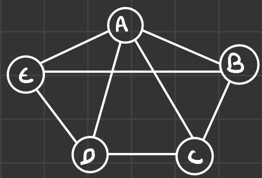
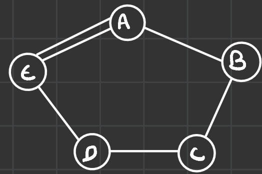
Ficha 5

1

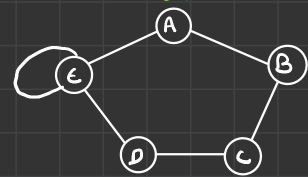
G_1



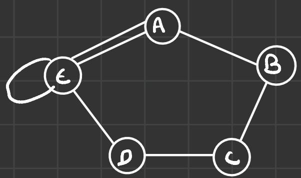
G_2



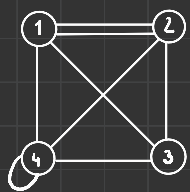
G_3



G_4



2



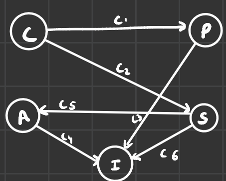
3

$$M_I = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

$$M_A = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

4

a)



b)

$$M_I = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ C \\ I \\ S \\ P \end{array} \end{array}$$

$$M_A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc|c} A & C & I & S & P & \\ \end{array}$$

$$M_A = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccccc} A & C & I & S & P \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} A \\ C \\ I \\ S \\ P \end{array} \end{array}$$

5

a) Sendo um grafo regular de grau m

$$\sum_{v \in V} d(v) = n \times p \Leftrightarrow n \times p = 2|E| \Leftrightarrow |E| = \frac{n \times p}{2} \; // \; c.q.m$$

b) Como K_p é completo, cada dois vertícies são unidos por uma arestas, logo o número destas é metade dos vertícies

c) Temdo $\binom{p}{2}$ arestas podemos formar $\binom{\binom{p}{2}}{q}$ subgrafos

d) $$\sum_{q=0}^{\binom{p}{2}} \binom{\binom{p}{2}}{q} = 2^{\binom{p}{2}}$$

6 $$\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v \in G} \delta(G) \leq \sum_{v \in G} d(v) \leq \sum_{v \in G} \Delta(G)$$

$$\Leftrightarrow m\,\delta(G) \leq 2|E| \leq m\,\Delta(G)$$

$$\Leftrightarrow \delta(G) \leq \frac{2m}{m} \leq \Delta(G)$$

7 Num grafo simples de ordem m, os vertices podem ter um grau entre

$$\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

Sendo que um grafo não poder ter um vertice com grau 0 e um de grau m-1, concluimos que há m-1 graus que o grafo pode ter. Tendo mos m vertices $\frac{m \,\lfloor m-1 \rfloor}{1 - \frac{1}{m}}$, concluímos que há pelo menos dois vertices com o mesmo grau

8 $$\binom{p}{2} = 1000 \Leftrightarrow \frac{p!}{(p-2)!\,2!} = 1000$$

$$\Leftrightarrow p(p-1) = 2000 \Leftrightarrow p^2 - p - 2000 = 0 \Leftrightarrow p = 45,5 \Leftrightarrow p \simeq 46 \text{ vertices}$$

9 $$\varepsilon(G) = \varepsilon(\text{Max}) - \varepsilon(G^c)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(G) = \binom{56}{2} - 80$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon(G) = 1460$$

(10) Sendo o grafo regular, todos os vértices têm o mesmo grau

$$\sum d(v) = 2|E| \iff |V| \times d(v) = 2|E| \iff v \times d(v) = 2 \times 24 \iff v = \frac{48}{d(v)}$$

Se $d(v) = 1 \iff v = 48$

Se $d(v) = 2 \iff v = 24$

Se $d(v) = 3 \iff v = 16$

Se $d(v) = 4 \iff v = 12$

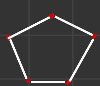
Se $d(v) = 6 \iff v = 8$

Se $d(v) = 8 \iff v = 6$ → não é possível em grafos simples uma vet que $v > d(v)$

(11)

a) Como G^c vai ligar todos os vértices que G não vai, sendo G regular, G^c também o será

b) G

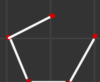


G^c

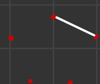
G e G^c são complementares e têm ordem ímpar

