \Theta$ é da forma $\mathrm{F}A \wedge B$. Como Θ é satisfazível, existe v tal que $v(\Theta) = 1$. Em particular, $v(\beta) = 1$ e portanto $v(A) = 0$ ou $v(B) = 0$. Se $v(A) = 0$, temos que $v(\Theta \cup \{\mathrm{F}A\}) = 1$, e se $v(B) = 0$ temos que $v(\Theta \cup \{\mathrm{F}B\}) = 1$.

A prova é totalmente análoga nos casos em que β é da forma $\mathrm{T}A \vee B$, $\mathrm{T}A \to B$ e $\mathrm{F}\neg A$. Ver Exercício 2.

■

Este segundo lema é conhecido como Lema de Hintikka.

Lema 3.5.3 (Hintikka) *Todo conjunto descendentemente saturado é satisfazível.*

Demonstração: Seja Θ um conjunto descendentemente saturado, logo para um mesmo átomo p não podemos ter $\mathrm{T}p \in \Theta$ e $\mathrm{F}p \in \Theta$. Vamos construir uma valoração v da seguinte maneira:

- Se $\mathrm{T}p \in \Theta$ então $v(p) = 1$.
- Se $\mathrm{F}p \in \Theta$ então $v(p) = 0$.
- Se nem $\mathrm{T}p$ nem $\mathrm{F}p$ estão em Θ, então $v(p)$ pode ser qualquer valor.

É imediato que todo átomo marcado em Θ é satisfeito por v. Vamos demonstrar por indução na complexidade da fórmula que para toda fórmula marcada $\psi \in \Theta$, $v(\psi) = 1$. O caso básico foi coberto pela observação sobre átomos marcados. Resta analisar dois casos indutivos.

Se $\alpha \in \Theta$ então $\alpha_1, \alpha_2 \in \Theta$. Pela hipótese de indução, $v(\alpha_1) = v(\alpha_2) = 1$. É fácil verificar que para α da forma $\mathrm{T}A \wedge B$, $\mathrm{F}A \vee B$, $\mathrm{F}A \to B$ ou $\mathrm{T}\neg A$, isto implica que $v(\alpha) = 1$ (Ver Exercício 1).

Se $\alpha \in \Theta$ então $\beta_1 \in \Theta$ ou β_2. Sem perda de generalidade, suponha que $\beta_1 \in \Theta$ e então, pela hipótese de indução, $v(\beta_1) = 1$. Para as quatro possíveis formas de β, $v(\beta_1) = 1$ implica que $v(\beta) = 1$ (Ver Exercício 2). A prova é totalmente análoga se $\beta_2 \in \Theta$.

Desta forma, provamos que todas as fórmula em Θ são satisfeitas por v, como desejado. ■

Note que o Lema de Hintikka vale tanto para conjuntos finitos quanto para conjuntos infinitos de fórmulas marcadas.

3.5.2 Correção do Método de Tableaux Analíticos

Estamos em condições de provar a correção do método de Tableaux Analíticos.

Teorema 3.5.1 (Correção) *O método dos Tableaux Analíticos é correto com relação à semântica de valorações. Ou seja, se $\Gamma \vdash_{\mathrm{TA}} A$ então $\Gamma \models A$.*

Demonstração: Vamos provar a *contrapositiva* do enunciado do teorema, ou seja, vamos assumir que $\Gamma \not\models A$ e provar que $\Gamma \nvdash_{\mathrm{TA}} A$.

De fato, suponha que $\Gamma \not\models A$. Então existe uma valoração v tal que $v(\Gamma) = 1$ e $v(A) = 0$. Seja Θ_0 o conjunto de fórmula marcadas representando o tableau inicial para $\Gamma \vdash_{\mathrm{TA}} A$; claramente $v(\Theta_0) = 1$. Vamos provar que a cada passo da expansão do tableau haverá sempre um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) = 1$.

Suponha que $v(\Theta_{i-1}) = 1$. Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula α, então pelo Lema 3.5.2(a), a expansão será satisfeita por v. Se o ramo Θ_{i-1} for expandido por uma fórmula β, então pelo Lema 3.5.2(b), ao menos uma dos dois ramos resultantes será satisfeito por v. Em ambos os casos temos um ramo Θ_i tal que $v(\Theta_i) = 1$.

