Tema 5. MATRICES Y DETEREMINANTES

Objetivo:

El alumno aplicará los conceptos fundamentales de matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieren de ellos para su resolución.

Definición de matriz

Una matriz de m x n con elementos en C es un arreglo de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in$ C y m, n $\in$ Z

en forma abreviada, la matriz de la definición anterior puede expresarse como

$[\ a_{ij}\ ]$, donde i = 1, 2, …, m y j = 1, 2, …, n.

Ejemplo de matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & -3i \\ 0 & 4i & 7 \\ -1 & 1-2i & 3 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \pi i \\ 1-3i \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Sea $A = [\ a_{ij}\ ]$ y $B = [\ b_{ij}\ ]$, dos matrices de m x n con elementos en C. Diremos que A y B son iguales, lo que representaremos con A = B si $a_{ij} = b_{ij}$, para i = 1, 2, …, m y j = 1, 2, …, n.

Ej.

$$A = \begin{bmatrix} -i & 2 & 1 \\ 3 & i & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} -i & 2 & 1 \\ 3 & 0 & i \end{bmatrix}$$

no son iguales, a pesar de que son del mismo orden y tienen los mismos elementos. $a_{22} \neq b_{22}$ y $a_{23} \neq b_{23}$.

Adición de matrices

Sea $A = [\ a_{ij}\ ]$ y $B = [\ b_{ij}\ ]$, dos matrices de m x n con elementos en C. La suma A + B es una matriz $S = [\ s_{ij}\ ]$ de m x n, definida por $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ej.

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1+i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -i \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2i \\ 7+i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtener A + B, y A + C

Propiedades de la adición

Si A, B y C son matrices de m x n cuyos elementos son números complejos, entonces:

i) A + [B + C] = [A + B] + C — asociatividad

ii) A + B = B + A — conmutatividad

iii) Existe una matriz 0 de m x n tal que

A + 0 = A — elemento idéntico

iv) Existe una matriz -A de m x n tal que

A + [-A] = 0 — elementos inversos

Sustracción de matrices

Sea $A = [\ a_{ij}\ ]$ y $B = [\ b_{ij}\ ]$, dos matrices de m x n con elementos en C. La diferencia A - B se define como

A - B = A + (- B)

Ej.

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1+i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -i \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad y \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2i \\ 7+i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtener A - B, y A - C

Dos matrices que no son del mismo orden como A y C, se dice que ***"no son conformables"*** para la adición y sustracción. Y dos matrices "***son conformables"*** para la adición y sustracción *si y solo si* son del mismo orden.

Multiplicación de una matriz por un escalar

Sea $A = [\ a_{ij}\ ]$ una matriz de m x n con elementos en C y $\alpha \in$ C. El producto αA es una matriz $E = [\ e_{ij}\ ]$ de m x n, definida por $e_{ij} = \alpha a_{ij}$; para i = 1, 2, …, m y j = 1, 2, …, n.

Ej.

$$\text{Sea } \alpha = 2i \text{ y } A = \begin{bmatrix} -i & 0 & 1 \\ i & -3 & 1+i \end{bmatrix}, \qquad \alpha A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2i \\ -2 & -6i & -2+2i \end{bmatrix}$$

La multiplicación por un escalar satisface las siguientes propiedades.

Si A y B son matrices de m x n con elementos en C y α, $\beta \in$ C, entonces:

i) $\alpha\ (A + B) = \alpha A + \alpha B$

ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

iii) $\alpha\ (\beta A) = (\alpha\beta)A$

Multiplicación de matrices

Sea $A = [\ a_{ij}\ ]$ y $B = [\ b_{ij}\ ]$, dos matrices con elementos en C, de m x n y n x p respectivamente. El producto AB es una matriz $P = [\ p_{ij}\ ]$, de m x p, definida por

$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$; para i = 1, 2, …, m y j = 1, 2, …, n.

Ej.

i) Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -1 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

ii) Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad y \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Obtener AB y CA.

Cuando dos matrices D y E son tales que DE = ED, se dice que son permutables.

Ej. $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

$$DE = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad ED = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

la multiplicación de matrices satisface la ley asociativa que establece el siguiente teorema.