Falso

c) G



G^c

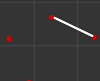


G é conexo e G^c não

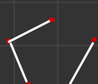
Falsa

d) Afirmação verdadeira

G



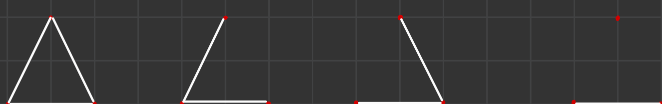
G^c



G não é conexo, mas G^c sim

(12)

a)



b) Existem $2^{\binom{p}{2}}$ grafos de ordem p, logo existem $2^{\binom{4}{2}} = 2^6 = 64$ grafos diferentes de ordem 4

13 Os grafos são isomorfos pois têm a mesma ordem, dimensão e os seus vértices têm o mesmo grau
($d(a) = d(3)$; $d(b) = d(5)$; $d(c) = d(4)$; $d(d) = d(2)$; $d(e) = d(6)$; $d(f) = d(1)$)

14 G_1^c e G_2^c são isomorfos, então existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$

Se existe uma bijeção entre $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$, existe entre $E_1 \to E_2$

Se existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $E_1 \to E_2$, então $G_1 \cong G_2$

G_1 e G_2 são isomorfos, então existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $E_1 \to E_2$

Se existe uma bijeção entre $E_1 \to E_2$, existe entre $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$

Se existe uma bijeção entre $V_1 \to V_2$ e $\bar{E}_1 \to \bar{E}_2$, então $G_1^c \cong G_2^c$

15 Se dois grafos G_1 e G_2 são isomorfos, têm o mesmo número de vertices, de arestas e o grau dos vertices correspondentes são iguais

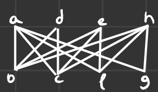
Assim, se G tiver ordem 14 e considerarmos o vertice v

$d_G(v) = m$

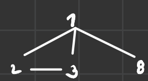
$d_{G^c}(v) = 14 - 1 - m = 13 - m$

Como $m = 13 - m \Leftrightarrow 2m = 13$, o grau não é preservado, logo G_1 não pode ser isomorfo com o seu complementar

16 G_1



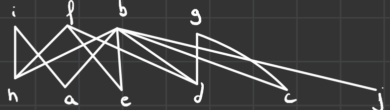
G_2



Concluimos que G_1 é um grafo bipartido e G_2 não é. Estes não são isomorfos pois têm um número diferente de arestas

17

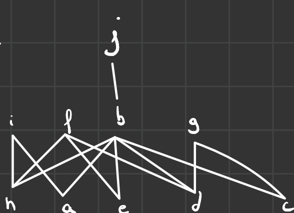
a)



Logo, é bipartido $\{\{i, f, b, g\}, \{h, a, e, d, c, j\}\}$

b) Uma única

c)



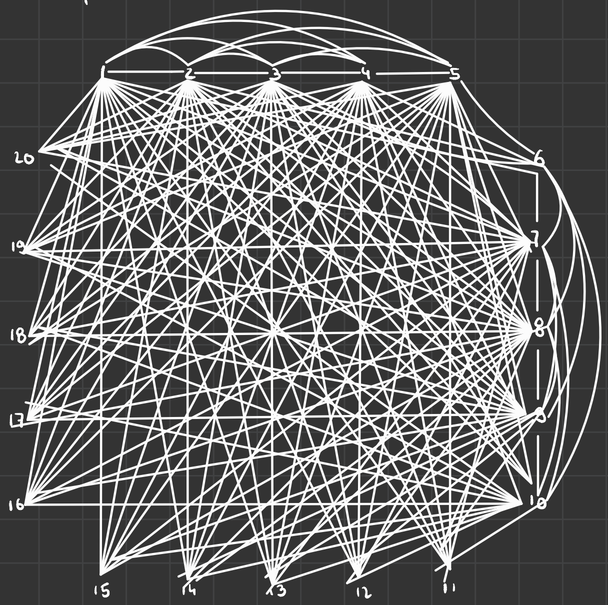
Logo, é tripartido

(18)

a) **Não**, uma vez que, num grafo com 20 vertices (pessoas) em que cada aresta significa que a pessoa conhece a outra, podemos ter vertices com o grau de 0 a 19.