Logo sempre haverá um ramo satisfeito que, após todas as expansões, será um conjunto descendentemente saturado e não poderá fechar. Portanto $\Gamma \nvdash_{\mathrm{TA}} A$. ■

Note que a prova do Teorema 3.5.1 mostra que se $\Gamma \not\models A$, *nenhum* tableau para estas hipóteses poderá fechar.

3.5.3 A Completude do Método de Tableaux Analíticos

A completude do método é uma decorrência direta do Lema de Hintikka, como podemos ver a seguir.

Teorema 3.5.2 (Completude) *O método dos Tableaux Analíticos é completo com relação à semântica de valorações. Ou seja, se* $\Gamma \models A$ *então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{TA}} A$.

Demonstração: Vamos também demonstrar usando a contrapositiva. Suponhamos que $\Gamma \not\vdash_{\mathrm{TA}} A$ pois temos um ramo Θ saturado e aberto. Sabemos pelo Lema 3.5.1 que este ramo é um conjunto descendentemente saturado logo, pelo Lema de Hintikka, Θ é satisfazível. Portanto existe uma valoração que satisfaz Γ e falsifica A, ou seja, $\Gamma \not\models A$. ■

Note que este teorema também implica que se $\Gamma \models A$, qualquer tableau para estes dados deve fechar, caso contrário teremos uma valoração que é um contra-exemplo para $\Gamma \models A$.

3.5.4 Decidibilidade

Para provarmos que o método dos tableaux é decidível, basta mostrarmos que um desenvolvimento qualquer de um tableau para a lógica proposicional clássica, independentemente da ordem em que as expansões são feitas, sempre gera tableaux finitos.[8]

Teorema 3.5.3 *O método dos Tableaux Analíticos é um processo de decisão para a lógica proposicional clássica.*

Demonstração: No processo de expansão de um tableau, notamos que:

1. uma fórmula nunca é expandida mais de uma vez; e

2. a expansão de uma fórmula gera sempre fórmulas de complexidade menor.

Desta forma, a medida que vai-se expandindo um tableau, qualquer que seja a ordem de expansão, as fórmulas não expandidas serão cada vez de complexidade menor, até que finalmente tenhamos apenas átomos, que não podem ser expandidos, e o todos os ramos do tableau estarão saturados. Se todos os ramos estiverem fechados, então o seqüente inicial é uma conseqüência lógica. Caso contrário, temos um contra-exemplo do seqüente inicial. ■

[8] Note que esta propriedade deixará de ser verdade quando abordarmos a lógica de primeira ordem na Parte II do livro.

Os Tableaux Analíticos são métodos muito mais amenos à manipulação que as tediosas tabelas da verdade, se bem que ambos os métodos são procedimentos de decisão para a lógica clássica. No entanto, as tabelas da verdade são métodos determinísticos, enquanto que os tableaux dependem da ordem em que as fórmulas são escolhidas para serem expandidas. Fica a pergunta de caráter computacional: será que os tableaux são sempre melhores que as tabelas da verdade na demonstração de um teorema?

A resposta é: nem sempre. Em geral, quando o tamanho da fórmula não é muito maior que o número de átomos, a utilização de tableaux pode gerar deduções muito menores. No entanto, quando se trata de uma fórmula "gorda", onde o tamanho da fórmula é exponencial em relação ao número de átomos distintos, a situação pode se inverter. Veja o Exercício 3.

Exercícios

1. Mostre, examinando cada um dos casos, que $v(\alpha) = 1$ se e somente se $v(\alpha_1) = v(\alpha_2) = 1$.

2. Mostre, examinando cada um dos casos, que $v(\beta) = 1$ se e somente se $v(\beta_1) = 1$ ou $v(\beta_2) = 1$.

3. Considere a seguinte família de tautologias:

$$
\begin{array}{lcl}
H_1 & = & p \vee \neg p \\
H_2 & = & (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\
H_3 & = & (p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\
 & & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)
\end{array}
$$

Pede-se:

(a) Dê a forma geral da tautologia H_n. Calcule a complexidade da fórmula H_n em função de n, o número de átomos.

(b) Faça um tableau para H_1, H_2, H_3, H_n e conte o número de ramos utilizados em função de n

(c) Faça uma tabela da verdade para H_1, H_2, H_3, H_n e conte o número de células de sua tabela em função de n.