Teorema

Sea A, B y C matrices de mxn, nxp y pxq, respectivamente, cuyos elementos son números complejos, entonces:

$$A (BC) = (AB) C$$

Consideradas simultáneamente, la adición y la multiplicación de matrices tienen las propiedades que se anuncian en el siguiente teorema, conocidas como leyes distributivas de la multiplicación sobre la adición.

Teorema

Sea A, B y C matrices de mxn, nxp y pxq, respectivamente, y D, E y F matrices de mxn, nxp y pxq, cuyos elementos son números complejos, entonces:

i) $A (B + C) = AB + AC$

ii) $(D + E) F = DF + EF$

Si A es de mxn y B es de nxq, la matriz resultante del producto AB = C es de orden mxq.

Del punto anterior se observa que el producto AB puede efectuarse si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, en este caso diremos que son *CONFORMABLES* para el producto AB (pudiendo no ser conformables para el producto BA).

En general $AB \neq BA$ (no son conmutativas).

Matriz identidad

Se llama matriz identidad de orden n a la matriz cuadrada de orden n $I_n = [\ \delta_{ij}\ ]$, tal que

$\delta_{ij} = 1$, si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$, si $i \neq j$

al símbolo δ_{ij} se le llama “delta de Kronecker”. Ej.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{etc.}$$

La matriz identidad juega un papel muy importante en el álgebra de matrices, ya que constituye un elemento idéntico para la multiplicación. Ej. Si premultiplicamos la matriz A,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2i & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

por la matriz identidad de orden tres se tendrá

$$I_3A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2i & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2i & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = A$$

si ahora postmultiplicamos dicha matriz por I_2 se tendrá también

$$AI_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2i & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2i & 4 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Teorema

Si A es una matriz de mxn con elementos en C, entonces:

i) $I_m A = A$
ii) $A I_n = A$

Matriz inversa

Sea una matriz A, si existe una matriz X tal que

$$XA = I_n = AX$$

se dice que X es la matriz inversa de A, y se representa con A^{-1}. por lo tanto

$$A^{-1} A = I_n = A A^{-1}$$

Cabe hacer notar que la igualdad XA = AX sólo es posible cuando A y X son matrices cuadradas del mismo orden; en consecuencia, para que una matriz A tenga inversa es condición necesaria que sea cuadrada. Además, la inversa deberá ser también cuadrada y del mismo orden que A.

Definición

Sea A una matriz de nxn con elementos en C. se dice que A es ***no singular*** si existe A^{-1}, en caso contrario se dice que A es ***singular***.

Propiedades de la matriz inversa

Si A y B son matrices no singulares del mismo orden y $\lambda \in C$, entonces:

i) A^{-1} en única

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

iv) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, si $\lambda \neq 0$

Obtención de la inversa de una matriz mediante transformaciones elementales.

El método consiste en aplicar una sucesión de transformaciones elementales a la matriz A hasta obtener la matriz identidad.

Lo anterior sugiere, para propósitos de cálculo, el empleo de un arreglo formado por dos matrices de nxn.

Inicialmente el arreglo tiene del lado izquierdo a la matriz A y del lado derecho a la matriz identidad I_n. Se efectúan entonces (en ambas matrices simultáneamente) las transformaciones necesarias para obtener en el lado izquierdo la matriz I_n , y al finalizar el proceso se obtiene en el lado derecho la matriz A^{-1}.

En forma esquemática

$$[\,A \mid I_n\,] \quad \ldots \quad \ldots \quad [\,I_n \mid A^{-1}\,]$$

Ej.

Mediante transformaciones elementales obtener la inversa de las siguientes matrices

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $Z = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$

ECUACIONES MATRICIALES

Una expresión como la siguiente:

$$XA + B = XC$$

Donde A, B y C son matrices conocidas, es una ecuación con matrices cuya incógnita es la matriz X.

Estas ecuaciones, conocidas como ecuaciones matriciales, se pueden resolver como las que están planteadas con números, pero teniendo cuidado que:

i) Al sumar, restar o multiplicar matrices, deben ser conformables para la operación a efectuar.

ii) La multiplicación de matrices no es conmutativo.