Como não podemos ter simultaneamente um vertice de grau 0 (não conhece ninguém) e um de grau 19 (conhece todos), concluímos que podemos ter apenas 19 graus diferentes. Sendo 20 > 19, pelo princípio da gaiola dos pombos, concluímos que existem pelo menos dois convidados que conhecem o mesmo número de pessoas

b)



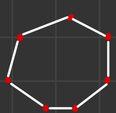
Logo, é possível

(19)

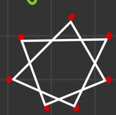
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \Leftrightarrow v \times d(v) = 2 \times 25 \Leftrightarrow v = \frac{50}{d(v)} \Leftrightarrow v = \frac{50}{4} \Leftrightarrow v = 12{,}5 \rightarrow 12 \text{ cidades}$$

(20)

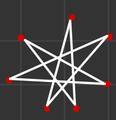
Primeiro dia



Segundo dia

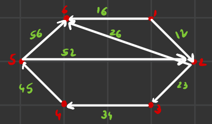


Terceiro dia



Concluímos que é possível levar a operação a cabo

(21)



a) $P = (1,2,3,4,5,2,6)$

b) $P = (1,2,3,4,5,6)$

c) $P = (2,3,4,5,2)$

d) $$M_A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

O número de passeios de comprimento 2, do vértice 2 ao 4 é dado por $(A^2)_{24} = L_2(A)\, C_4(A)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

22 $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G)$

$\Leftrightarrow \quad m = m - k$

23 $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G) \Leftrightarrow |E| = 19 + n - 1 \Leftrightarrow |E| = 18 + n$

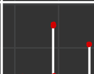
$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2|E| \Leftrightarrow 2\times5 + 3\times4 + 6\times3 + 8\times2 + n\times1 = 2(18+n) \Leftrightarrow \quad 56 + n = 36 + 2n \Leftrightarrow n = 20$

26 $\varepsilon(G) = v(G) - cc(G) \Leftrightarrow 20 = v(G) - 4 \Leftrightarrow v(G) = 24$

28 É uma ponte uma vez que vai ligar diferentes componentes

29

a)

Iteração	0	1	2	3	4	5
E	—	BE	ED	DC	EF	FA
C_E	—	10	40	50	50	40
V'	B	BE	BED	BED	BEDF	BEDFA
$\sum C_E$	0	10	50	100	150	190
$V' = V(G)$	N	N	N	N	N	S
$T(V, E')$						

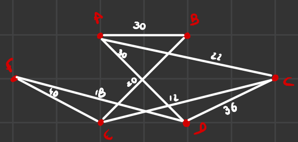
b)

Iteração	A	B	C	D	E	F	memor	temph
0	(0 ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	A	{B, C, D, E, F}
1	—	(70 ; A)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(40 ; A)	F	{B, C, D, E}
2	—	(70 ; A)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(90 ; F)	—	B	{C, D, E}
3	—	—	(150 ; B)	(∞ ; -)	(80 ; B)	—	E	{C, D}
4	—	—	(150 ; B)	(120 ; E)	—	—	D	{C}
5	—	—	(150 ; B)	—	—	—	C	{ }

∴ Logo, concluímos que o custo mínimo da decisão é de 150 mil euros e para além da localidade A e C, B também será servida

30

a)



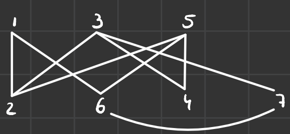
b)

Iteração	A	B	C	D	E	F	memor	temph
0	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	(0 ; -)	(∞ ; -)	(∞ ; -)	D	{A, B, C, E, F}
1	(30 ; D)	(∞ ; -)	(36 ; D)	—	(∞ ; -)	(18 ; D)	F	{A, B, C, E}
2	(30 ; D)	(∞ ; -)	(36 ; D)	—	(58 ; F)	—	A	{B, C, E}
3	—	(60 ; A)	(36 ; D)	—	(58 ; F)	—	C	{B ; E}
4	—	(60 ; A)	—	—	(48 ; C)	—	E	{B}
5	—	(60 ; A)	—	—	—	—	B	{ }

∴ Concluímos assim que o percurso mais curto é P = {D ; A ; B} com um tamanho de 60 km

31

a)



Logo, não é bipartido

b)

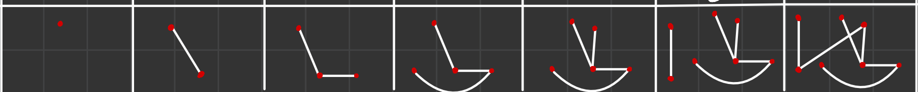
Iteração	1	2	3	4	5	6	7	memór	tempr
0	(0;-)	(∞;-)	(∞;-)	(∞;-)	(∞;-)	(∞;-)	(∞;-)	1	{2,3,4,5,6,7}
1	—	(5;1)	(∞;-)	(∞;-)	(∞;-)	(7;1)	(∞;-)	2	{3,4,5,6,7}
2	—	—	(13,2)	(∞;-)	(11;2)	(7;1)//	(∞;-)	6	{3,4,5,7}
3	—	—	(13,2)	(∞;-)	(10;6)	—	(9,6)//	7	{3;4;5}
4	—	—	(11;7)	(∞;-)	(10;6)	—	—	5	{3;4}
5	—	—	(11;7)//	(13;5)	—	—	—	3	{4}
6	—	—	—	(12;3)//	—	—	—	4	{}

Concluímos que um caminho de custo mínimo entre 1 e 4 é $P = (1,6,7,3,4)$

c)

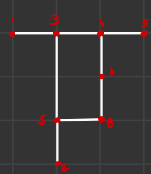
Iteração	0	1	2	3	4	5	6
ij	—	34	37	67	45	12	25
c_{ij}	—	1	2	2	3	5	6
E'	3	3,4	3,4,7	3,4,7,6	3,4,7,6,5	1,2,3,4,5,6,7	1,2,3,4,5,6,7
$\sum c_{ij}$	0	1	3	5	8	13	19
Conexa	N	N	N	N	N	S	S

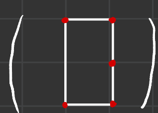
$T(V, E')$



Logo, a árvore abrangente com o custo mínimo é $T = \{34, 37, 67, 45, 12, 25\}$

32



$T(G) = T(G - 1 - 2 - 6) = T\Big($  $\Big) = 5$

∴ Tem 5 árvores abrangentes

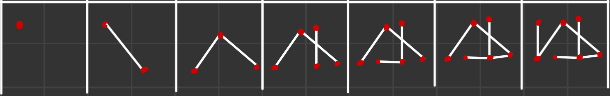
33

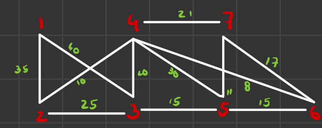
$T(G) = T(K_6) \times T(C_6) = 6^{6-2} \times 6 = 6^5 = 7776$

34

Primeiro utilizaremos o algoritmo de Kruskal

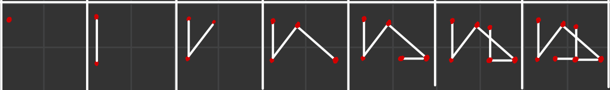
Iteração	0	1	2	3	4	5	6
ε	—	46	24	57	35	56	12
C_ε	—	8	10	11	15	15	35
V'	4	4,6	2,4,6	2,4,5,6,7	2,3,4,5,6,7	2,3,4,5,6,7	1,2,3,4,5,6,7
$\sum C_\varepsilon$	0	8	18	29	44	59	94
conexo	N	N	N	N	N	N	S
$T(V, \varepsilon')$							





Agora pelo algoritmo de Prim

Iteração	0	1	2	3	4	5	6
ε	—	12	24	46	56	57	35
C_ε	—	35	10	8	15	11	15
V'	1	1,2	1,2,4	1,2,4,6	1,2,4,5,6	1,2,4,5,6,7	1,2,4,6,5,7,3
$\sum C_\varepsilon$	0	35	45	53	68	79	94
$V' = V(G)$	N	N	N	N	N	N	S
$T(V, \varepsilon')$							



35

a)

iteração	1	2	3	4
v	1	2	3	4
p	6	4	6	6

$P = (6, 4, 6, 6)$

b)

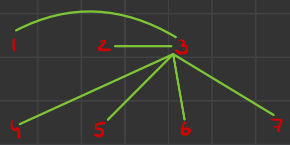
iteração	1	2	3	4	5
v	1	2	4	6	5
p	7	3	3	5	3

$P = (7; 3; 3; 5; 3)$

36

a) $P = (1, 2, 3, 4, 5)$ $\quad L = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

b) $P = (3;3;3;3;3)$ $L = (1;2;3;4;5;6;7)$



c) $P = (2;8;6;3;1;2)$ $L = (1;2;3;4;5;6;7;8)$