(d) Qual dos dois métodos é mais eficiente na prova dos teoremas na família H_n.

3.6 Notas Bibliográficas

David Hilbert foi um dos matemáticos mais influentes do final do século 19 e início do século 20. Em seu trabalho sobre os fundamentos da Geometria de 1899 [Hil99], ele propôs a primeira axiomatização correta e completa da geometria euclidiana. Este conjunto de axiomas ficou conhecido como o O Sistema de Axiomas de Hilbert para Geometria e, em geral, sistemas de axiomas

Capítulo 4

Aspectos Computacionais

4.1 Implementação de um Provador de Teoremas

Na Seção 3.4 foi apresentado o método de Tableaux Analíticos como um método de inferência lógica e também como um método de decisão, capaz de decidir sobre a validade de uma fórmula ou a derivabilidade de um seqüente.

Nesta seção indicaremos formas de implementar este método, o que implica em analisarmos dois pontos cruciais para a transformação da apresentação abstrata do método dos tableaux em uma realidade implementada. Estes dois pontos são as *estratégias computacionais* e as *estruturas de dados*.

Além disso, iremos apresentar *famílias fórmulas notáveis* de crescente complexidade que servem de teste para uma eventual implementação de um provador de teoremas.

4.1.1 Estratégias Computacionais

O Algoritmo 4.1 apresenta de forma genérica um provador de teoremas pelo método de Tableaux Analíticos. Uma das propriedades fundamentais do Algoritmo 4.1 é que trata-se de um algoritmo *não-determinístico*.

Num algoritmo *determinístico*, a cada passo a instrução a ser executada está totalmente definida. Por outro lado, um algoritmo *não-determinístico* é caracterizado pela realização de escolhas em determinados pontos do algoritmo. No caso do Algoritmo 4.1, estas escolhas estão explicitadas nas linhas 3 e 8. A linha 3 contém uma escolha sobre qual ramo proceder a expansão do tableau. A linha 8 contém uma escolha sobre qual regra aplicar a um determinado ramo aberto.

Os computadores que temos a nosso dispor são todos máquinas determinísticas. Para que um algoritmo não-determinístico possa ser implementado em um computador determinístico é preciso incorporar ao algoritmo uma *estratégia computacional* ou *estratégia de seleção*. Tal estratégia tem a função de implementar

Algoritmo 4.1 Prova de Teoremas por Tableaux Analíticos

Entrada: Um seqüente $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots B_n$.
Saída: `verdadeiro`, se $A_1, \ldots, A_n \models B_1, \ldots B_n$, ou um contra-exemplo, caso contrário.

```
Criar um ramo inicial contendo TA_1, ..., TA_n, FB_1, ... FB_n.
enquanto existir um ramo aberto faça
   Escolher um ramo aberto θ.
   se o ramo θ está saturado então
      Encontrar todos os átomos marcados de θ.
      retorne a valoração correspondente a estes átomos marcados.
   fim se
   Escolher R, uma das regras aplicáveis em θ.
   Expandir o tableau, aplicando R sobre θ.
   Verificar se θ ou seus sub-ramos fecharam.
fim enquanto
retorne verdadeiro
```

uma política determinística de escolha em cada passo não-determinístico do programa.

É importante notar que a escolha da estratégia pode ter conseqüências muito drásticas sobre a eficiência do provador de teoremas. Com a estratégia errada, um seqüente que geraria um tableau fechado em tempo linear poderia gerar, devido a seleção de bifurcações, a uma árvore larga, que só gera um tableau fechado depois de um tempo exponencial em relação ao tamanho das fórmula contidas no seqüente inicial.

Vamos analisar a seguir as estratégias necessárias para determinizar o Algoritmo 4.1.

Estratégias de Escolha de Ramos

A classe de estratégias utilizada na escolha do ramo do tableau a ser expandido é conhecido na literatura como *estratégia de busca em árvore*. Isto porque estamos buscando um ramo que seja aberto e saturado, em cujo caso a busca se acaba e, no caso em que esta busca falhou, temos um tableau fechado.

Inicialmente o tableau possui apenas um ramo. À medida que regras do tipo β vão sendo aplicadas, diversos ramos podem surgir, forçando o algoritmo a fazer uma escolha sobre qual ramo expandir.