Ej.

i) Dadas las matrices

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinar, si existe, la matriz X que satisfaga la siguiente ecuación,

XA + B = XC

ii) Determinar la matriz X que satisface la siguiente expresión

AX - 3X = -B

Con las matrices

$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede quedar representado por la expresión

$$AX = B$$

Donde A es una matriz de mxn que se conoce como "*matriz de coeficientes*" del sistema, X es una matriz de nx1 conocida como *"vector de incógnitas"* y B es una matriz de mx1 conocida como *"vector de términos independientes"*.

Esta ecuación se puede resolver premultiplicando por A^{-1} cuando A sea una matriz no singular.

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

Ej.

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} x_1 & & +3x_3 & = & 2 \\ & +x_2 & -2x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Puede expresarse en forma matricial como AX = B, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

La solución del sistema se calcula como la inversa de la matriz de coeficientes por el vector de incógnitas

Solo es válido para sistemas compatibles determinados, ya que solo para estos sistemas existe la inversa de la matriz de coeficientes.

TIPOS ESPECIALES DE MATRICES CUADRADAS

Regiones de una matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & a_{ij} & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El triangulo superior contiene a los elementos a_{ij} tales que $i<j$.

El triangulo inferior contiene a los elementos a_{ij} tales que $i>j$.

La diagonal principal contiene a los elementos a_{ij} tales que $i=j$.

Traza de una matriz

Es la suma de los elementos de la diagonal principal *tr A.*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1+2i & 5 & -6 \\ 1 & -2i & 0 & 3 \\ 7 & -3 & -4 & 11 \\ i & 9 & 3 & 8i \end{bmatrix}$$

Diagonal principal:

$$\text{tr } A: a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = 5 – 2i – 4 + 8i = 1+6i$$

Propiedades de la traza

Si A y B son dos matrices de nxn con elementos en C y α□∈ C

i) tr(A + B) = trA + trB
ii) tr (αA) = α (tr A)
iii) tr (AB) = tr (BA)

Matrices triangulares:

Matriz Triangular: Es una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que están a un mismo lado de la diagonal principal. Las matrices triangulares pueden ser de dos tipos:

Triangular Superior: Si los elementos que están por debajo de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, a_{ij} =0 □ $i>j$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2i \\ 0 & 2i & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Triangular Inferior: Si los elementos que están por encima de la diagonal principal son todos nulos. Es decir, $a_{ij}=0$ □ $i<j$.

$$D=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 4i & 3\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}e_{11} & 0 & 0\\ e_{21} & e_{22} & 0\\ e_{31} & e_{32} & e_{33}\end{bmatrix}$$

Teorema

Si A y B son dos matrices triangulares superiores (inferiores) del mismo orden y $\alpha \in C$, entonces:

i) A + B es triangular superior (inferior)
ii) αA es triangular superior (inferior)
iii) AB es triangular superior (inferior)

Matriz diagonal

Es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos nulos excepto los de la diagonal principal, es decir $a_{ij}=0$ para $i \neq j$.

$$A=\begin{bmatrix}7 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

La matriz A también puede considerarse triangular superior e inferior, la matriz A puede escribirse como A = diag (7, 5, -2)

Teorema

Si A y B son dos matrices diagonales tales que $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ y $B = \mathrm{diag}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{nn})$ y $\alpha \in C$, entonces:

i) $A + B = \mathrm{diag}(a_{11}+b_{11}, a_{22}+b_{22}, \dots, a_{nn}+b_{nn})$.

ii) $\alpha A = \mathrm{diag}(\alpha a_{11}, \alpha a_{22}, \dots, \alpha a_{nn})$.

iii) $AB = \mathrm{diag}(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \dots, a_{nn}b_{nn})$.

iv) $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$, si A es no singular

Transposición de matrices

Sea $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ una matriz de orden m x n, con $a_{ij} \in C$, se llama matriz transpuesta de A, y se representa por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando las filas por las columnas (o viceversa) en la matriz A. Es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{m1} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{1n} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si es $A = (a_{ij})_{mxn}$
su transpuesta es $A^T = (a_{ji})_{nxm}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}; \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición de matrices

i) $(A^T)^T = A$.

ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

iii) $(A + B) = A^T + B^T$, si A + B puede obtenerse.

iv) $(AB)^T = B^T A^T$, si AB puede obtenerse.

Matrices simétricas y antisimétricas.

