MPECI 2025-2026

Cadeias de Markov em Tempo Contínuo
Processos de Poisson
Teorema de Little
Sistemas de Fila de Espera

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Considere-se um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ com o espaço de estados definido pelo conjunto dos números inteiros não negativos (i.e., {0, 1, 2, …}).
- $X(t)$ *é uma cadeia de Markov em tempo contínuo* se para todos os instantes de tempo s, $t \geq 0$ e todos os inteiros não-negativos i, j, $x(u)$ (com $0 \leq u < s$) acontecer que:

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i, X(u)=x(u), 0 \leq u < s\} =$$
$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$$

- i.e., a probabilidade de cada estado no instante futuro $s + t$ $X(s+t)$ dado o estado no instante presente $X(s)$ e os estados em todos os instantes passados $X(u)$, $0 \leq u < s$, depende apenas do estado presente e é independente dos estados passados (propriedade *Markoviana*).

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Considere-se um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t),\ t \geq 0\}$ com o espaço de estados definido pelo conjunto dos números inteiros não negativos (i.e., {0, 1, 2, …}).
- $X(t)$ *é uma cadeia de Markov em tempo contínuo* se para todos os instantes de tempo s, $t \geq 0$ e todos os inteiros não-negativos i, j, $x(u)$ (com $0 \leq u < s$) acontecer que:

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i, X(u)=x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$$

- Se $P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\}$ for independente do instante de tempo presente s:

$$P\{X(s+t)=j \mid X(s)=i\} = P\{X(t)=j \mid X(0)=i\}$$

- então diz-se que a cadeia de Markov em tempo contínuo tem *probabilidades de transição estacionárias* ou *homogéneas*,

Transição entre estados

Um sistema modelado por uma cadeia de Markov em tempo contínuo tem como propriedades:

- Quando o sistema entra no estado *i*, o sistema permanece nesse estado com um tempo exponencialmente distribuído antes de deixar o estado *i.*
- Quando o sistema deixa o estado *i*, o sistema entra no estado *j* com uma probabilidade P_{ij} que satisfaz as seguintes condições:

$$P_{ii} = 0 \qquad 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad , j \neq i \qquad \sum_j P_{ij} = 1$$

- Numa cadeia de Markov em tempo contínuo, o tempo de permanência num estado e o próximo estado visitado são variáveis aleatórias independentes.

Taxas de transição entre estados

- Para qualquer par de estados *i* e *j* seja:

$$q_{ij} = q_i P_{ij}$$

q_i - a taxa à qual o processo faz uma transição quando está no estado *i* (o tempo de permanência no estado *i* é exponencialmente distribuído com média 1/ q_i)

P_{ij} - a probabilidade que a transição seja para o estado *j* quando está no estado *i*

q_{ij} - a taxa à qual o processo faz uma transição para o estado *j* quando está no estado *i*

- As taxas q_{ij} designam-se por <u>*taxas de transição entre estados*</u>*.*

Taxas de transição entre estados

- Para qualquer par de estados *i* e *j* seja:

$$q_{ij} = q_i P_{ij}$$

- As taxas de transição entre estados q_{ij} são as grandezas habitualmente representadas nos diagramas de transição de estados.

- Como $$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij} \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

resulta que a especificação das taxas de transição entre estados determina a cadeia de Markov em tempo contínuo.

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

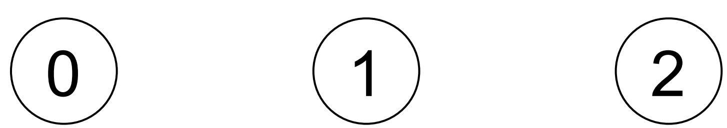
Qual é o diagrama de transição de estados da cadeia de Markov que modela este sistema?

Primeiro, quais são os estados?

Estado 0 (2 servidores a funcionar)

Estado 1 (1 servidor a funcionar + 1 servidor em reparação)

Estado 2 (0 servidores a funcionar + 2 servidores em reparação)



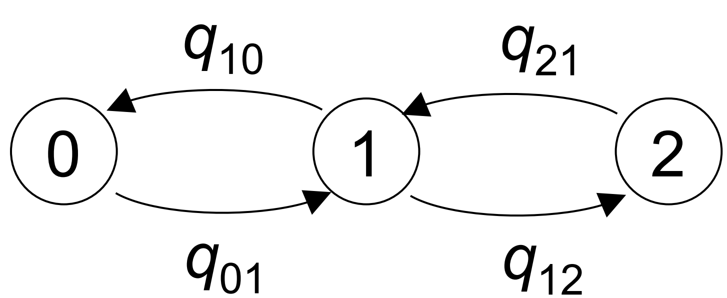
Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Qual é o diagrama de transição de estados da cadeia de Markov que modela este sistema?

Agora, quais são as taxas de transição entre estados?

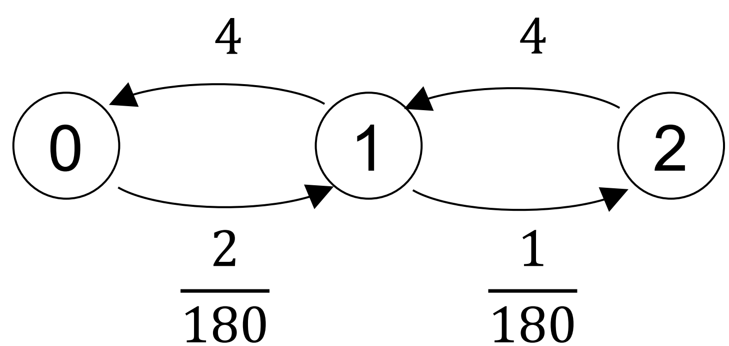
q_{01} = 2/180 falhas por dia (taxa de falha de um 1 em 2 servidores)
q_{12} = 1/180 falhas por dia (taxa de falha de um 1 em 1 servidor)
q_{10} = 4 reparações por dia (taxa de reparação de servidores de 1 técnico)
q_{21} = 4 reparações por dia (taxa de reparação de servidores de 1 técnico)



Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS (taxas de transição em número de transições por dia):



Probabilidades limite dos estados

- Seja $P_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$

  a probabilidade de um processo presentemente no estado *i* estar no estado *j* após um intervalo de tempo *t*.

- A probabilidade de uma cadeia de Markov em tempo contínuo estar no estado *j* no instante *t* converge para um valor limite independente do estado inicial:

$$\pi_j \equiv \lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

- Condição suficiente para a existência de probabilidades limite:
  - (1) a cadeia de Markov ser irredutível: começando no estado *i* existe uma probabilidade positiva de alguma vez estar no estado *j*, para todo o par de estados *i*, *j*
  - (2) a cadeia de Markov ser recorrente positiva: começando em qualquer estado o tempo médio para voltar a esse estado é finito

Cálculo da probabilidade limite de cada estado

- A probabilidade limite π_i de cada estado *i* calcula-se resolvendo as equações:

$$\sum_{j \neq i} q_{ji}\, \pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij}\, \pi_i \qquad \text{, cada estado } i$$

$$\sum_{i} \pi_i = 1$$

- As primeiras equações são designadas por *equações de balanço*:

taxa à qual a cadeia transita de qualquer estado *j* para o estado *i*
=
taxa à qual a cadeia transita do estado *i* para qualquer estado *j*

- A última equação garante que os valores π_i representam probabilidades.

