Folha Semamal 9

MD

① $A = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad B = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$

$b_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m$

$B = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \right) x^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = \left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} 1 \times x^m \right) = A \times \frac{1}{1-x} = \frac{A}{1-x}$

②

$b_m = \sum a_m x^m$

a) $a_m = (1 + x + x^2 + \dots x^m)^3 = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right)^3 = \left(\frac{1}{1-x} \right)^3 = \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+3-1}{m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+2}{m} x^m$

$b_m = \binom{m+2}{m}$

b) Neste caso, como queremos dividir m livros em 3 estantes, vamos ter de dividir a coleção em 3 partes distintas: $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ (Slide 118)

$A = \frac{a_m}{\boxed{m!}} x^m \rightarrow$ livros diferentes

$\epsilon_1 = k \quad , \quad k \in [0; m]$

$\epsilon_2 = p \quad , \quad p \in [0; m-k]$

$\epsilon_3 = m - k - p$

$a_k = k! \rightarrow$ Formas de ordenar em ϵ_1

$b_p = p! \rightarrow$ Formas de ordenar em ϵ_2

$c_{m-k-p} = (m-k-p)! \rightarrow$ Formas de ordenar em ϵ_3

Concluímos através disto que existe $\frac{m!}{k! \times p! \times (m-k-p)!}$ maneiras de organizar os grupos e $k!\,p!\,(m-k-p)!$ maneiras de organizar os livros nas prateleiras

$a_m = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{m-k} \left(\cancel{\frac{m!}{k!\,p!\,(m-k-p)!}} \right) \cancel{k!\,p!\,(m-k-p)!} \right)$

$= \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{m-k} m! \right) = m! \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{p=0}^{m-k} 1 \right) = m! \sum_{k=0}^{m} m-k+1 = m! \left(\frac{(m+2)(m+1)}{2} \right)$

$A = \frac{a_m}{m!} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}(m+1)(m+2)\, x^m$