La transposición da lugar a la definición de dos tipos especiales de matrices cuadradas

Sea A una matriz cuadrada con elementos complejos, se dice que:

i) A es simétrica si $A^T = A$

ii) A es antisimétrica si $A^T = -A$.

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad C^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} = C$$

La matriz C es simétrica.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4i \\ 2 & 0 & i \\ -4i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad D^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4i \\ -2 & 0 & -i \\ 4i & i & 0 \end{bmatrix} = -D$$

La matriz D es antisimétrica

Las matrices simétricas y antisimétricas tienen, entre otras, las propiedades que se enuncian en el siguiente teorema.

Teorema

Si A y B son dos matrices simétricas (antisimétricas) de nxn y $\alpha \in$ C, entonces:

i) A =+ B es simétrica (antisimétrica)

ii) αA es simétrica (antisimétrica)

iii) A + A^T es simétrica

iv) A – A^T es antisimétrica

Conjugación

Sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ una matriz de mxn con $a_{ij} \in$ C, se llama conjugada de A a la matriz mxn obtenida como

$$A^T = [c_{ij}] \text{ tal que } c_{ij} = \overline{a}_{ij}$$

Ejemplo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ 2+2i & 4i \end{bmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2-2i & -4i \end{bmatrix}$$

Propiedades de la conjugación

i) $\overline{(\overline{A})} = A$.

ii) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$

iii) $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$, si A+B puede obtenerse.

iv) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$, si AB puede obtenerse.

Conjugación - transposición

Se conoce como conjugación – transposición a la aplicación sucesiva de las dos operaciones definidas anteriormente.

Sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ una matriz de mxn con $a_{ij} \in$ C, se llama conjugada – transpuesta de A, y se le representa con A*, a la matriz nxm definida por:

$$A^* = \left(\overline{A}\right)^T$$

El orden en que se efectúen las operaciones es indiferente. Es decir, se puede conjugar y después transpones o primero transponer y después conjugar

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & -i \\ 5 & 1 & 1-3i \end{bmatrix}$ Obtener A*

Primero conjugamos a la matriz y después se transpone

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 0 & i \\ 5 & 1 & 1+3i \end{bmatrix}, \quad A^* = \left(\overline{A}\right)^T = \begin{bmatrix} -2i & 5 \\ 0 & 1 \\ i & 1+3i \end{bmatrix}$$

Propiedades de la conjugación – transposición

i) (A*)* = A

ii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}\, A^*$

iii) (A + B)* = A* + B*, si A + B puede obtenerse

iv) (AB)* = B*A*, si AB puede obtenerse

Matrices hermitianas y antihermitianas.

A partir de la conjugación – transposición, se definen otros tipos especiales de matrices cuadradas.

Sea A una matriz de nxn con elementos en C, se dice que:

i) A es hermitiana se A* = A

ii) A es antihermitiana si A* = -A

Ejemplo

Sea $G = \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 0 & 2+2i \\ 4 & 2-2i & 3 \end{bmatrix}$

Primero conjugamos $\overline{G} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 4 \\ i & 0 & 2-2i \\ 4 & 2+2i & 3 \end{bmatrix}$,

después transponemos $G^* = (\overline{G})^T = \begin{bmatrix} 1 & i & 4 \\ -i & 0 & 2+2i \\ 4 & 2-2i & 3 \end{bmatrix}$;

por lo tanto la matriz G es hermitiana.

Sea $H = \begin{bmatrix} i & i & 3 \\ i & 0 & -4+i \\ -3 & 4+i & 2i \end{bmatrix}$

Primero conjugamos $\overline{H} = \begin{bmatrix} -i & -i & 3 \\ -i & 0 & -4-i \\ -3 & 4-i & -2i \end{bmatrix}$,

después transponemos $H^* = (\overline{H})^T = \begin{bmatrix} -i & -i & -3 \\ -i & 0 & 4-i \\ 3 & -4-i & -2i \end{bmatrix}$;

por lo tanto la matriz H es antihermitiana.

Obsérvese que, de acuerdo con la definición, los elementos simétricos con respecto a la diagonal principal de una matriz hermitiana deben ser conjugados, mientras que los elementos de la diagonal principal deben ser reales.