Dentre as várias estratégias de busca em árvore conhecidas na literatura, destacamos a seguintes:

Busca em Profundidade Este tipo de busca tende a expandir um ramo até a saturação. No caso de tableaux, isto significa expandir um ramo até que ele esteja fechado ou saturado. Ao se aplicar uma regra-β, a busca procede no ramo contendo β_1. Caso o ramo seja fechado, a escolha recairá sobre o ramo contendo β_2 da bifurcação mais recente.

O fato de o ramo contendo β_1 ser escolhido primeiro para continuação da expansão é arbitrário, e poderíamos ter uma estratégia mais refinada que analisaria qual dos dois ramos deveria ser expandido primeiro, retornando ao outro caso o escolhido venha a fechar.

Busca em Largura Este tipo de busca tende a expandir um ramo de cada vez, fazendo com que todos os ramos tenham o mesmo cumprimento (em termos de número de regras aplicadas a ele).

Por razões de eficiência e espaço, a busca em profundidade é a preferida na expansão de tableau. Este método é mais eficiente pois, se o ramo for saturar sem fechar, atingiremos este ponto antes do método em largura. Em termos de espaço este método também é mais econômico, pois a cada instante necessitamos armazenar apenas o ramo atual. Quando um ramo se fecha, o trecho final entre o fechamento e a última bifurcação pode ser descartado ao se reiniciar a expansão do ramo contendo β_2.

Mais abaixo detalharemos as estruturas de dados necessárias para que este mecanismo de busca em profundidade possa ser implementado.

Estratégias de Seleção de Regras

Uma vez que temos um ramo aberto selecionado, precisamos selecionar, dentre as possíveis regras que podem expandir aquele ramo, qual regra será aplicada. Diversas estratégias podem ser adotadas, e uma composição de estratégias muitas vezes são usadas.

A primeira estratégia que apresentaremos é universalmente adotada, que chamaremos de α-primeiro. Trata-se da estratégia de, em um determinado ramo, apenas aplicar inicialmente todas as expansões-α possíveis. Desta forma, uma expansão-β somente será aplicada quando não houver mais nenhuma expansão-α para se aplicar.

A idéia por trás da estratégia α-primeiro é que as expansões-α não criam novos ramos e podem levar um ramo ao fechamento, antes de qualquer bifurcação, e portanto devem ser realizadas antes.

Não há qualquer imposição de ordem nas α-expansões, pois se há várias candidatas à α-expansão, uma expansão não afetará no status de candidatas das fórmulas já existentes. Assim sendo, em qualquer ordem em que forem feitas as α-expansões, obteremos o mesmo resultado. Para melhorar a eficiência, pode-se considerar que o a transformação resultante da aplicação de todas as expansões α é apenas uma expansão, e verificar o fechamento do ramo apenas após a saturação das expansões α.

Uma segunda estratégia, quase universal, é descartar a fórmula α ou β após sua expansão. Isto equivale a substituir uma fórmula por sua expansão, e como esta substituição é uma equivalência lógica válida, esta simplificação pode ser feita. De que forma esta simplificação é feita depende das estruturas de dados escolhidas, o que discutiremos mais abaixo.

A ordem em que as β-expansões são feitas pode ter um efeito grande sobre o tamanho do tableau e, portanto, sobre a eficiência do provador de teoremas. Apresentamos a seguir alguma das estratégias possíveis, que ordenam as fórmulas β presentes num ramo do tableau de acordo com as configuração do ramo.

Ordem Direta Consiste em selecionar a primeira fórmula β que ocorre no ramo para expansão. Esta estratégia não envolve nenhuma inteligência e depende da ordem em que as fórmulas são apresentadas no tableau.

Ordem Reversa Consiste em selecionar a última fórmula β que ocorre no ramo para expansão. Possui as mesmas desvantagens que o caso anterior.

Menor Tamanho Consiste em selecionar a menor das fórmulas β. A idéia é que quanto menor a fórmula, mais fácil fechar o ramo.

Contém Subfórmula Consiste em dar preferência para uma fórmula se houver subfórmulas suas presentes no ramo. A idéia também é a de facilitar o fechamento do ramo.

Esta estratégia pode ser refinada, verificando-se a polaridade das subfórmulas. Nesta caso, contabiliza-se apenas as subfórmulas que ocorrem no ramo com a polaridade oposta à sua ocorrência na fórmula β.