Cálculo da probabilidade limite de cada estado

- A probabilidade limite π_i de cada estado *i* calcula-se resolvendo as equações:

$$\sum_{j \neq i} q_{ji}\, \pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij}\, \pi_i \qquad \text{, cada estado } i$$

$$\sum_{i} \pi_i = 1$$

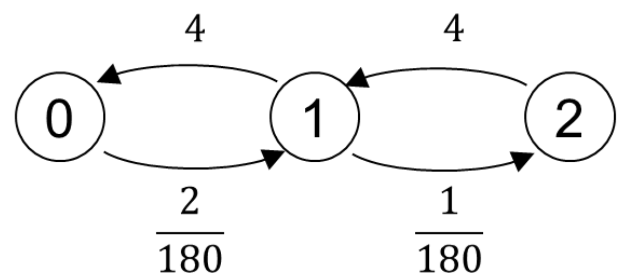
- As probabilidades limite π_i representam também a proporção de tempo em que a cadeia de Markov está em cada estado *i*.
- As probabilidades limite π_i são também designadas por *probabilidades estacionárias*:
  - se a probabilidade de cada estado no instante inicial $t = 0$ for dado pelas probabilidades π_i, então a probabilidade de se estar no estado *i* é π_i para todos os instantes $t > 0$.

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Qual é a probabilidade em regime estacionário de cada estado?

DIAGRAMA DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS (taxas em número de transições por dia):



$$\begin{cases} q_{10}\,\pi_1 = q_{01}\,\pi_0 \\ q_{01}\pi_0 + q_{21}\pi_2 = (q_{10} + q_{12})\,\pi_1 \\ q_{12}\,\pi_1 = q_{21}\,\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

$$\sum_{j \neq i} q_{ji}\,\pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij}\,\pi_i \qquad \text{, cada estado } i$$

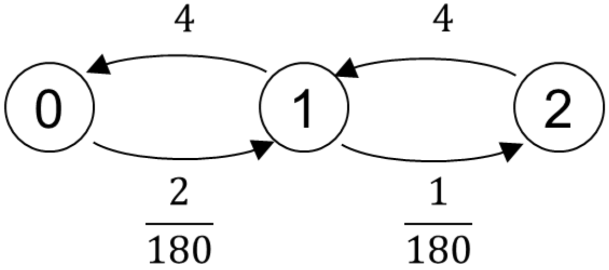
$$\sum_i \pi_i = 1$$

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Qual é a probabilidade em regime estacionário de cada estado?

$$\begin{cases} q_{10}\,\pi_1 = q_{01}\,\pi_0 \\ q_{01}\pi_0 + q_{21}\pi_2 = (q_{10}+q_{12})\,\pi_1 \\ q_{12}\,\pi_1 = q_{21}\,\pi_2 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 4\,\pi_1 = \dfrac{2}{180}\pi_0 \\ \dfrac{2}{180}\pi_0 + 4\,\pi_2 = \left(4+\dfrac{1}{180}\right)\pi_1 \\ \dfrac{1}{180}\pi_1 = 4\,\pi_2 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = 9.97\mathrm{e}-01 \\ \pi_1 = 2.77\mathrm{e}-03 \\ \pi_2 = 3.85\mathrm{e}-06 \end{cases}$$

Cálculo matricial da probabilidades limite de cada estado

- As probabilidades limite π_i calculam-se resolvendo as equações:

$$\sum_{j \neq i} q_{ji}\, \pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij}\, \pi_i \qquad \text{, cada estado } i$$

$$\sum_i \pi_i = 1$$

- Tendo a matriz de taxas de transição entre estados ***T***, em que T_{ji} é a taxa de transição q_{ij} (de *i* para *j*); necessariamente, $\boldsymbol{T}_{ii} = 0$.
- Se definirmos a matriz ***Q*** em que:

  $Q_{ij} = T_{ij}$, para todo $i \neq j$

  Q_{ii} = subtração das taxas de transição de *i* para todos os $j \neq i$

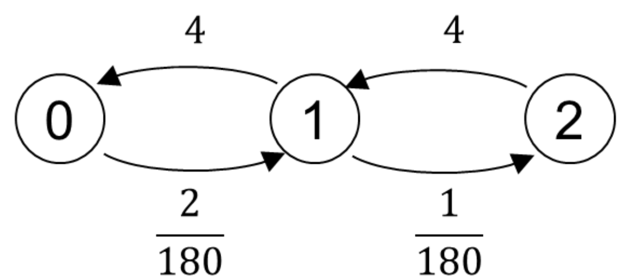
- então, o vetor coluna ***u*** das probabilidades limite de cada estado satisfaz a equação matricial

$$\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{u} = 0$$

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Qual é a matriz *T* e a matriz *Q*?



Estados: 0 1 2

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ \frac{2}{180} & 0 & 4 \\ 0 & \frac{1}{180} & 0 \end{bmatrix}$$

Subtração dos valores da respetiva coluna de ***T***

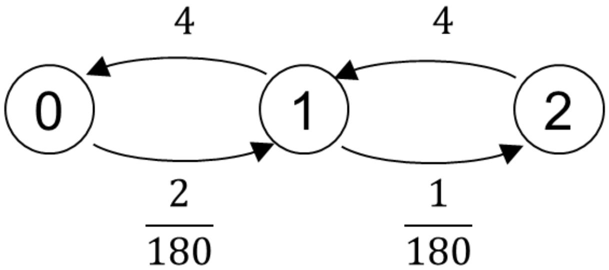
$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{2}{180} & 4 & 0 \\ \frac{2}{180} & -4-\frac{1}{180} & 4 \\ 0 & \frac{1}{180} & -4 \end{bmatrix}$$

A soma de cada coluna de ***Q*** é zero

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Sistema de equações resultante?



Q u = 0
$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{180} & 4 & 0 \\ \frac{2}{180} & -4-\frac{1}{180} & 4 \\ 0 & \frac{1}{180} & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

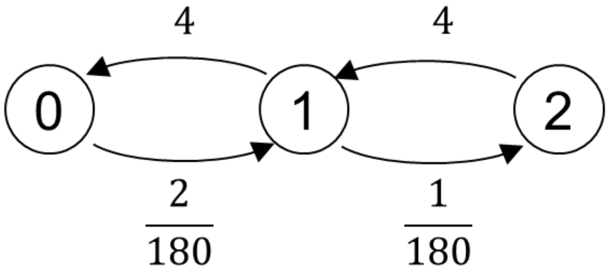
Sistema de equações completo:
$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{180} & 4 & 0 \\ \frac{2}{180} & -4-\frac{1}{180} & 4 \\ 0 & \frac{1}{180} & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Adicionando a equação
$$\sum_i \pi_i = 1$$

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Calcular probabilidades limite (MATLAB):




```
T= [0        4        0
    2/180  0        4
    0        1/180  0];
n= length(T);
Q= T;
for i= 1:n
   Q(i,i)= -sum(T(:,i)); % Subtração dos valores da coluna i de T
end
M=[Q; ones(1,n)]
x=[zeros(n,1);1];
u=M\x;
fprintf('Prob. do estado 0: %.2e\n',u(1));
fprintf('Prob. do estado 1: %.2e\n',u(2));
fprintf('Prob. do estado 2: %.2e\n',u(3));
```

Resultado:

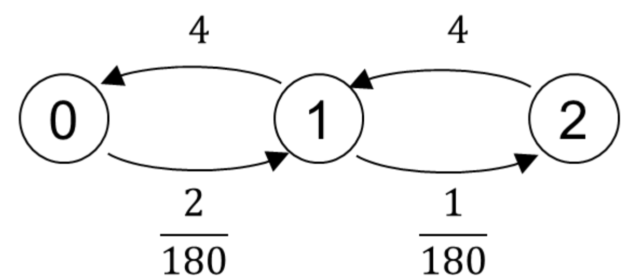
Prob. do estado 0: 9.97e-01

Prob. do estado 1: 2.77e-03

Prob. do estado 2: 3.85e-06

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.