En una matriz antihermitiana, la parte real de los elementos de la diagonal principal deben ser cero, mientras que los simétricos con respecto a la diagonal, deben ser tal, que sus partes reales solo difieran en el signo y sus partes imaginarias sean iguales.

Propiedades de las matrices hermitianas y antihermitianas.

Sea A una matriz de mxn con elementos en C, entonces:

i) AA* es hermitiana

ii) A*A es hermitiana

iii) A + A* es hermitiana, si A es cuadrada

iv) A – A* es antihermitiana, si A es cuadrada.

Matriz Ortogonal y unitaria

Una matriz A no singular se dice que

i) es ortogonal si $A^T = A^{-1}$

ii) es unitaria si $A^* = A^{-1}$

Potencia enésima de una matriz.

Sea A una matriz de orden mxm con elementos en C y sea $n \in N$. se llama potencia enésima de A, y se representa con A^n a la matriz definida por

$$A^0 = I_m$$
$$A^n = A\,A^{n-1}$$

De esta forma

$$A^1 = AA^0 = A\,I_m = A$$
$$A^2 = AA^{2-1} = A\,A$$
$$A^3 = A\,A^2 = AAA.$$

Etc

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ obtener } A^3$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 3 \\ -2 & -22 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la exponenciación

Si A es una matriz cuadrada con elementos en C y m,n son números naturales, entonces

i) $A^m A^n = A^{m+n}$

ii) $(A^m)^n = A^{mn}$

A partir de la definición de potencia enésima, se establecen los siguientes tipos especiales de matrices cuadradas.

Sea A una matriz de mxm con elementos en C, se dice que A es:

i) Idempotente si $A^2 = A$

ii) Involutoria si $A^2 = I$

iii) Nilpotente (de índice n) si n es el menor número natural tal que $A^n=0$

iv) Periódica (de periodo n) si n es el menor número natural distinto de uno tal que $A^n = A$

DETERMINANTES

Los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas se pueden resolver empleando el concepto de determinantes de una matriz de segundo orden.

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

multiplicando la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12}, se tiene el siguiente sistema equivalente

$$\begin{aligned} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 &= a_{12}b_2 \end{aligned}$$

restando la segunda ecuación de la primera, se llega al la expresión

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2$$

despejando x_1

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

de manera similar se despeja x_2

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

los valores obtenidos con estas expresiones constituyen una solución del sistema.

Obsérvese que ambos tienen el mismo denominador el cual se calcula usando todos y únicamente los elementos de la matriz de coeficientes del sistema

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

al número correspondiente a dicho denominador se le conoce como el DETERMINANTE de la matriz A y se le representa con “det A”, esto es

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

otra forma de representar al determinante es escribir sus elementos tal y como aparecen en la matriz, pero reemplazando los paréntesis rectangulares por barras verticales para indicar que se trata de un determinante

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

la expresión anterior puede considerarse como la definición del determinante de orden dos

ejemplo: obtener el determinante de la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2) - (3)(-2) = 8$$

un proceso similar al anterior, pero para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas nos lleva a conocer el determinante de orden tres de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

el cual esta dado por

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

otra forma de representarlo es

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

una manera de recordar la expresión 1 a partir de la 2, es escribir la primera columna como la cuarta y la segunda como la quinta columna

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

(-) (-) (-) (+) (+) (+)

Ej

Propiedades de los determinantes

Las siguientes seis propiedades se refiere al cálculo del determinante de una matriz con relación a algunas características de la misma

Sea $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{nxn}$, con $a_{ij} \in C$

i) Si los elementos de una línea (renglón o columna) son todos ceros, det A=0

ii) Si un determinante tiene dos líneas (renglón o columna) iguales, su valor es cero

iii) Si dos líneas paralelas son proporcionales, entonces detA= 0

iv) Si se multiplica una línea por un escalar λ, se obtiene otra matriz B. Los determinantes A y B estan relacionados de la siguiente manera

$$\det B = \lambda \det A$$

v) Si se intercambian dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo

vi) Si se multiplica toda una línea por un escalar y el resultado se suma a otra línea, el valor del determinante no cambia

Las siguientes tres propiedades se refieren a la relación del determinante respecto a las operaciones con matrices:

Sean $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ y $B=\lfloor b_{ij}\rfloor$ matrices de orden nxn con $a_{ij}, b_{ij} \in C$

vii) $\det A = \det A^T$

viii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

ix) $\det(AB) = \det A \det B$

Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Consideremos ahora un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \qquad (3)$$

su solución puede expresarse por medio de determinantes como sigue:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad Y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad Z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

siendo $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_3 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$, el determinante de los coeficientes de X, Y, Z en las ecuaciones de (3) con $\Delta \neq 0$

i) Los elementos de Δ son los coeficientes de las incógnitas x, y, z, dispuestos en las ecuaciones dadas en (3).

ii) El numerador correspondiente a cada una de las incógnitas se forma a partir del determinante de coeficientes Δ, sustituyendo la columna de los coeficientes de la incógnita que se requiere despejar, por la columna de términos independientes del sistema (3)

Ej

Regla se Sarrus

Este Método se emplea para calcular determinantes de segundo y tercer orden

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

como se ve, el resultado que arroja la regla de Sarrus coincide con la definición de determinantes de orden dos. Para calcular el valor de un determinante de orden tres

$$\det A = \begin{array}{|ccc|l} a_{11} & a_{12} & a_{13} & (-) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & (-) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & (-) \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & (+) \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & (+) \\ & & & (+) \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Ej

Desarrollo del determinante por cofactores

El método que veremos a continuación, no solo es aplicable al cálculo de determinantes de cualquier orden, sino que constituye el fundamento de todos los métodos de aplicación práctica.

Sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ una matriz de nxn con elementos en C.

i) Se llama *menor* del elemento a_{ij} y se representa con M_{ij}, al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en A el renglón *i* y la columna *j.*
ii) Se llama *cofactor* del elemento Aij, y se le representa con c_{ij}, al producto $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

El determinante por cofactores se representa de la siguiente forma:

$$\det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

- El desarrollo de un determinante de orden n en cofactores, nos permite simplificar el problema a calcular n determinante de orden (n-1)
- La ventaja más evidente es, que se puede reducir el número de determinantes a calcular si se usa una línea con muchos ceros.

Ej

Condensación

El método que se propone a continuación conocido como el método de condensación, se basa precisamente en esta idea y consiste en lo siguiente:

i) Elegir una línea (la que tenga más ceros)
ii) De dicha línea elegir un pivote (de preferencia un uno)
iii) Usando el pivote y la propiedad vi) de los determinantes hacer ceros los demás elementos de la columna.

Ej

Determinante de una matriz triangular

Para las matrices triangulares (superiores e inferiores) ya definidas, e incluso para las matrices diagonales, el determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal principal

El procedimiento resulta similar al método de Gauss para la resolución de sistemas.

Ejemplo

Matriz inversa a través de la adjunta

Sea $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ una matriz de nxn con elementos en C, y sea cij el cofactor del elemento aij. Se llama adjunta de A a la matriz

$$adjA = \lfloor b_{ij} \rfloor \text{, donde } b_{ij} = c_{ji}$$

la adjunta de A es la transpuesta de la matriz de cofactores y se representa con *adj A*

propiedad de la adjunta:

i) $(\text{adj } A)A = (\det A)\, I_n$

postmultiplicando la expresión anterior por A^{-1} se tiene

$$(\text{adj } A)\, A\, A^{-1} = (\det A)\, I_n\, A^{-1}$$

$$(\text{adj } A)\, I_n = (\det A)\, I_n\, A^{-1}$$

$$\text{adj } A = (\det A)\, A^{-1}$$

de donde

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj} A$$

Ta[illegible]

1) Obtener, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$-D + XAB = C$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2) Obtener, si existe, la matriz X que satisface la ecuación matricial:

$$BX - C^T = -DX - A$$

donde

[illegible]

Tarea 2

1.- Determinar, si existe, la matriz X que satisface la ecuación:

$$AC^{-1} + BXC^{-1} = B^T$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.- Obtener el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, aplicando la regla de Cramer

$$\begin{aligned} 2x &+ y &- z &= 5 \\ 3x &- 2y &+ 2z &= -3 \\ x &- 3y &- 3z &= -2 \end{aligned}$$

Tarea 3

Determinar la matriz X que satisface la ecuación:

$$AX + (B+D)C = (CX^T B)^T + \det(C)D$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$