Combinações Podemos ter uma estratégia que combina as anteriores. Primeiramente, encontramos as fórmulas que contém subfórmulas de polaridade oposta no ramo. Se houver empate, selecionamos a de menor tamanho. Se ainda houver empate, selecionamos a ordem direta ou inversa (a que for mais rapidamente computável).

4.1.2 Estruturas de Dados

Vamos descrever aqui as estruturas de dados para uma implementação possível do provador de teoremas. Diversas melhorias e alterações são possíveis nestas estruturas de dados para gerar provadores mais sofisticados e eficientes.

Estamos assumindo que o tableau será implementado segundo a estratégia de busca em profundidade, em que apenas um ramo do tableau é armazenado. O ramo do tableau é armazenado em um vetor de fórmulas marcadas, `ramo`. O tamanho do vetor é igual à soma dos tamanhos das fórmulas contidas no seqüente de entrada. Desta forma toda a expansão do ramo pode ser contida no vetor.

Por exemplo, suponha que queiramos demonstrar o seqüente $p \to q, q \to r \vdash p \to r$. O tamanho do vetor será de $|p \to q| + |q \to r| + |p \to r| = 3 + 3 + 3 = 9$, ilustrado abaixo.

`ramo:`

T$p \to q$	T$q \to r$	F$p \to r$						
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Além disso, é importante registrar o tamanho atual do ramo em uma variável `TamAtual`, que no exemplo acima é dada por `TamAtual` $= 3$.

Uma segunda estrutura de dados trata da marcação de todas as fórmulas β ainda por expandir no ramo atual. Representamos esta estrutura como um vetor de variáveis booleanas do mesmo comprimento que o vetor que armazena o ramo. No exemplo anterior, inicialmente teríamos o vetor `betas` da seguinte maneira:

`betas:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	X							

O primeiro passo de cada iteração do Algoritmo 4.1, segundo a estratégia adotada, é a aplicação de todas as expansões-α. No exemplo, isto se aplica apenas sobre a posição 3:

`ramo:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9
T$p \to q$	T$q \to r$	F$p \to r$	Tp	Fr				

com a respectiva alteração de `TamAtual` $= 5$.

Com a saturação de todas as expansões-α, verificamos se o ramo não está fechado, verificação esta que falha. Passamos então à uma nova iteração do Algoritmo 4.1, procedendo à seleção da fórmula β sobre a qual bifurcar. Suponhamos por simplicidade que, neste exemplo, estamos realizando a bifurcação usando a estratégia ascendente, que seleciona a última fórmula marcada no vetor `betas`, ou seja, seleciona a posição 2. Neste caso, temos que $\beta_1 = \mathrm{F}q$ e $\beta_2 = \mathrm{T}r$. Isto acarreta a alteração do vetor `betas` para:

`betas:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9
X								

O ramo será expandido com a fórmula $\beta_1 = \mathrm{F}q$. Porém, antes disso precisamos armazenar o ponto em que o ramo estava antes da bifurcação, de onde reiniciaremos a expansão caso o ramo atual seja fechado. Para isso, utilizamos uma pilha de entradas, chamada de `PilhaDeRamos`. A entrada desta pilha é uma tripla composta dos seguintes elementos: $\langle \beta_2,$ `TamAtual`$,$ `betas`$\rangle$. Estes dados serão desempilhados da `PilhaDeRamos` caso o ramo atual fechar. Desta forma, a `PilhaDeRamos` do exemplo que estamos seguindo, que se sempre inicia vazia, passa a ter o seguinte conteúdo:

	`PilhaDeRamos`
$\to$	$\langle \mathrm{T}r,\ 5,$ [X | | | | | | | |] $\rangle$

Neste ponto, continuamos a expansão do ramo, cuja configuração atual após a inserção de $\beta_1 = \mathrm{F}q$ fica `ramo:`

$\mathrm{T}p \rightarrow q$	$\mathrm{T}q \rightarrow r$	$\mathrm{F}p \rightarrow r$	$\mathrm{T}p$	$\mathrm{F}r$	$\mathrm{F}q$			
1	2	3	4	5	6	7	8	9

e `TamAtual` $= 6$. Procede-se à verificação do fechamento do ramo, que falha.