As probabilidades limite π_i permitem determinar diferentes parâmetros de desempenho de interesse. Exemplos:

$$\pi_0 = 9.97\text{e}-01$$
$$\pi_1 = 2.77\text{e}-03$$
$$\pi_2 = 3.85\text{e}-06$$

- Qual o número médio de servidores em funcionamento?

  R: $2 \times \pi_0 + 1 \times \pi_1 + 0 \times \pi_2 = 1.99722$ servidores

- Qual a percentagem média de tempo em que o técnico está ocupado?

  R: $0 \times \pi_0 + 1 \times \pi_1 + 1 \times \pi_2 = 0.0027739 = 0.27739$ %

- Qual a percentagem média de tempo em que pelo menos um servidor está em funcionamento?

  R: $\pi_0 + \pi_1 = 0.9999962 = 99.99962$ %

Processos de nascimento e morte

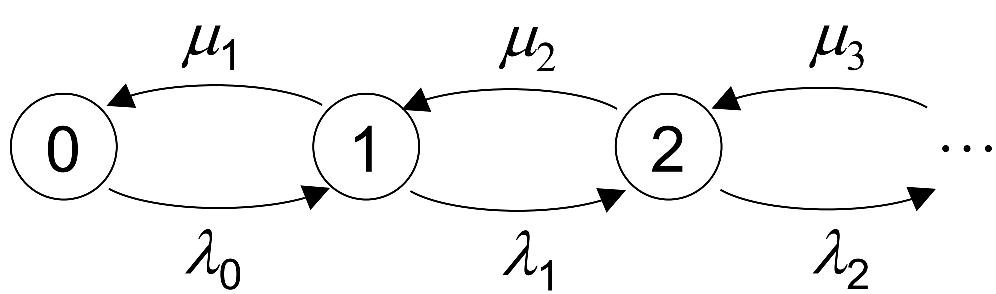
- Considere um sistema cujo estado representa o número de clientes no sistema (n = 0, 1, 2, …).

- Sempre que o sistema tem n clientes:

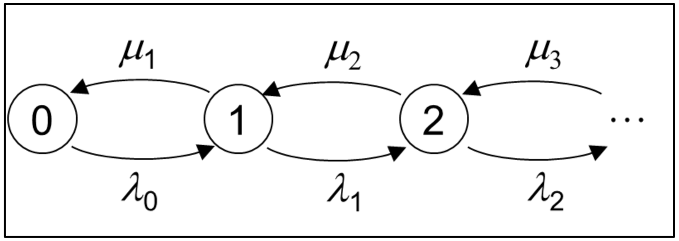
  (1) chegam novos clientes ao sistema a uma taxa exponencial λ_n

  (2) partem clientes do sistema a uma taxa exponencial μ_n

- Este sistema é designado por <u>*processo de nascimento e morte*</u>.
- Os parâmetros λ_n (n = 0, 1, …) e μ_n (n = 1, 2, …) são designados por <u>*taxas de chegada*</u> (ou de nascimento) e <u>*taxas de partida*</u> (ou de morte), respetivamente.



Equações de balanço de um processo de nascimento e morte



Num processo de nascimento e morte, é possível calcular analiticamente as probabilidade limite π_n de cada estado n = 0, 1, 2, …

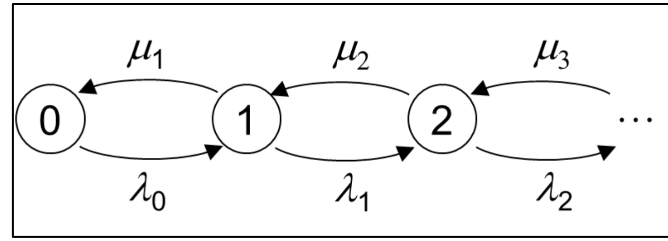
Equações de balanço: $$\boxed{\sum_{j \neq i} q_{ji}\, \pi_j = \sum_{j \neq i} q_{ij}\, \pi_i \qquad \text{, cada estado } i}$$

Estado	*taxa de entrada = taxa de saída*
0	$\mu_1\pi_1 = \lambda_0\pi_0$
1	$\mu_2\pi_2 + \lambda_0\pi_0 = (\lambda_1 + \mu_1)\pi_1$
2	$\mu_3\pi_3 + \lambda_1\pi_1 = (\lambda_2 + \mu_2)\pi_2$
…	…
n	$\mu_{n+1}\pi_{n+1} + \lambda_{n-1}\pi_{n-1} = (\lambda_n + \mu_n)\pi_n$

Ou, de forma equivalente (por manipulação das equações anteriores):

$$\lambda_n\pi_n = \mu_{n+1}\pi_{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Probabilidades limite de um processo de nascimento e morte



Adicionando às equações anteriores a equação: $\sum_i \pi_i = 1$

Probabilidade limite de cada estado *n*:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2} \times \frac{\lambda_2}{\mu_3}\right) + \cdots} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}\right)}$$

$$\pi_n = \frac{\frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2} \times \cdots \times \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right) + \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2} \times \frac{\lambda_2}{\mu_3}\right) + \cdots} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0 \qquad , n = 1, 2, 3, \dots$$

NOTA: Se o processo tiver um número finito *N* de estados (i.e., $n = 0, 1, \dots, N$), o somatório das expressões é de 0 até *N*.

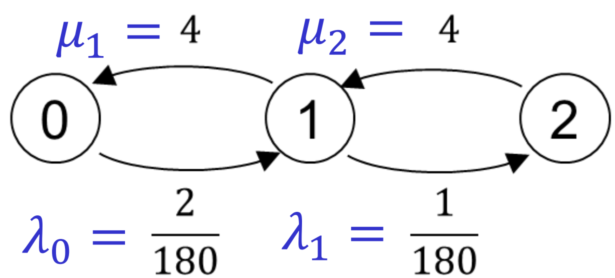
Condição necessária para a existência de probabilidades limite (no caso de um número infinito de estados):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i}\right) < \infty$$

Exemplo 1

Considere-se um Centro de Dados com 2 servidores e 1 técnico de manutenção. O tempo de funcionamento de cada servidor até falhar é exponencialmente distribuído com média de 180 dias. O tempo que o técnico leva a repor em funcionamento um servidor que falha é exponencialmente distribuído com média de 6 horas.

Calcular probabilidades limite (MATLAB):




```
lambda= [2/180 1/180];
miu= [4 4];
co= [1 , lambda./miu];
co= cumprod(co);
u= co/sum(co);
fprintf('Prob. do estado 0: %.2e\n',u(1));
fprintf('Prob. do estado 1: %.2e\n',u(2));
fprintf('Prob. do estado 2: %.2e\n',u(3));
```

$$\left[1\,,\ \frac{\lambda_0}{\mu_1}\,,\ \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right]$$

$$\left[1\,,\ 1\times\frac{\lambda_0}{\mu_1}\,,1\times\frac{\lambda_0}{\mu_1}\times\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right]$$

$$\left[\frac{1}{1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}}\,,\frac{\frac{\lambda_0}{\mu_1}}{1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}}\,,\frac{\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}}{1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}}\right]$$

Resultado:

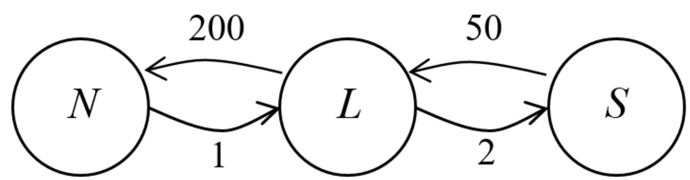
Prob. do estado 0: 9.97e-01
Prob. do estado 1: 2.77e-03
Prob. do estado 2: 3.85e-06

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_i}\right)}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}\pi_0$$

Exemplo 2

Considere uma ligação sem fios para comunicação de pacotes que pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora).



Considere que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S.* Determine:

(a) a probabilidade estacionária de cada estado,

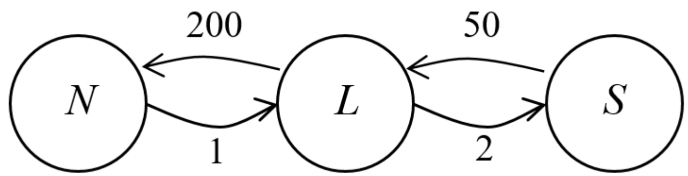
(b) o tempo médio de permanência em cada estado (em minutos),

(c) a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros,

(d) a probabilidade da ligação estar no estado *N* quando um pacote é recebido com erros.

Exemplo 2 – Resolução (a)

Considere uma ligação sem fios para comunicação de pacotes que pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora).



Considere que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S.* Determine:

(a) a probabilidade estacionária de cada estado,

$$P_N = \frac{1}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.99483 = 99.483\%$$

$$P_L = \frac{\frac{1}{200}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.00497 = 0.497\%$$

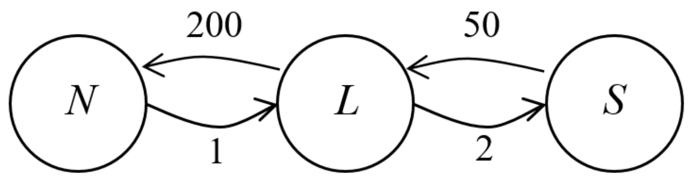
$$P_S = \frac{\frac{1}{200} \times \frac{2}{50}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.0002 = 0.02\%$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \right)}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \pi_0$$

Exemplo 2 – Resolução (b)

Considere uma ligação sem fios para comunicação de pacotes que pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora).



Considere que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S.* Determine:

(b) o tempo médio de permanência em cada estado (em minutos),

$$T_N = \frac{1}{1} = 1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos}$$

$$T_L = \frac{1}{2+200} = 0.00495 \text{ horas} = 0.3 \text{ minutos}$$

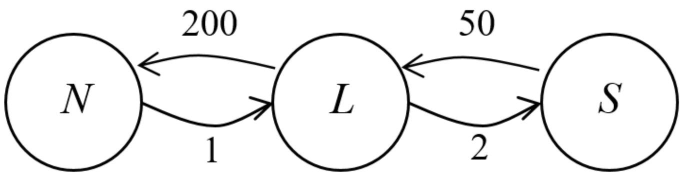
$$T_S = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ horas} = 1.2 \text{ minutos}$$

Tempo médio de permanência $T = 1/q_i$

$$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

Exemplo 2 – Resolução (c)

Considere uma ligação sem fios para comunicação de pacotes que pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora).



Considere que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S*. Determine:

(c) a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros,

Probabilidade total

$$P(E) = P(E|N)\,P(N) + P(E|L)\,P(L) + P(E|S)\,P(S)$$

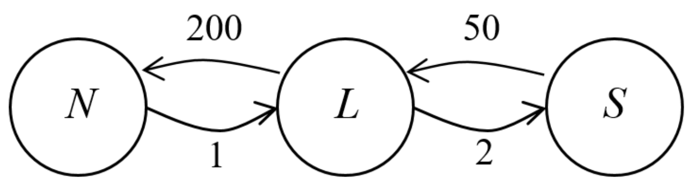
Calculados em 2(a)

$$= 0.0001 \times 0.99483 + 0.001 \times 0.00497 + 0.01 \times 0.0002$$

$$= 1.0445\text{e} - 04 = 0.010445\%$$

Exemplo 2 – Resolução (d)

Considere uma ligação sem fios para comunicação de pacotes que pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (*N*), Interferência Ligeira (*L*) ou Interferência Severa (*S*) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora).



Considere que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é 0.01% no estado *N*, 0.1% no estado *L* e 1% no estado *S*. Determine:

(d) a probabilidade da ligação estar no estado *N* quando um pacote é recebido com erros.

Regra de Bayes

$$P(N|E) = \frac{P(E|N)\ P(N)}{P(E|N)\ P(N) + P(E|L)\ P(L) + P(E|S)\ P(S)}$$

Calculados em 2(a)

$$= \frac{0.0001 \times 0.99483}{0.0001 \times 0.99483 + 0.001 \times 0.00497 + 0.01 \times 0.0002}$$

$$= 0.9346 = 93.46\%$$

Processo de contagem

- Um processo estocástico $\{N(t),\ t \geq 0\}$ diz-se um <u>*processo de contagem*</u> se $N(t)$ representar o número total de eventos que ocorreram até ao instante t.
- Um processo de contagem satisfaz as seguintes condições:

  (1) $N(t)$ toma apenas valores inteiros não negativos.

  (2) Se $s < t$, então $N(s) \leq N(t)$.

  (3) Se $s < t$, então $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $[s,t]$.
- Um processo de contagem tem <u>*incrementos independentes*</u> se o número de eventos em intervalos de tempo disjuntos for independente.
- Um processo de contagem tem <u>*incrementos estacionários*</u> se o número de eventos que ocorre em qualquer intervalo de tempo depender apenas da duração do intervalo de tempo.

Processo de Poisson

- Um processo de contagem diz-se um *<u>processo de Poisson</u>* com taxa λ, com $\lambda > 0$, se:

  (1) $N(0) = 0$

  (2) o processo tem incrementos independentes

  (3) o número de eventos num intervalo de duração t tem uma distribuição de Poisson com média λt, i.e., para todo s, $t \geq 0$

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

- Um processo de Poisson tem incrementos estacionários e média

$$E[N(t)] = \lambda t$$

  razão pela qual λ é designada a *<u>taxa</u>* (i.e., o número médio de eventos por unidade de tempo) do processo de Poisson.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 1:** Considere-se um processo de Poisson com taxa λ e as variáveis aleatórias T_n definidas da seguinte forma:
  - T_1 é o instante do primeiro evento,
  - T_n, com $n \geq 2$, é o intervalo de tempo entre o (n-1)-ésimo evento e o n-ésimo evento.
- Então, T_n, n = 1, 2, …, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com *distribuição exponencial* de média $1/\lambda$.

- **Propriedade 2:** Sabendo-se que num processo de Poisson com taxa λ ocorreram exatamente n eventos entre o instante s e o instante $s + t$.
- Então, os instantes de ocorrência dos eventos são *distribuídos independentemente e uniformemente* no intervalo $[s,s+t]$.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 3:** Considere-se que num processo de Poisson $\{N(t),\ t \geq 0\}$ com taxa λ cada evento é classificado de forma independente em:
  - evento do tipo 1 com probabilidade p
  - evento do tipo 2 com probabilidade $1 - p$

  e que $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ e $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ são o número de eventos de cada tipo que ocorreram no intervalo $[0,t]$.
- Então, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são <u>*processos de Poisson independentes*</u> com taxas λp e $\lambda(1-p)$.

- **Propriedade 3:** Sejam $\{N_1(t),\ t \geq 0\}$ e $\{N_2(t),\ t \geq 0\}$ processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2.
- Então, o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é também <u>*um processo de Poisson*</u> com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Exemplo 3

Considere-se um servidor Web com páginas Web de duas empresas *A* e *B*. A chegada de pedidos HTTP a este servidor é um processo de Poisson com taxa $\lambda = 5$ pedidos por segundo. Pelo histórico, sabe-se que 24% dos pedidos são para páginas da empresa *A* e 76% dos pedidos são para páginas da empresa *B*. Queremos saber:

(a) Número médio de pedidos HTTP que chegam ao servidor num intervalo de tempo de 1 minuto

R: o número médio de pedidos é a taxa de chegada de pedidos vezes o número de segundos do intervalo: 5 × 60 = 300 pedidos

(b) Número médio de pedidos HTTP de páginas da empresa *B* que chegam ao servidor num intervalo de tempo de 10 minutos

R: o número médio de pedidos é a taxa de chegada de pedidos de páginas da empresa B vezes o número de segundos do intervalo: (0.76 × 5) × (10 × 60) = 2280 pedidos

Exemplo 3

Considere-se um servidor Web com páginas Web de duas empresas *A* e *B*. A chegada de pedidos HTTP a este servidor é um processo de Poisson com taxa $\lambda = 5$ pedidos por segundo. Pelo histórico, sabe-se que 24% dos pedidos são para páginas da empresa *A* e 76% dos pedidos são para páginas da empresa *B*. Queremos saber:

(c) Probabilidade de chegarem no máximo 2 pedidos HTTP para páginas da empresa *A* num intervalo de 5 segundos

$$P\{N(t) \leq 2\} = \sum_{n=0}^{2} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$\lambda = 0.24 \times 5$

$t = 5$

$\lambda t = 6$

$$P\{N(5) \leq 2\} = e^{-6} \frac{6^0}{0!} + e^{-6} \frac{6^1}{1!} + e^{-6} \frac{6^2}{2!} = 25\, e^{-6} = 0.062 = 6.2\%$$

(d) Probabilidade de não chegar nenhum pedido HTTP ao servidor num intervalo de tempo de 30 segundos

$\lambda = 5$

$t = 30$

$\lambda t = 150$

$$P\{N(30) = 0\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-150} \frac{150^0}{0!} = 7 \times 10^{-66}$$

Definições do Teorema de Little

- Considere-se a observação de um sistema desde t = 0. Seja:

  $L(t)$ - no. de clientes no sistema no instante t,

  $N(t)$ - no. de clientes que entraram no sistema no intervalo $[0,t]$,

  W_i - o tempo de permanência no sistema do i-ésimo cliente.

- _*Número médio de clientes no sistema*_ até ao instante t:

$$L_t = \frac{1}{t}\int_0^t L(\tau)d\tau \qquad L = \lim_{t\to\infty} L_t$$

- _*Taxa média de entrada de clientes*_ até ao instante t:

$$\lambda_t = N(t)/t \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$$

- _*Tempo médio de permanência dos clientes*_ até ao instante t:

$$W_t = \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{N(t)} \qquad W = \lim_{t\to\infty} W_t$$

Teorema de Little

- O teorema de Little enuncia que: $L = \lambda W$

  i.e., o número médio de clientes no sistema é igual à taxa de clientes que entra no sistema vezes o tempo médio que cada cliente permanece no sistema.

- O teorema de Little traduz a ideia intuitiva de que, para a mesma taxa de entrada de clientes λ, sistemas mais congestionados (L maior) impõem maiores atrasos (W maior).

- Exemplos:
  – Num dia de chuva, o mesmo tráfego (mesmo λ) é mais lento do que normalmente (W maior) e, consequentemente, as ruas estão mais congestionadas (L maior).
  – Um restaurante de refeições rápidas (W menor) precisa de uma sala menor (L menor) que um restaurante normal, para a mesma taxa de clientes λ.

Propriedade PASTA
(*Poisson Arrivals always See Time Averages*)

- Considere um sistema de atendimento de clientes em que:
  - chegam clientes segundo um processo de Poisson
  - o tempo de atendimento de cada cliente é independente do seu instante de chegada
- Seja $L(t)$ o número de clientes no sistema no instante t.
- Seja P_n, $n \geq 0$, a probabilidade em estado estacionário de estarem exatamente n clientes no sistema:

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P\{L(t) = n\}$$

- Seja a_n, $n \geq 0$, a percentagem de clientes que ao chegarem encontram o sistema com exatamente n clientes.

Propriedade PASTA: $$a_n = P_n$$

i.e., a percentagem de clientes que chegam e encontram o sistema com n clientes é igual à probabilidade de estarem exatamente n clientes no sistema.

Exemplo 4

Considere uma farmácia à qual chegam clientes a uma taxa de Poisson $\lambda = 20$ clientes/hora. Pelo histórico, sabe-se que o número de clientes *n* na farmácia tem a seguinte distribuição:

n	probabilidade	*n*	probabilidade
0	5%	3	30%
1	15%	4	15%
2	25%	5	10%

e os clientes quando chegam e encontram a farmácia com 5 clientes desistem de entrar. Queremos saber:

(a) A taxa de clientes λ_c que entra na farmácia

R: Como $P_5 = 10\%$, então a percentagem de clientes que desiste é $a_5 = P_5 = 10\%$ (propriedade PASTA) e $\lambda_c = 0.9 \times \lambda = 18$ clientes/hora.

(b) O tempo médio de permanência *W* de cada cliente na farmácia

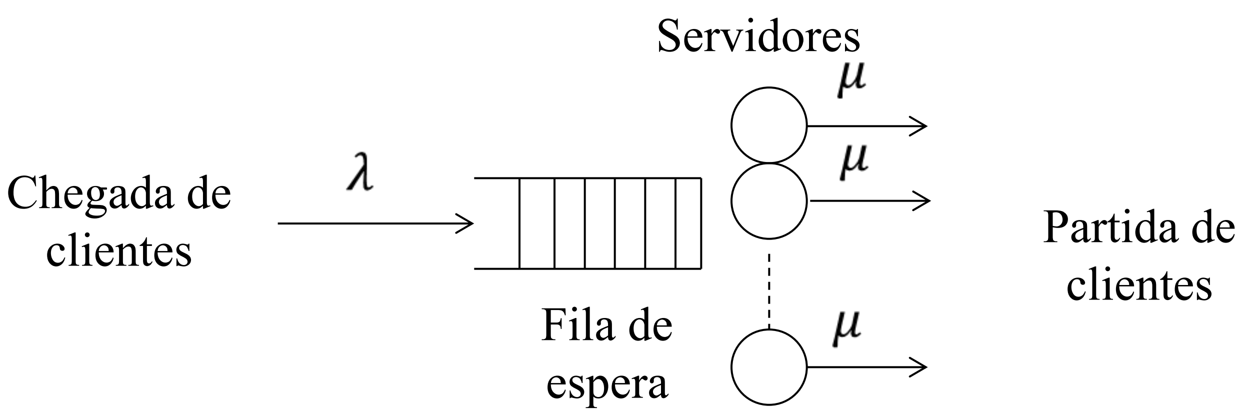
$L = 0\times5\% + 1\times15\% + 2\times25\% + 3\times30\% + 4\times15\% + 5\times10\% = 2.65$

$L = \lambda_c W \quad \rightarrow \quad W = L / \lambda_c = 2.65 / 18 = 0.1472$ horas $= 8.832$ minutos

Teorema de Little

Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é caracterizado por:
  - um conjunto de *c* servidores, cada um com capacidade para servir clientes a uma taxa μ
  - uma fila de espera com uma determinada capacidade (em nº de clientes)
- A este sistema chegam clientes a uma taxa λ
- Quando um cliente chega:
  - ele começa a ser servido por um servidor disponível
  - ele é colocado da fila de espera se os servidores estiverem todos ocupados (ou é perdido se a fila de espera estiver cheia)
- Os clientes na fila de espera são atendidos segundo uma disciplina FIFO (*First-In-First-Out*)



Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é representado por:

$$A/B/c/d$$

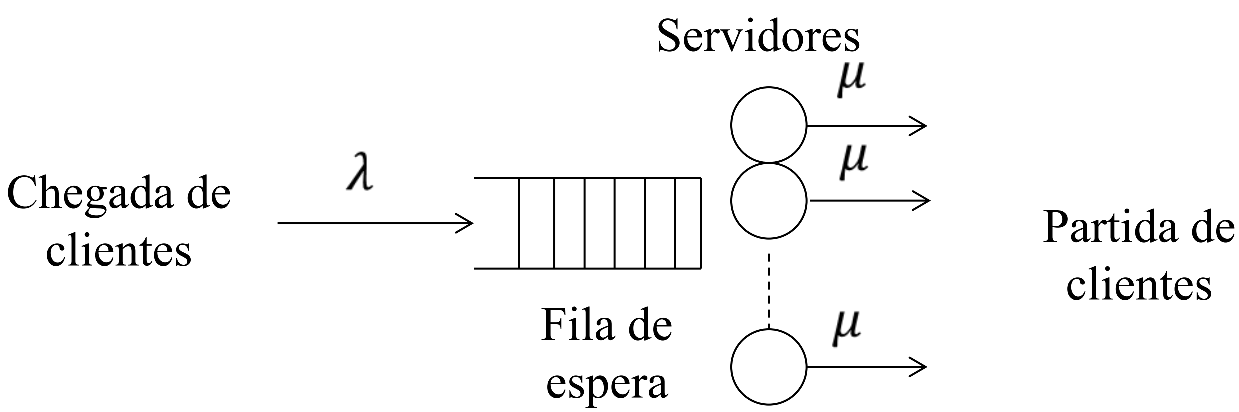
A – o processo de chegada de clientes:
M – Markoviano, D – Determinístico, G – Genérico

B – o processo de atendimento de clientes:
M – Markoviano, D – Determinístico, G – Genérico

c – o número de servidores

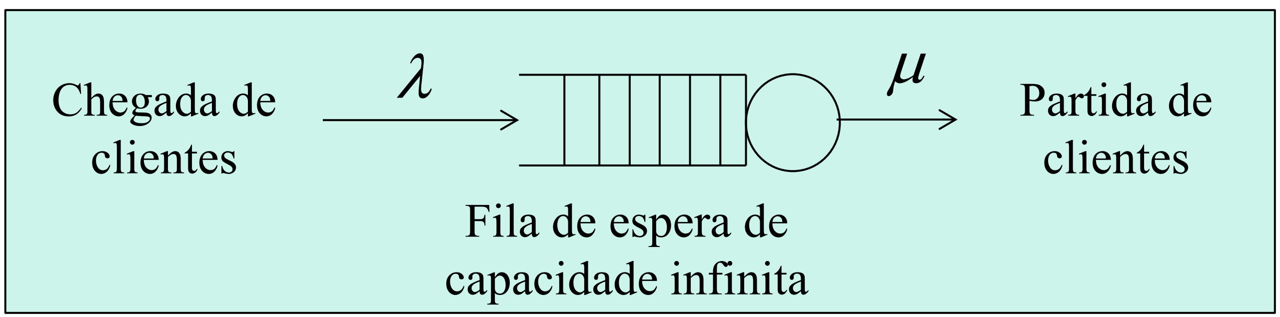
d – capacidade do sistema (em nº de clientes):
número de servidores + capacidade da fila de espera

- Quando d é omisso, a fila de espera tem capacidade infinita.

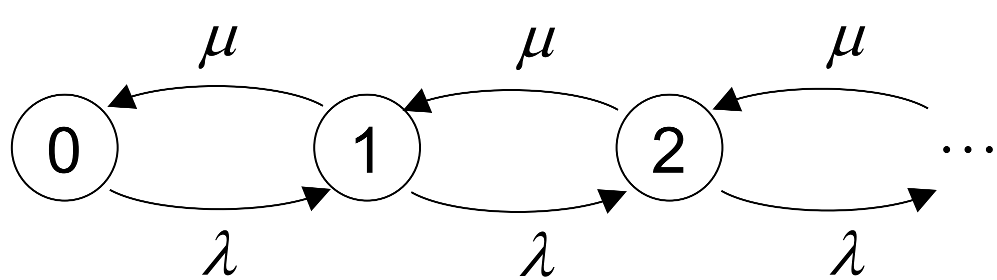


Sistema *M*/*M*/1

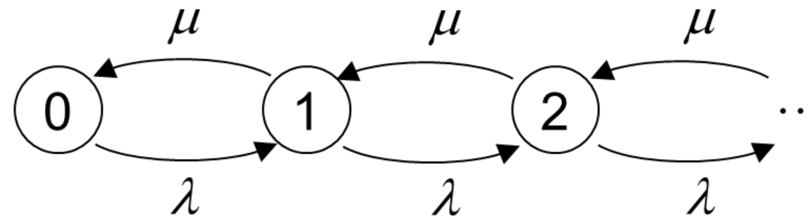
- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o sistema tem 1 servidor
  - (3) o servidor atende um cliente de cada vez com um tempo exponencialmente distribuído de média $1/\mu$
  - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



Processo de nascimento e morte



Sistema *M*/*M*/1 (probabilidades limite)



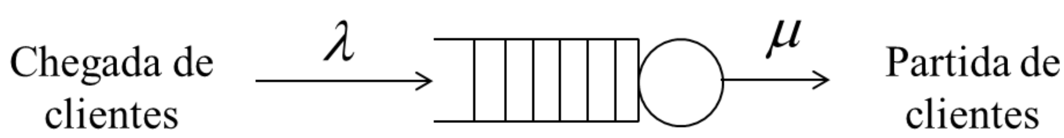
$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_i} \right)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \pi_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i} \qquad , n = 1, 2, \ldots$$

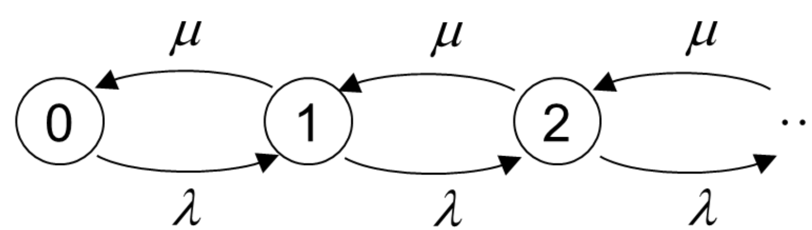
De forma equivalente:

$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n}{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i} \qquad , n = 0, 1, 2, \ldots$$

Sistema *M*/*M*/1 (parâmetros de desempenho)



$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$$



- Número médio de clientes no sistema:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \times \pi_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Usando:

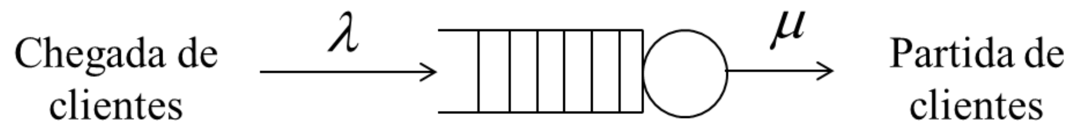
$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} \ldots \quad , \mathbf{0} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{1}$$

- Tempo médio de permanência de cada cliente no sistema:

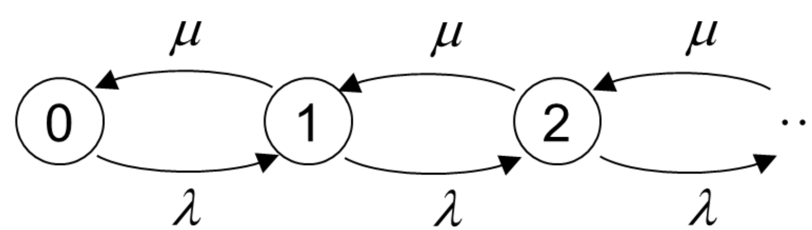
$$L = \lambda W \quad \rightarrow \quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Teorema de Little

Sistema *M*/*M*/1 (parâmetros de desempenho)



$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \quad , n = 0,1,2, \ldots$$



- Tempo médio de permanência de cada cliente na fila de espera:

$$W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{(\mu - \lambda)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

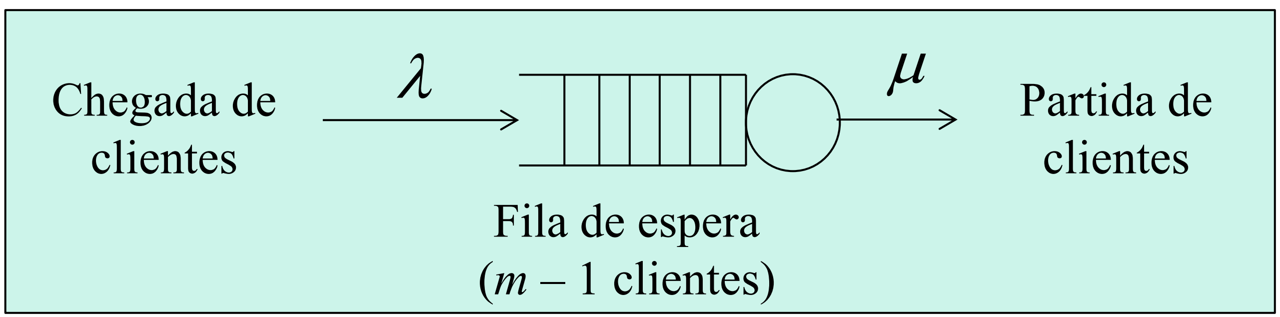
- Número médio de clientes na fila de espera:

$$L_Q = \lambda W_Q \quad \rightarrow \quad L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

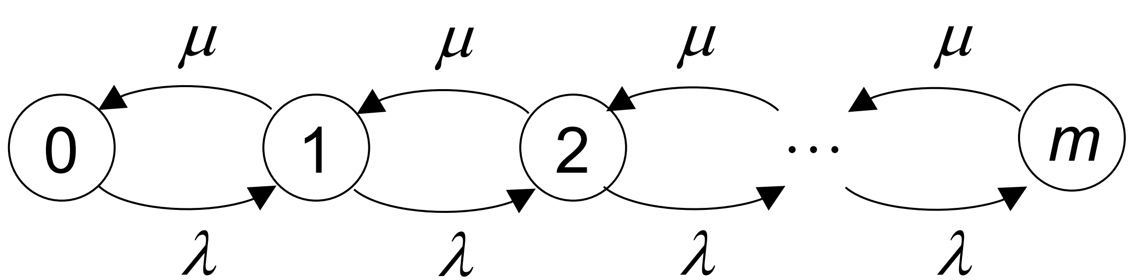
Teorema de Little

Sistema *M*/*M*/1/*m*

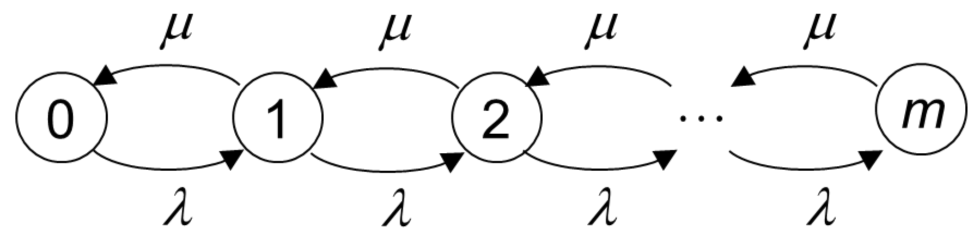
- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o sistema tem 1 servidor
  - (3) o servidor atende um cliente de cada vez com um tempo exponencialmente distribuído de média $1/\mu$
  - (4) o sistema tem capacidade de m clientes (i.e., a fila de espera tem capacidade para m – 1 clientes)



Processo de nascimento e morte



Sistema *M*/*M*/1/*m*



- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

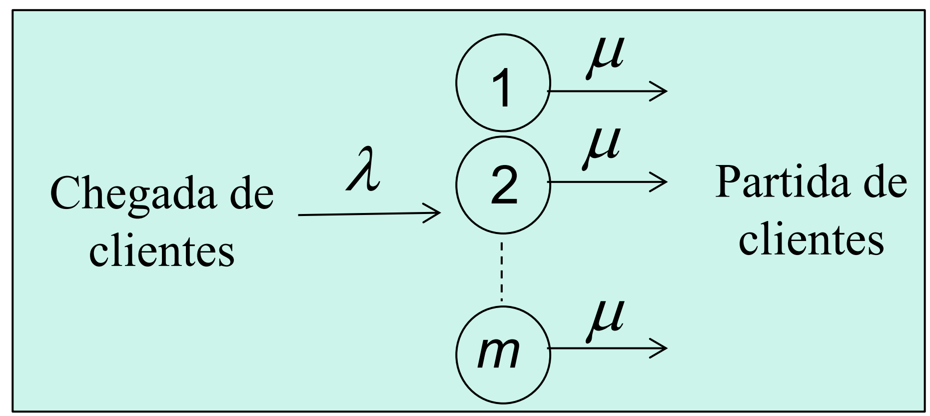
$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad , n = 0,1,2,\dots,m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de um cliente chegar e encontrar o sistema cheio (*i.e.*, o servidor ocupado e a fila de espera cheia) é igual à probabilidade do estado *m*:

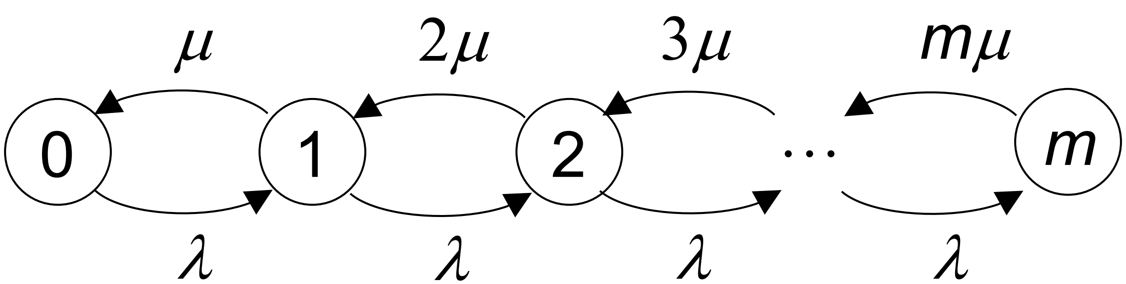
$$\pi_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

Sistema *M*/*M*/*m*/*m*

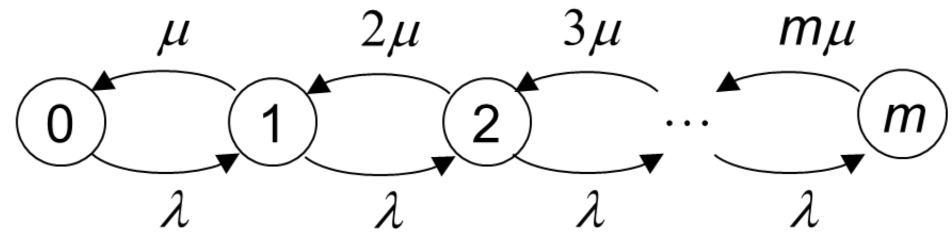
- Processo de nascimento e morte em que:
  - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
  - (2) o sistema tem *m* servidores
  - (3) cada servidor atende um cliente de cada vez com um tempo exponencialmente distribuído de média $1/\mu$
  - (4) o sistema tem capacidade de *m* clientes (i.e., não tem fila de espera)



Processo de nascimento e morte



Sistema *M*/*M*/m/*m*



- Probabilidade de *n* clientes no sistema em estado estacionário:

$$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n / n!}{\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!\right)} \qquad , n = 0,1,2,\ldots,m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de um cliente chegar e encontrar o sistema cheio é igual à probabilidade do estado *m* *(*fórmula de ErlangB):

$$\pi_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m / m!}{\sum_{i=1}^{m}\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i / i!\right)}$$

Sistema *M/G/1*

- Processo de nascimento e morte em que:

  (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ

  (2) o sistema tem 1 servidor

  (3) o servidor atende um cliente de cada vez com um tempo de atendimento *S* genérico e independente dos instantes de chegada dos clientes

  (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes

- Sabendo a média $E[S]$ e o segundo momento $E[S^2]$ do tempo de atendimento S, o atraso médio de cada cliente na fila de espera é (fórmula de Pollaczek – Khintchine) :

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])}$$

- O atraso médio de cada cliente no sistema (atraso médio na fila de espera + tempo médio de atendimento):

$$W = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S]$$

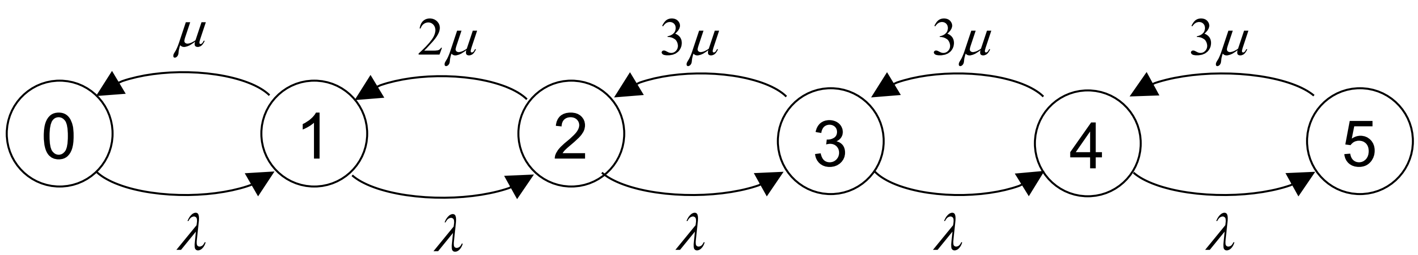
Exemplo 5

Considere uma barbearia que serve clientes por ordem de chegada com 3 barbeiros (o atendimento de cada barbeiro é exponencialmente distribuição de média 30 minutos) e em que só é permitido entrarem clientes se houver no máximo 2 clientes em espera na barbearia. Se a chegada de clientes for de Poisson com taxa de 5 clientes/hora, queremos saber:

(a) o sistema de fila de espera que modela a barbearia

R: É um *M*/*M*/3/5, porque as chegadas são um processo de Poisson, o tempo de atendimento é exponencial, o no. de barbeiros é 3 e a barbearia tem uma capacidade de 5 clientes (3 a serem servidos e 2 em espera).

(b) a cadeia de Markov do sistema de fila de espera



λ = 5 clientes/hora, μ = 2 clientes/hora

Exemplo 5

Considere uma barbearia que serve clientes por ordem de chegada com 3 barbeiros (o atendimento de cada barbeiro é exponencialmente distribuição de média 30 minutos) e em que só é permitido entrarem clientes se houver no máximo 2 clientes em espera na barbearia. Se a chegada de clientes for de Poisson com taxa de 5 clientes/hora, queremos saber:

(c) a probabilidade de estarem *n* clientes na barbearia, com *n* de 0 a 5

R: Usando qualquer dos métodos descritos anteriormente: $\pi_0 = 0.0757$, $\pi_1 = 0.1893$, $\pi_2 = 0.2366$, $\pi_3 = 0.1972$, $\pi_4 = 0.1643$, $\pi_5 = 0.1369$

(d) a percentagem de perda de clientes

R: Pela propriedade PASTA, $a_5 = \pi_5 = 0.1369 = 13.69\%$

(e) o número médio de barbeiros ocupados a atender clientes

R: $0 \times \pi_0 + 1 \times \pi_1 + 2 \times \pi_2 + 3 \times \pi_3 + 3 \times \pi_4 + 3 \times \pi_5 = 2.16$ barbeiros

(f) o tempo médio de espera (em minutos) de cada cliente

$L_Q = 0 \times \pi_0 + 0 \times \pi_1 + 0 \times \pi_2 + 0 \times \pi_3 + 1 \times \pi_4 + 2 \times \pi_5 = 0.4382$

Teorema de Little: $W_Q = L_Q / (\lambda \times (1 - \pi_5)) = 0.10154$ horas

$= 6.09$ minutos