Na iteração seguinte não há nenhuma expansão-α possível. A seleção da expansão-β é imediata, pois só há uma candidato no vetor `betas`: $\beta = \mathrm{T}p \rightarrow q$. Neste caso, $\beta_1 = \mathrm{F}p$ e $\beta_2 = \mathrm{T}q$. O vetor `betas` é alterado e torna-se totalmente vazio:

`betas:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9

Antes de expandir o ramo, é necessário empilhar uma nova entrada na `PilhaDeRamos`, cuja configuração se torna:

	`PilhaDeRamos`
$\rightarrow$	$\langle \mathrm{T}q,\ 6,\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ \rangle$
	$\langle \mathrm{T}r,\ 5,\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline \ & X & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ \rangle$

O ramo expandido assume a configuração

`ramo:`

$\mathrm{T}p \rightarrow q$	$\mathrm{T}q \rightarrow r$	$\mathrm{F}p \rightarrow r$	$\mathrm{T}p$	$\mathrm{F}r$	$\mathrm{F}q$	$\mathrm{F}p$		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

e `TamAtual` $= 7$. Neste caso, a verificação de fechamento do ramo sucede, devido à presença de Tp e do recém inserido Fp. O fato de que apenas os nós recém inseridos podem causar o fechamento de um ramo pode ser usado para aumentar a eficiência da verificação de fechamento.

Com o fechamento do ramo, antes de proceder à próxima iteração devemos desempilhar o topo da `PilhaDeRamos` e reconstituir o ramo. Ao desempilharmos o topo da pilha, obtemos um valor de β_2, de `TamAtual` e do vetor `betas`. Todas posições do vetor atual além do valor `TamAtual` são apagadas e o valor de β_2 é inserido no final do ramo. Além disso, o vetor `betas` é substituído pelo que estava na pilha. Ao processarmos estas alterações, as estruturas de dados de nosso exemplo se tornam:

	`PilhaDeRamos`
$\rightarrow$	$\langle \mathrm{T}r,\ 5,\ \begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|}\hline X & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ & \ \\ \hline\end{array}\ \rangle$

`betas:`

1	2	3	4	5	6	7	8	9

`ramo:`

T$p \to q$	T$q \to r$	F$p \to r$	Tp	Fr	Fq	Tq		
1	2	3	4	5	6	7	8	9

e `TamAtual` $= 7$. Uma nova verificação de fechamento sucede, então desempilhamos a próxima posição da `PilhaDeRamos`. Ao reconstruirmos o ramo, obtemos as seguintes estruturas de dados:

$\longrightarrow$ `PilhaDeRamos`

`betas:`

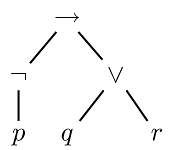
X								
1	2	3	4	5	6	7	8	9

`ramo:`

T$p \to q$	T$q \to r$	F$p \to r$	Tp	Fr	Tr			
1	2	3	4	5	6	7	8	9

e `TamAtual` $= 6$. Este ramo também está fechado, e como a `PilhaDeRamos` está vazia, não há como reconstruir o ramo. Isto indica que todos os ramos possíveis do tableau foram fechados e o tableau foi fechado. Neste ponto o algoritmo deve retornar `verdadeiro`, indicando que o seqüente de entrada foi provado.

Uma palavra final sobre a implementação é necessária para explicar a representação de fórmulas. Uma fórmula pode ser representada como uma árvore. Por exemplo, a fórmula $\neg p \to (q \vee r)$ pode ser representada por:



Uma fórmula marcada é um *par* $\langle \text{Marca}, \text{arvore-fórmula} \rangle$, onde pode ser desde um único bit ($0 = \text{F}$ e $1 = \text{T}$) até um caracter ou um inteiro. Esta notação facilita a aplicação de regras de expansão, pois o conectivo principal da fórmula está na raiz e as subfórmulas em que uma fórmula se decompões são os ramos filhos da raiz.

4.1.3 Famílias de Fórmulas Notáveis

Iremos apresentar algumas famílias de fórmulas notáveis que servem de *benchmark* (ou seja, de campo de teste) para uma eventual implementação de um provador de teoremas. Estas famílias de fórmulas tem a característica de serem todos teoremas, parametrizados, em geral por algum inteiro n, e à medida que n cresce aumenta o tamanho da prova do teorema.

Para cada fórmula destas famílias, pode-se medir os seguintes parâmetros: